مرجع المپیاد ریاضی ایران

سوالات و پاسخنامه ی تشریحی آزمون مرحله دوم چهلمین المپیاد ریاضی ایران

۱۸ و ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۱

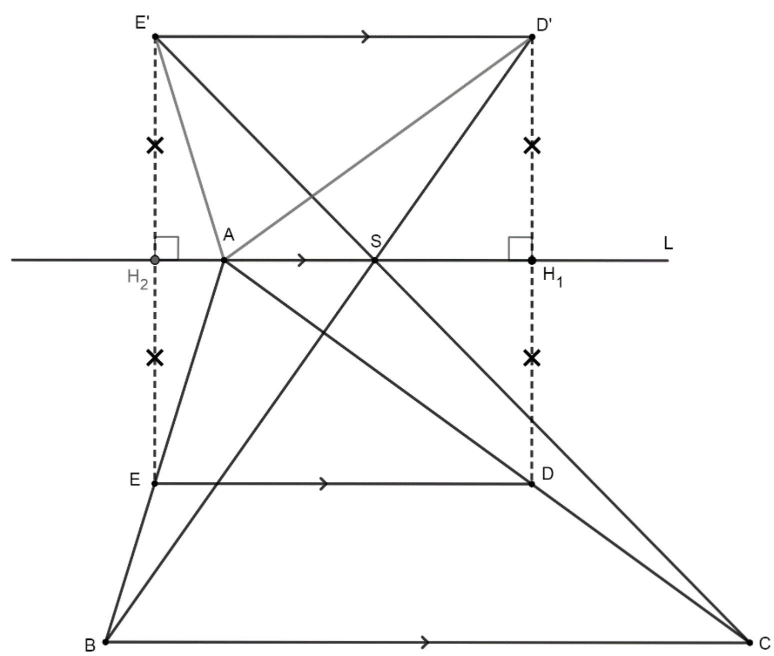
تهیه کنندگان	راه حل ها
مهدی آقایی	سوال ۱ : صفحه ۲
علی احمدوند	سوال ۲ : صفحه ۴
امیرمحمد بندری ماسوله	سوال ۳ : صفحه ۷
محمد داوود آبادی فراهانی	سوال ۴ : صفحه ۹
مهران طلایی	سوال ۵ : صفحه ۱۱
سینا عزیزالدین	سوال ۶ : صفحه ۱۲

با تشکر از : محمدجواد پاخیریان، امیرحسین پورحسینی، طاها روزبهانی، آرمان طهماسبی زاده، امیرمهدی منصوری و محمد رضا نظری.

سوالات و راه حل‌های مرحله دوم چهلمین دوره ی المپیاد ریاضی، ۱۴۰۱

۱. مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه ای که $DE||BC$. حال خطی به نام L از A موازی با BC رسم می کنیم و قرینه ی D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می نامیم. ثابت کنید که $E'C$ و $D'B$ و L همرسند.

راه حل :



فرض کنید : $BD' \cap CE' = S$

در این صورت : چون $DE||L$ پس $DH_۱ = EH_۲ = D'H_۱ = E'H_۲$. بنابراین $DE||D'E'$. پس طبق قضیه ی موازی مورب :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{SBC} = \widehat{SD'E'} \\ \\ \widehat{SCB} = \widehat{SE'D'}\end{array}\right\} \overset{\text{زز}}{\Rightarrow} \Delta SD'E' \sim \Delta SBC \Rightarrow \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{D'E'}{BC}$$

اگر طول ارتفاع نظیر S در $\Delta SD'E'$ و ΔSBC به ترتیب $h_۱$ و $h_۲$ و طول ارتفاع نظیر A در $\Delta AD'E'$ و ΔABC به ترتیب $h_۱'$ و $h_۲'$ باشد :

$$\Delta AD'E' \cong \Delta ADE \Rightarrow \frac{h_۱'}{h_۲'} = \frac{D'E'}{BC} = \frac{h_۱}{h_۲} \Rightarrow \frac{h_۱'}{h_۱' + h_۲'} = \frac{h_۱}{h_۱ + h_۲}$$

چون $D'E'\|BC$ پس $h_1 + h_2 = h_1' + h_2'$ و برابر فاصله بین BC و $D'E'$ است!

پس $h_1 = h_1'$ که یعنی طول ارتفاع A و S از $D'E'$ یکسان است. پس $AS\|D'E'\|l \leftarrow S \in L \leftarrow$ حکم اثبات شد.

