حسابان ۲

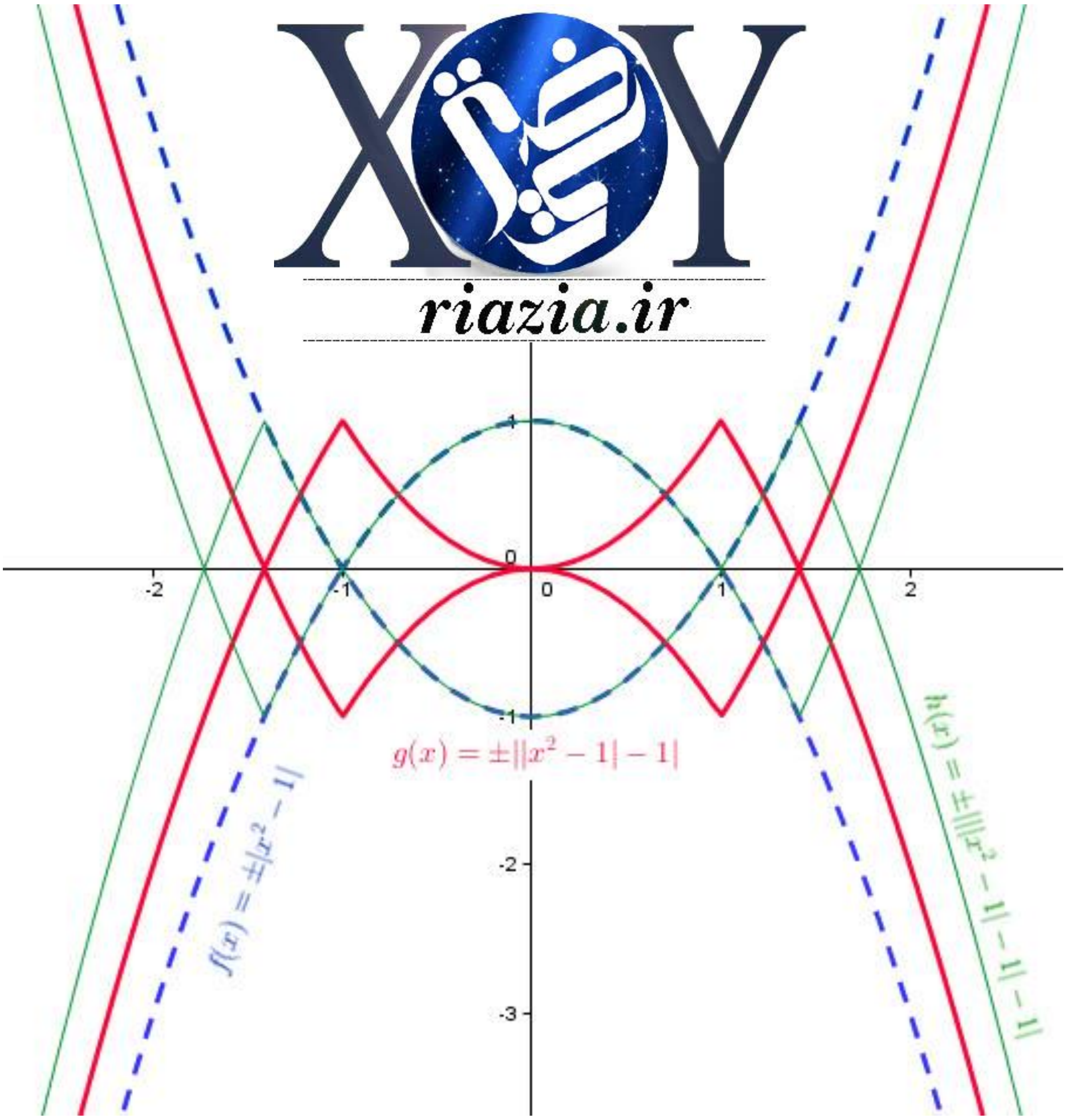
فروردین ۱۴۰۱

دوازدهم ریاضی فیزیک

پاسخ کامل مسائل کتاب درسی

مؤلف : محمد حسین مصلحی

دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان



فهرست مطالب :

سخن آغازین

درود بر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه که
نسل آینده آن جامعه است ، در اختیار اوست.
درود بر دانش آموز ، تنها امید بر آینده ای روشن .
این کتاب الکترونیکی برگ سبزی است،تقدیم به فرزندان ایران زمین.

اما چرا حل المسائل ؟

۱- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آخرین راه است نه اولین کار.
اگر پیش از تلاش برای حل مساله سراغ حل المسائل بروید ، اعتماد به نفس خود را برای حل مسائل پیش رو از دست خواهید داد واین موضوع بسیار مخرب است.

۲- استفاده برخی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.

۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم متهم به پیچیده کردن حل مساله می گردد .
پاسخهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.

۴- برخی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صحیح سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند.

به دلایلی که برخی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم.

مشتاقانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

محمد حسین مصلحی
د بیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

فروردین ۱۴۰۱

آدرس سایت www.riazia.ir
آدرس اینستاگرام @riaziair
شماره همراه جهت تماس (sms) ۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

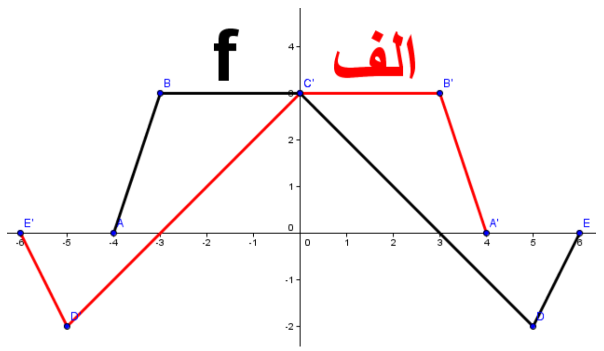
۱- الف) a انتقال دو واحد به چپ   ب) d انتقال دو واحد به بالا   پ) e قرینه نسبت به محور xها و انبساط عمودی با ضریب 2 ت) c انبساط افقی با ضریب 2 ث) b انتقال ۲ واحد به راست و ۲ واحد به بالا   ج) f قرینه نسبت به محور yها و انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$

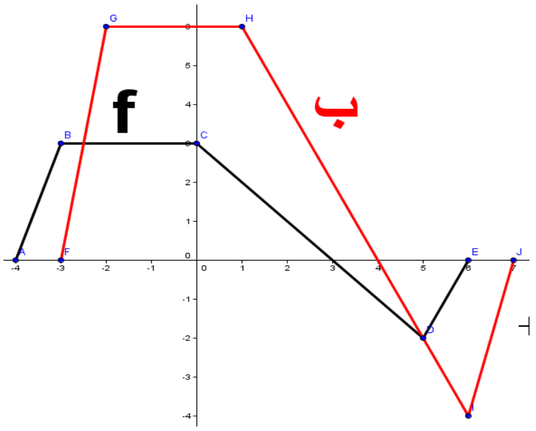
۲- این تابع 5 نقطه مرزی دارد که تغییرات زیر را بر آنها انجام می دهیم

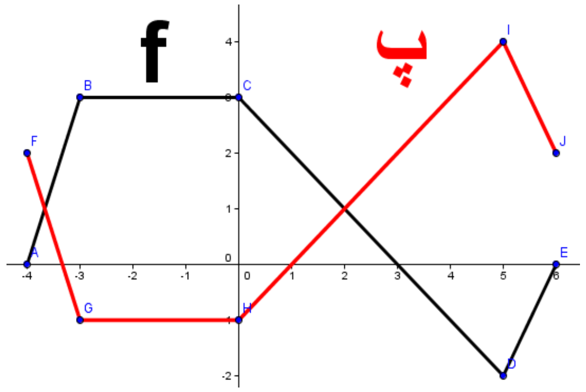
الف) قرینه کردن x ب) افزودن ۱ واحد به x و 2 برابر کردن y

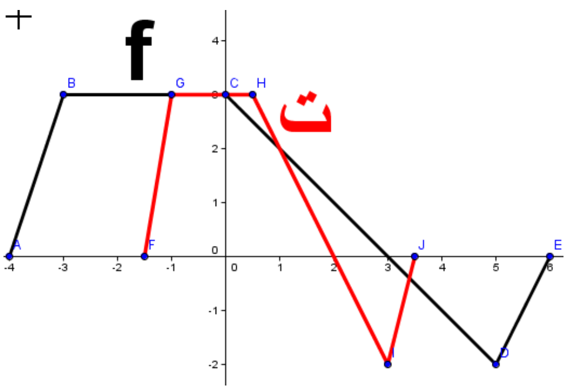
پ) قرینه کردن y و افزودن 2 واحد به آن   ت) افزودن 1 واحد به x و سپس نصف کردن x

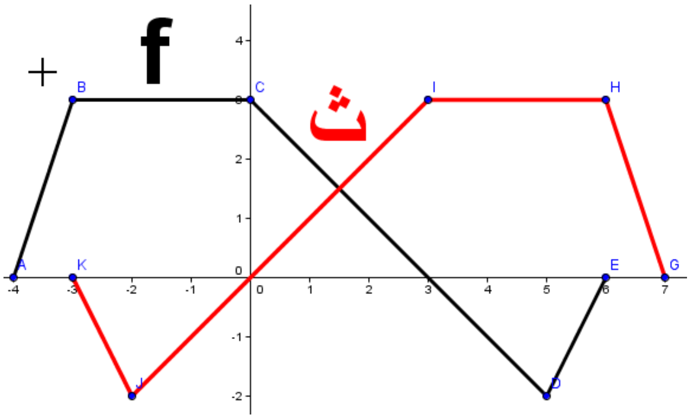
ث) کم کردن 3واحد از x و سپس قرینه کردن x



