به نام خدا

پاسخ تشریحی کنکور ریاضی ۱۴۰۱ - خارج کشور

عادل حسینی - مسئول درس ریاضیات

۱۰۱- گزینه «۱» (مجموعه، الگو و دنباله)

در هر مرحله مساحت را ۹ برابر می‌کنیم، یعنی طول ضلع را ۳ برابر می‌کنیم، پس در هر مرحله محیط هم ۳ برابر می‌شود.

۱۰۲- گزینه «۳» (معادله‌ها و نامعادله‌ها)

خط $x<0 \,;\, y=-x$ بر سهمی مماس است، پس معادلهٔ تقاطع جواب مضاعف منفی دارد:

$$3x^2+(2m-1)x+m+\frac{4}{3}=-x$$

$$\Rightarrow 3x^2+2mx+m+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow \Delta = 4m^2-12m-16=0$$

$$\Rightarrow m^2-3m-4=(m-4)(m+1)=0 \Rightarrow m=4 \text{ یا } -1$$

جواب مضاعف باید منفی باشد، پس m باید مثبت باشد.

$\Rightarrow m=4 \Rightarrow$ سهمی: $y=3x^2+7x+\frac{16}{3}$

طول رأس این سهمی $x_S=-\frac{7}{6}$ است.

۱۰۶ـ گزینه «۴» (الگو و دنباله)

a باید واسطهٔ هندسی α و β باشد

$$\Rightarrow a^2=\alpha\beta \Rightarrow a^2=2a-1 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1$$

به ازای $a=1$ معادلهٔ $x^2+4x+1=0$ دو جواب حقیقی معکوس دارد.

۱۰۷ـ گزینه «۳» (الگو و دنباله)

معادله درجه سوم، دو ریشهٔ حقیقی دارد، یک ریشهٔ سوم هم دارد، این ریشه را γ می‌نامیم.

قرینهٔ حاصل‌ضرب این جواب‌ها برابر $-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow -\alpha\beta\gamma=-(-2)\gamma=-\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma=-\frac{1}{4}$$

روش اول: $\gamma=-\frac{1}{4}$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$4\left(-\frac{1}{64}\right)+k\left(\frac{1}{16}\right)+\frac{9}{4}-2=0 \Rightarrow k=-3$$

روش دوم: مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{k}{4}$ است.

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=1-\frac{1}{4}=-\frac{k}{4} \Rightarrow k=-3$$

۱۰۸ـ گزینه «۲» (تابع)

$$y=|x+1|-3|x-2|=$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} 2x-7 & ; x<-1 \\ 4x-5 & ; -1\le x<2 \\ -2x+7 & ; x\ge 2 \end{cases}$$

تابع روی بازه‌ی $[2,+\infty)$ نزولی است:

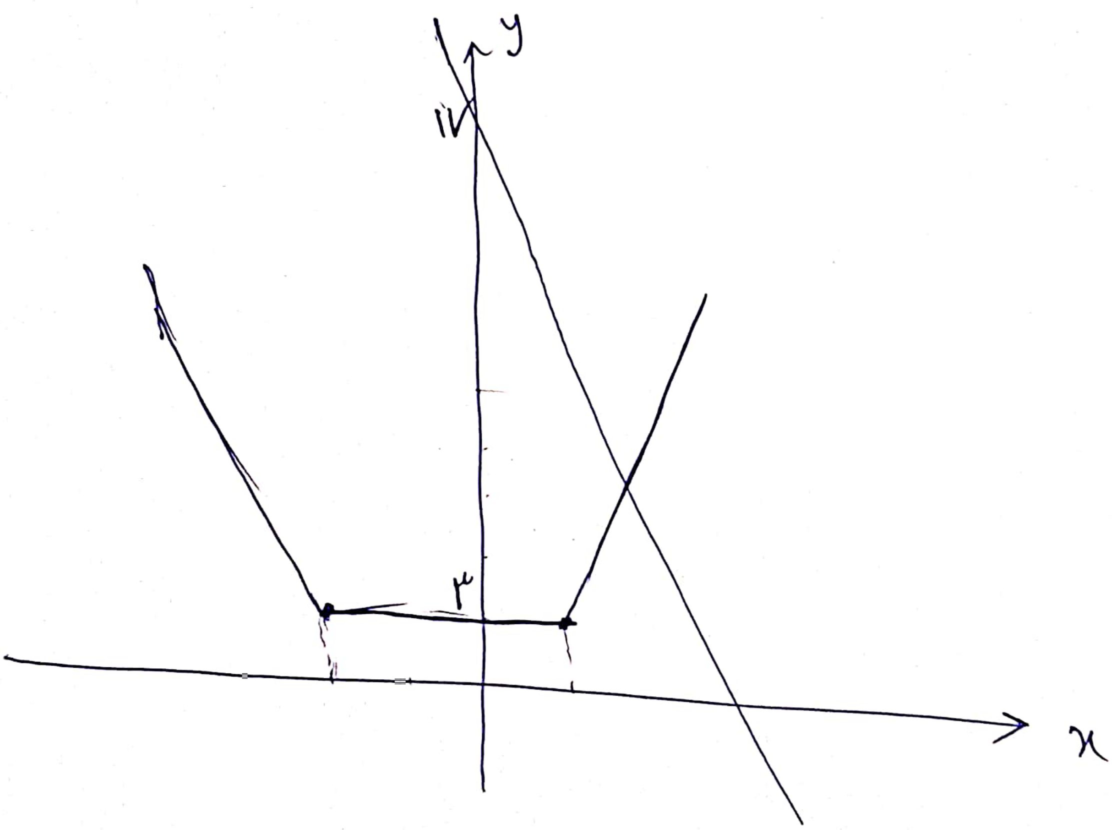
$$f(x) = -2x+7 \quad ; x \geq 2 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x-7) = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \quad ; x \leq 3$$

(جبر و معادله)

۱۰۹ - گزینه‌ی «۱»

نمودار هر دو تابع را به صورت تقریبی رسم می‌کنیم:



پس خط $y = \frac{-x+17}{3}$ را با شاخه‌های $y = 2x+1$ و $y = -2x-1$

قطع می‌دهیم:

$$2x+1 = \frac{-x+17}{3} \Rightarrow 6x+3 = -x+17 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2,5)$$

$$-2x-1 = \frac{-x+17}{3} \Rightarrow -6x-3 = -x+17 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4,7)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2-(-4))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

(تابع)

۱۱۰- گزینه «۳»

تابع داده شده اکیداً صعودی است، پس وارونش خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. داریم:

$$x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0$$

$x=2$ جواب معادلهٔ بالاست:

$$x^3+2x-12=(x-2)\underbrace{(x^2+2x+6)}_{\Delta<0}=0$$

پس $x=2$ تنها جواب حقیقی معادله مذکور است. یعنی نقطهٔ تقاطع تابع داده شده با وارونش $(2,2)$ است. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات $2\sqrt{2}$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۱۱- گزینه «۲»

طرفین رابطهٔ $a^2+9b^2=10ab$ را با $6ab$ جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow a^2+6ab+9b^2=16ab \Rightarrow (a+3b)^2=16ab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+3b}{4}\right)^2=ab$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2=\log ab$$

$$\Rightarrow 2\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)=\log a+\log b$$

در نتیجه $\log\frac{a+3b}{4}$ واسطهٔ حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

(مثلثات)

۱۱۲ – گزینهٔ «۴»

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4 \Rightarrow 1-\sin x = 4+4\sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{3}{4}$$

حال داریم:

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3-3\tan^2\frac{x}{2} = 8\tan\frac{x}{2} \Rightarrow 3\tan^2\frac{x}{2} + 8\tan x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{-8\pm 10}{6} = -3 \text{ یا } \frac{1}{3}$$

(مثلثات)

۱۱۳ – گزینهٔ «۱»

$$\left.\begin{aligned} f_{max} &= |a|+b = 3 \\ f_{min} &= -|a|+b = -7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b=-2,\ |a| = 5$$

تابع در $x=0$ نزولی است پس $a>0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = 5\cos x - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\cos\frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

(مثلثات)

۱۱۴- گزینه «۲».

