# ارتعاشات مکانیکی

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

# مقدمه

- تعریف ارتعاشات
- تاریخچه ارتعاشات
- مفاهیم اولیه ارتعاشات
  - درجه آزادی (DoF) Degree of Freedom
- دسته بندی ارتعاشات
- کاربردهای آتی و حال حاضر

# تعریف ارتعاشات

- ارتعاشات vibration: هر حرکتی که خود را بعد از یک بازه زمانی تکرار می کند ارتعاشات یا نوسان oscillation گفته می شود.
  - مثال: حرکت تاب مانند آونگ و ارتعاش تار کشیده شده
- مطالعه ارتعاشات با مطالعه حرکتهای نوسانی اجسام و نیروهای متناظر با آنها سروکار دارد.
- از Wikipedia گذاشته شود

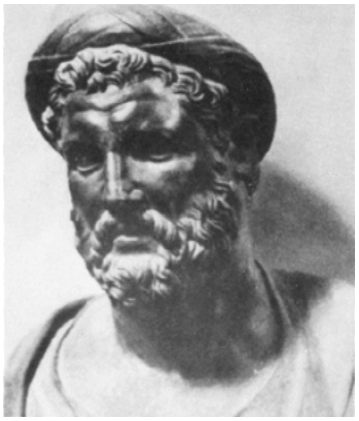
# مطالعه ارتعاشات، چرا؟

- ارتعاشات می تواند به تغییرمکان بسیار زیاد و شکست در ماشین آلات و سازه ها منجر شود
- برای کاهش ارتعاشات از طریق طراحی مناسب ماشین و نصب آنها
- برای سود بردن (استفاده مفید) از ارتعاشات در چندین وسیله و کاربرد صنعتی
- برای بهبود بازده بعضی از ماشین آلات، ریخته گری، فورج و جوشکاری
- برای شبیه سازی زلزله و تحقیقات زمین شناسی و طراحی راکتورهای هسته ای

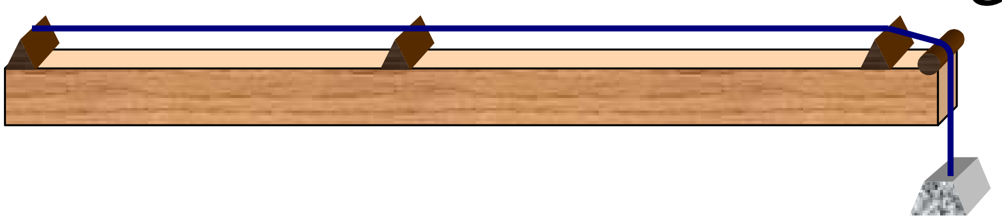
# تاریخچه ارتعاشات

- سال ۲۶۰۰ قبل از میلاد چنگ (دستگاه موسیقی)
- ۵۰۷-۵۸۲ قبل از میلاد فیثاقورس: مطالعه صدای موزیک
- Chang Heng در ۱۳۲ میلادی اختراع لرزه نگار
- گالیله ۱۵۶۴-۱۶۴۲ میلادی مطالعه آونگ ساده
- نیوتن ۱۶۴۲-۱۷۲۷، برنولی ۱۷۰۰-۱۷۸۲، اویلر ۱۷۰۷-۱۷۸۳، لاگرانژ ۱۷۳۶-۱۸۱۳ مطالعه سیستماتیک (مبنائی) دینامیک و ارتعاشات
- کولمب ۱۷۸۴ طراحی وسیله آزمایش ارتعاش پیچشی
- تیموشنکو ۱۸۷۸-۱۹۷۲: تئوری تیر تیموشنکو
- میندلین: تئوری صفحات میندلین
- پیونکاره و لیاپانو: ارتعاشات غیر خطی
- دافینگ و وندرپول: ارتعاش غیر خطی در مهندسی
- ارتعاشات در نانوتکنولوژی:

# فیثاقورس Pythagoras

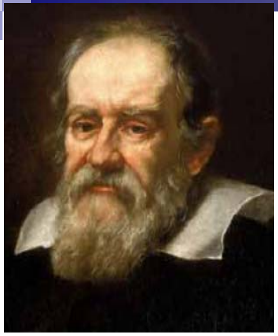


- شاید اولین کسی باشد که برروی صدای موزیک تحقیق کرد
- او دستگاهی ساخت که فاصله تکیه گاه تار را تغییر می داد و کشش در تار نیز قابل تغییر بود
- در یک کشش ثابت او دریافت که طول تار در زیر و بم بودن صدا مؤثر است.
- بعد از او بیشتر تحقیقات روی آلات موسیقی بوده است



# اولین لرزه نگار

- Zhang Heng در سال ۱۳۲ میلادی اولین لرزه نگار را برای اندازه گیری شدت زلزله ساخت.
- این دستگاه شبیه یک سماور به قطر تقریبی ۱/۹ متر است که در داخل آن مکانیزمی موجود است که شامل آونگی است که اطراف آن ۸ اهرم وجود دارد. این اهرمها به سر ۸ مجسمه اژدها (در ۸ جهت) متصل هستند. مجسمه ها در دهانشان یک گوی برنزی است که در صورت زلزله رها شده و با مجسمه وزغ در پائین آن برخورد می کند و در نتیجه جهت زلزله و زمان آن مشخص می شود.



# از گالیله تا ریلی

- گالیله ۱۶۴۲-۱۵۶۴
  - بنیان گذار علوم تجربی (آزمایشی) مدرن
  - شروع آزمایش برروی پاندول ساده
  - کتابی در ۱۶۳۸ منتشر کرد که **فرکانس، تشدید**، طول، کشش و چگالی تار مرتعش را توصیف می کرد
- رابرت هوک ۱۷۰۳-۱۶۵۳
  - رابطه بین گام و فرکانس تار مرتعش را پیدا کرد

# از گالیله تا ریلی

- ژوزف ساویور Joseph Sauveur ۱۶۵۳-۱۷۱۶
  - کلمه **آکوستیک** رابرای علم صدا رایج کرد
  - پایه گذار گره، حلقه، هارمونیک و فرکانس اصلی
  - فرکانس تار کشیده را از شکم دادگی sag نقطه وسط محاسبه کرد
- نیوتن ۱۶۴۲-۱۷۲۷
  - در ۱۶۸۶ کار ماندگارش Philosophia Naturalis Principa Mathematica را منتشر و سه قانون حرکت را کشف کرد

# از گالیله تا ریلی

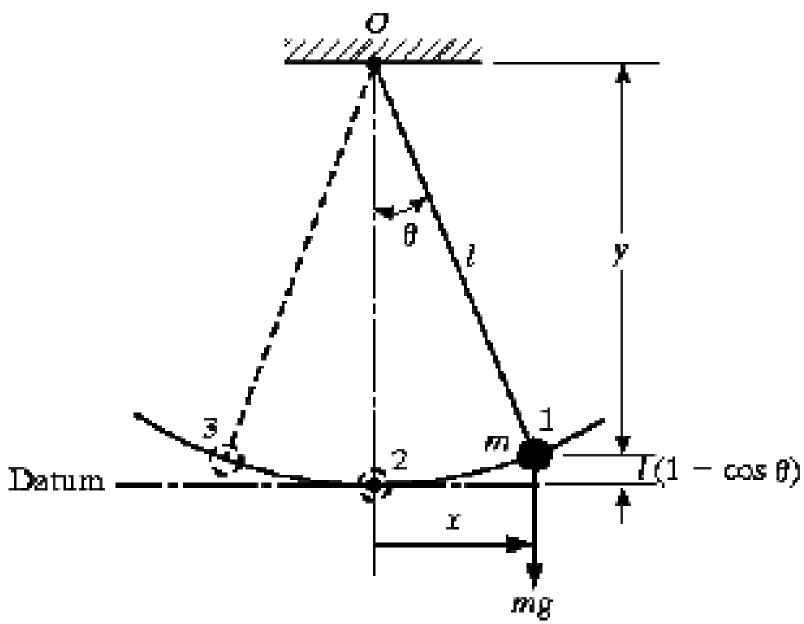
- لاگرانژ ۱۸۱۳-۱۷۳۶
  - حل تحلیلی تار مرتعش و معادله موج را پیدا کرد
- پواسون ۱۸۴۰-۱۷۸۱
  - حل مسئله ار تعاش غشاء انعطاف پذیر مستطیلی
- کلبش ۱۸۷۲-۱۸۳۳
  - مطالعه غشاء مدور
- ریلی
  - پایه گذار روش ریلی ریتز که برای پیدا کردن فرکانسهای طبیعی سیستمهای پیوسته استفاده می شود.

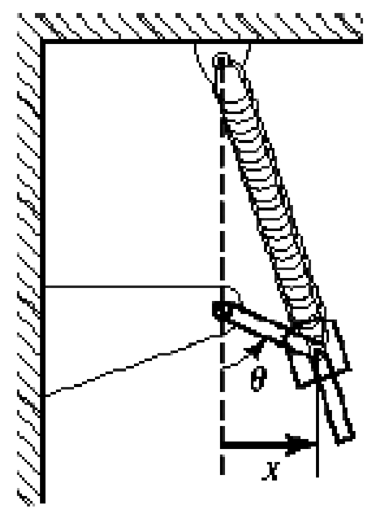
# مفاهیم اولیه ارتعاشات

- هر حرکتی که خود را در یک بازه زمانی تکرار نماید
- سیستم ارتعاشی شامل:
  - فنر یا کشسانی (وسیله ای جهت ذخیره انرژی پتانسیل)
  - جرم یا لختی (اینرسی) (وسیله ای جهت ذخیره انرژی جنبشی)
  - میراگر (damper) (وسیله ای جهت اتلاف تدریجی انرژی)
- تبادل انرژی از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی و برعکس

# Degree of Freedom (DoF) درجه آزادی

- کمترین مختصات مستقل لازم برای مشخص کردن کامل موقعیت تمام اجزاء سیستم در هر لحظه از زمان
- سیستم یک درجه آزادی:

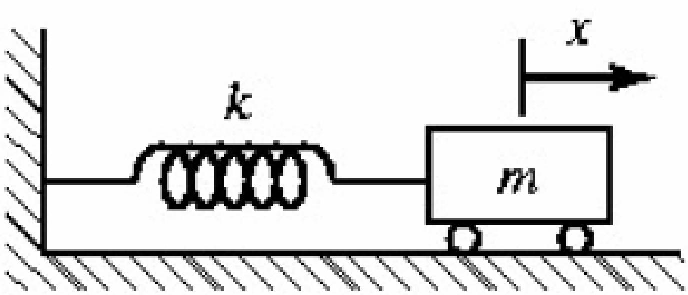


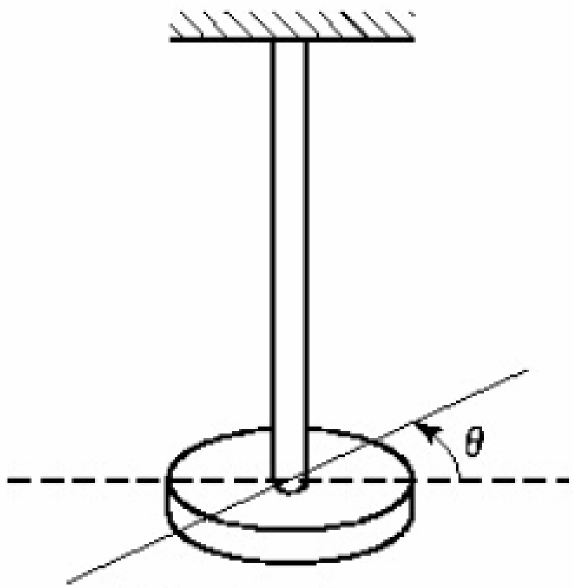

(a) Slider-crank-spring mechanism

# Degree of Freedom (DoF) درجه آزادی

- سیستم یک درجه آزادی:



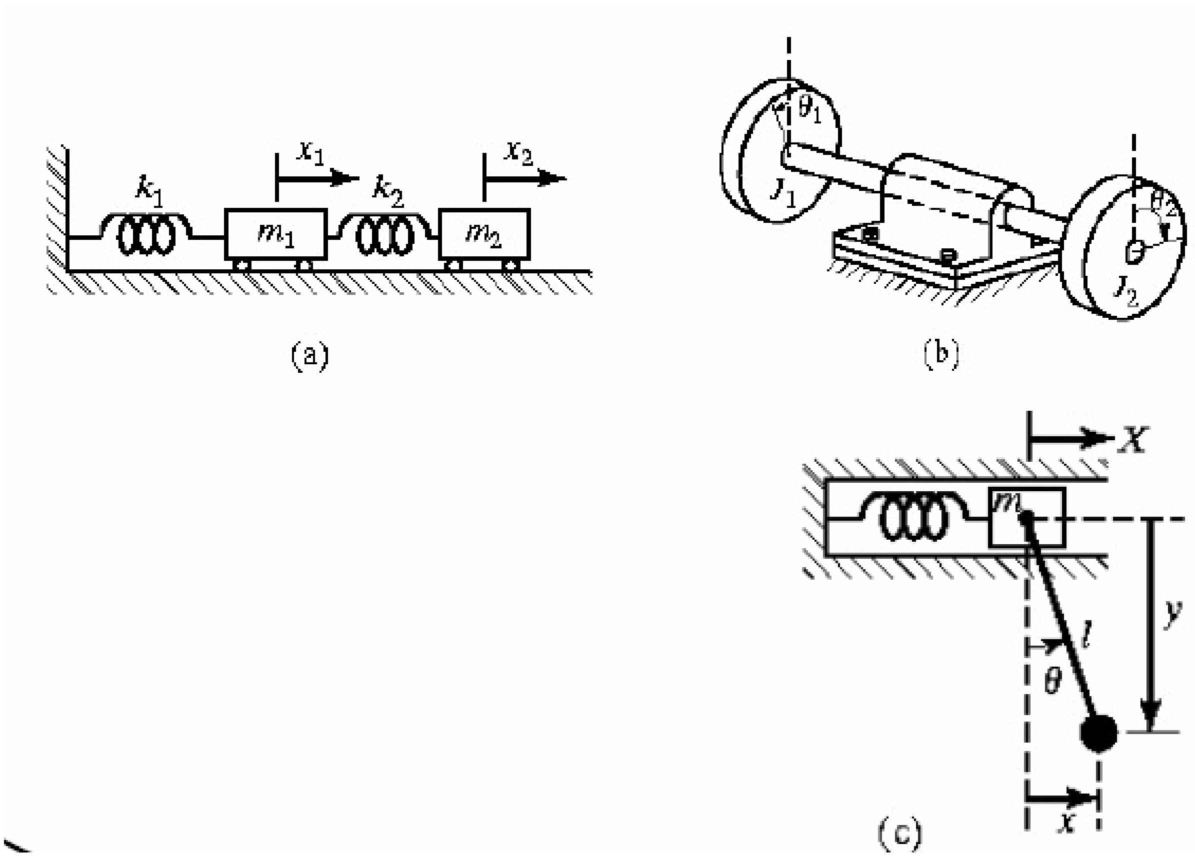

(b) Spring-mass system




(c) Torsional system

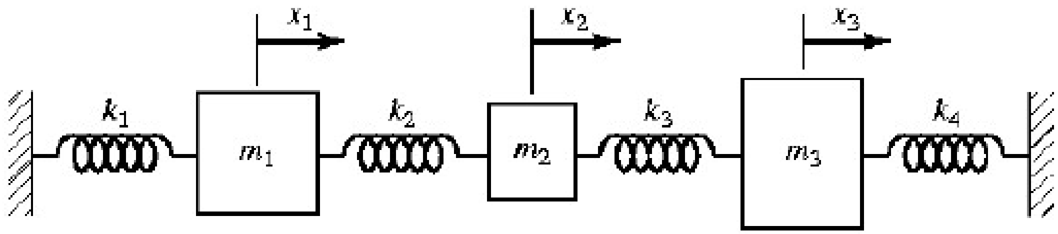
# Degree of Freedom (DoF) درجه آزادی

- سیستم دو درجه آزادی:

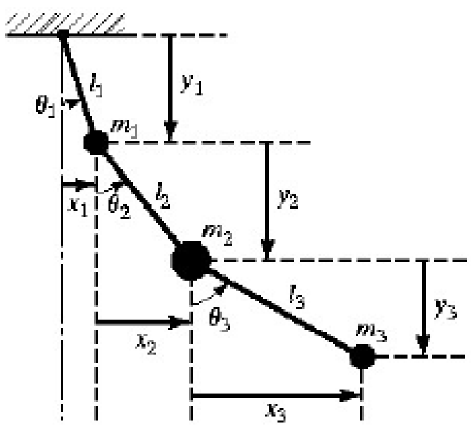


# Degree of Freedom (DoF) درجه آزادی

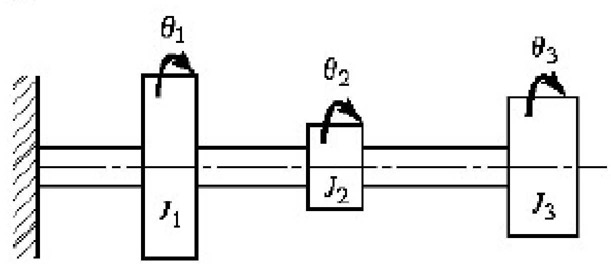
- سیستم سه درجه آزادی:




(a)

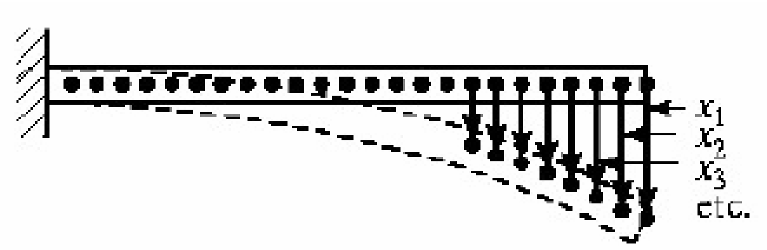



(b)




(c)

# Degree of Freedom (DoF) درجه آزادی




- سیستم بینهایت درجه آزادی:
- سیستم با بینهایت درجه آزادی را سیستم پیوسته Continuous یا توزیع شده Distributed گویند.
- سیستم با تعداد محدود درجه آزادی را سیستم گسسته discrete یا متمرکز شده lumped گویند
- نتایج دقیقتر با افزایش تعداد درجه آزادی بدست می آید.

# دسته بندی ارتعاشات

- ارتعاش آزاد: Free Vibration
  - بعد از یک اغتشاش اولیه سیستم به حال خود گذاشته می شود تا ارتعاش نماید. نیروی خارجی روی سیستم عمل نمی کند. مثال: پاندول ساده
- ارتعاش اجباری Forced Vibration
  - سیستمی که تحت نیروی خارجی ارتعاش می کند. مثال: ارتعاش ایجاد شده در اثر دوران ماشین لباسشوئی یا زلزله
  - تشدید (رزونانس Resonance): زمانی اتفاق می افتد که فرکانس نیروی خارجی و یکی از فرکانسهای طبیعی سیستم برهم منطبق باشند.

# دسته بندی ارتعاشات

- ارتعاش نامیرا Undamped Vibration
  - اگر طی نوسانات انرژی بر اثر اصطکاک یا هر مقاومت دیگر تلف نشود.
- ارتعاش میرا Damped Vibration
  - اگر طی نوسانات انرژی بر اثر اصطکاک یا هر مقاومت دیگر تلف شود.
  - تقریباً همه سیستمهای ارتعاشی تا حدی میرا هستند.

# دسته بندی ارتعاشات

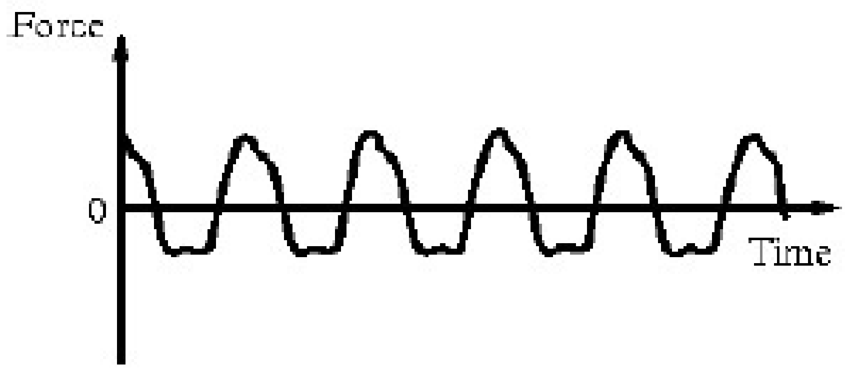
- ارتعاش خطی: Linear vibration
  - وقتی همه اجزاء سیستم ارتعاشی دارای رفتار خطی هستند.
  - اجزاء سیستم: فنر، میراگر
  - معادله دیفرانسیل حاکم خطی و اصل برهم نهش قابل اعمال است
- ارتعاش غیرخطی: Nonlinear vibration
  - اگر یکی از اجزاء سیستم ارتعاشی دارای رفتار غیرخطی باشد.
  - معادله دیفرانسیل حاکم غیرخطی، اصل برهم نهش اعمال نمی شود
  - ارتعاش با اصطکاک خشک

# دسته بندی ارتعاشات

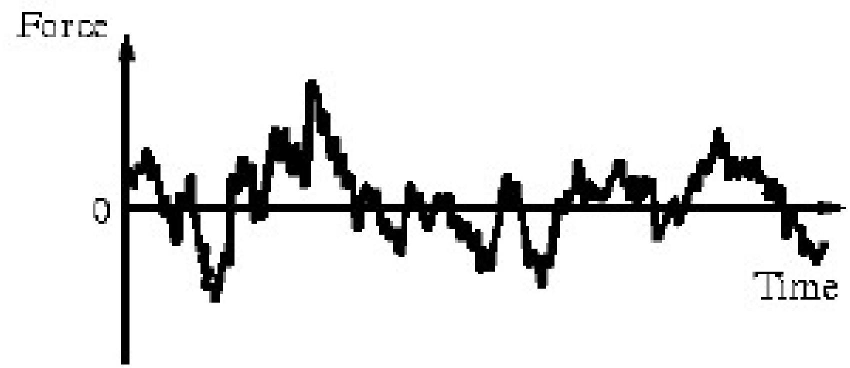
- ارتعاشات معیّن Deterministic Vibration
  - اگر مقدار تحریک (نیرو یا حرکت) که برروی سیستم ارتعاشی عمل می کند در هر زمان مشخص باشد.
- ارتعاشات نامعیّن Nondeterministic Vibration یا تصادفی Random
  - زمانی که مقدار تحریک در زمان داده شده را نمی توان پیش بینی کرد
  - مانند زلزله، ارتعاش جاده و ....