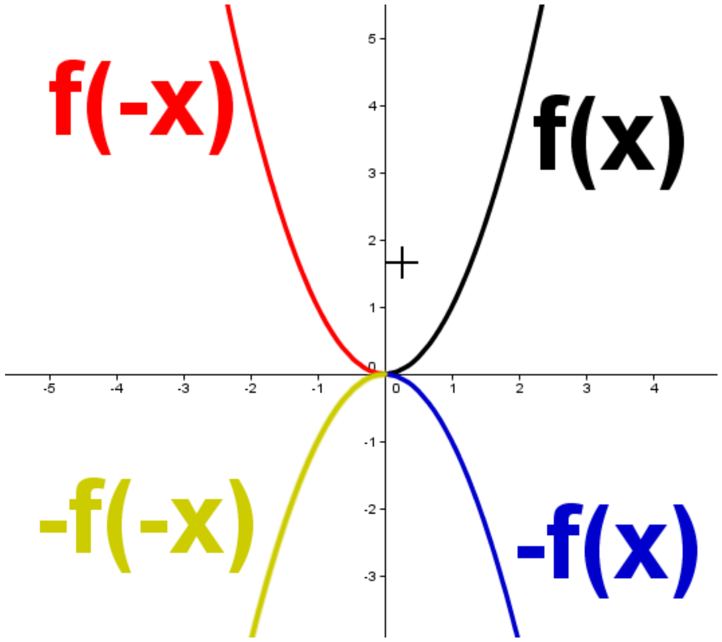




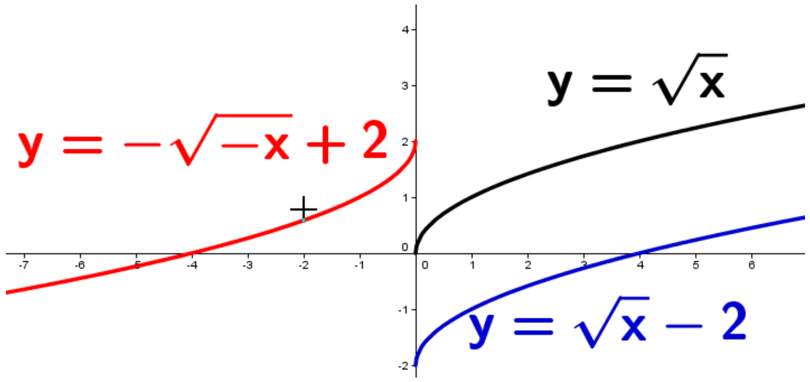


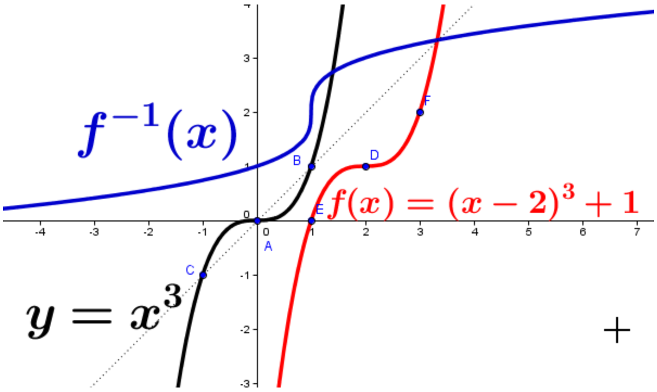


۳- الف) قرینه نسبت به محور y ها ب) قرینه نسبت به محور x ها پ)قرینه نسبت به مبدا



۴- اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نظر داشته باشیم ، خواهیم دید نمودار این تابع 2 واحد به پائین منتقل شده یعنی $\sqrt{x}-2$ و سپس نسبت به مبدا مختصات قرینه شده یعنی $-(\sqrt{-x}-2)=-\sqrt{-x}+2$





۱- الف) نمودار تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می دهیم.

ب) هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند پس $1-1$ است.پس وارون پذیر می باشد و برای رسم نمودار تابع وارون در نقاط تابع f جای $x\,,y$ را عوض می کنیم.

پ) $y=(x-2)^3+1 \xRightarrow{x\leftrightarrow y} x=(y-2)^3+1 \Rightarrow (y-2)^3 = x-1 \Rightarrow y-2=\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$

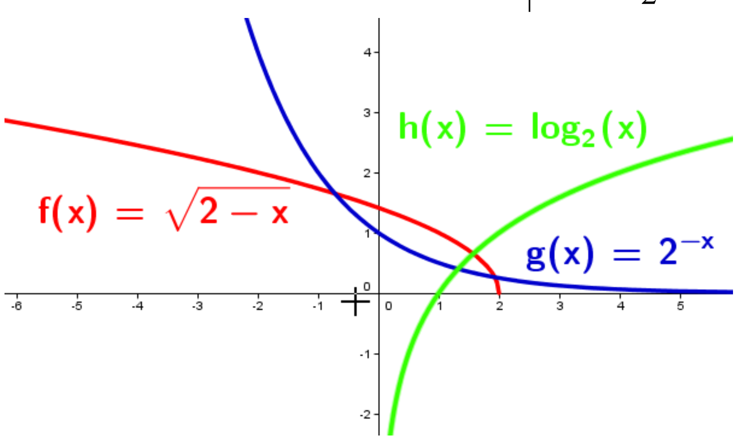
۲- الف) تابع f در $[0,+\infty)\,,\,(-\infty,-3]$ اکیدا صعودی و در $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ صعودی است.

ب) تابع g در $[-2,0]$ اکیدا نزولی و در $[2,+\infty)\,,\,(-\infty,0]$ نزولی است.

پ) تابع h در $(0,+\infty)\,,\,(-\infty,0)$ اکیدا نزولی است.

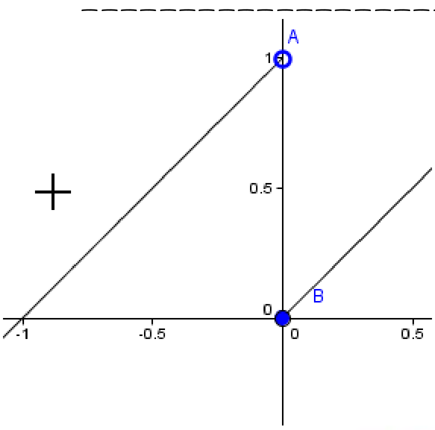
۳- توابع $f\,,g$ در دامنه خود اکیدا نزولی و تابع h اکیدا صعودی و بنابراین هر سه تابع در دامنه خود اکیدا یکنوا هستند.

$f \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 1 & -2 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$ $\qquad g \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$ $\qquad h \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline y & -1 & 0 & 1 \end{array}$



۴- الف) طبق تعریف تابع ثابت در دامنه خود هم صعودی و هم نزولی است.

ب)
$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array} \\ x+1 & x<0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$$



۵- $f+g$ هم اکیدا صعودی است $a,b\in I\ ,\ a>b \Rightarrow \begin{cases} f(a)>f(b) \\ g(a)>g(b) \end{cases} \Rightarrow f(a)+f(b)>g(a)+g(b) \Rightarrow$

در مورد $f-g$ حالات متفاوتی ممکن است اتفاق بیفتد مثلا

$f\ ,\ g\ ,\ f-g$ هر سه اکیدا صعودی اند $f(x)=3x\ ,\ g(x)=2x \Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=x$

$f\ ,g$ هر دو اکیدا صعودی ولی $f-g$ اکیدا نزولی $f(x)=2x\ ,\ g(x)=3x \Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=-x$

$f\ ,g$ هر دو اکیدا صعودی ولی $f-g$ ثابت است که نه اکیدا نزولی و نه اکیدا صعودی است

$f(x)=2x\ ,\ g(x)=2x \Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=0$

۶- $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=(2)^3+k(2)^2+2=0 \Rightarrow 10+4k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{5}{2}$

۷-

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=(2)^3+a(2)^2+b(2)+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

$\Rightarrow 4a+2a=-9 \Rightarrow a=b=-\dfrac{3}{2}$

۸-

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

$x^5+32=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

۹- الف) برهان خلف) اگر $a\geq b$ نباشد پس $a<b$ و چون تابع در بازه اکیدا نزولی است ،

طبق تعریف داریم $f(a)<f(b)$ که خلاف فرض قضیه است.