۲. همه ی تابع های $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم :

$$f(xf(y)+f(x)+y)=xy+f(x)+f(y)$$

راه حل ۱ :

اگر $P(x,y)$ معادله اصلی سوال باشد :

$$P(0,-f(0)):f(0)=f(0)+f(-f(0))\Rightarrow f(-f(0))=0$$

$$P(-f(0),-f(0)):f(-f(0))=f(0)^2+2f(-f(0))\Rightarrow f(0)^2=0\Rightarrow f(0)=0$$

$$P(x,0):f(f(x))=f(x)\ ①$$

حال اگر $f(x_0)=0$ در این صورت :

$$P(x_0,x_0):f(x_0)=(x_0)^2+2f(x_0)\Rightarrow x_0^2=0\Rightarrow x_0=0$$

در نتیجه :

$$\forall x\neq 0: f(x)\neq 0\Rightarrow -\frac{x}{f(x)}\in\mathbb{R}$$

$$P\left(-\frac{x}{f(x)},x\right):f\left(-x+f\left(-\frac{x}{f(x)}\right)+x\right)=-\frac{x^2}{f(x)}+f\left(-\frac{x}{f(x)}\right)+f(x)\ \ (\forall x\neq 0)$$

$$\Rightarrow f\left(f\left(-\frac{x}{f(x)}\right)\right)=-\frac{x^2}{f(x)}+f\left(-\frac{x}{f(x)}\right)+f(x)\ ②$$

$$①,②\Rightarrow f\left(-\frac{x}{f(x)}\right)=-\frac{x^2}{f(x)}+f\left(-\frac{x}{f(x)}\right)+f(x)\Rightarrow f(x)-\frac{x^2}{f(x)}=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{f(x)}\Rightarrow f(x)^2=x^2\Rightarrow f(x)=\pm x$$

حال به بررسی تابع و ضابطه ای $f(x)\begin{cases}x & \forall x\in S\\ -x & \forall x\notin S\end{cases}$ می‌پردازیم. فرض کنید :

$$\exists\alpha\neq 0: f(\alpha)=-\alpha$$

$$P(\alpha,\alpha):f(\alpha f(\alpha)+f(\alpha)+\alpha)=\alpha^2+2f(\alpha)\xrightarrow{f(\alpha)+\alpha=0}f(-\alpha^2)=\alpha^2-2\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^۲ = \alpha^۲ - ۲\alpha \Rightarrow \alpha = ۰ \ \rightarrow \text{تناقض} \\ \\ -\alpha^۲ = \alpha^۲ - ۲\alpha \Rightarrow ۲\alpha = ۲\alpha^۲ \xRightarrow{\alpha \neq ۰} \alpha = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱) = -۱ \\ \forall x \neq -۱ : f(x) = x \end{cases} \xRightarrow{x \neq ۱} P(x,۱) : f(-x + f(x) + ۱) = x + f(x) - ۱$$

$$\xRightarrow{-x+f(x)=۰} f(۱) = ۲x - ۱ \Rightarrow ۲x = ۰ \ \rightarrow \text{تناقض}$$

در نتیجه $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x$. حال در معادله ی اصلی سوال جایگذاری می‌کنیم.

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y) \Rightarrow xy + x + y = xy + x + y \ \rightarrow \text{صدق می‌کند}$$

در نتیجه جواب معادله ی تابعی $f(x) = x$ می‌باشد.

راه حل ۲ :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y)$

اگر $P(x,y)$ معادله اصلی سوال باشد :

$P(-۱,-۱) : f(f(-۱) - f(-۱) - ۱) = ۱ + ۲f(-۱) \Rightarrow f(-۱) = -۱$

$P(x,-۱) : f(f(x) - x - ۱) = f(x) - x - ۱$

حال اگر $A = xf(y) + f(x) + y$ در نظر بگیریم و در معادله ی آخر به جای x، A بگذاریم، داریم :

$f(f(A) - A - ۱) = f(A) - A - ۱$

طبق معادله ی اصلی داریم :

$$\begin{cases} f(A) = xy + f(x) + f(y) \\ A = xf(y) + f(x) + y \end{cases} \Rightarrow f(A) - A = x\big(y - f(y)\big) + f(y) - y = (x-۱)\big(y - f(y)\big)$$

$$\Rightarrow f\Big((x-۱)\big(y-f(y)\big) - ۱\Big) = (x-۱)\big(y-f(y)\big) - ۱$$

اگر $y_۰ \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $f(y_۰) \neq y_۰$ آن گاه می‌توانیم در معادله ی آخر مقادیر زیر را جایگذاری کنیم :

$$\begin{cases} y \to y_۰ \\ x \to \dfrac{x+۱}{y_۰ - f(y_۰)} + ۱ \end{cases} : f(x) = x$$