# دسته بندی ارتعاشات

- مثالهائی از نیروی تحریک معین و تصادفی




(a) A deterministic (periodic) excitation

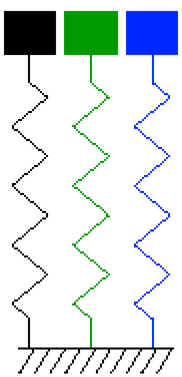


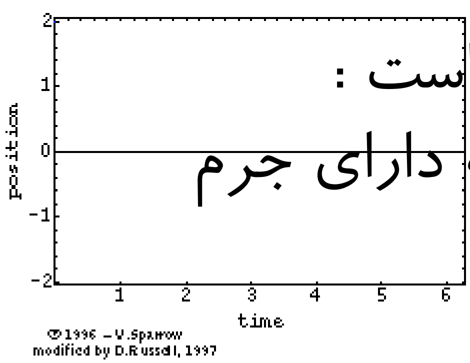

(b) A random excitation

# ارتعاشات در زندگی Vibration in our lives

- ضربان قلب، نوسان شُش، شنیدن بدلیل ارتعاش پرده گوش و حتی خُرخُر بدلیل ارتعاش

- امواج نورانی باعث دیدن و امواج صوتی باعث شنیدن
- حرف زدن بدلیل ارتعاش تارهای حنجره
- راه رفتن با نوسان پا است
- بحث درس به ارتعاشات مکانیکی محدود است :
ارتعاش سیستمهای دینامیکی (سیستمی که دارای جرم و کشسانی باشد)





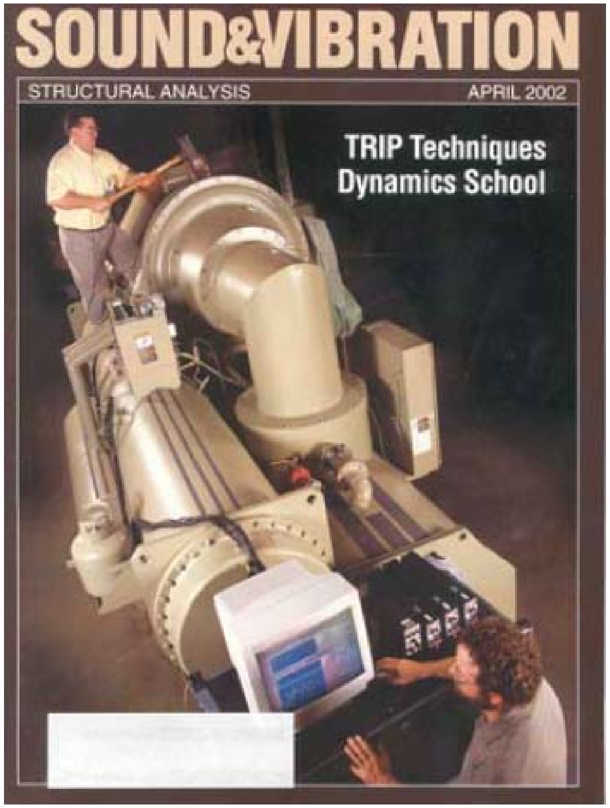
# دوستی و دشمنی ارتعاشات

- دوست:
  - نقاله، فشرده ساز، دریل پنوماتیک و ....
  - ماشین لباس شوئی
  - لرزاننده های مکانیکی، مخلوط کننده، سورت کننده
  - سازهای موسیقی
  - ساعت

- دشمن
  - تشدید = تخریب پل
  - همین مسئله در ماشین آلات اتفاق می افتد
  - ارتعاش زیاد باعث شل شدن اتصالات، صدا و شکست می شود
  - تاثیر بر بدن: ناراحتی، خستگی و کاهش بازده