ب) چون تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابعی اکیدا نزولی است و $\frac{1}{64}=(\frac{1}{2})^6$ پس طبق قضیه بالا باید $3x-2\geq 6 \Rightarrow x\geq \dfrac{8}{3}$

۱- الف) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{7}$ $\quad max_y=|a|+c=|2|+1=3 \quad \min_y=-|a|+c=-|2|+1=-1$

ب) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4 \quad max_y=|a|+c=1+\sqrt{3} \quad \min_y=-|a|+c=-1+\sqrt{3}$

پ) $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi \quad max_y=|a|+c=\pi-2 \quad \min_y=-|a|+c=-\pi-2$

ت) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3} \quad max_y=|a|+c=\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4} \quad \min_y=-|a|+c=-\frac{3}{4}+0=-\frac{3}{4}$

۲- الف) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\pi}=2 \quad max_y=|a|+c=1+0=1 \quad \min_y=-|a|+c=-1+0=-1$ شکل شماره ٤

ب) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \quad max_y=|a|+c=1+2=3 \quad \min_y=-|a|+c=-1+2=1$ شکل شماره ۲

پ) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi \quad max_y=|a|+c=1+0=1 \quad \min_y=-|a|+c=-1+0=-1$ شکل شماره ۳

ت) $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi \quad max_y=|a|+c=1+1=2 \quad \min_y=-|a|+c=-1+1=0$ شکل شماره ۱

۳- $\max=|a|+c\ ,\min=-|a|+c \Rightarrow \boxed{a=\pm\frac{\max-\min}{2}}\ ,\ \boxed{b=\pm\frac{2\pi}{T}}\ ,\ \boxed{c=\frac{\max+\min}{2}}$

هر کدام از دو تابع مقابل دارای $\max,\min,T$ داده شده است. $y=a\sin bx+c \quad or \quad y=a\cos bx+c$

الف) $T=\pi,\max=3,\min=-3\Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{\pi}=\pm2\ ,\ c=\frac{3+(-3)}{2}=0\ ,\ a=\pm\frac{3-(-3)}{2}=\pm3$

$\Rightarrow y=\pm3\sin(2x) \quad or \quad y=\pm3\cos(2x)$

ب) $T=3,\max=9,\min=3\Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{3}\ ,\ c=\frac{9+3}{2}=6\ ,\ a=\pm\frac{9-3}{2}=\pm3$

$\Rightarrow y=\pm3\sin(\frac{2\pi}{3}x)+6 \quad or \quad y=\pm3\cos(\frac{2\pi}{3}x)+6$

پ) $T=4\pi,\max=-1,\min=-7\Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{4\pi}=\pm\frac{1}{2}\ ,\ c=\frac{-1+(-7)}{2}=-4\ ,\ a=\pm\frac{-1-(-7)}{2}=\pm3$

$\Rightarrow y=\pm3\sin(\frac{1}{2}x)-4 \quad or \quad y=\pm3\cos(\frac{1}{2}x)-4$

ت) $T=\frac{\pi}{2},\max=1,\min=-1\Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\pm4\ ,\ c=\frac{1+(-1)}{2}=0\ ,\ a=\pm\frac{1-(-1)}{2}=\pm1$

$\Rightarrow y=\pm\sin(4x) \quad or \quad y=\pm\cos(4x)$

۴- در هریک $\max, \min, T$ را از روی شکل یافته و مانند تمرین قبل معادله را نوشته و با امتحان کردن دو نقطه از نمودار در آن ، معادله دقیق آن را مشخص می کنیم.

(max عرض سر قله و min عرض ته دره و T فاصله دو سرقله متوالی (یا دو ته دره متوالی))

الف)

$$T=4\pi,\ \max=3,\ \min=-1 \Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{4\pi}=\pm\frac{1}{2}\ ,\ c=\frac{3+(-1)}{2}=1\ ,\ a=\pm\frac{3-(-1)}{2}=\pm 2$$

$$\Rightarrow y=\pm 2\sin(\frac{1}{2}x)+1 \quad or \quad y=\pm 2\cos(\frac{1}{2}x)+1 \ \rightarrow\ (0,1),(\pi,3)\in f \Rightarrow y=2\sin(\frac{1}{2}x)+1$$

ب)

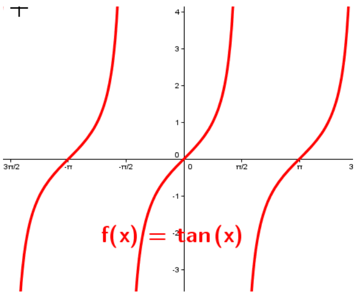
$$T=\pi,\ \max=2,\ \min=-4 \Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{\pi}=\pm 2\ ,\ c=\frac{2+(-4)}{2}=-1\ ,\ a=\pm\frac{2-(-4)}{2}=\pm 3$$

$$\Rightarrow y=\pm 3\sin(2x)-1 \quad or \quad y=\pm 3\cos(2x)-1 \ \rightarrow\ (0,-4),(\frac{\pi}{2},2)\in f \Rightarrow y=-3\cos(2x)-1$$

۵- الف) نادرست ، دامنه تابع تانژانت از بازه هائی تشکیل شده که تابع در این بازه ها اکیدا صعودی است.

ب) نادرست ، طبق توضیح بالا

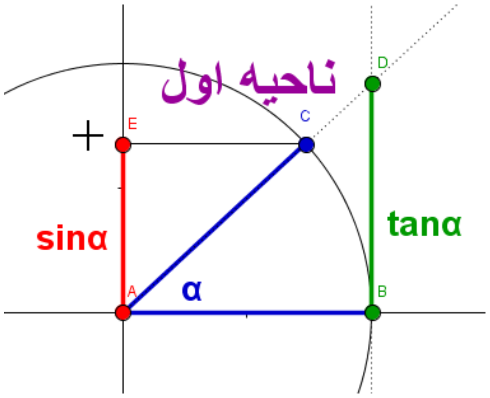
پ) درست. طبق توضیح بالا ، تابع تانژانت در این بازه ها اکیدا صعودی و بنابراین صعودی است.

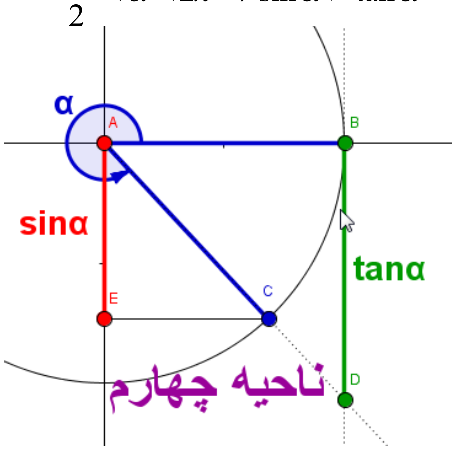


۶- در نواحی اول و چهارم هست که $\sin\theta, \tan\theta$ هم علامتند و داریم

الف) $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha<\tan\alpha$

ب) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi \Rightarrow \sin\alpha>\tan\alpha$





۱-

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}} x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

ب) $\cos 2x-\cos x+1=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0 \Rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$

پ) $\cos x=\cos 2x \Rightarrow 2x=2k\pi\pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+x \Rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}$

(علت ادغام دو دسته جواب آنکه به ازای k های مضرب ۳ ، عبارت $\frac{2k\pi}{3}$ ، پاسخهای $2k\pi$ را می سازد)

جالب توجه آنکه اگر $\cos 2x$ را باز کنید و معادله درجه دوم حاصل را حل کنید به دسته جوابهای $\begin{cases} x=2k\pi \\ x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

خواهید رسید که همان اعدادی را تولید می کند که $x=\frac{2k\pi}{3}$ تولید می کند.

ت)

$\cos 2x-3\sin x+1=0 \Rightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Rightarrow -2\sin^2 x-3\sin x+2=0$

$\Rightarrow (2\sin x-1)(-\sin x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ -\sin x-2=0 \Rightarrow \sin x=-2 \Rightarrow no\ \ root \end{cases}$

ث)

$\cos^2 x-\sin x=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\sin^2 x-\sin x-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0 \Rightarrow (2\sin x+3)(2\sin x-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin x+3=0 \Rightarrow \sin x=-\frac{3}{2} \Rightarrow no\ \ root \\ 2\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

چ) $\tan(2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi + 1}{2}$

ح) $\tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3 - \pi}$

۲- $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow 3 = \dfrac{1}{2}(2)(6)\sin C \Rightarrow \sin C = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ C = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{0 < C < \pi} C = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ \ , C = \dfrac{5\pi}{6} = 150^\circ$

-۱ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3} > 0$ و $g(x) = x^2$ در یک همسایگی محذوف 0 مثبت است (الف)

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ و $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}|5-x| = 7 > 0$ و $g(x) = |2+x|$ در یک همسایگی محذوف -2 مثبت است (ب)

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 1 = 1 > 0$ و $g(x) = (x-2)^4$ در یک همسایگی محذوف 2 مثبت است (پ)

-۲ الف) چون $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x = 4 > 0$ و $g(x) = x^2 - 4$ در یک همسایگی چپ 2 دارای مقادیر منفی است

پس $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x}{x^2-4} = -\infty$

ب) چون $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x^2 + 2x - 1 = 14 > 0$ و $g(x) = x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$ در یک همسایگی چپ 3 دارای مقادیر منفی است

پس $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = -\infty$

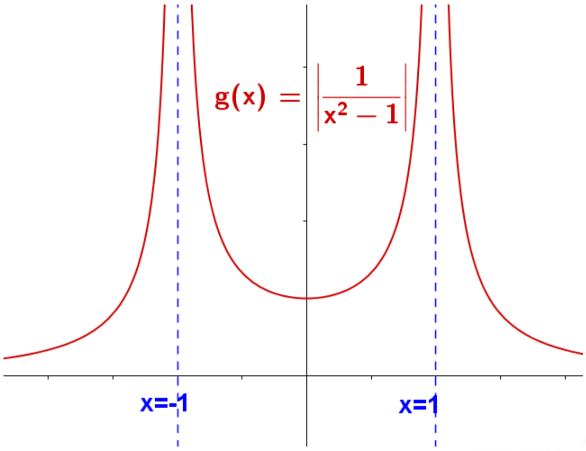
پ) چون $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x + 1 = 4 > 0$ و $g(x) = 9 - x^2$ در یک همسایگی راست 3 دارای مقادیر منفی است

پس $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x+1}{9-x^2} = -\infty$

تذکر: برای تعیین علامت یک تابع در همسایگی چپ یا راست یک عدد کافیست عددی با فاصله 0/1 یا 0/01 در همسایگی عدد مورد نظر در تابع قرار داده و علامت مقدار تابع را مشخص کنیم. مثلا در همسایگی چپ 2 عدد 1/9 و در همسایگی راست 3 عدد 3/1 را قرار دهید.

