هو العلیم

کتابچه سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی

از سال ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۸

گردآوری شده توسط گروه آموزشی همساز

منبع: mathysc.ir

فهرست مطالب

سوالات مرحله دوم پانزدهمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۷۶

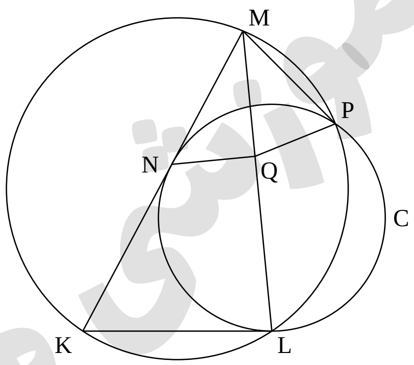
آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که داشته باشیم: $3x^2 + x = 4y^2 + y$، آنگاه ثابت کنید که $x - y$ یک مربع کامل است.

۲. فرض کنید KL و KN بر دایره‌ی C مماس باشند. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه‌ی دیگر تقاطع دایره‌ی C با دایره‌ی محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم. ثابت کنید: $\angle MPQ = 2\angle KML$.



۳. یک جدول $n \times n$ از اعداد ۰، ۱+ و ۱− داریم به‌طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد ۱+ و یک عدد ۱- وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جابه‌جایی سطرها با یکدیگر و ستونها با یکدیگر می‌توان جای ۱+ ها را با ۱- ها عوض کرد.

۴. فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4، چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_1x_2x_3x_4 = 1$. ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right\}$$

($\max\{a,b\}$ یعنی بزرگترین عضو مجموعه‌ی $\{a,b\}$).

۵. در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده‌اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید: اگر $BE = CF$، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۶. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگترین مقدار p را با ذکر دلیل، پیدا کنید.

سوالات مرحله دوم شانزدهمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۷۷

آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$، n تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \geq a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4$$

۲. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. I مرکز دایره‌ی محاطی آن و D نقطه‌ی تقاطع AI با دایره‌ی محیطی مثلث ABC است. فرض کنید E و F به‌ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{1}{2}AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. nتایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اعداد طبیعی را «خوب» می‌نامیم، اگر داشته باشیم $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$ و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از a_iها برابر n نشود. تمام n تاییهای «خوب» را پیدا کنید.

(به‌عنوان مثال ۳تایی $(1, 1, 4)$ «خوب» است ولی ۵تایی $(1, 2, 1, 2, 4)$ «خوب» نیست، زیرا حاصل‌جمع مولفه‌های اول، دوم، چهارم برابر ۵ است.)

۴. فرض کنید که عدد طبیعی n حداقل چهار مقسوم‌علیه متمایز داشته باشد و $0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ چهار کوچکترین مقسوم‌علیه آن باشند. کلیه‌ی اعداد طبیعی n را پیدا کنید که $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

۵. مثلث ABC که در آن $BC > CA > AB$ مفروض است. نقطه‌ی D را روی ضلع BC، و نقطه‌ی E را روی امتداد ضلع AB (نزدیک A) طوری در نظر می‌گیریم که $BD = BE = AC$. دایره‌ی محیطی مثلث BED ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع می‌کند و BP نیز دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. ثابت کنید $AQ + CQ = BP$.

۶. اگر $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ دو nتایی از صفر و یک باشند، فاصله‌ی A و B را برابر تعداد iهایی می‌گیریم که $a_i \neq b_i$، $(1 \leq i \leq n)$.

(به‌عنوان مثال اگر $A = (0, 1, 1)$ و $B = (1, 1, 0)$، فاصله‌ی A و B برابر ۲ است.) حال فرض کنید که A، B و C سه nتایی از صفر و یک باشند، به‌طوری که فاصله‌ی دو به دوی آنها d است.

الف) نشان دهید که d زوج است.

ب) ثابت کنید که یک nتایی از صفر و یک، مثل D، وجود دارد که فاصله‌اش با A، B و C برابر $\frac{d}{2}$ است.

سوالات مرحله دوم هفدهمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۷۸

آزمون مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از ۲ باشد وجود دارد که با جابه‌جایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟

۲. مثلث ABC را با فرض $\angle B > ۴۵^\circ$ و $\angle C > ۴۵^\circ$ در نظر می‌گیریم. مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین CAM و BAN را در خارج ABC طوری می‌سازیم که $\angle CAM = \angle BAN = ۹۰^\circ$، و در داخل ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین BPC را طوری می‌سازیم که $\angle P = ۹۰^\circ$. ثابت کنید که مثلث MPN نیز یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۳. یک زمین مربع‌شکل به شبکه‌ای ۱۰۰×۱۰۰ از نقاط متساوی‌الفاصله تقسیم شده و تعداد ۱۰۰۰۰ عدد درخت هر کدام در یکی از نقاط این شبکه کاشته شده است. ماکزیمم تعداد درختهایی که می‌توانیم قطع کنیم را پیدا کنید که اگر در محل هر درخت بریده شده‌ای قرار بگیریم هیچ درخت بریده‌شده‌ی دیگری را نبینیم. (یعنی روی پاره‌خط واصل بین هر دو درخت بریده‌شده، درخت بریده نشده‌ای واقع باشد.)

۴. همه‌ی عددهای طبیعی m به‌صورت زیر

$$m = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{۱۳۷۸}{a_{۱۳۷۸}}$$

را پیدا کنید که در آن $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_{۱۳۷۸}$ اعدادی صحیح و مثبت باشند.