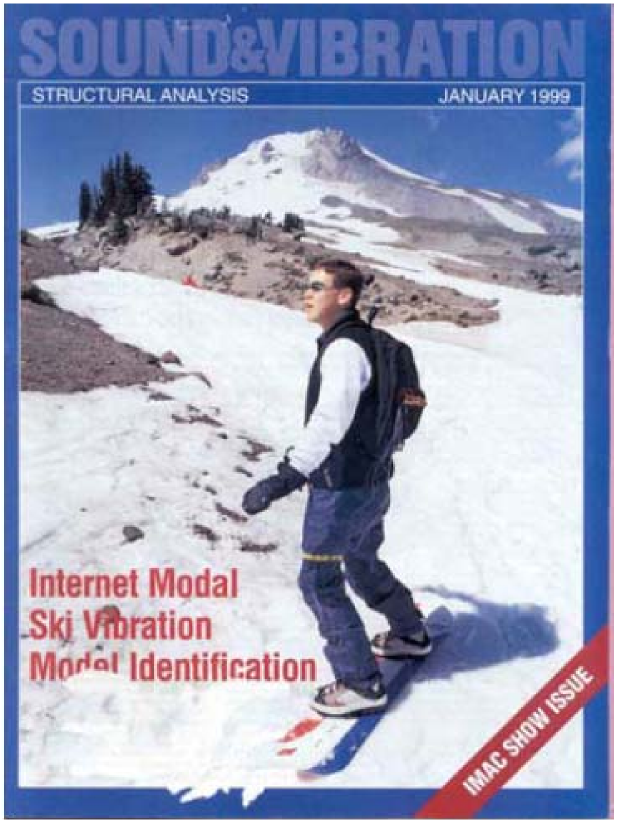
# اهمیت مطالعه ارتعاشات در

Vibrations in Machinery

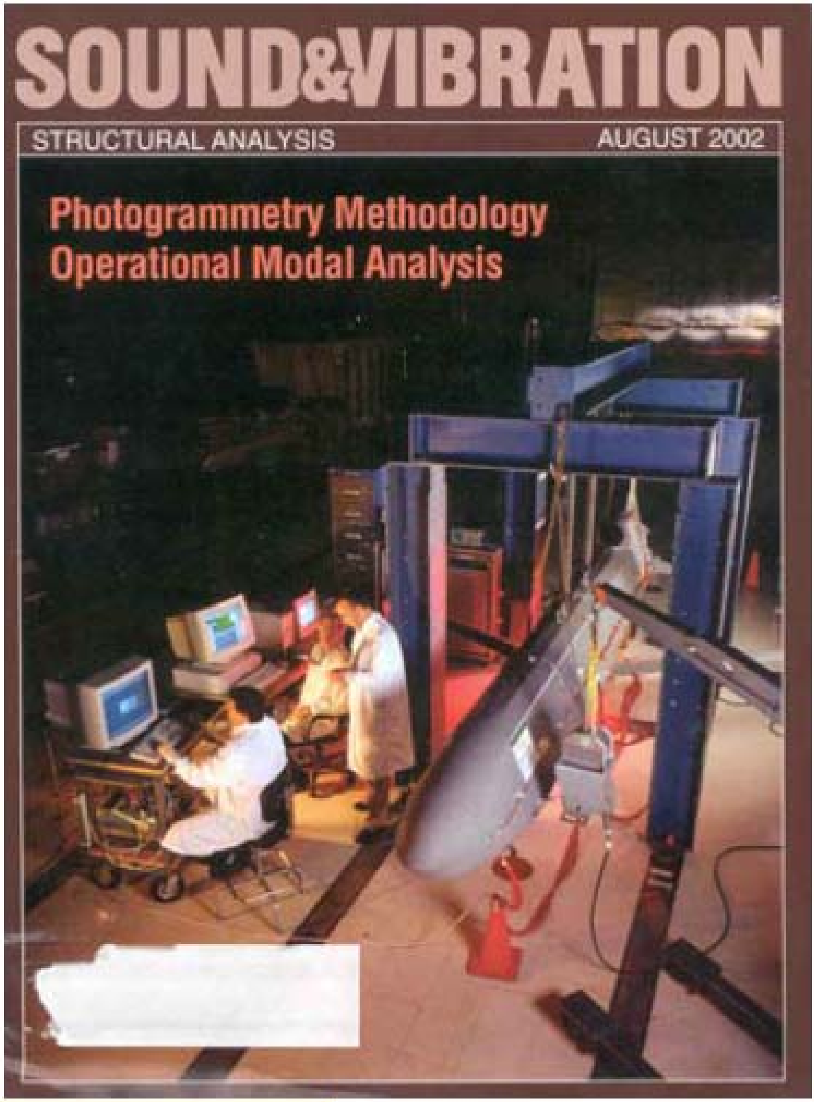


# اهمیت مطالعه ارتعاشات در

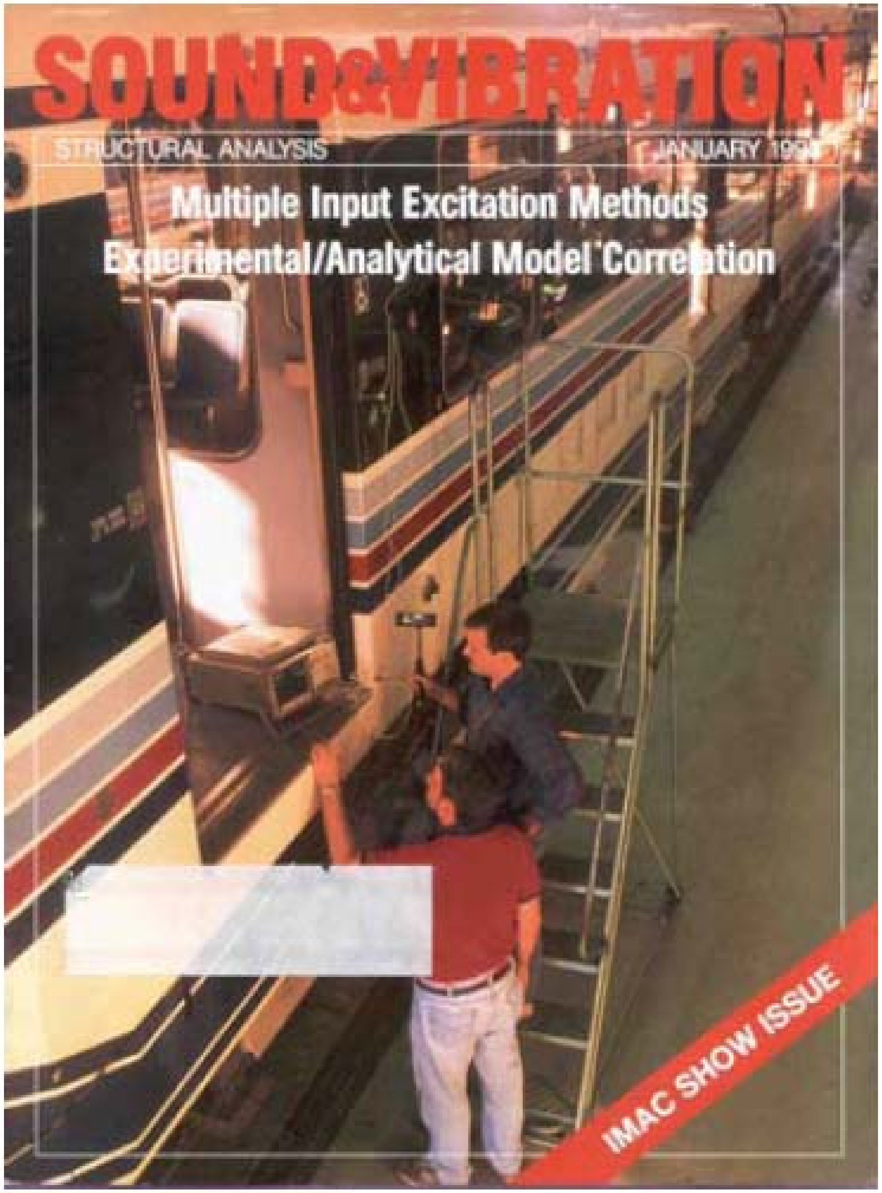
Vibrations in Recreation



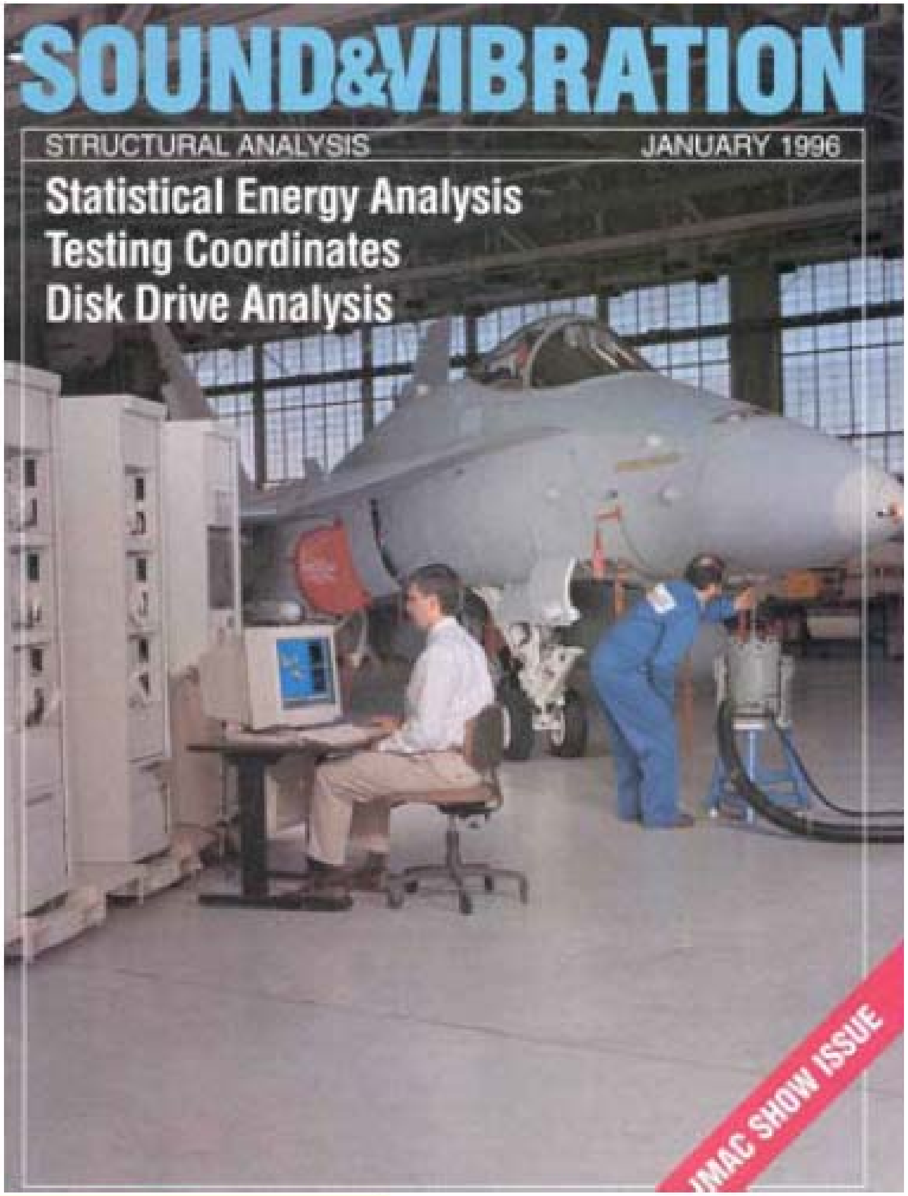
Vibrations in Defense



Vibrations in Transportation



Vibrations in Aerospace

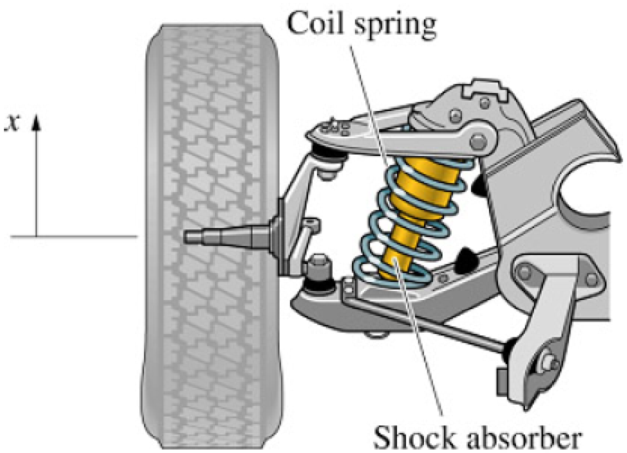


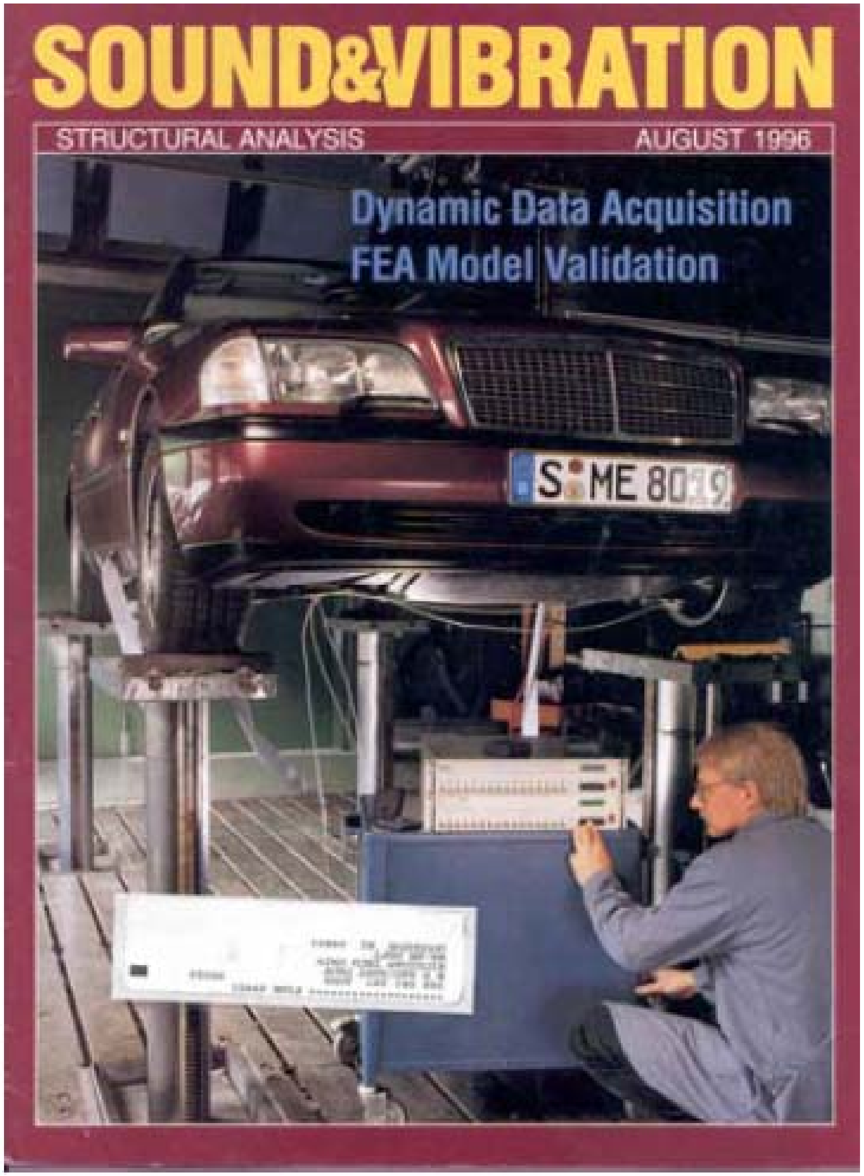
# Vibrations in Automobiles

➢NVH (Noise, Vibration, & Harshness) is a Top Priority for the BIG 3 Auto Industry.

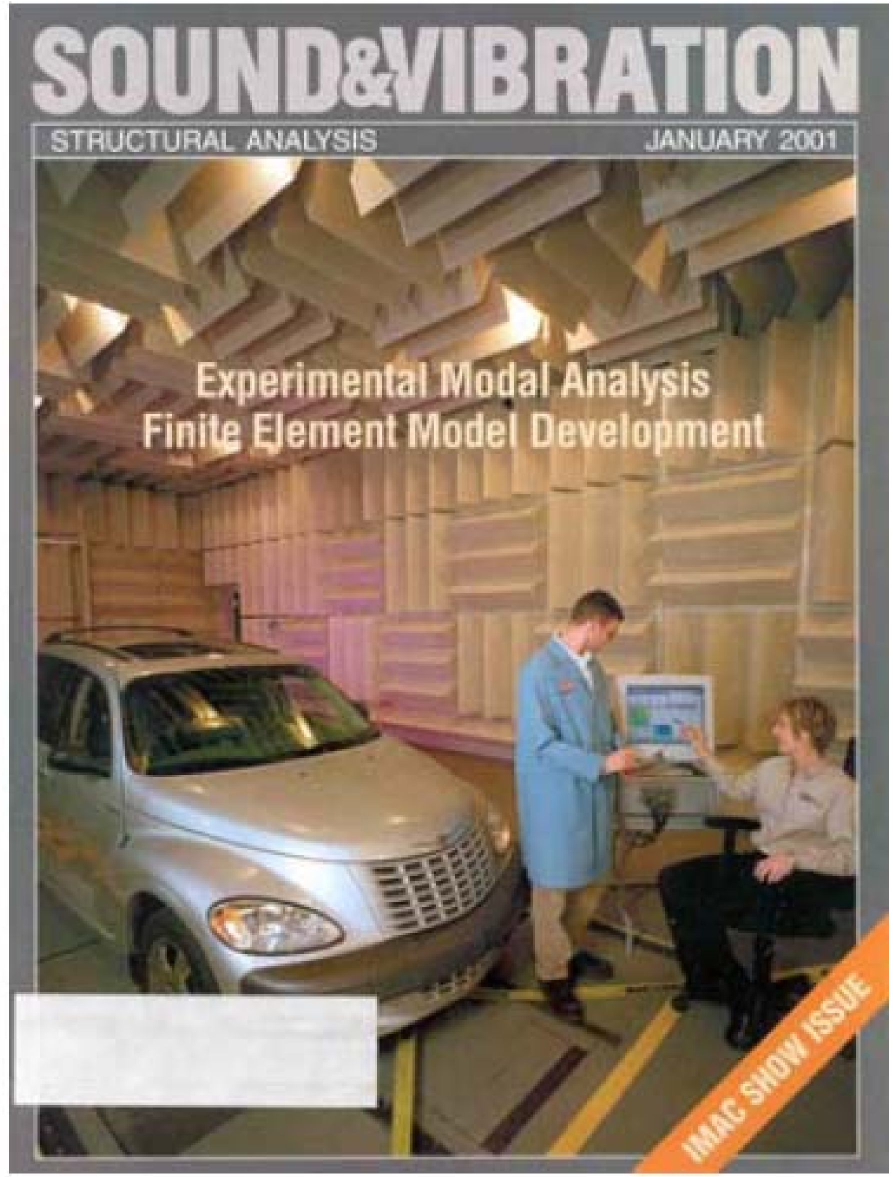
➢Several hundred million dollars have been invested in infrastructure & human resource development in this area over the past 10 years.