-۳ $\lim\limits_{x\to 1}\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right| = \lim\limits_{x\to -1}\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right| = +\infty$

نکته) درتابع $f(x) = \left|\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}\right|$ که $a \neq b$ دومجانب قائم $x = a, x = b$ داریم و $D_f = \mathbb{R} - \{a, b\}$

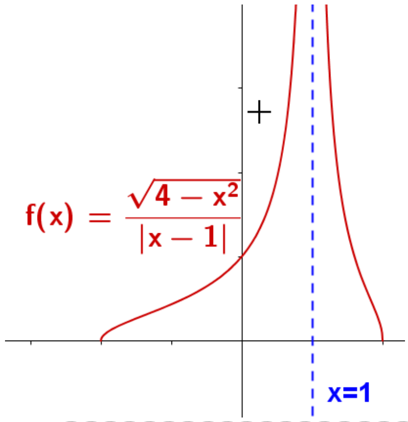


۴- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ پس تابع f دارای مجانب قائم $x=1$

است و $D_f = [-2,2]-\{1\}$

نکته) تابعی با دامنه $[a,b]-\{c\}$ که a,b,c سه عدد متمایزند و $c\in[a,b]$ و

دارای یک مجانب قائم $f(x)=\dfrac{\sqrt{-(x-a)(x-b)}}{|x-c|}$ می باشد.



۵- الف) $3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1}{3-x} = \dfrac{5}{\to 0^-} = -\infty \Rightarrow x=3$ مجانب قائم

ب) $x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ or } x=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1} = -1 \Rightarrow x=0$ مجانب قائم نیست

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{\to 0^+} = +\infty \Rightarrow x=1$ مجانب قائم

۶- اول دامنه را تعیین کنیم

$$x-|x|=0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x\ge 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,0) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-(-x)}=\frac{1}{2x}\ (x<0), \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\to 0^-}=-\infty$$

بنابراین $x=0$ مجانب قائم تابع f است.

تذکر: اگر یکی از حدهای چپ یا راست در $x=a$ برابر $\pm\infty$ شود،

برای اثبات مجانب قائم بودن $x=a$ کافی است.

هشدار: در تمرین ۶ از سمت راست نمی توانیم به صفر نزدیک شویم چون تابع در هیچ همسایگی در سمت راست صفر تعریف نشده است.

۷- پاسخ گزینه الف زیرا حد تابع در $x=1$ (چه حد راست یا حد چپ) برابر $+\infty$ است.

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}\ ,\ (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1\ ,\ \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{\to 0^+}=+\infty$$

۱- الف) اگر x را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم می توانیم مقدار تابع را به هر میزان دلخواه به 2 نزدیک کنیم.
ب) اگر x را به اندازه کافی کوچک اختیار کنیم می توانیم مقدار تابع را به هر میزان دلخواه به 4 نزدیک کنیم.

۲- الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ پ) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ ج) $x=-2$, $x=3$ مجانب قائم $y=1$, $y=-1$ مجانب افقی

۳- الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^2}{t^3}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{t}=0$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+2x}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2}{4x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{4}=\mp\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

۴- الف) $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ $,x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{5}{\to0^+}=+\infty\Rightarrow x=3$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{x}=3\Rightarrow y=3$ مجانب افقی

ب) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ $,x^2-4=0\Rightarrow x=\pm2\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{2}{\to0^+}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{2}{\to0^-}=-\infty\Rightarrow x=\pm2$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow y=0$ مجانب افقی

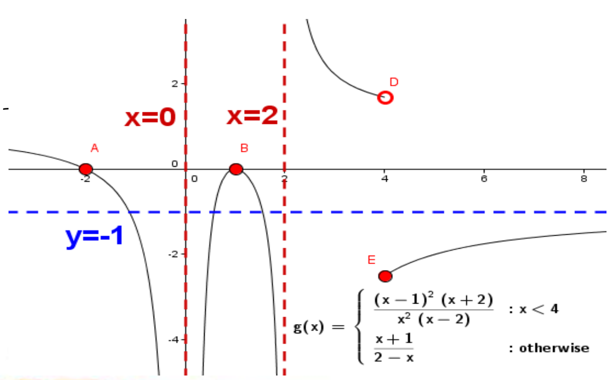
پ) $y=\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}$ $,1-x^2=0\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}=\dfrac{3}{\to0^-}=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}=\dfrac{3}{\to0^+}=+\infty\Rightarrow x=\pm1$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{-x^2}=-2\Rightarrow y=-2$ مجانب افقی

ت) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ $,1+x^2=0\Rightarrow$ در این تابع کسری ، مخرج کسر ریشه حقیقی ندارد پس مجانب قائم هم ندارد

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x}=0\Rightarrow y=0$ مجانب افقی

۵-



۱-

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-2(2+h)+1-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+10h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+10)}{h}=\lim_{h\to 0}3h+10=10\Rightarrow m=2, A(2,9)\Rightarrow y-9=10(x-2)\Rightarrow \boxed{y=10x-11}$$

۲- در نقاط مماس بر نمودار تابع رسم کنیم .اگر مماس صعودی ، شیب مثبت و در صورت نزولی بودن شیب منفی و موازی محور طولها شیب برابر صفر است.

هر چه قدر مطلق شیب بزرگتر باشد، زاویه خط مماس به ۹۰ درجه نزدیکتر است(شیب بیشتری وجود دارد)

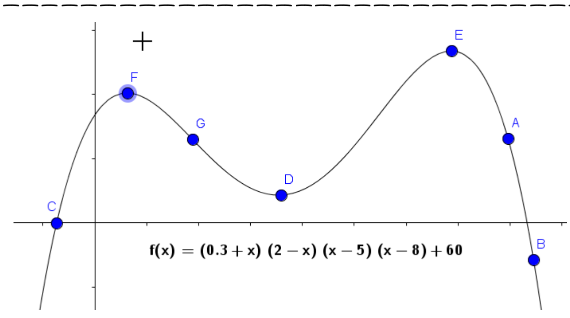
شیب	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
نقطه	F	C	E	A	B	D

۳- همه شیبها مثبت هستند و در کل هر چه زاویه خط با جهت مثبت محور طولها بیشتر باشد شیب خط بیشتر خواهد شد ، پس $m_1>m_6>m_4>m_2>m_3>m_5$

۴-

$f'(x)$	0	$0/5$	2	$-0/5$	-2
x	d	b	c	a	e

۵-



۶-

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^3-2-(-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h-3h^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3-3h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}3-3h+h^2=3$$

۷- یادآوری : چون شیب مماس همان تانژانت زاویه مماس با جهت مثبت محور طولهاست و تابع تانژانت در بازه های تعریف شده اکیدا صعودی است ، پس هر چه زاویه بزرگتر باشد ، شیب بیشتر خواهد بود.

الف) نادرست ، در نقطه C شیب منحنی منفی است.

ب) نادرست ، زاویه خط مماس با جهت مثبت محور طولها در B بیشتر از A است پس $m_A > m_B$

پ) درست با توجه به زاویه مماس در نقطه با جهت مثبت محور طولها

ت) درست ،(نزولی بودن مماس)

ث) نادرست. (یادآوری)

ج)درست با توجه به پاسخهای (پ) و (ث)

۸-

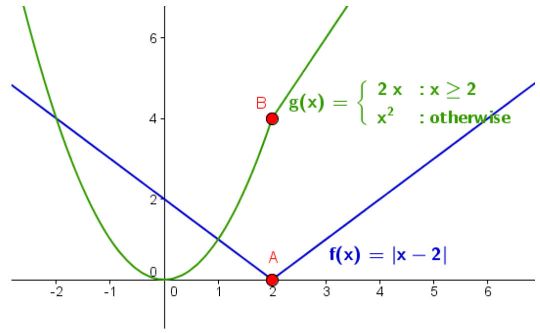
$$A \to x = 4, y = f(4) = 25 \Rightarrow A(4,25)$$

$$B \to m_{AB} = f'(4) = 1/5 = \frac{y(B) - y(A)}{x(B) - x(A)} = \frac{y(B) - 25}{5 - 4} \Rightarrow y(B) = 26/5 \Rightarrow B(5, 26/5)$$

$$C \to m_{AC} = f'(4) = 1/5 = \frac{y(C) - y(A)}{x(C) - x(A)} = \frac{y(C) - 25}{3 - 4} \Rightarrow y(C) = 23/5 \Rightarrow C(3, 23/5)$$

۱-

$$f(x)=|x-2| \ , \ g(x)=\begin{cases}2x & x\geq 2\\ x^2 & x<2\end{cases}$$



۲-تابع در A مشتق پذیر نیست $\Rightarrow f_+'(0)\neq f_-'(0)\Rightarrow$

الف)

$$\begin{cases}f_+'(0)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}h=0\\ f_-'(0)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{-h-0}{h}=-1\end{cases}$$