۵. مثلث ABC مفروض است. نقاط P، Q، و R به‌ترتیب روی AB، BC و CA قرار دارند. حال نقاط A'، B' و C' را به‌ترتیب روی PR، QP و RQ طوری در نظر می‌گیریم که AB با $A'B'$، BC با $B'C'$ و CA با $C'A'$ موازی باشند. ثابت کنید که

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{مساحت}\, PQR}{\text{مساحت}\, A'B'C'}$$

۶. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n، n نقطه‌ی متمایز در صفحه باشند $(n \geq ۲)$. همه‌ی پاره‌خطهایی که از اتصال دوبه‌دوی این نقاط به‌دست می‌آیند را در نظر می‌گیریم و وسط هر یک از این پاره‌خطها را به رنگ قرمز، رنگ می‌کنیم. حداقل تعداد نقاط قرمز به‌دست‌آمده چند تاست؟

سوالات مرحله دوم هجدهمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۷۹

۱) ۲۱ عدد متمایز از بین اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,3,\ldots,2046\}$ انتخاب شده‌اند. نشان دهید که می‌توان سه عدد متمایز a، b و c از بین آن ۲۱ عدد انتخاب کرد به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$bc < 2a^2 < 4ac$$

۲) نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و فقط اگر

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}$$

(مرکز ثقل یک مثلث محل تلاقی سه میانه‌ی آن مثلث است.)

۳) مجموعه‌ی $\{1,2,3,\ldots,10000\}$ را M می‌نامیم. نشان دهید که می‌توان ۱۶ زیرمجموعه از M انتخاب کرد به طوری که برای هر $a \in M$، ۸ تا از این مجموعه‌ها باشند که اشتراک آنها دقیقاً برابر $\{a\}$ باشد.

۴) همه‌ی عددهای طبیعی n را بیابید که مجموعه‌ی $\{1,2,3,\ldots,n\}$ را بتوان به سه مجموعه‌ی مجزای A، B و C تقسیم کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه با هم برابر باشد.

۵) می‌دانیم در چهاروجهی $ABCD$، مجموع زاویه‌های هر رأس برابر 180° درجه است. (مثلاً در رأس A: $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = 180^\circ$) نشان دهید که وجوه این چهاروجهی، چهار مثلث برابرند.

۶) «اَبَر عدد» تعمیمی از مفهوم عدد است. همان‌طور که می‌دانید هر عدد طبیعی به صورت دنباله‌یی متناهی از ارقام صفر تا نه نوشته می‌شود. یک «ابر عدد» دنباله‌ای از سمت چپ نامتناهی از ارقام صفر تا نه است، مثلاً $\ldots 303030304$ یک ابر عدد است. توجه کنید که هر عدد خود یک ابر عدد است (که از جایی به بعد ارقام آن همگی صفرند). با همان روشی که دو عدد با هم جمع یا در هم ضرب می‌شوند، می‌توان دو «ابر عدد» را نیز با هم جمع و یا در هم ضرب کرد. مثال:

```
    ۱     ۱
  ...۳۰۳۰۳۰۴
+...۴۵۷۱۳۷۸
-------------
  ...۷۶۰۱۶۸۲
  ...۳۰۳۰۳۰۴
×...۴۵۷۱۳۷۸
-------------
  ...۴۲۴۲۴۳۲
  ...۲۱۲۱۲۸
  ...۹۰۹۱۲
  ...۰۳۰۴
  ...۱۲۸
  ...۲۰
  ...۶
-------------
  ...۵۰۳۸۹۱۲
```

الف) فرض کنید A یک ابر عدد است. ثابت کنید ابرعدد B وجود دارد که $A + B = \overleftarrow{0}$ (منظور از $\overleftarrow{0}$ «ابرعدد»ی است که همه‌ی رقم‌های آن صفر است).

ب) تمام ابرعددهای A را پیدا کنید که وارون ضربی دارند، یعنی ابرعدد B وجود دارد که $A \times B = \overleftarrow{0}1$ (منظور از $\overleftarrow{0}1$ «ابرعدد» ۱ ۰۰۰ ... است).

ج) آیا درست است که اگر $A \times B = \overleftarrow{0}$ آن‌گاه $A = \overleftarrow{0}$ و یا $B = \overleftarrow{0}$؟ چرا؟

سوالات مرحله دوم نوزدهمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۰

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز اول

---

۱. فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، به طوری که $np+1$ یک مربع کامل است. ثابت کنید می‌توان $n+1$ را به صورت مجموع p تا مربع کامل نوشت.

۲. مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مفروض است. روی اضلاع آن سه مثلث $B'AC$، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم، به طوری که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = 30^\circ$$
$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = 60^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد، نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۳. تمام nهایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن‌ها افقی و عمودی باشند و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز دوم

---

۴. تمام چندجمله‌ای‌های P با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x، داشته باشیم:

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2$$

۵. در مثلث ABC $(AB > AC)$ نیم‌سازهای رأس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. هم‌چنین نقطه‌ی تقاطع دو نیم‌ساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

۶. جدولی با یک سطر و تعدادی نامتناهی خانه در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد(نظیر شکل زیر)

							....

در این جدول تعدادی متناهی مهره قرار داده‌ایم به گونه‌ای که در بعضی خانه‌ها تعدادی مهره قرار گرفته است. (در یک خانه می‌تواند بیش‌تر از یک مهره باشد.) دو عمل زیر را می‌توان روی مهره‌ها انجام داد:

۱) اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه به راست برد و یک مهره از خانه‌ی سمت راست را حذف کرد.

۲) در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌ها را یک خانه به راست و یک مهره‌ی دیگر را دو خانه به سمت چپ برد.

الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

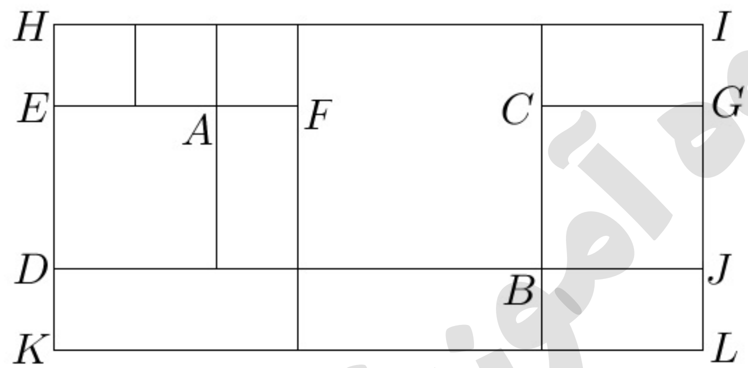
ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا nاُم یک مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکر شده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$اُم جلوتر نخواهد رفت.