که با وجود $y_۰$ در تناقض است $\Leftarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x$

۳. خانه های یک جدول $n \times n$ به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده اند. به ازای چه n هایی می توان خانه های جدول را با اعداد $۱,۲,۳,\dots,n$ به گونه ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد :

الف) در هر سطر تمامی اعداد $۱,۲,۳,\dots,n$ آمده باشد و مجموع اعداد خانه های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه های سفیدش برابر باشد.

ب) در هر ستون تمامی اعداد $۱,۲,۳,\dots,n$ آمده باشد و مجموع اعداد خانه های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه های سفیدش برابر باشد.

راه حل :

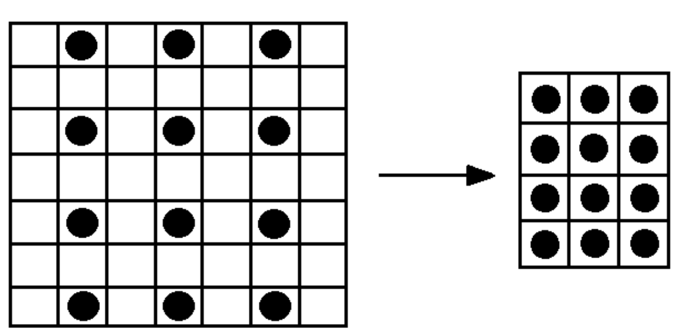
فقط $n \equiv ۰$ (به پیمانه ۴) کار می‌کند.

در ابتدا $۴k+۱$ و $۴k+۲$ را رد می‌کنیم. برای اینکه چنین جدولی وجود داشته باشد، باید جمع اعداد ۱ تا n بر ۲ بخش پذیر باشد. پس : $۲|\frac{n(n+۱)}{۲} \Rightarrow ۴|n(n+۱)$

برای $n \equiv ۱$ و ۲ (به پیمانه ۴) رابطه ی $۴|n(n+۱)$ درست نیست.

حال $۴k+۳$ را رد می‌کنیم :

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید چنین جدولی وجود دارد و خانه ی بالا چپش سیاه باشد. سطر ها را از بالا به پایین با $۱,۲,۳,\dots,n$ و ستون ها را از چپ به راست $۱,۲,۳,\dots,n$ نام‌گذاری می‌کنیم. بیایید از سطر های فرد، ستون های زوجشان را در نظر بگیرید (یعنی تمام خانه هایی از جدول را دز نظر بگیرید که عدد سطریشان فرد و عدد ستونیشان زوج باشد). اگر این خانه ها را به یکدیگر بچسبانیم، به یک جدول $\frac{n+۱}{۲} \times \frac{n-۱}{۲}$ با این خاصیت که جمع اعضای هر سطر و ستونی با یکدیگر برابر است. می‌رسیم که این تناقض است ، چرا که اگر این مقدار x باشد، جمع اعداد کل جدول جدید از طرفی برابر $x \times \frac{n-۱}{۲}$ و از طرفی برابر $x \times \frac{n+۱}{۲}$ است که تناقض است.



مثالی برای نحوه ی انتخاب خانه های مذکور :

حال مثالی برای (به پیمانه ۴) $n \equiv ۰$ می‌زنیم :

سطر اول را به این صورت می‌گذاریم :

اگر $n = ۴t$، از سمت چپ، ۴ تا ۴ تا اعداد را به شکل $۴s + ۱, ۴s + ۲, ۴s + ۴, ۴s + ۳$ بگذارید که $s = ۰,۱,۲, \dots, t - ۱$. یعنی :

