فصل ۱

کنکور ریاضی و فیزیک ۱۴۰۱

«مدرس: صفی شاهی‌فرد»

۱.۱ پاسخ سوالات ریاضی ۱، حسابان ۱ و ۲ کنکور ۱۴۰۱ «صفی شاهی‌فرد»

۱) **تست:** دنباله‌های هندسی با قدر نسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله می توان یافت که جملات آن عضو مجموعه $\{1, 2, ..., 100\}$ باشد؟
(ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۷   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

$\boxed{\text{حل}}$

$$q = 2 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Longrightarrow \{1, 2, 4, 8, 16\} \\ a_1 = 2 \Longrightarrow \{2, 4, 8, 16, 32\} \\ a_1 = 4 \Longrightarrow \{4, 8, 16, 32, 64\} \end{cases}$$

$$q = 2 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \Longrightarrow \{3, 6, 12, 24, 48\} \\ a_1 = 6 \Longrightarrow \{6, 12, 24, 48, 96\} \end{cases}$$

$$q = 2 \ , \ a_1 = 5 \Longrightarrow \{5, 10, 20, 40, 80\}$$

$$q = 3 \ , \ a_1 = 3 \Longrightarrow \{1, 3, 9, 27, 81\}$$

بنابراین ۷ نوع از این دنباله هندسی خواهیم داشت.

۲) **تست:** کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟
(ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $x = ۳/۵$ ۲) $x = ۲$ ۳) $x = ۲/۵$ ۴) $x = ۳$

$\boxed{\text{حل}}$

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{۴a} = ۲ \Longrightarrow -\frac{۱۲^۲ - ۴m(۵m-۱)}{۴m} = ۲$$

$$\Longrightarrow -(۱۴۴ - ۲۰m^۲ + ۴m) = ۸m \Longrightarrow ۲۰m^۲ - ۱۲m - ۱۴۴ = ۰ \Longrightarrow ۵m^۲ - ۳m - ۳۶ = ۰$$

$$\begin{cases} m = ۳ \Longrightarrow x = -\dfrac{b}{۲a} = \dfrac{۶}{m} = ۲ \\ \\ m = -\dfrac{۱۲}{۵} \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین $\boxed{x = ۲}$، محور تقارن سهمی است.

۳) **تست: مجموعه‌های A، B، C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C، دو واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه $C \times B$، ۲۵٪ بیشتر از تعداد اعضای مجموعه $A \times B$ و ۱/۵ برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times D$ باشد. اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چقدر است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۱۰ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

$\boxed{\text{حل}}$ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} |C| = |A| + ۲ & (۱) \\ \\ |D| = |B| - ۳ & (۲) \end{cases}$$

$$|C \times B| = ۱/۲۵|A \times B| \Longrightarrow |C||B| = ۱/۲۵|A||B| \Longrightarrow |C| = ۱/۲۵|A|$$

$$\overset{(۱)}{\Longrightarrow} |A| + ۲ = ۱/۲۵|A| \Longrightarrow ۰/۲۵|A| = ۲ \Longrightarrow \boxed{|A| = ۸} \Longrightarrow \boxed{|C| = ۱۰}$$

$$|C \times B| = ۱/۵|A \times D| \Longrightarrow |C||B| = ۱/۵|A||D| \Longrightarrow ۱۰|B| = ۱/۵(۸)|D|$$

$$\overset{(۲)}{\Longrightarrow} ۱۰|B| = ۱۲(|B| - ۳) \Longrightarrow ۱۰|B| = ۱۲|B| - ۳۶ \Longrightarrow \boxed{|B| = ۱۸} \Longrightarrow \boxed{|B| - |A| = ۱۰}$$

۴) **تست: اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند. مجموعه $A' \cup \Big((B \cap A) \cap \big[(B \cup A) \cap B \big] \Big)$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\emptyset$ ۲) $(A - B)'$ ۳) $B - A$ ۴) B

$\boxed{\text{حل}}$ طبق قانون جذب $(B \cup A) \cap B = B$ پس

$$\begin{aligned} A' \cup \Big((B \cap A) \cap \big[(B \cup A) \cap B \big] \Big) &= A' \cup \Big((B \cap A) \cap B \Big) = A' \cup (B \cap A) \\ &= (A' \cup B) \cap (A' \cup A) = (B \cup A') \cap U = (B \cup A') \cap U \\ &= A' \cup B = (A \cap B')' = \boxed{(A - B)'} \end{aligned}$$