***Passive vibration control* (I)**

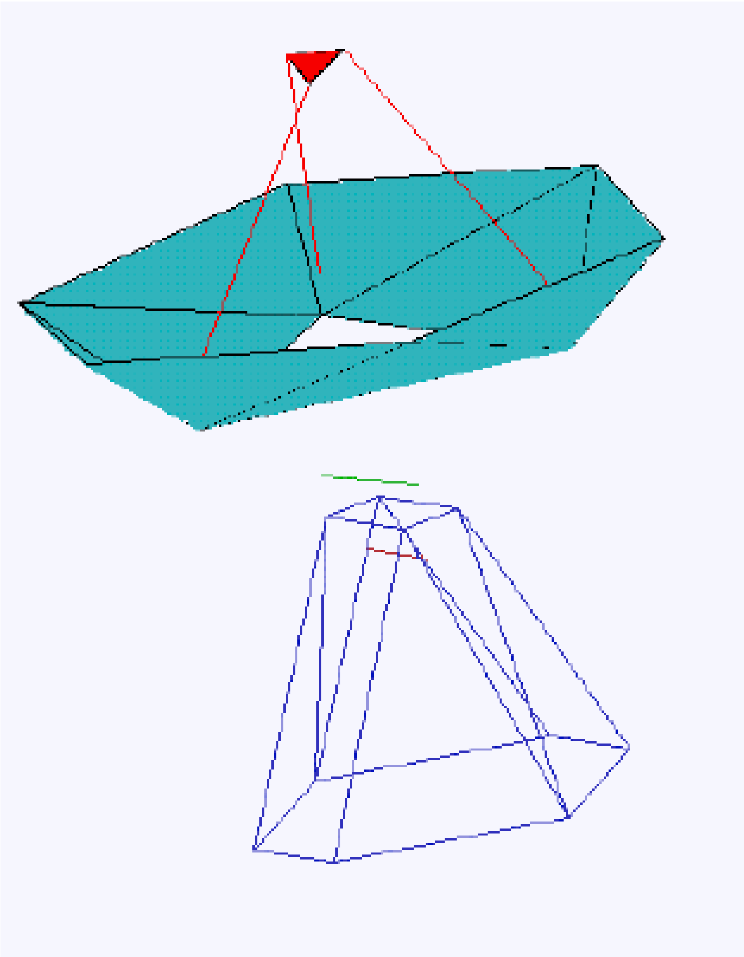


Sound/Noise in Automobiles




UMASS
MichiganTech
Nobeyama 45m Radio Telescope

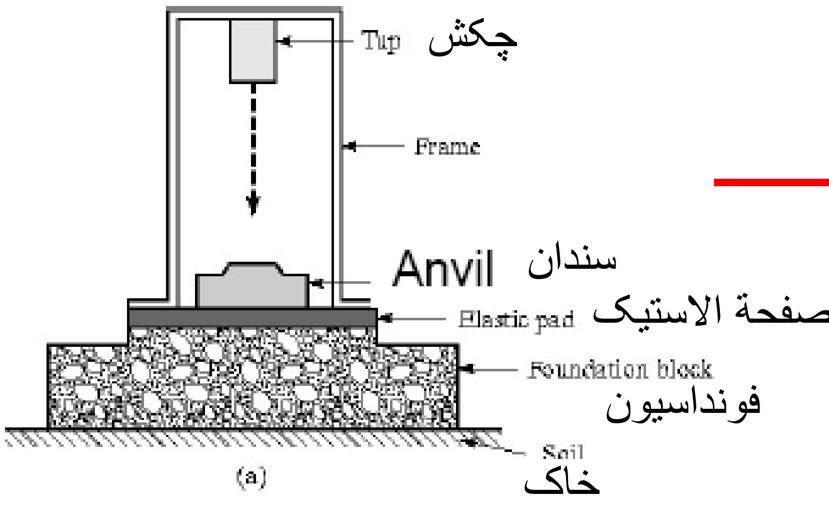


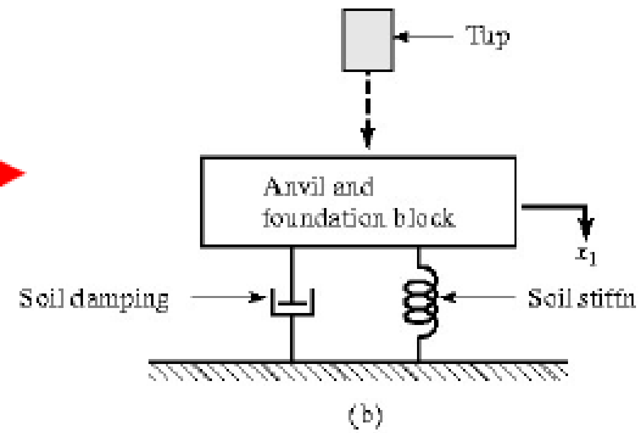

DISASTER!
The Greatest
Camera Scoop
of all time!

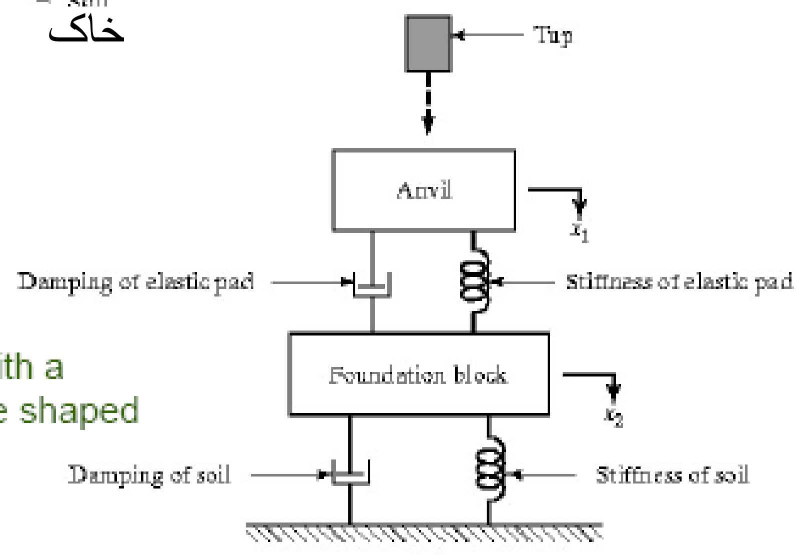
# روند تحلیل ارتعاشی

- مرحله اول: مدلسازی ریاضی
- مرحله دوم: استخراج معادله حاکم
- مرحله سوم: حل معادله حاکم
- مرحله چهارم: تفسیر نتایج

# مثالی از مدلسازی ریاضی (پرس فورج)



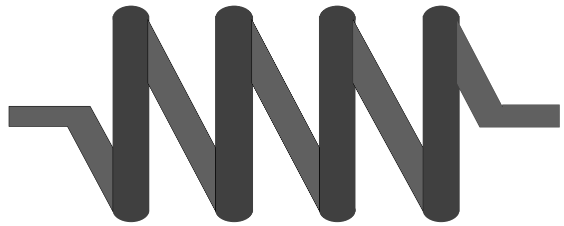



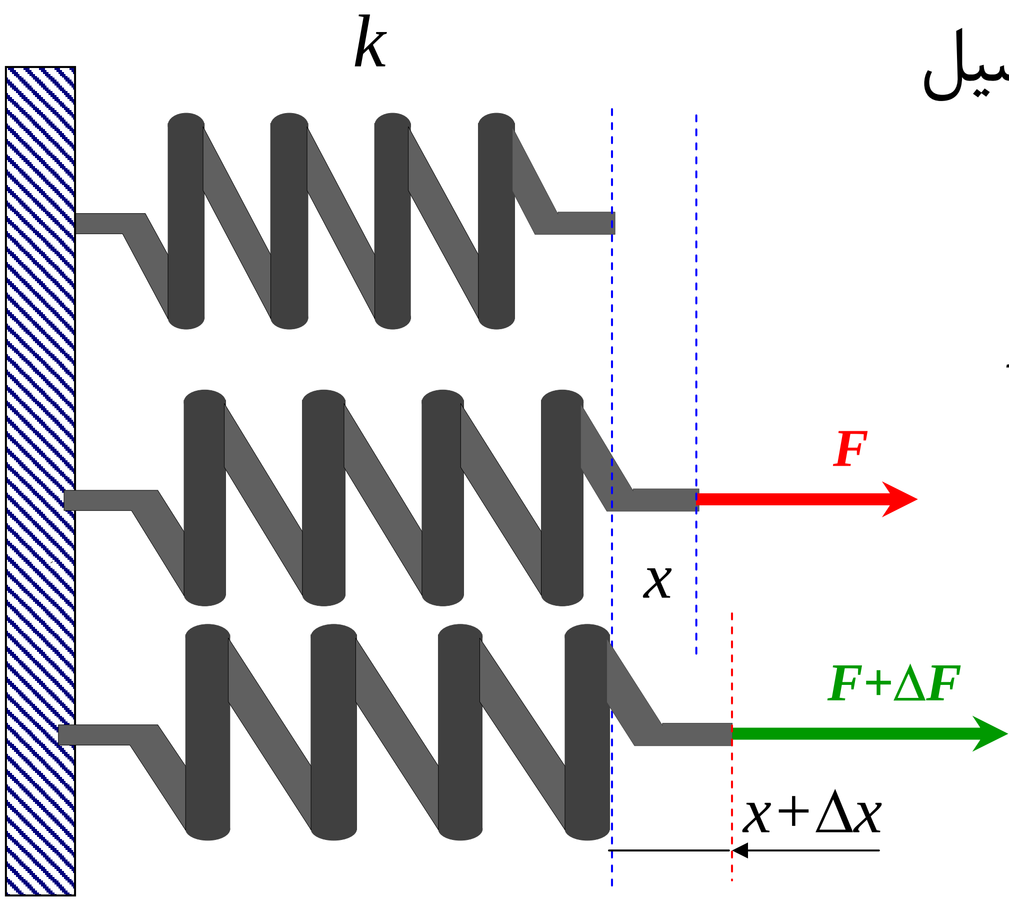

Anvil: heavy block of iron or steel with a smooth, flat top on which metals are shaped by hammering