سوالات مرحله دوم بیستمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۱

۱. $a_1, a_2, \dots, a_n$ را یک جای‌گشت از اعداد ۱، ۲، ...، n می‌نامیم هرگاه $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آن‌ها تغییر کرده است). تمام جای‌گشت‌های ۱ تا n مانند $a_1, a_2, \dots, a_n$ را بیابید که برای $1 \le i \le n$، $(a_1 + a_2 + \cdots + a_i)$ بر $i+1$ بخش‌پذیر باشد. برای مثال $a_1 = 3$، $a_2 = 1$، $a_3 = 4$ و $a_4 = 2$ یک جای‌گشت از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

۲. یک مستطیل را به وسیله‌ی تعدادی مستطیل(کوچک‌تر) پوشانده‌ایم به طوری که مستطیل‌ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل‌های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم‌چنین هیچ قسمتی از مستطیل‌ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت‌ها را نشان می‌دهد:



بنابرای هر طور که مستطیل را به وسیله‌ی مستطیل‌های کوچک‌تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط(پاره‌خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی برخورد را یک ((چهارراه)) می‌گوییم هرگاه محل تقاطع دو پاره‌خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهارراه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم‌چنین در این شکل ۵ خط افقی و (KL, DJ, CG, EF, HI) و ۶ خط عمودی دیده می‌شود، در ضمن شکل به وسیله‌ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.
نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط‌های افقی، عمودی و تعداد چهارراه‌ها در نظر بگیریم. و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل‌های پوشاننده به اضافه‌ی عدد سه.

۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = 90^\circ$، هم‌چنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴. A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهارضلعی محدب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC = 90^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهارضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

۵. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ‌تری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a+b\delta$ هستند که $a,b\in R$. (R نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.)

قرارداد می‌کنیم که $a+b\delta=a'+b'\delta$ اگر و تنها اگر $a=a'$ و $b=b'$.

δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^۲=۰$!

روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a+b\delta)+(a'+b'\delta)=(a+a')+(b+b')\delta$$

$$(a+b\delta)(a'+b'\delta)=aa'+ab'\delta+ba'\delta'+bb'\delta^۲=aa'+(ab'+ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید که این چندجمله‌ای در R ریشه‌ی مضاعف دارد، اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشهای غیر حقیقی داشته باشد.(ریشه‌ی غیرحقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a+b\delta$ که $b\neq ۰$).

توضیح می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x-a)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۶. در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.

سوالات مرحله دوم بیست و یکمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۲

۱. عدد طبیعی n را سه‌لایه‌ای می‌نامیم، هرگاه بتوان مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف. عددی سه‌لایه‌ای مثال بزنید.
ب. ثابت کنید بی‌نهایت عدد سه‌لایه‌ای وجود دارد.

۲. در یک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq ۳$) به طوری که همه‌ی آن‌ها روی یک خط قرار ندارند. می‌خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطه‌ی A مناسب‌تر از نقطه‌ی B است اگر مجموع فواصل A تا خانه‌ها کم‌تر از مجموع فواصل B تا خانه‌ها باشد.
نقطه‌ای را ایده‌آل می‌گوییم که هیچ نقطه‌ای مناسب‌تر از آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه‌ی ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۳. n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده‌اند. برای هر دو تیم متمایز A و B دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم A و B باخته‌اند. ثابت کنید $n = ۴t + ۳$.
(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

۴. برای هر سه عدد حقیقی x ، y و z با شرط $xyz = -۱$، نامساوی زیر را ثابت کنید:
$$x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x+y+z) \geq \frac{x^۲}{y} + \frac{x^۲}{z} + \frac{y^۲}{z} + \frac{y^۲}{x} + \frac{z^۲}{x} + \frac{z^۲}{y}$$

۵. زاویه‌ی $\angle A$ کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC می‌باشد. نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC واقع است.
عمود منصف‌های AB، AC با خط AD به ترتیب در نقطه‌های M و N برخورد می‌نمایند. نقطه‌ی T محل برخورد BM و CN است. ثابت کنید
$$BT + CT \leq ۲R$$
که R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

۶. یک روبات از یک رأس دل‌خواه روی صفحه‌ی شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت‌های اصلی روی اضلاع صفحه‌ی شطرنجی حرکت می‌کند. این روبات دارای دو خانه‌ی حافظه‌ی A و B است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد.

در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به ترتیب به خانه‌ی A یکی اضافه می‌شود، از خانه‌ی A یکی کم می‌شود، به خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A اضافه می‌شود یا از خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A واحد کم می‌شود. فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانه‌ی حافظه‌ی B، برابر با مساحت درونی شکلی است که روبات پیموده.