۵) **تست: کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی گزاره $q \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $p \Longleftrightarrow q$ ۲) p ۳) $p \vee q$ ۴) q

حل

$$\begin{aligned}(\sim p \vee q) \Longleftrightarrow q &\equiv [(\sim p \vee q) \Longrightarrow q] \wedge [q \Longrightarrow (\sim p \vee q)]\\ &\equiv [(\sim p \vee q) \Longrightarrow q] \wedge T \equiv [(\sim p \vee q) \Longrightarrow q]\\ &\equiv \sim (\sim p \vee q) \vee q \equiv (p \wedge \sim q) \vee q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)\\ &\equiv (p \vee q) \wedge T \equiv \boxed{p \vee q}\end{aligned}$$

۶) تست: α و β ریشه‌های معادله $x^۲+۶x+m=۰$ هستند. اگر $\alpha<\beta<۰$ و $۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$ باشد. مقدار m چقدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲۱}{۵}$

حل

$$S=-\frac{b}{a}=-۶, P=\frac{c}{a}=m \Longrightarrow |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۳۶-۴m} \Longrightarrow \alpha-\beta=-\sqrt{۳۶-۴m}$$

با استفاده از رابطه زیر براحتی می‌توان این تست را حل کرد:

$$\begin{aligned}۳\alpha^۲+۲\beta^۲ &= \boxed{\frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۱}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲)}\\ &=\frac{۵}{۲}(S^۲-۲P)+\frac{۱}{۲}S\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{۵}{۲}(۳۶-۲m)+\frac{۱}{۲}(-۶)(-\sqrt{۳۶-۴m})\\ &=۵(۱۸-m)+۳\sqrt{۳۶-۴m}=۹۰-۵m+۳\sqrt{۳۶-۴m}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\end{aligned}$$

$$۹۰-۵m+۳\sqrt{۳۶-۴m}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵ \Longrightarrow ۵-۵m+۳\sqrt{۳۶-۴m}=۱۲\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} ۵-۵m=۰ \Longrightarrow \boxed{m=۱}\\ ۳\sqrt{۳۶-۴m}=۱۲\sqrt{۲} \Longrightarrow \boxed{m=۱}\end{cases}$$

۷) تست: اگر $\frac{۱}{a^۳-۱}+\frac{۱}{a^۳+۱}=۲$ باشد. حاصل $\left(\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳+۱}}+\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳+۱}}\right)^{۱۴۰۱}$ چقدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱

حل

$$\frac{۱}{a^۳+۱}+\frac{۱}{a^۳-۱}=۲ \Longrightarrow \frac{a^۳-۱+a^۳+۱}{(a^۳+۱)(a^۳-۱)}=۲ \Longrightarrow \frac{a^۳+a^۳}{a^۶-۱}=۲$$

$$\Longrightarrow \frac{a^۳}{a^۶-۱}=۱ \Longrightarrow a^۶-۱=a^۳ \Longrightarrow \boxed{a^۶=a^۳+۱}$$

$$\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱} = \frac{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱+a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}{(a^۳+۱-\sqrt{a^۳})(a^۳+۱+\sqrt{a^۳})}$$
$$= \frac{۲a^۳+۲}{(a^۳+۱)^۲-a^۳} = \frac{۲a^۳+۲}{a^٦+a^۳+۱} = \frac{۲a^٦}{a^٦+a^٦} = ۱$$
$$\left(\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱}\right)^{۱۴۰۱} = ۱$$

۸) **تست: تابع $f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt{x^۳},\ x\le ۰$ ۲) $-\sqrt[۳]{x},\ x\le ۰$ ۳) $-\sqrt{x^۳},\ x\ge ۰$ ۴) $-\sqrt[۳]{x},\ x\ge ۰$

$\boxed{\text{حل}}$ تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳ & , x\ge ۰ \\ -x^۳ & , x<۰\end{cases}$ در بازه $x\le ۰$ نزولی است پس $y=-x^۳$ نتیجه می‌گیریم $x=-\sqrt[۳]{y}$ ازاین‌رو $\boxed{f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x},\ x\ge ۰}$.

