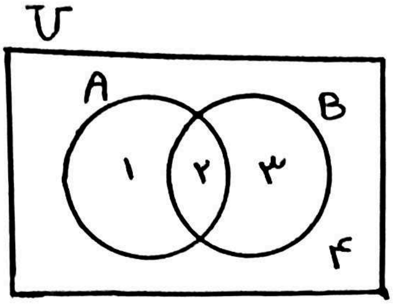
پاسخ سؤالات هندسه و گسسته آزمون خارج از کشور ۱۴۰۱



۱۰۳ - گزینهٔ «۴»

فرض کنید نواحی موجود در نمودار ون مجموعه‌های A و B را مطابق شکل شماره گذاری کنیم. در این صورت داریم:

$$A'\cup B=\{۳,۴\}\cup\{۲,۳\}=\{۲,۳,۴\}$$

$$A'\cap B'=\{۳,۴\}\cap\{۱,۴\}=\{۴\}$$

$$A'\cup B=A'\cap B'\Rightarrow\{۲,۳,۴\}=\{۴\}\Rightarrow\{۲,۳\}=\emptyset\Rightarrow B=\emptyset$$

---

۱۰۴ - گزینهٔ «۱»

می‌دانیم $(A\cap B)\subseteq B$ است و در نتیجه $(A\cap B)-B=\emptyset$، پس مجموعهٔ صورت سؤال برابر است با:

$$\emptyset'\cap[(A\cap B)\cup(A\cap B')]=U\cap[A\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}]$$

$$=U\cap A=A$$

---

۱۰۵ - گزینهٔ «۲»

با توجه به ارزش گزاره‌ها به تفکیک گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ «۱»: $(T\Rightarrow F)\wedge(F\Rightarrow T)\equiv F\wedge T\equiv F$

گزینهٔ «۲»: $(F\Rightarrow F)\wedge(F\Rightarrow F)\equiv T\wedge T\equiv T$

گزینهٔ «۳»: $(T\Rightarrow T)\wedge(T\Rightarrow F)\equiv T\wedge F\equiv F$

گزینهٔ «۴»: $(F\Rightarrow T)\wedge(T\Rightarrow F)\equiv T\wedge F\equiv F$

۱۲۴ - گزینه «۳»

تعداد کل حالت‌هایی که ۷ بیمار می‌توانند بر روی ۵ صندلی بنشینند، برابر است با:

$$\binom{7}{5} \times 5! = \frac{7!}{5! \times 2!} \times 5! = \frac{7!}{2!} = 2520$$

حال باید حالت‌هایی که دو نفر خاص در بین این ۵ نفر بوده و کنار هم می‌نشینند را از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم. در صورتی که دو نفر خاص انتخاب شده باشند، باید از ۵ نفر دیگر، ۳ نفر انتخاب کرد. این دو نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم.

2×1

$\_\ \_ \quad \_\ \_\ \_$

$4 \times 3 \times 2 \times 1$

مطابق شکل تعداد جایگشت‌ها برابر $4! \times 2!$ است، پس تعداد حالت‌هایی که این دو نفر خاص کنار هم می‌نشینند، برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times 2! \times 4! = 10 \times 2 \times 24 = 480$$

بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$2520 - 480 = 2040$$

---

۱۲۵ - گزینه «۲»

پرتاب دو تاس

تعداد اعضای نمونه برابر $n(S) = 36$ است. حالت‌های مطلوب که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ و مجموع دو تاس عدد ۷ باشد، عبارت‌اند از:

$$A = \{(1,6), (3,4), (4,3), (6,1)\}$$

پس احتمال این پیشامد برابر است با:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

۱۲۶- گزینهٔ «۳»

$$P(w) = 1 - P(B) = 1 - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

$$P(C) = P(\{x, y, w\}) = P(\underbrace{\{x, y\}}_{A}) + P(w) = \frac{۱}{۷} + \frac{۲}{۵} = \frac{۱۹}{۳۵}$$

۱۲۷- گزینهٔ «۱»

فرض کنید پیشامدهای اصابت تیرهای علی و حسن به هدف را به ترتیب با A و B نمایش دهیم. با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= ۰/۶ + ۰/۴ - ۰/۶ \times ۰/۴ = ۰/۷۶$$

طبق رابطهٔ احتمال شرطی داریم:

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{۰/۶}{۰/۷۶} = \frac{۱۵}{۱۹}$$

۱۲۸- گزینهٔ «۳»