سوالات مرحله دوم بیست و دومین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۳

۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\angle A = 90^\circ)$، نقطه‌ی D محل برخورد نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC و نقطه‌ی I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر زاویه‌ی A است. (I_a محل برخورد نیم‌سازهای زوایای خارجی B و C است.) ثابت کنید:

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

۲. فرض کنید $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x)-3x$ و $f(x)-x^3$ توابعی صعودی‌اند. نشان دهید $f(x) - x^2 - x$ نیز صعودی است. (تابع g را صعودی گوییم هرگاه اگر $x \leq y$ آن‌گاه $g(x) \leq g(y)$)

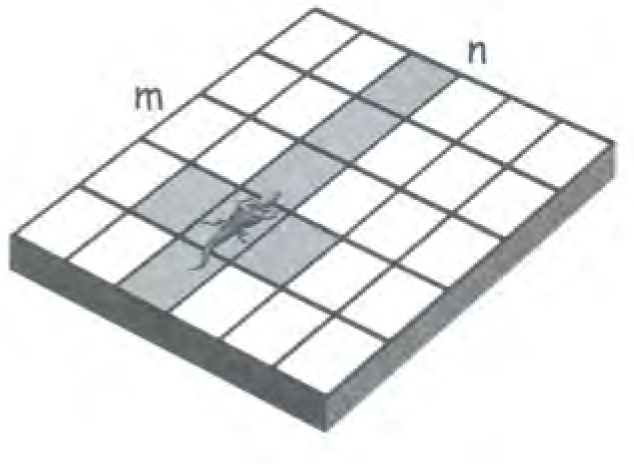
۳. وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یک‌دیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.

۴. همه‌ی توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که برای هر m و n طبیعی، $f(m)+f(n)$ بر $m+n$ بخش‌پذیر باشد.

۵. نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی $\angle A$ از مثلث ABC، ضلع BC و دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه‌ی D دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است.

ثابت کنید خط AD زاویه‌ی $\angle XAY$ را نصف می‌کند.

۶. مهره‌ی تمساح در جدول $m \times n$ ($m \geq ۴$) می‌تواند همه‌ی خانه‌های هم‌ستون خودش و همین طور خانه‌های مجاور هم‌سطرش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهره‌ی تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست‌کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که تمساح‌ها باید عمودی باشند.)



سوالات مرحله دوم بیست و سومین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۴

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز اول

---

۱. n عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و p عددی اول است که $n\,\big|\,p-1$ و $p\,\big|\,n^3-1$. نشان دهید $4p-3$ مربع کامل است.

۲. در مثلث ABC، $\angle A = 60^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی(!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)

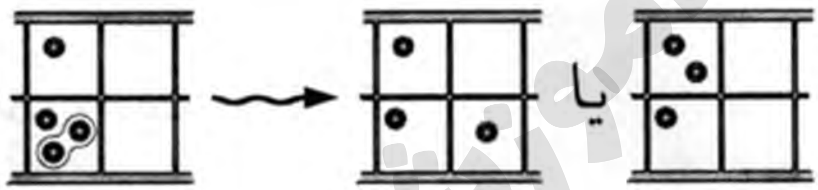
به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز دوم

۴. در برخی از خانه‌های یک جدول $۲ \times n$ تعدادی مهره قرار دارد.

اگر درخانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم ۲^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵. BC قطر یک دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته اند که $PB \parallel CY$ و $MP \parallel CX$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید $MK \perp PB$.

۶. تمام توابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x)+f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست!)

سوالات مرحله دوم بیست و چهارمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۵

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز اول

---

۱. فرض کنید دایره‌ی $C_۲$ از مرکز دایره‌ی $C_۱$ گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دل‌خواهی از $C_۱$ و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی $C_۲$ باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$P(x+y,x-y)=۲P(x,y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k>۱$)، دست‌کم دوتایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k-۱$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی iام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته‌ی $[a_i,b_i]$ بنامید که در آن $a_i<b_i$).

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز دوم

۴. الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn+1$ بر $m+n$ بخش‌پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m,n>2$ ثابت کنید دنباله‌ی $(a_0,a_1,\dots,a_k)$ از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ موجود است که $a_0=m$ و $a_k=n$ و برای هر $(i=0,1,\dots,k-1)$ داریم

$$a_i+a_{i+1}\,\big|\,a_ia_{i+1}+1$$

۵. نقاط A، B، C و D با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M که $\frac{MA}{MB}=\frac{MD}{MC}$ چهار تاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این‌که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعداد جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضع اول برمی‌گردند.

سوالات مرحله دوم بیست و پنجمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۶

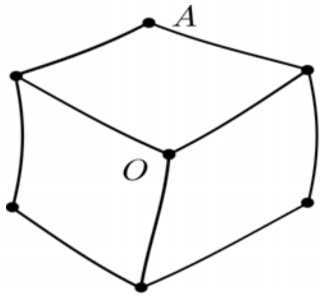
به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۶ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

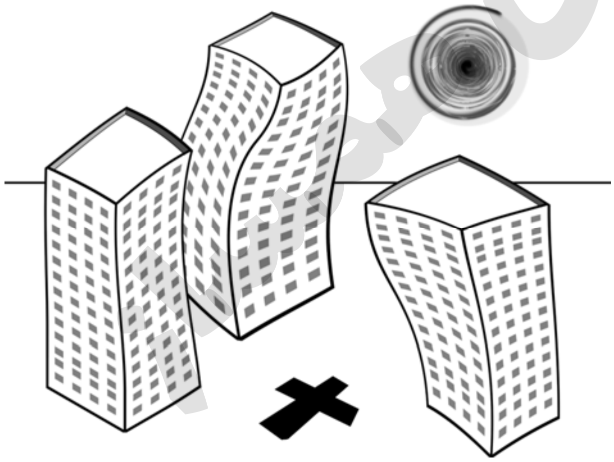
روز اول

۱) در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD=AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



۲) دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n+1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند.)

۳) در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از ۴۵ درجه بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ای افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمودی بر روی صفحه در نظر بگیرید.



بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

چهارشنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۶ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

۵) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را، به ترتیب، N و N' می‌نامیم. نشان دهید

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

۶) فرهاد برای جشنواره خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n دقیقاً یکی از سه عدد n، $2n$ و $3n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید عدد ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

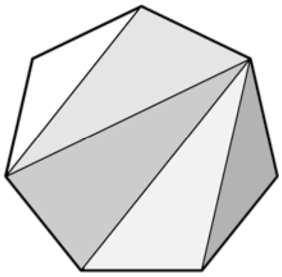
سوالات مرحله دوم بیست و ششمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۷

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۷ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم



۱) به چند طریق می‌توان $n-3$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم‌دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟

۲) فرض کنید I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC، متناظر با رأس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC، به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

۳) a، b، c و d اعدادی حقیقی هستند و دست‌کم یکی از c و d صفر نیست. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x، $f(x)\neq x$. نشان دهید اگر به ازای یک a، $f^{1387}(a)=a$، آنگاه برای هر x در دامنه‌ی f^{1387}، $f^{1387}(x)=x$. (f^n یعنی n بار ترکیب تابع f)

راهنمایی: نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x)=\dfrac{sx+t}{ux+v}$، اگر معادله‌ی $g(x)=x$ بیش از دو جواب داشته باشد آنگاه برای هر x، $g(x)=x$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

چهارشنبه، ۶ اردیبهشت ۱۳۸۷ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

۴) نشان دهید تنها عدد طبیعی a، که برای هر n طبیعی $۴(a^n + ۱)$ مکعب کامل باشد، یک است.

۵) می‌خواهیم برای تلفن‌های یک شهر شماره انتخاب کنیم. شماره‌ها ده رقمی‌اند و از رقم صفر نباید در آن‌ها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره‌ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره‌ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیش‌ترین تعداد شماره که می‌تواند استفاده شود چند تاست؟ انتخاب این بیش‌ترین تعداد شماره، به چند شکل ممکن است؟

۶) فرض کنید در مثلث ABC، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره‌ی محیطی ABC باشد و $AC = ۲\,OT$، آنگاه $AB = ۲\,OT'$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

سوالات مرحله دوم بیست و هفتمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۸

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

۱) فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دو است که قدرمطلق مقدار آن در سه نقطه‌ی ۱−، ۰ و ۱ کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-1,1]$،

$$|p(x)| \leq \frac{5}{4}.$$

۲) یک باغ مربعی‌شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰×۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار و یک درخت سیب وجود دارد. به‌علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطعه را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.)

نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰ تا بیش‌تر نیست.

۳) فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $P\widehat{A}Q \geq \widehat{A}$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۸ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

۴) $n(n+2)$ سرباز تازه‌کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم بر می‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+2$ ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۵) اعداد طبیعی $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و j متمایز، a_i بر $a_j - a_i$ بخش‌پذیر است. نشان دهید برای هر $i < j$،

$$ia_j \leq ja_i.$$

۶) ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده‌است؛ ممکن است برخی کارتی نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاور بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-1$، i و $i+1$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲ کارت شماره‌ی ۱ است!)

فرض کنید در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

سوالات مرحله دوم بیست و هشتمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۸۹

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۹ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - ۱$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + ۱$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab + ۱)^۲ + (a - b)^۲$ مربع کامل نیست.

۲) n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{۲}{۳}(n^۲ - n)$ بیش‌تر نیست.

۳) دایره‌های $W_۱$ و $W_۲$ در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی $W_۱$ و $W_۲$ هستند به طوریکه AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی $W_۲$ را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$D\widehat{P}M = B\widehat{D}C$$

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عددهایی حقیقی‌اند و

$$\min\{d, b+d\} > \max\{|c|, |a+c|\}$$

ثابت کنید که معادله‌ی $P(x) = 0$ در بازه‌ی $[-1,1]$ جواب ندارد.

۵) در مثلث ABC، $\widehat{A} = 60^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶) مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاسِ مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-1)^2$ بیشتر نیست.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

سوالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره المپیاد ریاضی

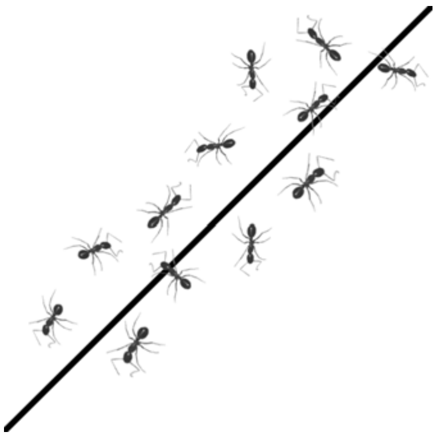
سال ۱۳۹۰

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۸ اردیبهشت ۱۳۹۰ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

۱) ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصلهٔ سر هر دو مورچه بیش‌تر از دو سانتی‌متر باشد فاصلهٔ سر دست‌کم دو مورچه بیش‌تر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)



۲) در مثلث ABC داریم $\widehat{ABC} = ۶۰^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویهٔ $\widehat{BAC}$ را در نقطهٔ D قطع کند. هم‌چنین از رأس C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویهٔ $\widehat{ABC}$ را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید $\widehat{BED} \leq ۳۰^\circ$.

۳) همهٔ دنباله‌های صعودی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i + j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$ آن‌گاه $a_i \leq a_j$.)

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۹ اردیبهشت ۱۳۹۰ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازهٔ $(-1,1)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها صفر و مجموع مربع‌های آن‌ها ۲۰ باشد.

۵) رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کم‌یاب است. این پرندهٔ زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانش‌مندان حقیقت جدیدی دربارهٔ این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای iاُم، jاُم، kاُم و lاُم، که $i < j < k < l$ و این پرنده در روزهای iاُم و kاُم هم‌رنگ باشد و در روزهای jاُم و lاُم نیز هم‌رنگ و به رنگی متفاوت از روزهای iاُم و kاُم باشد. حداکثر طول عمر این پرنده بر حسب n چند روز است؟

۶) اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط دادهٔ شدهٔ l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینهٔ l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$ آن‌گاه $BD' + CE' = D'E'$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

سوالات مرحله دوم سی‌امین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۱

به نام او

مرحلهٔ دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

دوشنبه، ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ — روز اول — زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) دایرهٔ C_1 و نقطهٔ O روی آن مفروض است. دایرهٔ C_2 به مرکز O، C_1 را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. C_3 دایره‌ای است که در نقطهٔ R بر C_2 مماس خارج و در نقطهٔ S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطهٔ Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۲) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳ و... n را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیهی از مجموعِ دو عددِ مجاورش باشد؟

۳) ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > 1$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعدادِ

$n + t$، $n^2 + t$، $n^3 + t$ و...