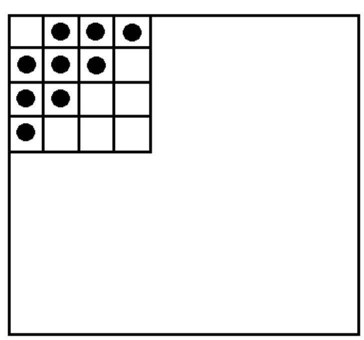
$$۱,۲,۴,۳,۵,۶,۸,۷$$

سطر اول درست است، چرا که اگر هر ۴ تایی را ببینید (از چپ ۴ تا ۴ تا جدا کنیم)، اعداد $۴s + ۱, ۴s + ۴$ همرنگ و اعداد $۴s + ۲ , ۴s + ۳$ هم همرنگ اند و جمع این دو گروه یکیست :

$$(۴s + ۱) + (۴s + ۴) = ۴s + ۵ = (۴s + ۲) + (۴s + ۳)$$

حال برای $k = ۲,۳, \dots, n$ ، با استقرا سطر k را از روی سطر $k - ۱$ به این صورت می‌سازیم که اگر در سطر $k - ۱$، عدد x در جایگاه i بود و $i > ۱$، در سطر k در جایگاه $i - ۱$ عدد x را می‌گذاریم و برای $i = ۱$، این عدد را در جایگاه n. سطر k هم در شرط صدق می‌کند، چرا که هر خانه ای که در سطر $k - ۱$ در خانه ای مشکی بود، در این سطر هم در خانه ای مشکی است و اگر در سفید بود، مجددا در خانه ای سفید است. حال کافیست ستون ها بررسی شوند.

ستون ها قرینه نسبت به قطر اصلی جدولند که دو خانه ی بالا چپ و پایین راست را به یکدیگر وصل می‌کند، چرا که هر عدد به صورت قطری حرکت کرده و در یک مربع این حرکت باعث قرینه بودن سطر ها و ستون ها نسبت به قطر اصلی مذکور می‌شود :



منظور از حرکت قطری، همان روش ساخت جدولمان است.

۴. در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه ها سیاه شد اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همه ی خانه های جدول خود هستند.

روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانه ی سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.

روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانه ی سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن را به طور کامل قرمز می‌کند.

ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همه ی خانه های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همه ی خانه های جدولش را قرمز کند.

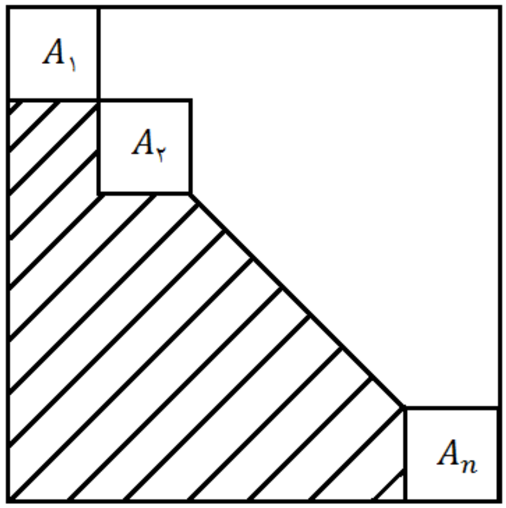
راه حل :

برای هر نوع جدول ثابت می‌کنیم اگر امین بتواند قرمز کند، علی هم می‌تواند. اگر جدول را از زاویه ی ۹۰° (چرخیده) نگاه کنیم، حرکت های امین مثل حرکت های علی می‌شوند و حرکت های علی مثل حرکت های امین و چون برای هر نوع جدول می‌خواهیم حکم ابتدایی (یک طرف اگر و تنها اگر) را ثابت کنیم، طرف دیگرش هم ثابت می‌شود. (اگر علی بتواند، امین هم می‌تواند زیرا با ۹۰° چرخش به حالتی دیگر تبدیل می‌شود که از فرض «امین می‌تواند» به حکم «علی می‌تواند» می‌رسیم)

جا به جایی دو سطر(یا ستون) در مسئله تفاوتی ایجاد نمی‌کند زیرا مسئله به هم‌سطری و هم‌ستونی مربوط است که طی این عملیات ها ثابت می‌ماند.

فرض کنید امین ابتدا خانه $A_۱$ را انتخاب کرده باشد که سطرش خانه ی سیاه دیگری ندارد ($A_۱$ سیاه است) و ستونش را قرمز می‌کند، می‌توانیم (با جا به جایی سطر و ستون ها) فرض کنیم $A_۱$ خانه ی بالا چپ جدول است. بعد از $A_۱$ امین باید $A_۲$ را نتخاب کند. این خانه در ستون قرمز نمی‌تواند باشد و هم‌سطر $A_۱$ هم نمی‌تواند باشد زیرا $A_۱$ در سطر خودش تنهاست. باز هم با جا به جایی سطر ها و ستون ها می‌توان $A_۲$ را به خانه ی پایین راستی $A_۱$ برد. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. هر A_i $(۳ \leq i \leq n)$ این خانه در j سطر بالا که $j < i$ نمی‌توانند باشند و در j ستون چپ هم نمی‌توانند باشند. پس با جابجایی سطر و ستون ها با ثابت نگه داشتن A_j ها، A_i پایین راست $A_{i-۱}$ می‌رود. $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ خانه های قطر اصلی جدول $n \times n$ می‌شوند. بالای این قطر اصلی کاملا سفید است! زیرا در هر مرحله سمت راست هر