# اجزاء یک سیستم ارتعاشی

- سیستم ارتعاشی شامل:
  - فنر یا کشسانی (وسیله ای جهت ذخیره انرژی پتانسیل یا وارد کننده نیروی برگرداننده
  - جرم یا لختی (اینرسی) (وسیله ای جهت ذخیره انرژی جنبشی) ایجاد نیروی اینرسی یا نیروی مقاوم در مقابل تغییر سرعت
  - میراگر (damper) (وسیله ای جهت اتلاف تدریجی انرژی) نیروی مقاوم در مقابل حرکت

# فنر یا کشسان

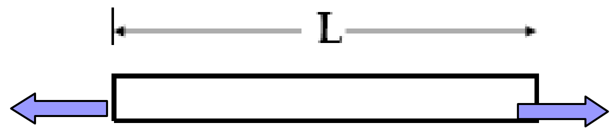





- ذخیره کننده انرژی پتانسیل
- عامل نیروی برگرداننده
- فنر خطی: $F = kx$
  - رابطه نیرو-تغییر مکان=خطی

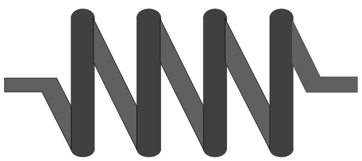
$$F + \Delta F = F(x+\Delta x) = F(x) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{=k}\Delta x + \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\Delta x)^2} + \cdots$$

# انواع فنرها




$$K=\frac{AE}{L}$$

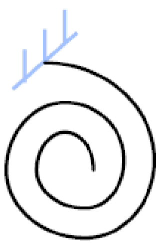
- فنر حلقوی: تغییر شکل در اثر پیچش و خمش



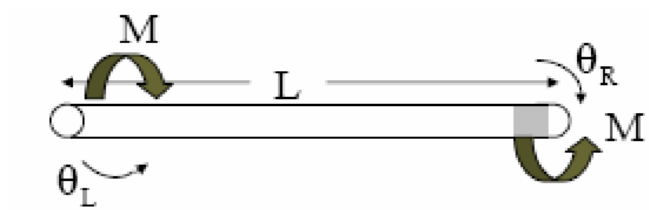
$$k=\frac{Gd^4}{64nR^3}$$

قطر سیم
مودول برشی
شعاع حلقه
تعداد حلقه

- فنر پیچشی

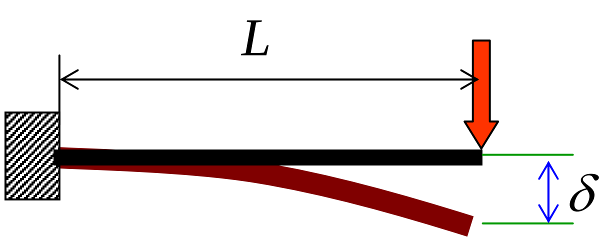


$K_t$




$$K_t=\frac{GJ}{L}\quad J=\pi d^4/32$$

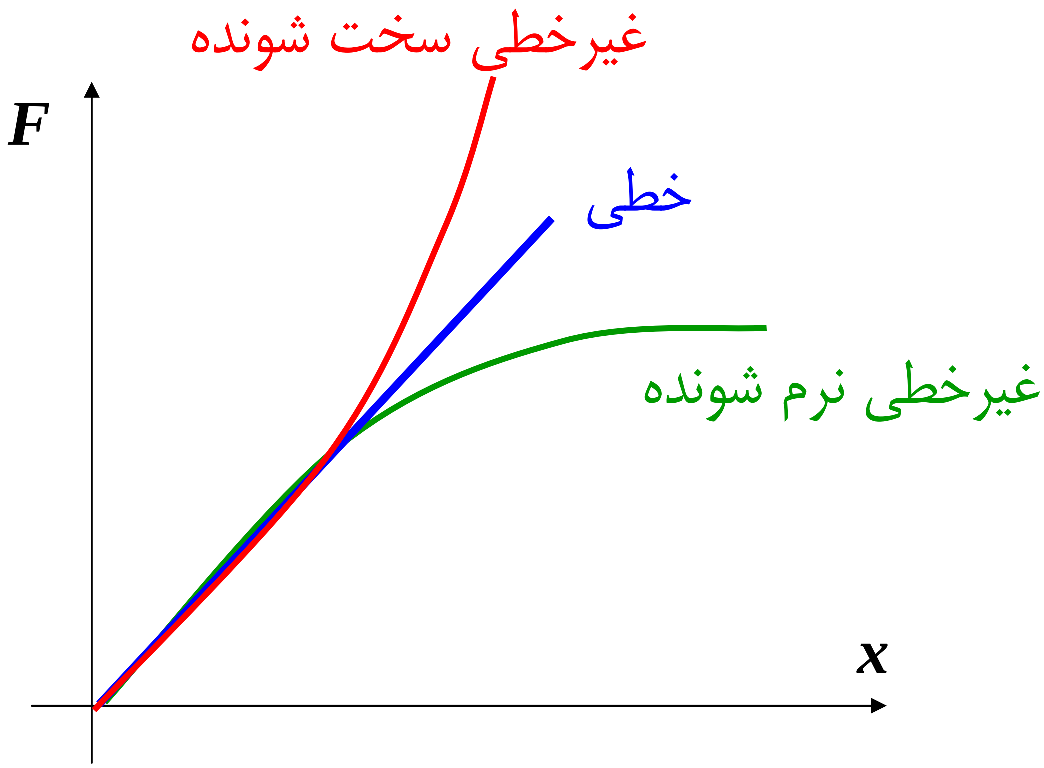
- فنر تخت



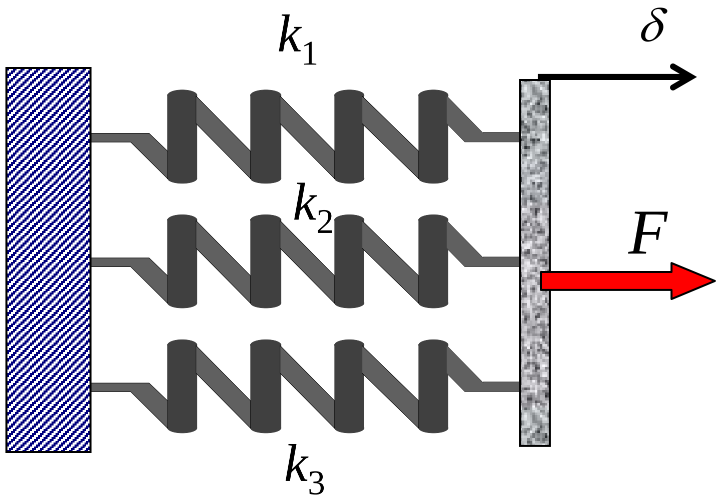

$$K_b=\frac{3EI}{L^3}$$

- غیره

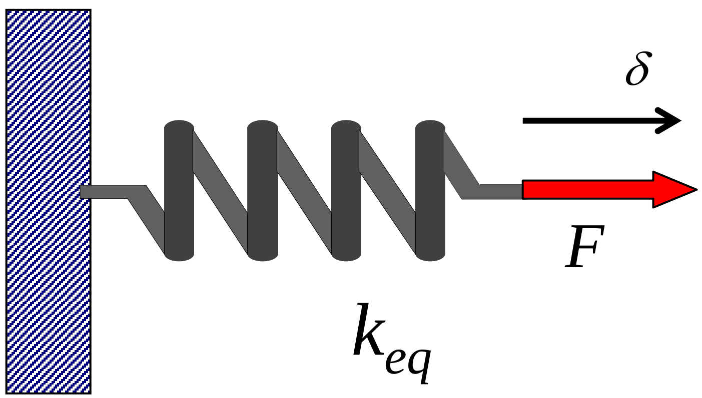
# فنرهای خطی و غیر خطی



# ترکیب فنرها



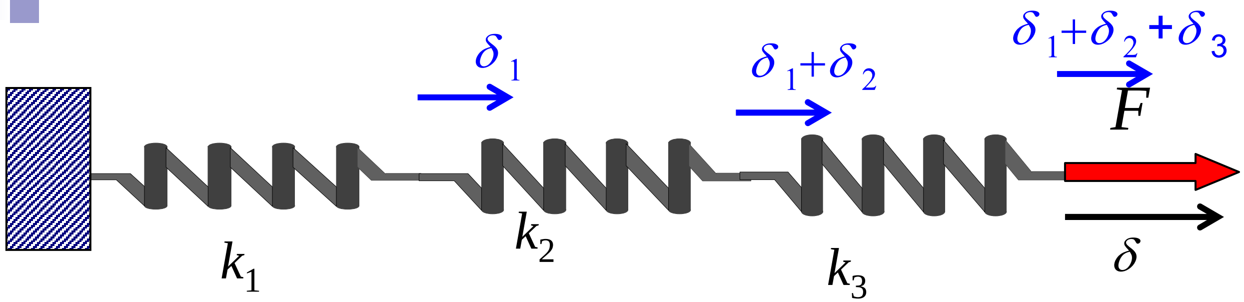

- فنرهای موازی
  - تغییرمکان $\delta$ یکسان
  - نیروی کل معادل مجموع نیروها




$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

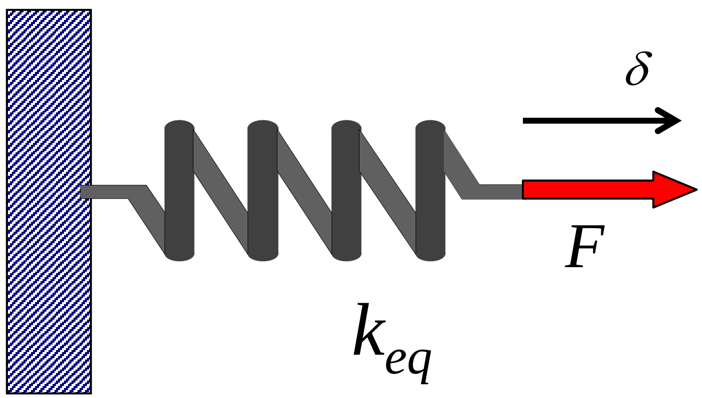
$$k_{eq}\delta = k_1\delta + k_2\delta + k_3\delta$$