توان کامل نیستند. (دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی a توان کامل گفته می‌شود اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $m \geq 2$ و $a = b^m$.)

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n + 1391$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n^2 + 1391$ باشد؟

۵) چندجمله‌ایِ درجهٔ دوی $x^2 + ax + b$، با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این‌که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^2 - 4b$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیره‌های a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ایِ چهار متغیرهٔ $P(a,b,c,d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:

> چندجمله‌ای درجهٔ چهار $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل‌ضرب چهار چندجمله‌ایِ درجهٔ یک باشد اگر و تنها اگر $P(a,b,c,d) \geq 0$.

۶) دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس است. قرینهٔ نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

سوالات مرحله دوم سی و یکمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۲

روز اول

۱. همهٔ a و bهای طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که

$$\frac{a}{b} = b_{/}a.$$

(توضیح: اگر $a = 92$ و $b = 13$، آن‌گاه $b_{/}a$ برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

۲. فرض کنید اعداد طبیعی w_1، w_2،... و w_n، وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنهٔ کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنهٔ باقی‌مانده نیز کامل است.

۳. مثلث دل‌خواه ABC داده شده است. وسط کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایرهٔ محیطی در نقطهٔ N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

موفق باشید

روز دوم

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطهٔ K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایرهٔ C را در نقطهٔ T قطع می‌کند. قرینهٔ P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شمارهٔ ستون و شمارهٔ سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول 3×3 را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همهٔ اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول 9×5 زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب با علامت ↘ و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های 3×3 با علامت ❄ مشخص شده است. توجه کنید که خانهٔ گوشهٔ راست - بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به‌تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						↘			
۲		❄	❄	❄			↘		
۳		❄	❄	❄				↘	
۴		❄	❄	❄					↘
۵									

(راهنمایی: ابتدا به این سؤال فکر کنید که اعداد یک جدول 3×3 در چه صورت قابل صفر کردن است.)

۶. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = [\frac{2a_{n+1}}{a_n}] + [\frac{2a_n}{a_{n+1}}]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = 4$ و $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

موفق باشید

سوالات مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۳

روز اول

۱. فروش‌گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش‌گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دل‌خواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همهٔ سبدها را با هم برابر کرد؟

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطهٔ N و P، به‌ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطهٔ Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$. ثابت کنید

$$\widehat{BCQ} = \frac{۱}{۲}\widehat{PQA}.$$

۳. اعداد حقیقی و نامنفی x، y و z مفروض هستند. می‌دانیم

$$۲(xy + yz + zx) = x^۲ + y^۲ + z^۲.$$

ثابت کنید

$$\frac{x + y + z}{۳} \geq \sqrt[۳]{۲xyz}.$$

موفق باشید

روز دوم

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m$$

۵. زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.

الف. یک مجموعهٔ توانای چهار عضوی مثال بزنید.

ب. ثابت کنید یک مجموعهٔ توانای متناهی بیش از چهار عضو ندارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای»، اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همهٔ به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و یک گروه جدید را تشکیل می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همهٔ اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر $\sqrt{۲n} + ۱$ است.

موفق باشید

سوالات مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹٤

۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظهٔ خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظهٔ کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظهٔ آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظهٔ کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد (به شرط این‌که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظهٔ کامپیوتر باشند، می‌توان $f+g$ و $f-g$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند.)

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x-\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$، $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ و ...
همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنهٔ هر دو باشد، برابر باشند.)

۳. دایرهٔ دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر Pمحل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

۴. در چهارضلعی $ABCD$، AC نیمساز زاویهٔ A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است.)

۵. محیط یک دایره را با ۲n نقطه به ۲n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n+۱$ بازه به طول‌های ۱، ۲، ...، $n+۱$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

۶. $n \geq ۵۰$ عددی طبیعی است. نشان دهید می‌توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ‌تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می‌توان به صورت $۱۴ + ۸۰$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{۹۴}$ بزرگ‌تر نیستند.

سوالات مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۵

روز اول ، ۹ اردیبهشت ۱۳۹۵

۱ – فرض کنید $a \leq b \leq c$ سه عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید :

$$\frac{(c-a)^{۲}}{۶c} \leq \frac{a+b+c}{۳} - \frac{۳}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}$$

۲ – مثلث ABC با دایره محیطی ω مفروض است. می‌دانیم $\angle C = ۲\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره ω رسم می کنیم تا امتداد BC را در نقطه E قطع کند . دایره ω را طوری رسم می کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس شود و از نقطه B نیز بگذرد . این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می کند . از نقطه E مماس KE را بر دایره ω رسم می کنیم .(BC بین A و K می باشد) اگر وسط کمان BC از دایره ω (که شامل A نیست) را M بنامیم ، ثابت کنید چهار نقطه A, F, M, K بر یک دایره اند .

۳ – فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم ها در این شورا براساس رای موافق و مخالف است . یک "روش قابل قبول تصمیم گیری" روشی است که دارای دو شرط زیر باشد :

شرط صعودی بودن : اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف نظرش را به موافق تغییر دهد باز هم نتیجه مثبت بماند .

شرط تقارن :اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند ، نتیجه نهایی نیز تغییر کند .