تابع در A مشتق پذیر نیست ، زیرا

ب)

$$\begin{cases}f_+'(1)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\frac{-h}{1+h}}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{-1}{1+h}=-1\\ f_-'(1)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1-1}{h}=0\end{cases}$$

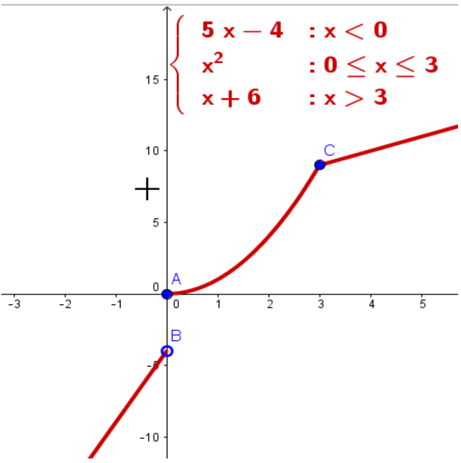
$\Rightarrow f_+'(1)\neq f_-'(1)\Rightarrow$

تابع در A مشتق پذیر نیست ، زیرا

پ)

$$\begin{cases}f_+'(4)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(4+h)-2}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}h}{h}=\dfrac{1}{2}\\ f_-'(4)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}\times\dfrac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{4+h}+2)}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow f_+'(4)\neq f_-'(4)\Rightarrow$



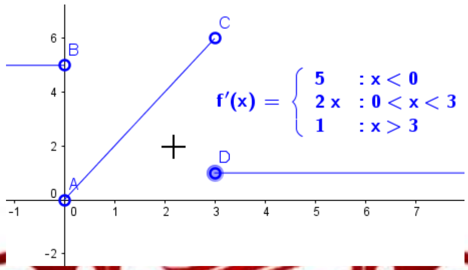
۳- الف) نمودار در مقابل   ب)تابع f در 0 پیوسته نیست پس

$f'(0)$ وجودندارد و در نقطه C دو نیم مماس متمایز وجود دارد پس

$f'(3)$ هم وجود ندارد.

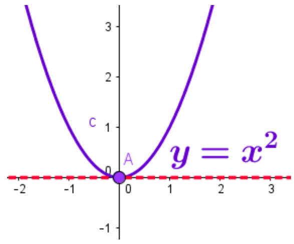
پ) در A,C که مشتق ندارد و در سایر نقاط از ضابطه،مشتق می گیریم

$$f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

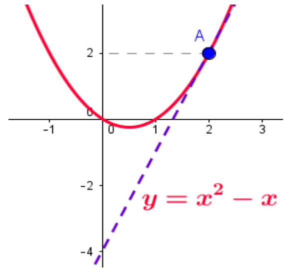


ت)

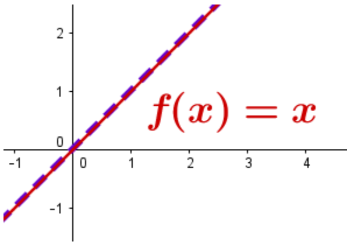
۴- الف) سهمی $y = x^2$ در نقطه $(0,0)$



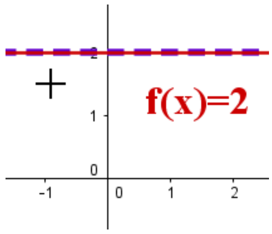
ب) سهمی $y = x^2 - x$



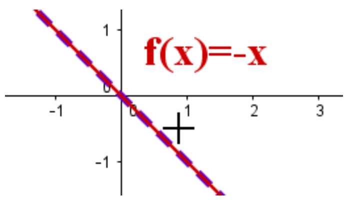
پ) تابع همانی $f(x) = x$



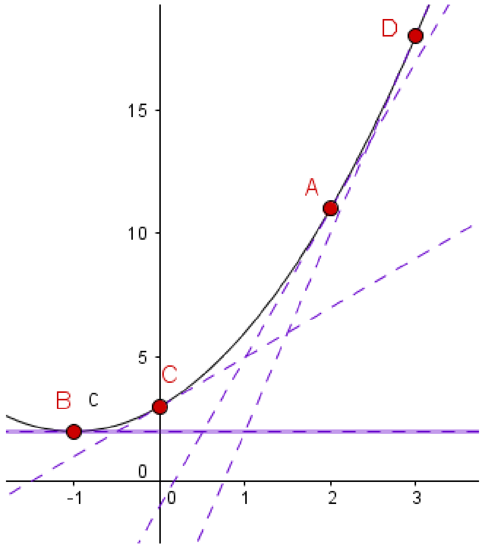
ت) تابع ثابت در تمام نقاط مشتق صفر



ث) تابع $f(x) = -x$



۵- روی نمودار در نقاط داده شده مماس رسم کرده و شیب مماس را مقایسه می کنیم.

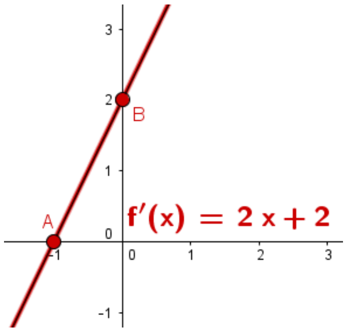


الف) $f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب) $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow$

x	-1	0	2	3
$f'(x)$	0	2	6	8

پ)



۶- تابع f در $x = 1$ پیوسته نیست پس در $x = 1$ مشتق پذیر نیست زیرا

f در $x = 1$ حد ندارد پس در $x = 1$ پیوسته نیست $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 3 = 4$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2$

۷- هر تابع دلخواه را در نظر بگیرید و اعداد ثابت دلخواه به آنها اضافه کنید. مشتق همگی با هم برابر است .

$f(x) = x^2 + x + 1 \quad g(x) = x^2 + x + 3 \quad h(x) = x^2 + x - 5$

۸- $$\left.\begin{aligned} f_+'(2) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4\\ f_-'(2) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}-(x+2)=-4\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ $f'(2)$ وجودندارد

$$\left.\begin{aligned} f_+'(-2) &= \lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{|x^2-4|-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}-(x-2)=4\\ f_-'(-2) &= \lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}(x-2)=-4\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ $f'(-2)$ وجودندارد

۹- حد تابع f' در $x=0$ برابر $\pm\infty$ شده که نشان می دهد، مماس بر نمودار تابع درهمسایگی 0 به مماس قائم نزدیک می شود، به بیان دیگر در $x=0$ مجانب قائم دارد.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

---

۱۰ - برای هریک ضابطه ای تقریبی مشخص و مشتق بگیرید مثلا f از خانواده سهمی $y=-x^2$ است که مشتق آن برابر $-2x$ است که خطی است با شیب منفی پس باید f را به شکل شماره ۳ از چپ نظیر کرد.

g از خانواده $y=k$ که مشتق آن برابر 0 است پس به شماره ٤ از چپ نظیرش می کنیم.

h از خانواده $y=x^2$ که مشتق آن برابر $2x$ است که خطی است با شیب مثبت پس نظیرش ۱ از چپ است.

t از خانواده $y=-x$ که مشتق آن برابر -1 است پس به شماره ۲ از چپ نظیرش می کنیم.

۱۱- $$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 2\\ -2x+8 & 2<x\le 4\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & 0<x<2\\ -2 & 2<x<4\end{cases}$$

$$g(x)=-x+4\ ,\ 0\le x\le 4\Rightarrow g'(x)=-1\quad 0<x<4$$

تابع f در نقاط به طول 0,2,4 مشتق پذیر نیست. (نقطه به طول ۲ نقطه گوشه ای است)

تابع در نقاط به طول $0\ ,4$ مشتق پذیر نیست.

$$h'(x)=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)\Rightarrow\begin{cases}h'(1)=f'(1).g(1)+g'(1).f(1)=2\times 3+(-1)\times 2=4\\ h'(2)=f'(2).g(2)+g'(2).f(2) \quad \text{وجودندارد}\\ h'(3)=f'(3).g(3)+g'(3).f(3)=-2\times 1+(-1)\times 2=-4\end{cases}$$

$$k'(x)=\frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{(g(x))^2}\Rightarrow\begin{cases}k'(1)=\frac{f'(1).g(1)-g'(1).f(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\times3-(-1)(2)}{3^2}=\frac{8}{9}\\ k'(2)=\frac{f'(2).g(2)-g'(2).f(2)}{(g(2))^2}\ \text{وجود ندارد}\\ k'(3)=\frac{f'(3).g(3)-g'(3).f(3)}{(g(3))^2}=\frac{(-2)(1)-(-1)(2)}{1^2}=0\end{cases}$$

۱۲- $(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8\ ,\ (3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=19$

۱۳-

$$\left.\begin{aligned}f_+'(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-0}{x}=1\\ f_-'(0)&=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to0^-}x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)\ \text{وجود ندارد}$$

۱۴-

الف) $f'(x)=6x(2x-5)^3+3(2x-5)^2(2)(3x^2-4)$

ب) $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(-3x+2)-(-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$

پ) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+2}}(3)(x^3+1)+3x^2\sqrt{3x+2}$

ت) $f'(x)=\dfrac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

۱۵-

الف) $f'(x)=3\sin^2x.\cos x+2\cos x(-\sin x)$

ب) $f'(x)=\dfrac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

پ) $f'(x)=2\tan x(1+\tan^2x)-2(-\sin x)$

ت) $f'(x)=\cos x.\cos2x-2\sin2x.\sin x$

۱۶- $f'(x)=2\sin x.\cos x+2\sin2x=3\sin2x\Rightarrow f''(x)=6\cos2x$

الف) $f''(\frac{\pi}{6})=6\cos(2\times\frac{\pi}{6})=6(\frac{1}{2})=3$

ب) $f''(\frac{\pi}{2})-f'(\frac{\pi}{2})=6\cos(2\times\frac{\pi}{2})-3\sin(2\times\frac{\pi}{2})=-6$

۱- (الف)(ب) $\frac{T(12)-T(8)}{12-8}=\frac{19-11}{4}=\frac{8}{4}=2$, $\frac{T(18)-T(12)}{18-12}=\frac{9-19}{6}=\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$

پ) به طور متوسط از ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت در هر ساعت ۲ درجه افزایش داشته است.