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3}$$




# ترکیب فنرها

- فنرهای سری
  - تغییرمکان معادل مجموع تغییرمکانها
  - نیروی فنرها یکسان است



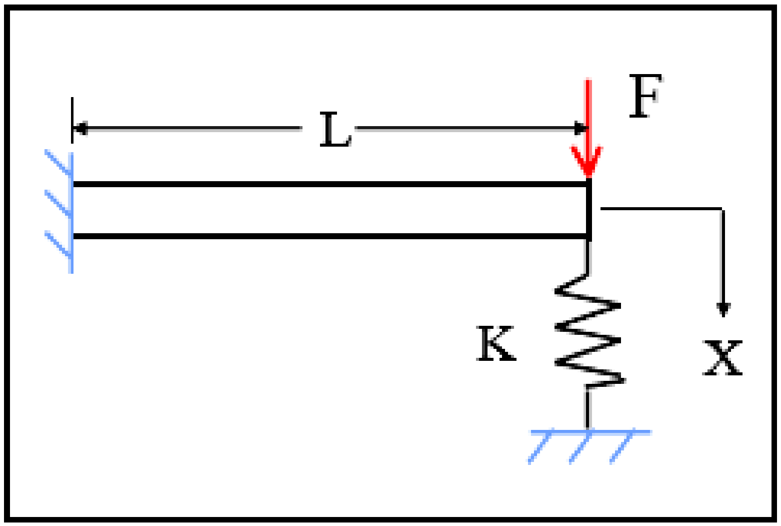

$$F = F_1 = F_2 = F_3$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

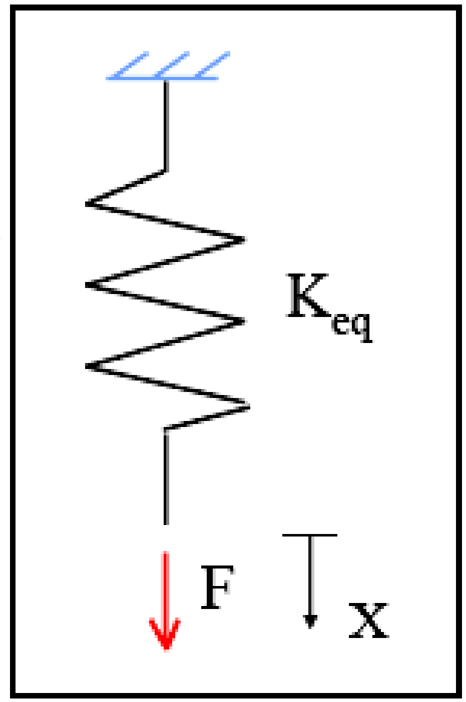
$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}$$

# سیستم معادل

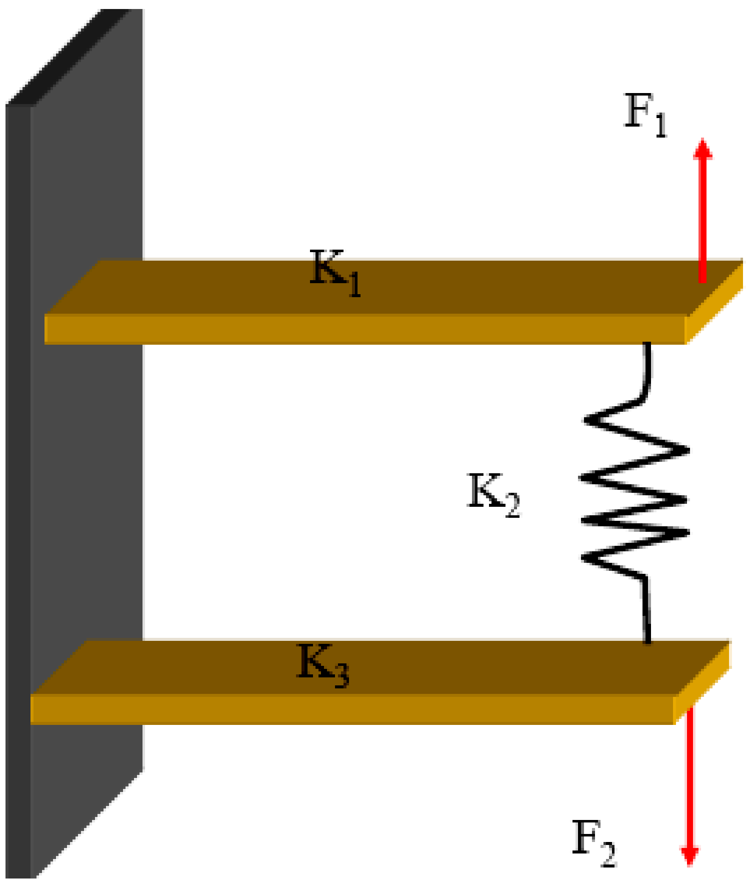



$$K_{eq} = K + \frac{3EI}{L^3}$$




Equivalent System

# مثال




$$F_1 = K_{eq} X$$

$$K_{eq} = K_1 + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}$$

$$F_2 = K_{eq} X$$

$$K_{eq} = K_3 + \frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1}$$

چرا این دو $k_{eq}$ معادل با هم برابر نیستند؟ آیا سیستم غیر خطی است؟

# انرژی: المان فنر

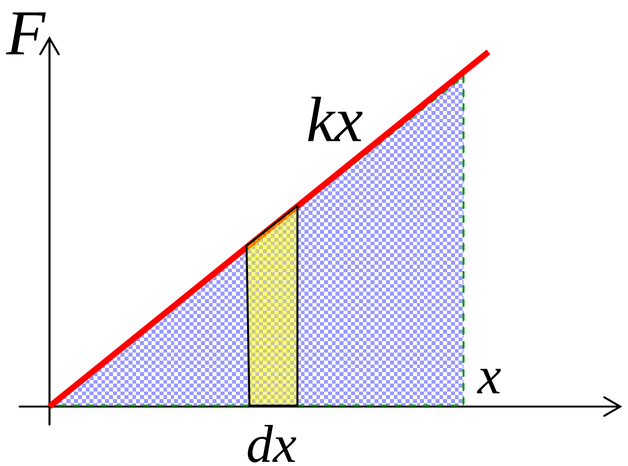
- انرژی پتانسیل جزئی

$$dU = Fdx = kxdx$$

- انرژی پتانسیل فنری که به اندازه $x$ کشیده شده:

$$U = \int_0^x dU = \int_0^x kxdx = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$




- برای فنر پیچشی:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}k_T\theta^2}$$

# المان فنر بازاویه

- روش انرژی:

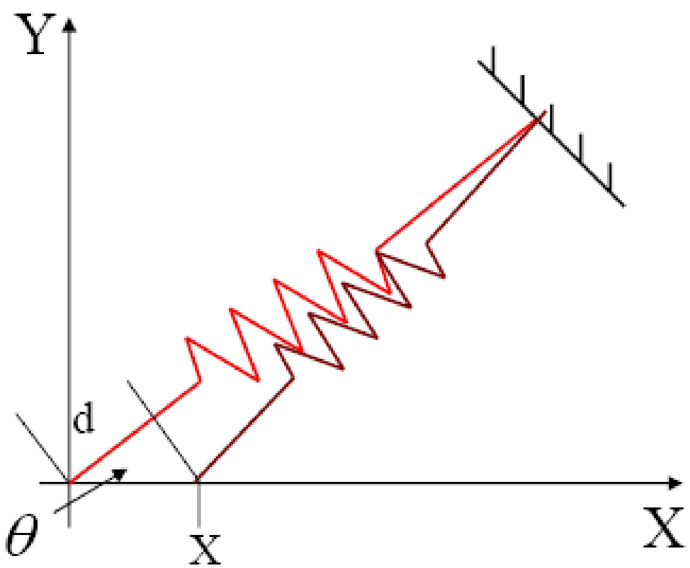
$$d = x\cos\theta$$

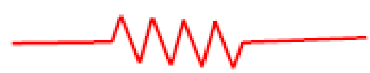
Equivalent potential energy

$$U = \frac{1}{2}k\left(x\cos\theta\right)^2 = \frac{1}{2}k_{eq}x^2$$

$$K_{eq} = K\cos^2\theta$$

in the x-direction



$K_{eq}$

# المان فنر بازاویه

- نیرو؟

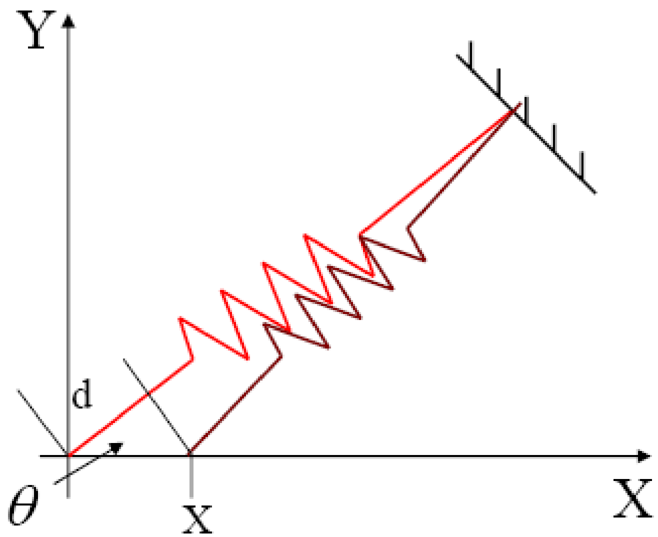
$$d = \mathrm{x}\cos\theta$$

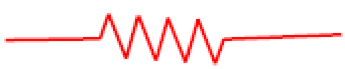
Equivalent potential energy

$$U = \frac{1}{2}k\left(\mathrm{x}\cos\theta\right)^2 = \frac{1}{2}k_{eq}\mathrm{x}^2$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{K}\cos^2\theta$$