یک نوع روش قابل قبول تصمیم گیری ، "وزن دار" است به این ترتیب که اگر به اعضا ، وزن های نامنفی $a_۱، a_۲، ...، a_۶$ اختصاص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رای دهنگان مخالف و موافق مشخص شود . مثلا اگر $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = a_۳ = \cdots = a_۶ = ۱$ تصمیم گیری بر اساس رای اکثریت است مگر در حالت برابری که رای نفر اول تعیین کننده خواهد بود . یک روش قابل قبول برای تصمیم گیری مثال بزنید که به شکل رای گیری وزن دار قابل توصیف نباشد . الزاما باید درستی مثال خود را ثابت کنید .

روز دوم ، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵

۴ – $n \geq ۳$ خط را در صفحه رسم کرده ایم به طوریکه هیچ دوتایی موازی نیستند و هیچ سه تایی نیز همرس نمی باشند . یک نقطه تقاطع دوتا از این خطوط را *درونی* مینامیم هرگاه در دوطرف این نقطه روی هر دوخط گذرا از این نقطه ، نقاط دیگری وجود داشته باشند . ثابت کنید حداقل $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع ، درونی هستند .

۵ – چهارضلعی $ABCD$ و نقطه T داخل آن جوری درنظر گرفته شده است به طوری که AC نیم‌ساز زاویه BCD است و $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.

ثابت کنید $\angle BAT = \angle DAC$

۶ – تمام توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق کند :

الف) به ازای هرعدد طبیعی n و بزرگ تر از ۱۳۹۴ داشته باشیم: $۲f(n) \leq n^۳$

ب) به ازای هر m,n داشته باشیم: $m + n \mid f(m) + f(n)$

سوالات مرحله دوم سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۶

روز اول ، ۳۱ فروردین ۱۳۹۶

۱ – الف) ثابت کنید دنباله ... $a_۱،a_۲،a_۳،$ از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i،j \in \mathbb{N}$ که $i < j$:

$$\left(a_i + j \text{ ، } a_j + i\right) = ۱$$

ب) فرض کنید p یک عدد اول و فرد می باشد . ثابت کنید دنباله ... $a_۱،a_۲،a_۳،$ از اعداد طبیعی وجود دارد که هیچ کدام از عبارت های $\left(a_i + j \text{ ، } a_j + i\right)$ با شرط $i < j$ بر p بخش پذیر نباشد.

" توجه کنید که منظوراز $(a،b)$ بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک b و a می باشد "

۲ – نقطه P، داخل ذوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ که $AB \parallel CD$ است طوری انتخاب شده است که اولاً $\angle APB > \angle ADC$ و ثانیاً $\angle DPC > \angle ABC$. ثابت کنید $AB + CD > AD + BC$

۳ – جدولی $n \times n$ داریم که n بر سه بخش پذیر است . می خواهیم برخی از خانه های یک در یک جدول را به رنگ سیاه در بیاوریم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ که $m > ۱$ ، تعداد خانه های سیاه از تعداد خانه های سفید بیشتر نباشد . حداکثر چند خانه را می توانیم سیاه کنیم ؟

روز دوم ، ۱ اردیبهشت ۱۳۹۶

۴ – فرض کنید x،y دو عدد حقیقی و مثبت باشند بطوری که $x^4 - y^4 = x - y$. ثابت کنید

$$\frac{x-y}{x^6 - y^6} \le \frac{4}{3}(x+y)$$

۵ – پنج کودک باهوش دور میزی نشسته اند . معلم تعداد سیب را بین آن ها تقسیم می کند و می گوید من به برخی سیب داده ام . تعداد سیب های هیچ دونفری یکسان نیست و هر نفر علاوه بر دانستن تعداد سیب های خود ، تعداد سیب های دونفر کناری خود را نیز می داند . هر نفر باید اختلاف تعداد سیب های دونفر رو به رویی خود را حدس بزند .

الف) ثابت کنید اگر تعداد سیب ها کمتر از ۱۶ باشد ، حداقل یکی از کودکان می تواند اختلاف سیب های دو نفر رو به رویی خود را حدس بزند.

ب) ثابت کنید اگر تعداد سیب ها برابر با ۱۶ باشد ، معلم می تواند جوری سیب ها را بدهد که هیچ کس نتواند اختلاف تعداد سیب های دونفر رو به رویی خود را حدس بزند.

۶ – فرض کنید ABC یک مثلث باشد . نقطه X را روی دایره محیطی این مثلث در نظر گرفته ایم . از نقطه X دو عمود به ضلع های AB،AC می زنیم تا ضلع BC را در نقاط P،Q قطع کند . مرکز دایره محیطی مثلث XPQ را Y بنامید.

الف) اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد ، ثابت کنید با تغییر X روی دایره محیطی ABC ، Y روی یک دایره حرکت می کند.

ب) اگر با تغییر X روی دایره محیطی ABC ، Y روی یک دایره حرکت کند ، ثابت کنید ABC متساوی الاضلاع است.

سوالات مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۷

به نام خدا

مرحلهٔ دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۳۰ فروردین ۱۳۹۷ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهاست و دایره محیطی مثلث APB، BC را در X قطع می‌کند. خط گذرا از D و موازی با BC، AX را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = ۲ \times \angle YCA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{۲}$ عدد مثبت به‌دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیداً صعودی $r_۱ < r_۲ < \cdots < r_n$ و $s_۱ < s_۲ < \cdots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_۱} + k)(a^{r_۲} + k)\dots(a^{r_n} + k) = (a^{s_۱} + k)(a^{s_۲} + k)\dots(a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

به نام خدا

مرحلهٔ دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

جمعه، ۳۱ فروردین ۱۳۹۷ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. همه توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^{2}-xy+y^{2})=x^{3}+y^{3}$$

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست‌کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

۶. دو دایره ω_{1} و ω_{2} یک‌دیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_{1} و ω_{2} را به‌ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_{1} را در D و F و ω_{2} را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

سوالات مرحله دوم سی و هفتمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۸

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۸

روز اول

۱ – یک مستطیل داریم که اضلاع درونی آن ها ، آینه هستند . پرتویی از گوشه یکی از رئوس مستطیل به درون آن می تابانیم به گونه ای که پس از چندبار انعکاس یافتن و بدون گذر از رئوس دیگر به رأس روبرویی رأس اولیه برود . ثابت کنید پرتو از مرکز مستطیل گذشته است .