به طور متوسط از ساعت ۱۲ تا ۱۹ درجه حرارت در هر ساعت $\frac{5}{3}$ درجه کاهش داشته است.

۲- الف) شیب خط l آهنگ لحظه ای تغییر جمعیتی که به ویروس مبتلا شده اند در هفته چهارم رانشان می دهد.

شیب خط d آهنگ لحظه ای تغییر جمعیتی که به ویروس مبتلا شده اند در هفته ششم رانشان می دهد.

ب) آهنگ لحظه ای دز زمانهای داده شده مورد نظر هست که شیب مماس می باشد که

$f'(1)<f'(2)<f'(3)$ پس در زمان $t=3$ یعنی هفته سوم گسترش آلودگی بیشتر است.

پ) $f'(4)>f'(5)>f'(6)$ پس در زمان $t=4$ یعنی هفته چهارم گسترش آلودگی بیشتر است.

۳- الف)

$\boxed{1}\ \frac{N(1)-N(0)}{1-0}=\frac{300-0}{1}=300$ $\boxed{2}\ \frac{N(2)-N(1)}{2-1}=\frac{480-300}{1}=180$

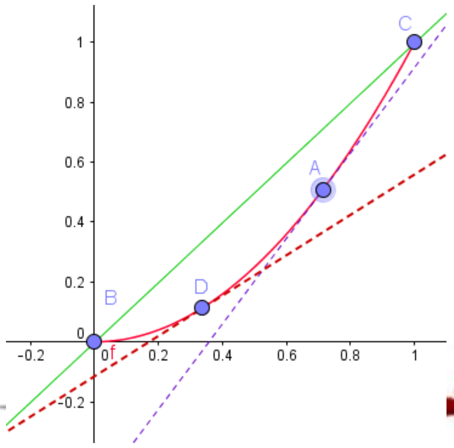
$\boxed{3}\ \frac{N(3)-N(2)}{3-2}=\frac{600-4800}{1}=120$ $\boxed{4}\ \frac{N(4)-N(3)}{4-3}=\frac{700-600}{1}=100$

ب) تبلیغ زیاد ، شتاب فروش را کاهش می دهد (تبدیل به ضد تبلیغ)

٤- سرعت متوسط در $[0,5]$ برابر است با $\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{30-10}{5}=4$ وسرعت لحظه ای در زمان t برابر است با $f'(t)=2t-1$ و داریم $2t-1=4\Rightarrow t=\frac{5}{2}$ یعنی برابری سرعت متوسط و لحظه ای در وسط بازه است.

۵- سرعت لحظه ای در $t=0/4$ عددی نزدیک به سرعت متوسط در بازه زمانی نزدیک به $t=0/4$ است

از سوئی $\frac{f(0/5)-f(0/4)}{0/5-0/4}=\frac{17/4-16/3}{0/1}=11$, $\frac{f(0/4)-f(0/3)}{0/4-0/3}=\frac{16/3-15/1}{0/1}=12$ پس سرعت لحظه ای در $t=0/4$ عددی نزدیک به $11,12$ است . گزینه پ می تواند پاسخ باشد.

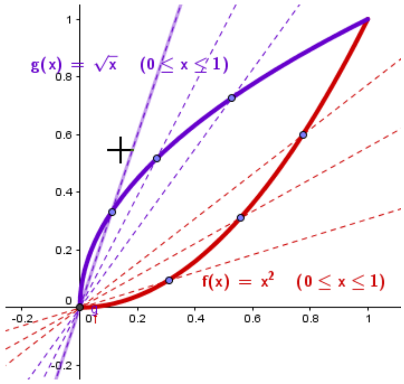


٦- الف) شاید منظور سوال شیب منحنی در نقطه ای از بازه بوده که نادرست است. شیب مماس در D از شیب BC کمتر و شیب مماس در A از شیب BC بیشتر است.

ب) نادرست. می تواند صعودی یا نزولی باشد مانند

در تابع f آهنگ متوسط (شیب خط) صعودی است

در تابع g آهنگ متوسط(شیب خط) نزولی است.



پ) نادرست. در سهمی $f(x)=x^2$ داریم

$$f'(x)=2x \Rightarrow f'(0)=f(0)=0$$

۷- الف) میزان افزایش جرم در بازه $t=3$ تا $t=4$ برابر $m(4)-m(3)=(\sqrt{4}+2(4)^3)-(\sqrt{3}+2(3)^3)=76-\sqrt{3}$

ب) $m'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2\ ,\ t=3 \Rightarrow m'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+54$

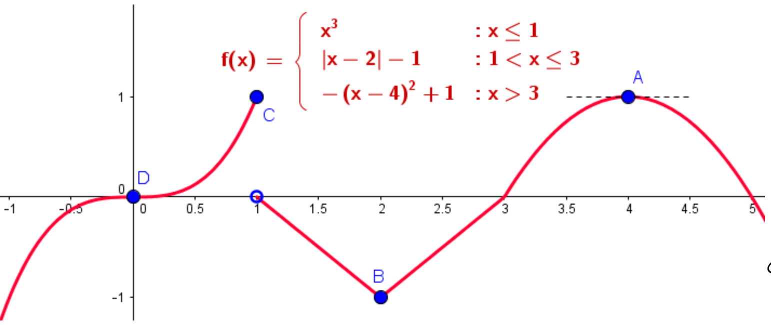
۸- الف) $\dfrac{V(1)-V(0)}{1-0}=\dfrac{40(1-\frac{1}{100})^2-40(1-\frac{0}{100})^2}{1}=40((\dfrac{99}{100})^2-1)$

$$\overline{V}_{[0,100]}=\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{40(1-\frac{100}{100})^2-40(1-\frac{0}{100})^2}{100}=-0/4$$

ب) $V'(t)=40(2)(-\dfrac{1}{100})(1-\dfrac{t}{100})=-0/8(1-\dfrac{t}{100})$

$$\overline{V}_{[0,100]}=V'(t)\Rightarrow -0/8(1-\frac{t}{100})=-0/4 \Rightarrow 1-\frac{t}{100}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=50$$

یعنی برابری آهنگ متوسط و لحظه ای در وسط بازه $[0,100]$ خواهد بود.



۱ – الف) A ماکزیمم نسبی و مشتق در آن صفر

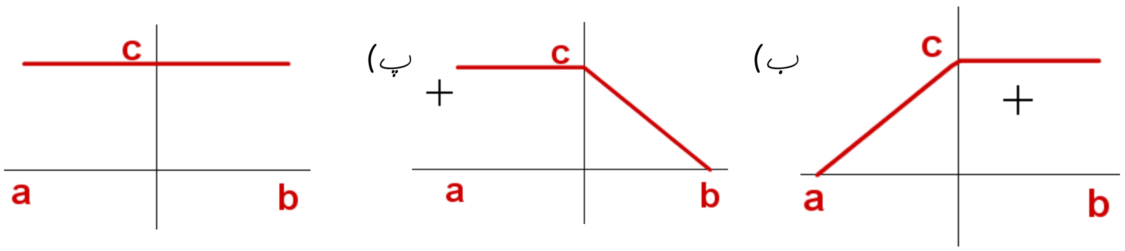
ب) B مینیمم نسبی وپیوسته و مشتق ناپذیر

پ) C ماکزیمم نسبی و ناپیوسته

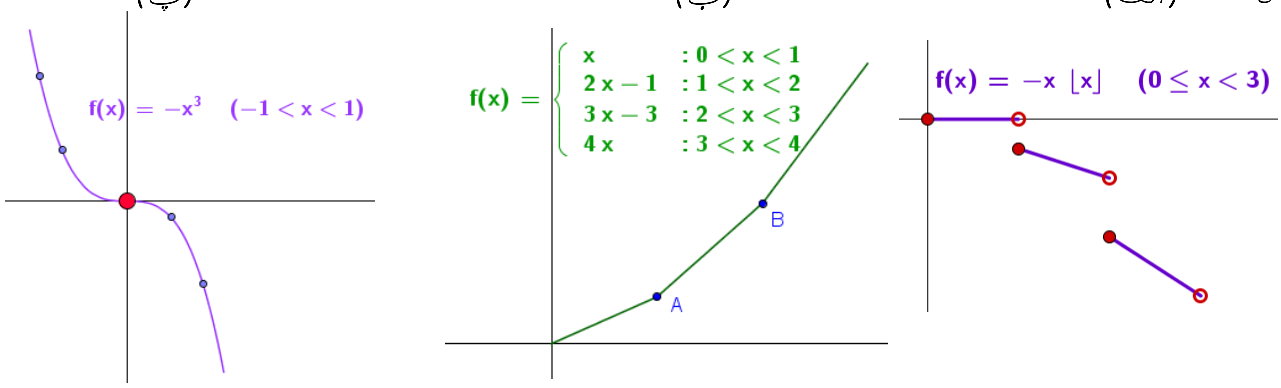
ت) D مشتق صفر ولی اکسترمم نسبی نیست

۲– تابع همانی $f(x)=x$ بر تمام دامنه اش پیوسته است ولی اکسترمم مطلق و نسبی ندارد.