A_i کاملا سفید بوده، زیرا A_i باید تنها سیاه سطر بوده باشد. حال اگر علی ابتدا خانه A_n را در نظر بگیرد، بعد $A_{n-۱}$، بعد... و سر آخر $A_۱$ می‌تواند جدول را کاملا قرمز کند زیرا هر مرحله آن A_i تنها خانه سیاه ستون خود خواهد بود.



۵. دنباله ی $(a_n)_{n\in N}$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که $a_1 = 2$ و برای هر $n \geq 1$ داریم :

$$a_{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \times a_n$$

ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n+1} \times a_n \times a_{n-1} \times \dots \times a_1$ عددی طبیعی و مربع کامل است.

راه حل :

گزاره ۱ : $a_n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \times 2$

اثبات :

به وضوح داریم : $a_n = 2 \times \left(1+\frac{1}{1}\right) \times \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow a_n = 2 \times \left(\frac{2}{1}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \dots \times \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = 2 \times \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow$$ گزاره ۱ اثبات شد

پس :

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times \frac{1}{n+1} = 2^n \times \frac{n^{n-1} \times (n-1)^{n-2} \times \dots \times 2^1}{(n-1)! \times (n-2)! \times \dots \times (2)!} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= 2^n \times \frac{(n!)^{n-1}}{\left((n-1)! \times \dots \times (2)!\right)^2} \times \frac{1}{n+1}$$

پس اگر n فرد باشد :

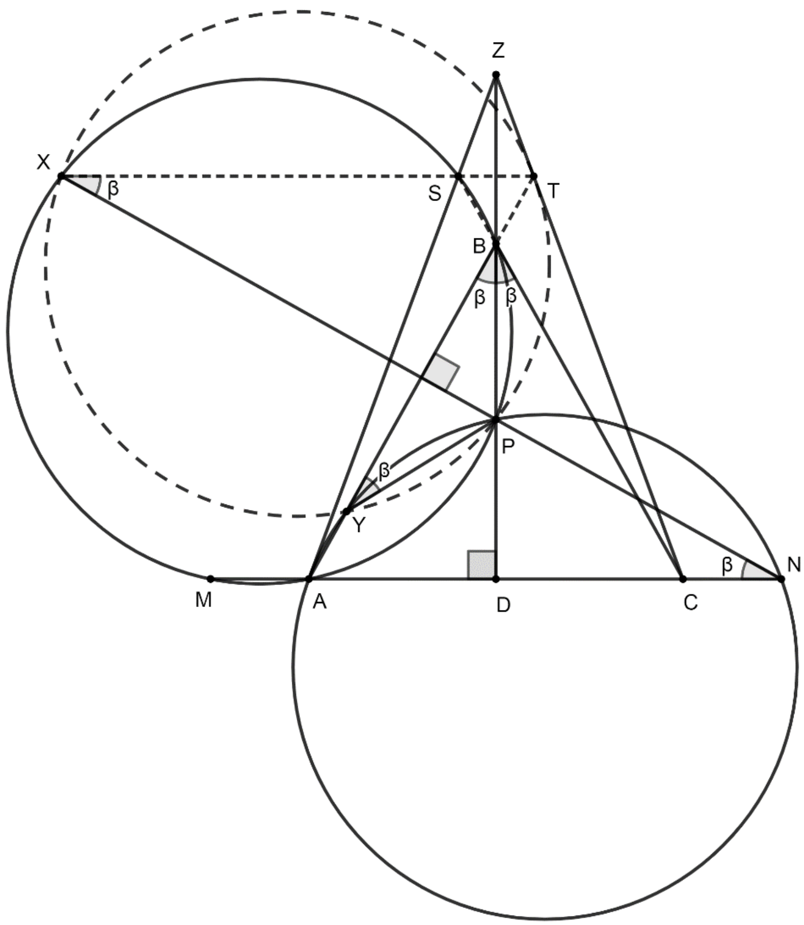
$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times \frac{1}{n+1} = \binom{n}{1}^2 \binom{n}{2}^2 \dots \binom{n}{\frac{n-1}{2}}^2 \times \frac{2^n}{n+1}$$