میانگین اعداد ۰ تا N برابر است با:

$$\mu = \frac{۰ + ۱ + \cdots + N}{N + ۱} = \frac{\frac{N(N+۱)}{۲}}{N + ۱} = \frac{N}{۲}$$

از طرفی میانگین نمونه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۹ + ۲ + ۵ + ۸ + ۱۱}{۵} = \frac{۳۵}{۵} = ۷$$

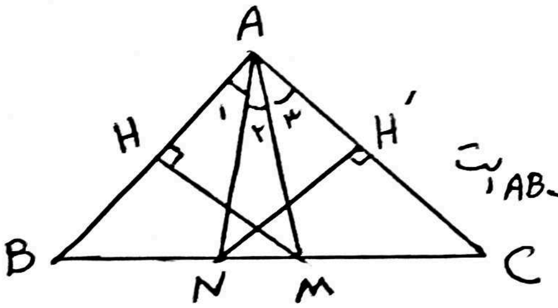
بنابراین برآورد نقطه‌ای N به کمک میانگین نمونه برابر است با:

$$\frac{N}{۲} = ۷ \Longrightarrow N = ۱۴$$

۱۲۹- گزینه‌ی «۴»

با توجه به مقدار توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها، خود مقدار انحراف از میانگین داده‌ها تنها می‌تواند یکی از اعداد صفر، ۱ یا (۱-) باشد. از طرفی مجموع انحراف از میانگین داده‌ها همواره برابر صفر است. با توجه به اینکه هر دو عدد ۱ و (۱-) فرد هستند و مجموع تعدادی فرد (۸۳ عدد) از اعداد فرد نمی‌تواند برابر یک عدد زوج (صفر) باشد، پس حداقل یکی از مقادیر انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است.

۱۳۰- گزینه‌ی «۲»



$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

M روی عمودمنصف AB است $\Rightarrow AM = BM \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 50^\circ \quad (1)$$

N روی عمودمنصف AC است $\Rightarrow AN = CN \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 50^\circ \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) + \hat{A}_2 = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

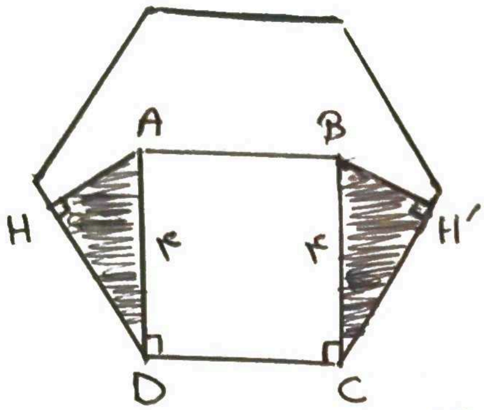
۱۳۱- گزینه‌ی «۱»

دو مثلث EBD و ABC به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند و داریم:

$$\frac{ED}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{24}{48} = \frac{18}{24+x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{24} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \dfrac{18}{24+x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 24 + x = 36 \Rightarrow x = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$$

۱۳۲ - گزینه «۴»



هر زاویهٔ داخلی یک شش ضلعی منتظم برابر ۱۲۰° است، پس داریم:

$$\hat{ADH} = \hat{BCH'} = ۱۲۰^\circ - ۹۰^\circ = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{DAH} = \hat{CBH'} = ۶۰^\circ$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ اضلاع روبه‌رو به زوایای ۳۰° و ۶۰° به ترتیب برابر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، پس داریم:

$$AH = \frac{۱}{۲} AD = ۲ \quad , \quad HD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AD = ۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADH} = S_{BCH'} = \frac{۱}{۲} AH \times HD = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$\Rightarrow$ مساحت ناحیه‌ها سورخورده $= ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$

---

۱۳۳ - گزینه «۳»

فرض کنید $\overset{\frown}{BE} = x$ باشد. در این صورت داریم:

$$AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE} = x$$

$$BC \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BE} = x$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶۰^\circ + x + ۸۰^\circ + x + ۱۰۰^\circ + x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

(زاویهٔ محاطی) $\hat{BCT} = \dfrac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \dfrac{۱۰۰^\circ + ۴۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ$

۱۳۴ - گزینهٔ «۱»

قطر دایرهٔ محیطی یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین، واسطهٔ هندسی بین طول های دو قاعدهٔ ذوزنقه است، پس داریم:

$$(2R)^2 = AB \times CD \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 2\pi$$

---

۱۳۵ - گزینهٔ «۴»