۳– الف) ب) پ)

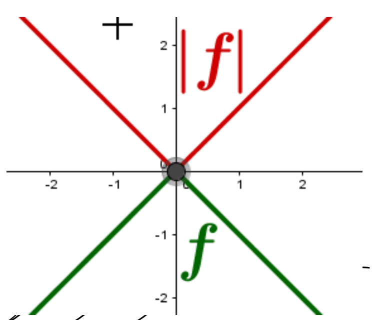


٤– (الف) (ب) (پ)



۵– در تابع $f(x)=-|x|$ نقطه $A(0,0)$ ماکزیمم مطلق و

در تابع $|f(x)|=|-|x||=|x|$ نقطه $A(0,0)$ مینیمم مطلق است.



٦– برای اکسترمم مطلق تابعی که در یک بازه تعریف شده ، نقاط بحرانی تابع را یافته و هر کدام که بزرگترین یا کوچکترین y را دارد ، ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع خواهد بود.

الف) $f(x)=3x^2-2x+5\ ,\ x\in[-2,1] \Rightarrow f'(x)=6x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

x	-2		$\frac{1}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	21	$\searrow$	$\frac{14}{3}$	$\nearrow$	6

نقاط بحرانی : در این تابع عبارتند از $C(1,6)$ $B(-2,21)$ $A(\frac{1}{3},\frac{14}{3})$

اکسترمم نسبی : با توجه به جدول تعیین علامت بالا نقطه A ، مینیمم نسبی (ماکزیمم نسبی ندارد)

اکسترمم مطلق: با مقایسه عرض نقاط بحرانی، نقطه B ماکزیمم مطلق و نقطه A مینیمم مطلق است.

ب) $f(x)=x^3-3x \ ,x\in[-1,2]\Rightarrow f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow$

x	$\boxtimes$	-1		1		2	$\boxtimes$
y'	$\boxtimes$	0	$-$	0	$+$	$+$	$\boxtimes$
y	$\boxtimes$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\boxtimes$

نقاط بحرانی : در این تابع عبارتند از $C(2,2)$ $B(1,-2)$ $A(-1,2)$

اکسترمم نسبی : با توجه به جدول تعیین علامت بالا نقطه B ، مینیمم نسبی (ماکزیمم نسبی ندارد)

اکسترمم مطلق: با مقایسه عرض نقاط بحرانی، نقطه A,C ماکزیمم مطلق و نقطه B مینیمم مطلق است.

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<2\\ 4-x & x\ge 2\end{cases}\Rightarrow D_f=[0,+\infty)\ ,f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<2\\ -1 & x>2\end{cases}\Rightarrow$

x	0		2		$+\infty$
y'	$\boxtimes$	$+$	$\boxtimes$	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

نقاط بحرانی : در این تابع عبارتند از $B(2,2)$, $A(0,0)$

اکسترمم نسبی : با توجه به جدول تعیین علامت بالا نقطه A ، ماکسیمم نسبی (مینیمم نسبی ندارد)

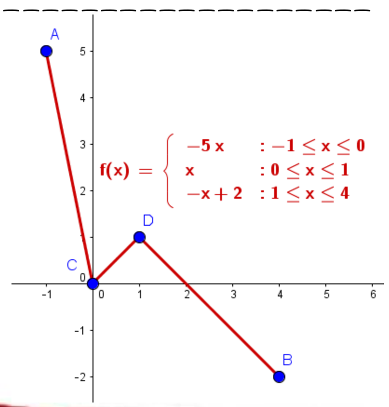
اکسترمم مطلق: با مقایسه عرض نقاط بحرانی و توجه به جدول میینیم مقدار y به $-\infty$ هم میل کرده پس مینیمم مطلق ندارد ولی در دو نقطه بحرانی A,B عرض نقطه B بیشتر است بنابراین نقطه B ماکزیمم مطلق است (مینیمم مطلق ندارد).

۷- چون چند جمله ای است، پس نقاط اکسترمم در صورت وجود دربین ریشه های y' می باشد.

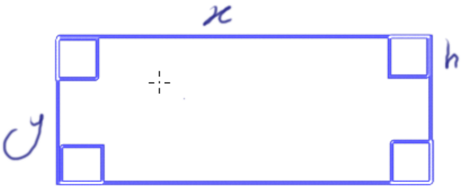
$f(x)=x^3+ax+b\Rightarrow f'(x)=3x^2+a\ ,\ x_{max}=1\Rightarrow 3(1)^2+a=0\Rightarrow \boxed{a=-3}$

$(1,2)\in f\Rightarrow 2=(1)^3+a(1)+b\Rightarrow a+b=1,a=-3\Rightarrow \boxed{b=4}$

۸-



۹-

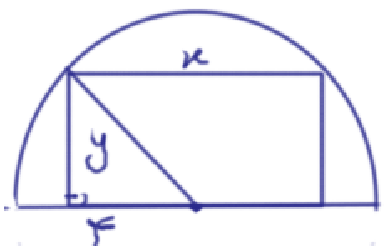


$$V=(x-2h)(y-2h)(h)\ ,\ h=2\ ,\ xy=100$$

$$\Rightarrow V=2(100-4(x+y)+16)=8(29-x-\frac{100}{x})$$

$$\Rightarrow V'=8(-1+\frac{100}{x^2})=0\Rightarrow x^2=100\Rightarrow \boxed{x=10},xy=100\Rightarrow \boxed{y=10}$$

۱۰-



$$S=xy\ ,\ y^2+(\frac{x}{2})^2=4^2\Rightarrow y=\sqrt{16-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{64-x^2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}x\sqrt{64-x^2}\Rightarrow S'=\frac{1}{2}(\sqrt{64-x^2}+x(-2x)(\frac{1}{2\sqrt{64-x^2}}))=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{64-x^2}=\frac{x^2}{2\sqrt{64-x^2}}\Rightarrow 64-x^2=x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x=4\sqrt{2}},y=\frac{1}{2}\sqrt{64-x^2}\Rightarrow \boxed{y=2\sqrt{2}}$$

۱۱-

الف)

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+7\Rightarrow f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$$

$$=6(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=-1,2\Rightarrow$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	14	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$+\infty$

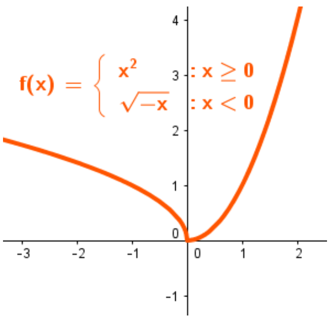
تابع f در بازه های $(-\infty,-1]\ ,\ [2,+\infty)$ اکیدا صعودی و در بازه $[-1,2]$ اکیدا نزولی است.

ب) $f(x)=\frac{x}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}\Rightarrow$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	$\times$	$-$	
y	1	$\searrow$ $-\infty$	$\times$	$+\infty$ $\searrow$	1

تابع f در بازه های $(2,+\infty)\ ,\ (-\infty,2)$ اکیدا نزولی و بازه ای که در آن اکیدا صعودی باشد وجود ندارد.

-۱



در نقطه $(0,0)$ جهت تقعر عوض شده ولی مماس ندارد پس عطف نیست.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ \dfrac{-1}{4\sqrt{-x^3}} & x<0\end{cases}$$

-۲

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4\Rightarrow f'(x)=x^2-2x-3\Rightarrow f''(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$-$		$+$	
y	$-\infty$	$\cap$	$\frac{1}{3}$	$\cup$	$+\infty$

بنابر جدول و تغییر جهت تقعر ، نقطه $A(1,\frac{1}{3})$ نقطه عطف است.

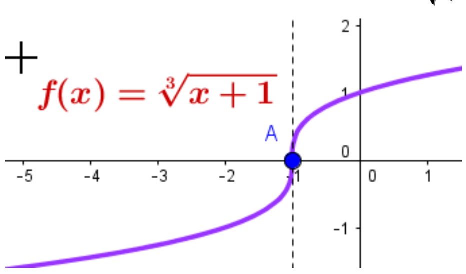
ب) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}\Rightarrow\Rightarrow$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$-$	$\times$	$+$	
y	$-\infty$	$\cap$	$\times$	$\cup$	$+\infty$

توجه به جدول بالا، با آنکه در دوطرف $x=1$ مشتق دوم تغییر علامت می دهد ولی $1\notin D_f$ پس تابع نقطه عطف ندارد

پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}\Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y''		$+$	$\times$	$-$	
y	$-\infty$	$\cup$	0	$\cap$	$+\infty$



با توجه به جدول بالا، در دوطرف $x=-1$ تقعر تابع عوض شده و تابع در $A(-1,0)$ پیوسته ودارای مماس قائم است پس $A(-1,0)$ نقطه عطف تابع f است.