۹) **تست: فاصله نقطه A روی خط $x+y=a$ از دو نقطه $B(-۳,۲)$ و $C(-۱,۴)$ به‌ترتیب برابر $\sqrt{۲۹}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

$\boxed{\text{حل}}$

$$\begin{cases} |AB|=\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۲)^۲}=\sqrt{۲۹} \Longrightarrow (x+۳)^۲+(y-۲)^۲=۲۹ \\ |AC|=\sqrt{(x+۱)^۲+(y-۴)^۲}=۵ \Longrightarrow (x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۵ \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^۲+٦x+۹+y^۲-۴y+۴=۲۹ \\ x^۲+۲x+۱+y^۲-۸y+۱٦=۲۵ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^۲+٦x+y^۲-۴y=۱٦ \\ x^۲+۲x+y^۲-۸y=۸ \end{cases}$$

با کم کردن معادله دوم از معادله اول داریم: $۴x+۴y=۸ \Longrightarrow x+y=۲$

و خیلی تصادفی به معادله خط شامل نقطه A رسیدیم بنابراین $a=۲$.

۱۰) **تست: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد. حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$f(\sqrt{۲}))=\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \Longrightarrow f(f(\sqrt{۲}))=f(\tfrac{۱}{\sqrt{۲}})=\frac{\sqrt{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۳\frac{۱}{\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$
$$\Longrightarrow fofof(\sqrt{۲})=f(f(f(\sqrt{۲})))=f(\sqrt{۲})=\boxed{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}$$

۱۱) **تست: فرض کنید $۱۰ = ۵^x$ است. اگر $۲۰ = ۲^{f(x)}$ باشد، ضابطه f کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۲x+۱}{x+۱}$ ۲) $\frac{x-۱}{۲x-۱}$ ۳) $\frac{۲x-۱}{x-۱}$ ۴) $\frac{x+۱}{۲x+۱}$

$\boxed{\text{حل}}$ چون $۱۰ = ۵^x$ پس $x = \log_۵ ۱۰$. حال اگر $۲۰ = ۲^{f(x)}$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_۲ ۲۰ = \log_۲(۲ \times ۱۰) = \log_۲ ۲ + \log_۲ ۱۰ = ۱ + \frac{\log_۵ ۱۰}{\log_۵ ۲} \\ &= ۱ + \frac{x}{\log_۵ \frac{۱۰}{۵}} = ۱ + \frac{x}{\log_۵ ۱۰ - \log_۵ ۵} = ۱ + \frac{x}{x-۱} = \boxed{\frac{۲x-۱}{x-۱}} \end{aligned}$$

۱۲) **تست: اندازه زاویه A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازه زاویه B است، حاصل $۲\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\boxed{\text{حل}}$ با قرار دادن $A = ۹۰^\circ$ و $B = C = ۴۵^\circ$ به مقدار $\boxed{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$ می‌رسیم.

۱۳) **تست: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx+c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > ۰$ و $۰ < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۴) π

$\boxed{\text{حل}}$ اولاً ماکزیمم این تابع برابر $\frac{۱}{۴}$ پس $|a| = \frac{۱}{۴}$ حال چون شکل داده شده نمودار کسینوس است پس $\boxed{a = \frac{۱}{۴}}$ ثانیاً

$$\begin{cases} f(\frac{۳}{۴}) = -\frac{۱}{۴} \Longrightarrow \frac{۱}{۴}\cos(\frac{۳}{۴}b + c) = -\frac{۱}{۴} \Longrightarrow \cos(\frac{۳}{۴}b + c) = -۱ \Longrightarrow \frac{۳}{۴}b + c = ۲k\pi + \pi \\ f(\frac{۵}{۴}) = ۰ \Longrightarrow \frac{۱}{۴}\cos(\frac{۵}{۴}b + c) = ۰ \Longrightarrow \frac{۵}{۴}b + c = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳b + ۴c = ۸k\pi + ۴\pi \\ ۵b + c = ۴k\pi + ۲\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۱۵b + ۲۰c = ۴۰k\pi + ۲۰\pi \\ -۱۵b - ۱۲c = -۱۲k\pi - ۶\pi \end{cases}$$

برای اینکه $۰ < c < \pi$ باشد در معادله اول $k = ۰$ و در دومی $k = ۱$ قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} ۱۵b + ۲۰c = ۲۰\pi \\ -۱۵b - ۱۲c = -۱۸\pi \end{cases} \Longrightarrow ۸c = ۴\pi$$

با جایگذاری $\boxed{c = \frac{\pi}{۴}}$ در معادله اول داریم $\boxed{b = \pi}$ بنابراین $\boxed{\frac{ac}{b} = \frac{۱}{۱۶}}$.