اگر $n = 2^k - 1$ بگیرید که k فرد باشد، پس :

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times \frac{1}{n+1} = \left(\binom{n}{1} \times \binom{n}{2} \times \dots \times \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \times 2^{\frac{2^k-k-1}{2}}\right)^2$$

۶. در مثلث متساوی الساقین ABC، $(BA = BC)$ نقطه P روی ارتفاع راس B به صورت دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایره ی APB خط AC را برای بار دوم در M قطع می‌کند. قرینه ی M نسبت به وسط AC را N می‌نامیم. خط NP دایره ی APB را در نقطه ی X $(X \neq P)$ و خط AB دایره ی APN را در نقطه ی Y $(Y \neq A)$ قطع می‌کند. مماس در A بر دایره ی APN، در نقطه ی Z با خط BP برخورد می‌کند. ثابت کنید که CZ بر دایره محیطی مثلث PXY مماس است.

راه حل :



نقطه ی S : برخورد دوم دایره ی PAB با AC

نقطه ی T : برخورد XS با AB

همچنین : $\widehat{ABC} = 2\beta$

گزاره ۱ : XT موازی با AC است.

اثبات : $\widehat{TXP} = \widehat{PAC} = \beta = \widehat{PMN} = \widehat{PNM} \Rightarrow XT || AC$

گزاره ۲ : $Z \in AS$ و $Z \in CT$.

اثبات : $\widehat{PAZ} = \widehat{PNA} = \beta = \widehat{PNS} \Rightarrow Z \in AS \xrightarrow{\text{تقارن}} Z \in CT$

گزاره ۳ : دایره $T \in PXY$.

اثبات : $\widehat{PYB} = \widehat{PNM} = \beta = \widehat{PXT} \Rightarrow T \in PXY$ دایره

گزاره ۴ : دایره ی PXY در T بر CZ مماس است.

اثبات : $\widehat{PTC} = \widehat{PSA} = \beta = \widehat{PXT} \Rightarrow$ حکم سوال اثبات شد

سوالات مرحله دوم چهلمین دوره ی المپیاد ریاضی، ۱۴۰۱

۱. مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه ای که $DE||BC$. حال خطی به نام L از A موازی با BC رسم می کنیم و قرینه ی D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می نامیم. ثابت کنید که $E'C$ و $D'B$ و L همرسند.

۲. همه ی تابع های $f: R \to R$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم :

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y)$$

۳. خانه های یک جدول $n \times n$ به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده اند. به ازای چه n هایی می توان خانه های جدول را با اعداد n ,… ,۱,۲,۳ به گونه ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد :

الف) در هر سطر تمامی اعداد n ,… ,۱,۲,۳ آمده باشد و مجموع اعداد خانه های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه های سفیدش برابر باشد.

ب) در هر ستون تمامی اعداد n ,… ,۱,۲,۳ آمده باشد و مجموع اعداد خانه های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه های سفیدش برابر باشد.

۴. در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه ها سیاه شد اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همه ی خانه های جدول خود هستند.

روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانه ی سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.

روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانه ی سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن را به طور کامل قرمز می‌کند.

ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همه ی خانه های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همه ی خانه های جدولش را قرمز کند

۵. دنباله ی $(a_n)_{n\in N}$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که $a_1 = 2$ و برای هر $n \geq 1$ داریم :

$$a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n \times a_n$$

ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n+1} \times a_n \times a_{n-1} \times \ldots \times a_1$ عددی طبیعی و مربع کامل است.

۶. در مثلث متساوی الساقین ABC، $(BA = BC)$ نقطه P روی ارتفاع راس B به صورت دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایره ی APB خط AC را برای بار دوم در M قطع می‌کند. قرینه ی M نسبت به وسط AC را N می‌نامیم. خط NP دایره ی APB را در نقطه ی X $(X \neq P)$ و خط AB دایره ی APN را در نقطه ی Y $(Y \neq A)$ قطع می‌کند. مماس در A بر دایره ی APN، در نقطه ی Z با خط BP برخورد می‌کند. ثابت کنید که CZ بر دایره محیطی مثلث PXY مماس است.