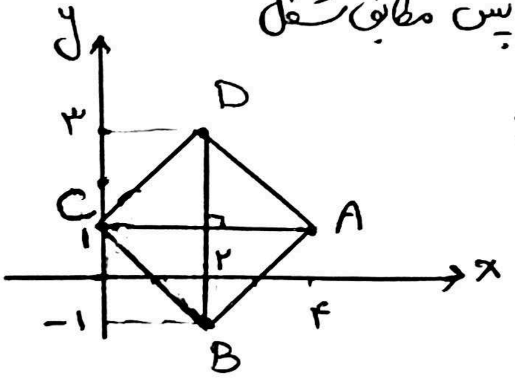
طول مماس مشترک دو دایرهٔ مماس خارج به شعاع های R و R' از رابطهٔ $2\sqrt{RR'}$ به دست می آید، پس با فرض $R>R'$ داریم:

$$2\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4RR' = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow R = \frac{16}{3}R'$$

---

۱۳۶ - گزینهٔ «۱»

نقطهٔ C روی محور y ها قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $(0,1)$ است. قطرهای مربع $ABCD$ عمود منصف یکدیگرند، پس مطابق شکل

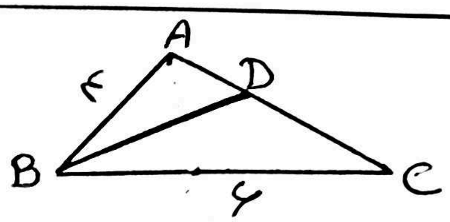


مختصات نقطهٔ D به صورت $(2,3)$ و در نتیجه مختصات نقطهٔ B به صورت $(2,-1)$ است. نقطهٔ B بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC است، پس داریم:

$$OB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

---

۱۳۷ - گزینهٔ «۳»



فرض کنید $AB=4$، $AC=5$ و $BC=6$ باشد.

طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی داریم:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2}$$

۱۳۸ - گزینهٔ «۲»

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\alpha A+\beta I=A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix}-\alpha & 2\alpha\\ 4\alpha & -3\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-\alpha+\beta & 2\alpha\\ 4\alpha & -3\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases}2\alpha=\frac{2}{5} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{5}\\ -\alpha+\beta=\frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5}+\beta=\frac{3}{5} \Rightarrow \beta=\frac{4}{5}\end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}=4$$

---

۱۳۹ - گزینهٔ «۱»

$$\text{سطر اول } A^2=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

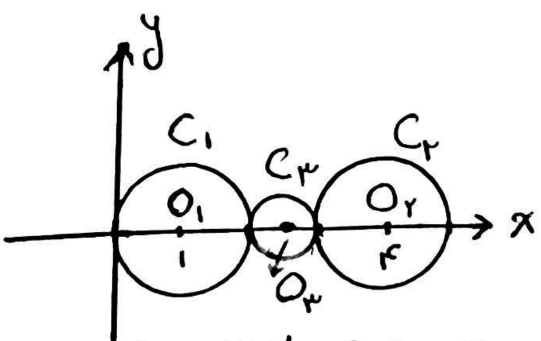
$$\text{سطر اول } A^3=\begin{bmatrix}3 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

---

۱۴۰ - گزینهٔ «۲»

$C_1: x^2-8x+y^2+15=0 \Rightarrow$ مرکز: $O_1(4,0)$ ، شعاع: $R_1=\frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2-4(15)}=1$

$C_2: x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow$ مرکز: $O_2(1,0)$ ، شعاع: $R_2=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2}=1$



مطابق شکل مرکز دایرهٔ C_3 (دایرهٔ مماس خارج با C_1 و C_2)، نقطهٔ $O_3(\frac{5}{2},0)$ و شعاع آن $R_3=\frac{1}{2}$ است، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2-5x+6=0$$

۱۴۱ - گزینهٔ «۳»

$$x^2+4y^2-16y-2x+16=0 \Rightarrow (x^2-2x+1)+4(y^2-4y+4)=1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+4(y-2)^2=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2} \xRightarrow{\text{فاصلهٔ دو کانون}} 2c=\sqrt{3}$$

تذکر: این سؤال خارج از مباحث نظام جدید آموزش است.