۱۴) **تست: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{۳}\cos x = \sqrt{۲}$ در بازه $[-\pi, ۲\pi]$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\Longrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \cos(\frac{\pi}{3})\sin x+\sin(\frac{\pi}{3})\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}} \\ \boxed{x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

جواب‌ها در بازه $[-\pi, 2\pi]$ عبارتند از:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}, 2\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \\ x=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع آنها برابر است با:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{9\pi}{4}$$

۱۵) **تست: حاصل** $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ **کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) 3 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -3 ۴) $-\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{حل}}$ چون حد داده شده مبهم به‌صورت $\frac{0}{0}$ است پس با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to -1}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\frac{2}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

۱۶) **تست: تابع** $f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & , \quad |x^3|<x^2 \\ 1+\cos\pi x & , \quad |x^3|=x^2 \\ [x^2]-[x] & , \quad |x^3|>x^2 \end{cases}$ **در چند نقطه نا پیوسته است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۳

۳) بیشمار ۴) در همه نقاط پیوسته است.

$\boxed{\text{حل}}$

$$|x^3|=x^2\Longrightarrow \boxed{x=0,\pm 1}\Longrightarrow f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & , \quad -1<x<0 \text{ یا } 0<x<1 \\ 1+\cos\pi x & , \quad x=0,\pm 1 \\ [x^2]-[x] & , \quad x>1 \text{ یا } x<-1 \end{cases}$$

تابع $[x^2]-[x]$ در نقاط صحیح منفی نا پیوسته است پس تابع f در بیشمار نقطه نا پیوسته است.

۱۷) **تست: چندجمله‌ای** $p(x)=x^{3n+1}+2x^{3n}+x^6+3x^5+16a$**، به‌ازای هر عدد طبیعی** n **بر** $x+2$ **بخش‌پذیر است. برای** $n=1$**، باقی‌مانده تقسیم** $p(x)$ **بر** x^2+2x-3 **کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-15x+24$ ۲) $-15x+14$ ۳) $-5x+34$ ۴) $-5x+44$

حل برای $n=۱$ داریم $p(x)=x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۱۶a$. چون $p(-۲)=۰$ پس $a=۲$. از طرفی $x^۲+۲x-۳=(x-۱)(x+۳)$ پس $p(x)=(x^۲+۲x-۳)q(x)+r(x)$ نتیجه می‌گیریم که $\boxed{p(۱)=r(۱)}$ و چون $p(۱)=۱+۲+۱+۳+۱۶(۲)=۳۹$ پس گزینه‌ای درست است که با جایگذاری $x=۱$ مقدار ۳۹ بدهد که گزینه (۴) است.

۱۸) **تست: اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است، یعنی $\{۱\},\{۲,۳\},\{۳,۴,۵\},\{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\},...$. میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۳۳۰۴/۵ ۲) ۳۰۷۲/۵ ۳) ۴۶۰۸/۵ ۴) ۶۱۴۴/۵

حل بزرگ‌ترین عضو دسته (بجز دسته اول) تشکیل دنباله هندسی با $q=۲$ و $a_۲=۲$ است:

$$a_۲=۲, a_۳=۳\times۲^۱=۶, a_۴=۳\times۲^۲=۱۲, ..., a_{۱۲}=۳\times۲^{۱۰}=۳۰۷۲, a_{۱۳}=۳\times۲^{۱۱}=۶۱۴۴$$

عضوهای دسته سیزدهم عبارتند از: $\{۳۰۷۳,۳۰۷۴,...,۶۱۴۴\}$

$$\overline{x}=\frac{S_{۱۳}}{۱۳}=\frac{\frac{۱۳(۳۰۷۳+۶۱۴۴)}{۲}}{۱۳}=\frac{۳۰۷۳+۶۱۴۴}{۲}=۴۶۰۸/۵$$

۱۹) **تست: تابع $f(x)=\frac{|ax+۱|+۲x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر دو صفر مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x\to۱^+}f(x)$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) -۳ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حل مجانب‌های قائم تابع: $|x|+b=۰\Longrightarrow|x|=-b\Longrightarrow x=\pm b\ ,\ b\le۰$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|ax+۱|+۲x}{|x|+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۱+۲x}{x+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲)x}{x}=a+۲$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax+۱|+۲x}{|x|+b}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(ax+۱)+۲x}{-x+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-a+۲)x}{-x}=a-۲$$

حالت اول: $\begin{cases}a+۲=b\\a-۲=-b\end{cases}\Longrightarrow a=۰\Longrightarrow b=۲$ غ‌ق‌ق

حالت دوم: $\begin{cases}a+۲=-b\\a-۲=b\end{cases}\Longrightarrow a=۰\Longrightarrow b=-۲\Longrightarrow\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{۱+۲x}{|x|-۲}=-۳$