-۳ الف) $y=x^3$ ب) $y=(x-1)^3$ پ) $y=x^3+1$ ت) $y=(x-2)^3+2$

۴-

$$y=ax^3+bx^2+c \Rightarrow y'=3ax^2+2bx \Rightarrow y''=6ax+2b\,, x=\frac{1}{2} \Rightarrow 6a(\frac{1}{2})+2b=0 \Rightarrow \boxed{2b=-3a}$$

$$(0,1)\in f \Rightarrow 1=a(0)^3+b(0)^2+c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$(1,2)\in f \Rightarrow 2=a(1)^3+b(1)^2+c \Rightarrow \boxed{a+b=1} \Rightarrow \begin{cases} 2b=-3a \\ 2a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-2}, \boxed{b=3}$$

۵-

$$(0,0)\in f \Rightarrow 0=(0)^3+a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$$y=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow y'=3x^2+2ax+b \Rightarrow y''=6x+2a\,, x_{atf}=0 \Rightarrow 6(0)+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

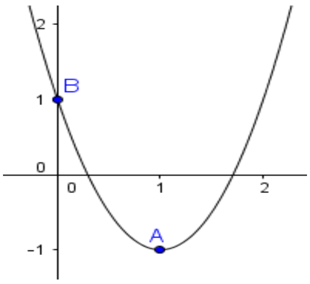
$$x_{\max}=-2 \Rightarrow 3(-2)^2+2a(-2)+b=0 \Rightarrow -4a+b=-12\,,\ a=0 \Rightarrow \boxed{b=-12}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=x^3-12x}$$

۱-

الف) $f(x)=2x^2-4x+1 \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to+\infty \\ x=0\Rightarrow y=1,\ y=0\Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=4x-4=0\Rightarrow x=1 \\ y''=4>0 \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y''		$\overset{+}{\cup}$		$\overset{+}{\cup}$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

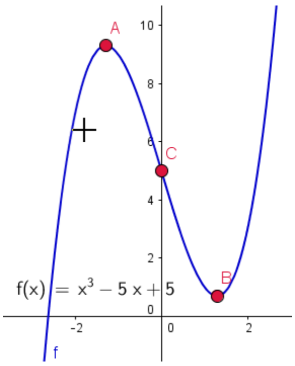


نقطه $A(1,-1)$ نقطه بحرانی و مینیمم نسبی و مطلق تابع.

$B(\sqrt{\frac{5}{3}}, f(\sqrt{\frac{5}{3}}$

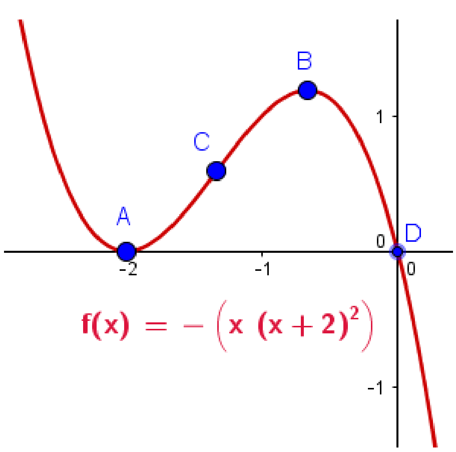
ب) $f(x)=x^3-5x+5 \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\pm\infty \\ x=0\Rightarrow y=5 \\ y'=3x^2-5=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y''=6x=0\Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{5}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$\overset{-}{\cap}$		$\overset{-}{\cap}$	0	$\overset{+}{\cup}$		$\overset{+}{\cup}$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$9/3$	$\searrow$	5	$\searrow$	$0/7$	$\nearrow$	$+\infty$



نقطه $A(-\sqrt{\frac{5}{3}}, f(-\sqrt{\frac{5}{3}}))$ ماکزیمم نسبی و $B(\sqrt{\frac{5}{3}}, f(\sqrt{\frac{5}{3}}))$ مینیمم نسبی و $C(0,5)$ نقطه عطف تابع است .

پ) $f(x)=-x(x+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\mp\infty \\ x=0\Rightarrow y=0,\ y=0\Rightarrow x=0,-2 \\ y'=(-x^3-4x^2-4x)' \\ \quad =-(3x^2+8x+4)=0\Rightarrow x=-2,-\frac{2}{3} \\ y''=-(6x+8)=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3} \end{cases}$



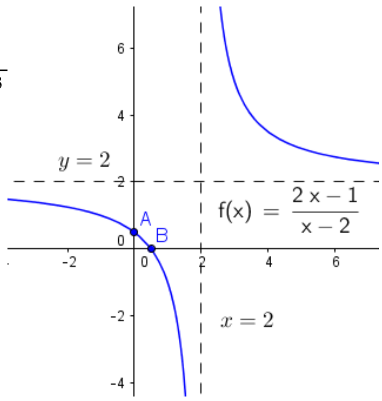
$\Rightarrow$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y''		$\overset{+}{\cup}$		$\overset{+}{\cup}$	0	$\overset{-}{\cap}$		$\overset{-}{\cap}$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{27}$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

نقطه $A(-2,0)$ مینیمم نسبی و $B(-\frac{2}{3},\frac{32}{27})$ ماکزیمم نسبی و $C(-\frac{4}{3},\frac{16}{27})$ نقطه عطف تابع است.

ت) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R}-\{2\} \\ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to 2\,,\ x\to 2^{\pm} \Rightarrow y\to\pm\infty \\ x=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\,,\ y=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ y'=\dfrac{-3}{(x-2)^2}<0 \\ y''=\dfrac{6}{(x-2)^3} \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	$\times$	$-$	
y''		$\overset{-}{\cap}$	$\times$	$\overset{+}{\cup}$	
y	2	$\searrow$	$-\infty \times +\infty$	$\searrow$	2



تابع دارای مجانب افقی $y=2$

و مجانب قائم $x=2$ بوده و

اکسترمم مطلق و نسبی و عطف ندارد.

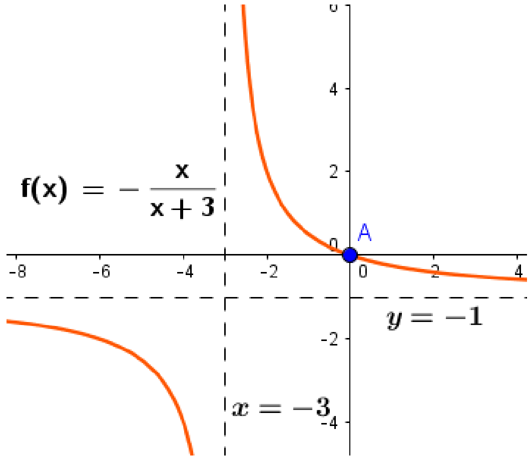
ث) $f(x)=\dfrac{-x}{x+3} \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R}-\{-3\} \\ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to -1,\ x\to -3^{\pm} \Rightarrow y\to\pm\infty \\ x=0 \Rightarrow y=0 \\ y'=\dfrac{-3}{(x+3)^2}<0 \\ y''=\dfrac{6}{(x+3)^3} \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y'		$-$	$\times$	$-$	
y''		$\overset{-}{\cap}$	$\times$	$\overset{+}{\cup}$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty \times +\infty$	$\searrow$	-1

تابع دارای مجانب افقی $y=-1$

و مجانب قائم $x=-3$ بوده و

اکسترمم مطلق و نسبی و عطف ندارد.

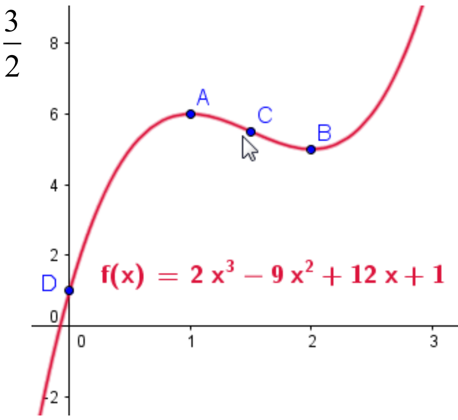


ج)

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1\Rightarrow\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\ x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\pm\infty\\ x=0\Rightarrow y=1\\ y'=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=0\Rightarrow x=1,2\\ y''=12x-18=6(2x-3)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$\overset{-}{\cap}$		$\overset{-}{\cap}$	0	$\overset{+}{\cup}$		$\overset{+}{\cup}$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$



نقطه $A(1,6)$ ماکزیمم نسبی و $B(2,5)$ مینیمم نسبی و $C(\frac{3}{2},\frac{11}{2})$ نقطه عطف تابع است.

۲- محل تقاطع مجانبهای تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، مرکز تقارن تابع به مختصات $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ است ، پس

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{d}{c}=2\Rightarrow d=-2c\\ \frac{a}{c}=1\Rightarrow a=c\\ (-1,0)\in f\Rightarrow 0=\frac{a(-1)+b}{c(-1)+d}\Rightarrow a=b\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{cx+c}{cx-2c}=\frac{x+1}{x-2}$$

۳- گزینه (ب)

$$f(x)=x^3+x-2\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=3x^2+1>0\\ f''(x)=6x=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

تابع اکیدا صعودی و دارای نقطه عطف $A(0,-2)$ است، زیرا

مشتق دوم در دو طرف A تغییر علامت داده و درآن پیوسته است و دارای مماس می باشد.