---

۱۴۲ - گزینهٔ «۴»

فرض کنید $d=(a,5)$ باشد. در این صورت با توجه به شرط جواب معادلهٔ همنهشتی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(a,5) \mid n^2+3n \Rightarrow d \mid n^2+3n \xRightarrow{\times 2} d \mid 2n^2+6n \\ (a,5) \mid 2n+1 \Rightarrow d \mid 2n+1 \xRightarrow{\times n} d \mid 2n^2+n\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

$$d \mid 5 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 5$$

اما مقدار $d=5$ قابل قبول نیست، چون مثلاً به ازای $n=1$، $5 \nmid n^2+3n$ و $5 \nmid 2n+1$ و در نتیجه تنها مقدار $d=1$ قابل قبول بوده و داریم:

$$3d=3\times 1=3$$

---

۱۴۳ - گزینهٔ «۱»

می‌دانیم به ازای $n \geq 5$، $n! \overset{10}{\equiv} 0$ است، پس داریم:

$$(1!+3!+5!+\cdots+25!)(2!+4!+\cdots+26!)$$

$$\overset{10}{\equiv}(1+6+0+\cdots+0)(2+4+0+\cdots+0) \overset{10}{\equiv} 7\times 6 \overset{10}{\equiv} 42 \overset{10}{\equiv} 2$$

۱۴۴- گزینهٔ «۱»

$$15x+21y=9 \xrightarrow{\div 3} 5x+7y=3$$

$$\Rightarrow 7y \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} -2 \xrightarrow[(2,5)=1]{\div 2} y \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow y=5k-1 \ (k\in \mathbb{Z})$$

$$5x+7(5k-1)=3 \Rightarrow 5x=-35k+10 \Rightarrow x=-7k+2$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ممکن برای y، برابر ۹۹۹ است. در این صورت داریم:

$$5k-1=999 \Rightarrow 5k=1000 \Rightarrow k=200$$

$$x=-7\times 200+2=-1398 \Rightarrow -x=1398$$

۱۴۵- گزینهٔ «۲»

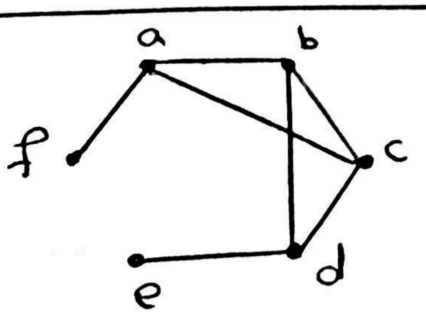
می‌دانیم گراف فرد-منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد، پس k حتماً عددی زوج است.
از طرفی گراف ۸-منتظم از مرتبهٔ ۹، همان گراف کامل K_9 است،
پس حداکثر مقدار قابل قبول برای k، برابر ۶ خواهد بود.

۱۴۶- گزینهٔ «۴»

گراف G، ۲-منتظم است. در این صورت گراف $\bar{G}$، $(p-3)$ منتظم بوده و درنتیجه داریم:

$$q(\bar{G})=3q(G) \Rightarrow \frac{p(p-3)}{2}=3\times\frac{2p}{2} \Rightarrow p-3=6$$
$$\Rightarrow p=9$$

۱۴۷- گزینهٔ «۲»



اگر رئوس گراف را مطابق شکل نام‌گذاری کنیم، آن‌گاه دورهای به طول ۳ عبارت‌اند از:
abca, bcdb

۱۴۸ - گزینهٔ «۱»

روش اول :

می‌توانیم $\sqrt{x_2}$ را با متغیری صحیح و نامنفی مانند y_2 جایگزین کنیم. در این صورت داریم:

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 4 \xRightarrow{\text{نامنفی}} \text{تعداد جواب‌های صحیح و} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

روش دوم :

به x_2 مقادیر مناسب اختصاص داده و در هر مرحله تعداد جواب‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$x_2 = 16 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$$

---

۱۴۹ - گزینهٔ «۱»

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم : (تعداد لانه‌ها برابر تعداد ماه‌های سال یعنی ۱۲ $m = 12$ است)

$$km + 1 = 65 \xrightarrow{m=12} 12k + 1 = 65 \Rightarrow 12k = 64$$

$$\Rightarrow k = \left[\frac{64}{12}\right] = 5$$

در این صورت بیشترین مقدار n برابر است با : $k + 1 = 6$

---

۱۵۰ - گزینهٔ «۱»

طبق تعریف همسایگی بستهٔ هر رأس، درجهٔ هر رأس این گراف برابر ۳ و در نتیجه گراف ۳ - منتظم است و داریم:

$$2q = 3p \xrightarrow{p=6} 2q = 18 \Rightarrow q = 9$$