۲۰) **تست: در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازه $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\pi}{۴} - ۱$ ۲) $\frac{\pi}{۴} - ۳$ ۳) $\frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۴} + \frac{۳}{۸}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \sin x + \frac{۱}{۲}\cos x = \frac{۳}{۲}\sin x \Longrightarrow \frac{۱}{۲}\sin x - \frac{۱}{۲}\cos x = ۰$$

$$\tan x - ۱ = ۰ \Longrightarrow \boxed{x_۰ = \frac{\pi}{۴}}$$

$$y_۰ = f(\tfrac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} \Longrightarrow \boxed{y_۰ = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}}$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{۱}{۲}\sin x \Longrightarrow m = f'(\tfrac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۴} \Longrightarrow \boxed{m = \frac{\sqrt{۲}}{۴}}$$

$$y - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \Longrightarrow ۰ - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{۴} - ۳}$$

۲۱) **تست: تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱) = \frac{۳}{۲}$ و $g(x) = f(x+۱) + f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ٦ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$g'(x) = f'(x+۱) + ۳f'(۳x+۱۰)$$

طبق فرض $\boxed{f'(-۱) = f'(۴) = \frac{۳}{۲}}$ پس داریم:

$$g'(-۲) = f'(-۲+۱) + ۳f'(-٦+۱۰) = f'(-۱) + ۳f'(۴) = \frac{۳}{۲} + ۳ \times \frac{۳}{۲} = ٦$$

۲۲) **تست: اگر $f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟** (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{٦}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۱۵}$

$\boxed{\text{حل}}$ چون حد داده شده مبهم به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است پس با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} =^{Hop} \lim_{h\to ۰} \frac{-۲f'(۵-h)f(۵-h) + ۳f'(۵-h)}{۵ - ۲h} \\ &= \frac{-۲f'(۵)f(۵) + ۳f'(۵)}{۵} = \frac{-۴f'(۵) + ۳f'(۵)}{۵} = \boxed{-\frac{۱}{۵}f'(۵)} \end{aligned}$$

زیرا $f(۵) = ۲$ و چون

$$f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴) \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}} \Longrightarrow f'(۵) = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$$

بنابراین

$$L = -\frac{۱}{۵}f'(۵) = \boxed{-\frac{۵}{۱۲}}$$

۲۳) تست: نقطه $A(-1,1)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟
(ریاضی ۱۴۰۱)

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$y = \begin{cases} x^3 + 3ax^2 + b & , \quad x \geq 0 \\ -x^3 + 3ax^2 + b & , \quad x < 0 \end{cases}$$

از طرفی $x = -1$ نقطه بحرانی تابع است و مشتق تابع در بازه $x < 0$ برابر است با:

$$y' = -3x^2 + 6ax = 0 \Longrightarrow -3 - 6a = 0 \Longrightarrow -6a = 3 \Longrightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$y(-1) = 1 \Longrightarrow 1 + 3a + b = 1 \Longrightarrow 3(-\tfrac{1}{2}) + b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}} \Longrightarrow \boxed{\frac{b}{a} = -3}$$

۲۴) تست: محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax + 3}{(a+1)x + (a-1)}$، نقطه مینیمم تابع $y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟
(ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6} \Longrightarrow y' = 3x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{3} \Longrightarrow y = \frac{2}{3}$$

پس $\boxed{x = -\frac{1}{3}}$ مجانب قائم و $\boxed{y = \frac{2}{3}}$ مجانب افقی تابع هموگرافیک است از طرفی مجانب قائم آن $x = -\frac{a-1}{a+1}$ است یعنی $-\frac{1}{3} = -\frac{a-1}{a+1}$ از این‌رو $a = 2$ بنابراین تابع هموگرافیک $\boxed{y = \frac{2x+3}{3x+1}}$ محور x ها را به‌ازای $y = 0$ در نقطه $x = -\frac{3}{2}$ قطع می‌کند.

۲۵) تست: چند عدد پنج رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟
(ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۱۸۴۰ ۲) ۱۹۲۰ ۳) ۲۱۶۰ ۴) ۲۴۰۰

$\boxed{\text{حل}}$ حالت اول: رقم سمت چپ فرد باشد: $\boxed{5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 1200}$

حالت دوم: رقم سمت چپ زوج باشد: $\boxed{4 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 960}$

بنابراین در کل $1200 + 960 = 2160$ عدد می‌توان نوشت.