۲ – مثلث متساوی الساقین $ABC(AB = AC)$ مفروض است . نقاط Y, X, Z روی اضلاع AB, BC, CA قرار دارند به نحوی که $\angle YXB = \angle ZXC$. خطی موازی با YZ از C رسم می کنیم تا XY را در T قطع کند . ثابت کنید AT نیم ساز زاویه $\angle BAC$ می باشد .

۳ – فرض کنید $n > ۲$ یک عدد طبیعی است . ثابت کنید اعداد طبیعی $x_۱, x_۲, ..., x_n > ۱$ وجود ندارند به نحوی که

$$(x_۱ x_۲ ... x_n)^۲ = x_۱^۳ + x_۲^۳ + ... + x_n^۳$$

سوالات مرحله دوم ۱۳۹۸

روز دوم

۴ – دایره ای به قطر AB مفروض است . نقاط C,D روی این دایره و در طرفین AB درنظر گرفته شده است . از نقطه D خطی موازی با AC و از نقطه C خطی موازی با AD رسم می کنیم تا AB را به ترتیب در F,E قطع کنند . حال از نقاط F,E عمودی بر AB رسم می کنیم تا BD,BC را به ترتیب در Y,X قطع کنند . (نقاط A,B,C,D طوری انتخاب می شوند که X,Y داخل دایره قرار گیرد.) ثابت کنید محیط مثلث AXY نصف پاره خط CD است .

در سطر سوم سوال ۴ ، شاهد یک غلط تایپی بودیم . " حال از نقاط E,F عمودی بر AB رسم می کنیم تا BD,BC را به ترتیب در Y,X قطع کنند" .

۵ – روزبه و کیوان مشغول انجام یک بازی هستند . چندجمله ای $x^{۱۳۹۸}+۱$ روی تخته نوشته شده است با شروع از روزبه ، در هرمرحله هر شخص ، عدد صحیح $۰ \le k \le ۱۳۹۸$ را انتخاب می کند و چندجمله ای روی تخته را با x^k جمع می زند . هربار بعد از حرکت کیوان ، اگر مقدار حقیقی x موجود بود که چندجمله ای روی تخته به ازای آن منفی شود ، روزبه می برد . ثابت کنید بدون توجه به روش بازی روزبه ، کیوان می تواند طوری بازی کند که هیچ گاه نبازد

۶ – ۵۶ نقطه به شکل ۷ سطر و ۸ ستون داریم . دو نقطه را به عنوان نقاط قرینه ساز انتخاب می کنیم. یک نقطه دلخواه را انتخاب و نسبت به یکی از نقاط قرینه ساز قرینه می کنیم وهمین کار را با نقطه جدید انجام می دهیم و این کار را تا جای ممکن تکرار می کنیم (نقاط جدید باید یکی از آن ۵۶ نقطه ابتدایی باشند) . تمام نقاطی که به آن ها رسیده ایم را در یک دسته قرار می دهیم . کمترین تعداد دسته ها چقدر است ؟

سوالات مرحله دوم سی و هشتمین دوره المپیاد ریاضی

سال ۱۳۹۹

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۹

روز اول – ۲۴ تیر

۱ – مجموعه S با تعداد اعضای n مفروض است. می خواهیم تمام زیرمجموعه های S را به k دسته افراز کنیم بطوریکه اگر در یک دسته مجموعه های $A, B, A \cup B$ باشند، آنگاه $A = B$. حداقل تعداد دسته های لازم را پیدا کنید.

۲ – فرض کنید x, y, z حقیقی مثبت هستند بطوریکه $x + y + z = ۱۳۹۹$. بیش ترین مقدار عبارت $[x]y + [y]z + [z]x$ را بیابید.

۳ – دایره ω_1 با مرکز O_1 مفروض است. دایره ω_2 با مرکز O_2 از نقطه O_1 می گذرد و دو دایره در نقاط A, B یکدیگر را قطع می کنند. خط مماس بر دایره ω_1 در نقطه A را l می نامیم. دایره ای که مرکز آن روی خط l بوده و از نقاط O_1, O_2 می گذرد، دایره ω_2 را برای بار دوم در P قطع می کند. ثابت کنید قرینه P نسبت به l روی دایره ω_1 قرار می گیرد.

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۹

روز دوم – ۲۵ تیر

۴ – دو دایره ω_1,ω_2 در نقاط A,B تقاطع دارند. نقطه X روی ω_1 و نقطه Y روی ω_2 طوری قرار دارند که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیکتر از A است. اگر قرینه B نسبت به X و Y را بترتیب C و D بنامیم. ثابت کنید:

$$\angle CAD < 90^\circ$$

۵ – دوتایی a,b از اعداد طبیعی را مربع‌ساز می گوییم هرگاه $ab+1$ مربع کامل باشد. تمام n های طبیعی را بیابید که مجموعه $\{1,2,\dots,2n\}$ را بتوان به دوتایی های مربع‌ساز افراز کرد.

۶ – دایره ای را به $2n$ قطاع مساوی تقسیم کرده ایم. میخواهیم روی هریک از آنها یکی از اعداد $0,1,2,\dots,n-1$ را بنویسیم بطوریکه:

- هر عدد دقیقا دو بار استفاده شود.
- برای هر عدد طبیعی $0 \le i \le n-1$ ، بین هر دو قطاع با شماره i، از یک طرف، دقیقا i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

ثابت کنید این کار برای $n = 1399$ امکان پذیر نمی باشد.