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad ; k\in \mathbb{Z}$$

جواب‌ها در بازه $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

(حد و پیوستگی)

۱۱۵- گزینه «۱»

هوپیتال ساده‌ترین روش است:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+\frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$$

(حد و پیوستگی)

۱۱۶ - گزینه «۳».

این تابع روی $\mathbb{R}$ نمی‌تواند پیوسته باشد، به دلیل وجود $[x]$. منظور طراح $x=0$ است، پس حدود چپ و راست و مقدار تابع در $x=0$ را می‌یابیم.

حد چپ : $L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} ([x]-2a) = -1-2a$

مقدار تابع : $f(0) = |b|$

حد راست : $L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{2bx^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2bx^2}$

$$= \frac{\frac{x^2}{2}}{2bx^2} = \frac{1}{4b}$$

برای پیوستگی باید $-1-2a = |b| = \dfrac{1}{4b}$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow |b| = \frac{1}{4b} \Rightarrow \begin{cases} 4b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}\ ;\ b>0 \\ -4b^2 = 1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1-2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow b-a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

(تابع)

۱۱۷ - گزینه «۴».

خارج قسمت را به صورت $\alpha x+\beta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(x) = (x^2+4x+5)(\alpha x+\beta) + x + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 10(\alpha+\beta)+3 = 13 \Rightarrow \alpha+\beta = 1 \\ f(-1) = 2(-\alpha+\beta)+1 = 11 \Rightarrow -\alpha+\beta = 5 \end{array}\right\} \beta = 3,\ \alpha = -2$$

خارج قسمت $-2x+3$ است.

۱۱۸ - گزینه «۱» (مجموعه، الگو و دنباله)

تعداد اعداد دسته‌ها به صورت زیر است: $2, 2, 4, 8, \ldots$

پس می‌توان دنباله $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2^{n-1} \; ; \; n \geq 2 \end{cases}$ را برای تعداد اعداد دستهٔ n ام در نظر گرفت.

دستهٔ سیزدهم $2^{12} = 4096$ عدد دارد.

$\Rightarrow$ دستهٔ سیزدهم $= \{4097, 4098, \ldots, 8192\}$

دنبالهٔ اعداد دستهٔ سیزدهم را می‌توانیم $b_n = 4096 + n \; ; \; 1 \leq n \leq 4096$ در نظر بگیریم. میانهٔ این 4096 داده، میانگین داده‌های 2048 و 2049 ام است.

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{(4096 + 2048) + (4096 + 2049)}{2} = 4096 + 2048.5$$

$$\Rightarrow Q_2 = 6144.5$$

---

۱۱۹ - گزینه «۱» (حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت)

$y = 3$ مجانب افقی و $x = -\frac{1}{2}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1} = \frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$$

$x = -\frac{1}{2}$ هم ریشهٔ مخرج است:

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 3$$

(مشتق)

۱۲۰- گزینه «۳»

شیب خط $4y-3x=1$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس در نقطهٔ مطلوب، شیب خط مماس باید برابر -2 باشد.

$$\Rightarrow y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

نقطهٔ مطلوب $(1,2)$ است.

(مشتق)

۱۲۱- گزینه «۴»

از g مشتق می‌گیریم:

$$g'(x) = \left(2\tan x(1+\tan^2 x) - \sqrt{2}\sin x\right) f'(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3f'(2) = \sqrt{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(مشتق)

۱۲۲- گزینه «۱»

آهنگ متوسط تابع اول:

$$a = \frac{-1-0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

(کاربردهای مشتق)

۱۲۳ - گزینه «۲»

نقطهٔ $A(0,0)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است، پس تابع باید عامل x^2 را داشته باشد، در نتیجه $c=d=0$ ، $f(x)=ax^3+bx^2$ است.

$$B \in f \Rightarrow f(1) = a+b = 1 \qquad (I)$$

$$f'(x) = 3ax^2+2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 3a+2b=0 \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} a=-2,\ b=3 \Rightarrow ab=-6$$

عادل حسینی

۱۴۰۱/۲/۱۲