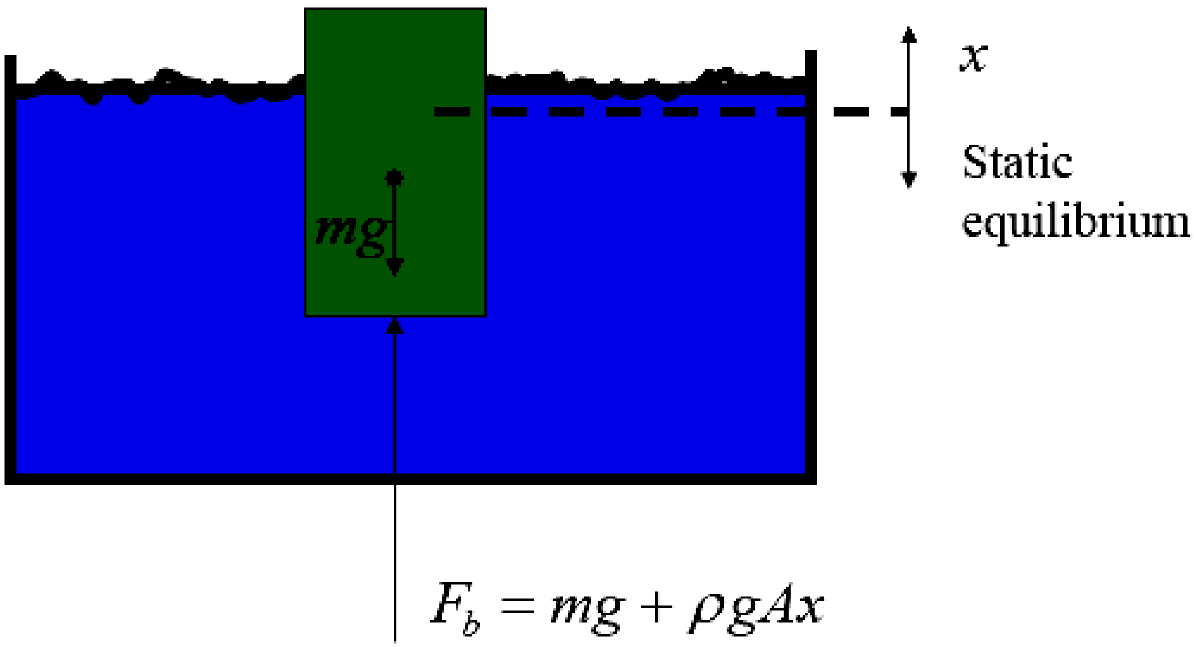
in the x-direction

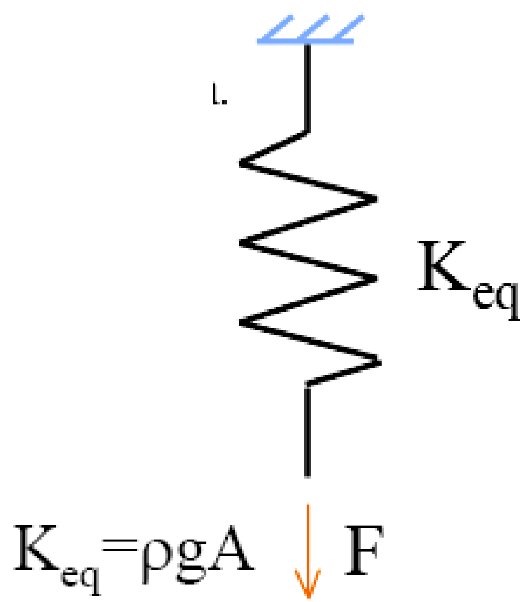


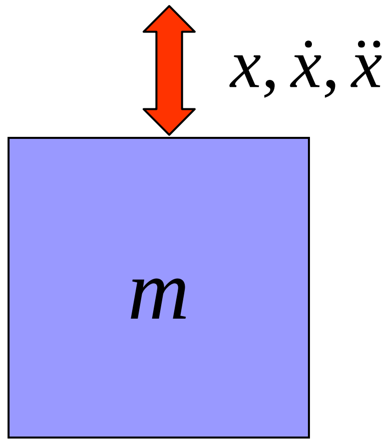
$\mathrm{K}_{\mathrm{eq}}$

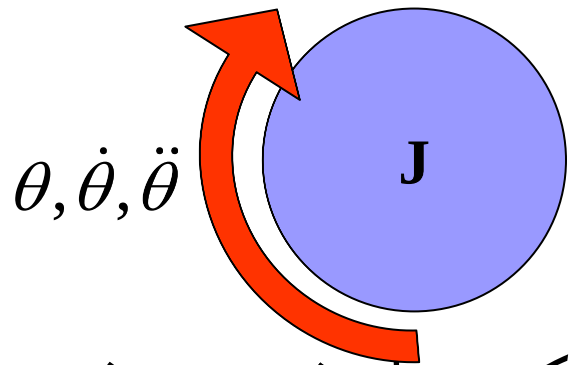
# فنر و غوطه وری



# المانهای جرم و لَختی




- ذخیره کننده انرژی جنبشی

$$T_T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad T_R = \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

- نیروی اینرسی

$$m\ddot{x} \qquad J_G \ddot{\theta}$$

# حرکت انتقالی بدون دوران

- جسم فقط حرکت انتقالی دارد (ذرات)

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

- انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

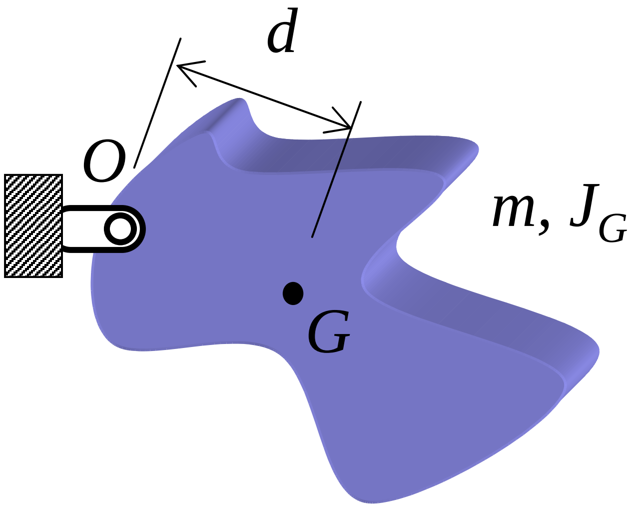
- نیروی اینرسی:

$$m\ddot{x}$$

- گشتاور اینرسی

$$J\ddot{\theta} = 0$$

# دوران حول یک نقطه




- قضیه انتقال محورها

$$J_O = J_G + md^2$$

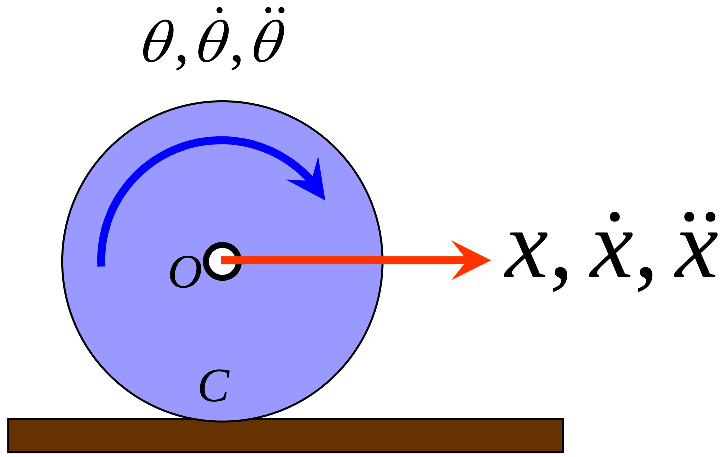
- انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2$$

- گشتاور اینرسی حول O

$$J_O \ddot{\theta}$$

# حرکت کلی




- C مرکز آنی سرعت صفر
- انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2$$

- نیروی اینرسی

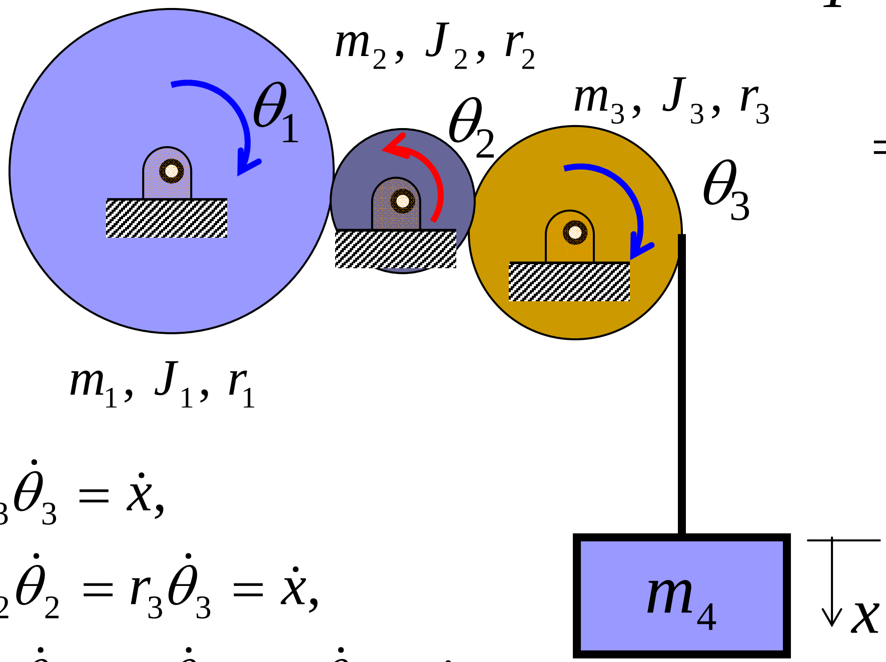
$$m\ddot{x}$$

- گشتاور اینرسی

$$J_O \ddot{\theta}$$

# ترکیب جرمها

- با استفاده از محاسبه انرژی جنبشی راحتتر است.




$$T=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2$$

$$=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2+\frac{1}{2}m_4\dot{x}^2$$

$$r_3\dot{\theta}_3=\dot{x},$$

$$r_2\dot{\theta}_2=r_3\dot{\theta}_3=\dot{x},$$

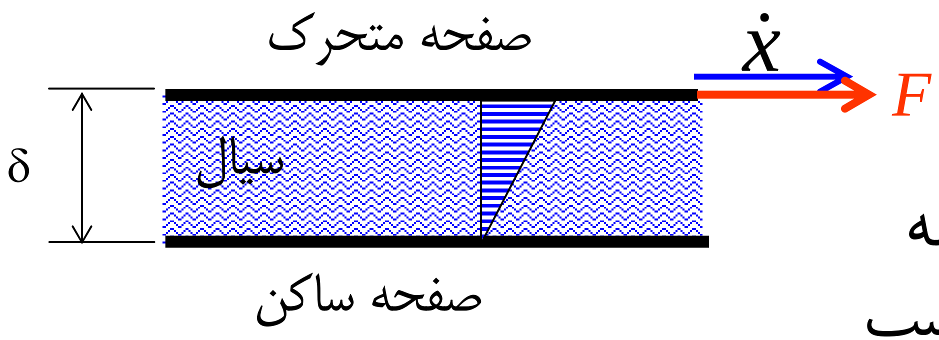
$$r_1\dot{\theta}_1=r_2\dot{\theta}_2=r_3\dot{\theta}_3=\dot{x}$$

$$T=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{J_1}{r_1^2}+\frac{J_2}{r_2^2}+\frac{J_3}{r_3^2}+m_4\right)\dot{x}^2$$

$$\boxed{m_{eq}=\frac{J_1}{r_1^2}+\frac{J_2}{r_2^2}+\frac{J_3}{r_3^2}+m_4}$$

# میراگر (دمپر)




- میرائی ویسکوز
- اگر سیال بین دو صفحه با فاصله کم قرار گیرد تنش برشی متناسب با تغییرات سرعت در امتداد عمود بر جریان سیال است

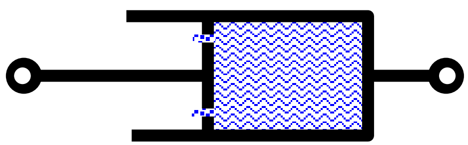
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

- اگر فاصله کم باشد تغییرات خطی است

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\dot{x}}{\delta} \qquad \tau = \mu \frac{\dot{x}}{\delta} = \frac{\mu}{\delta}\dot{x} \quad F = \tau A = \frac{\mu A}{\delta}\dot{x} = c\dot{x}$$

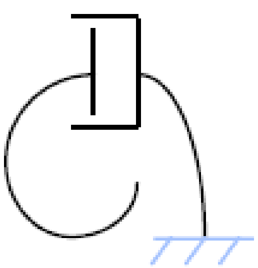
# میراگر

- لذا در جائیکه سیال ویسکوز بعنوان میراگر وجود داشته باشد با تقریب خوبی نیرو بصورت خطی با سرعت تغییر می کند
- ضریب میرائی معمولاً با $c$ نشان داده می شود
- توان تلف شده




$$-F_D v = -(c\dot{x})\dot{x} = -c\dot{x}^2$$

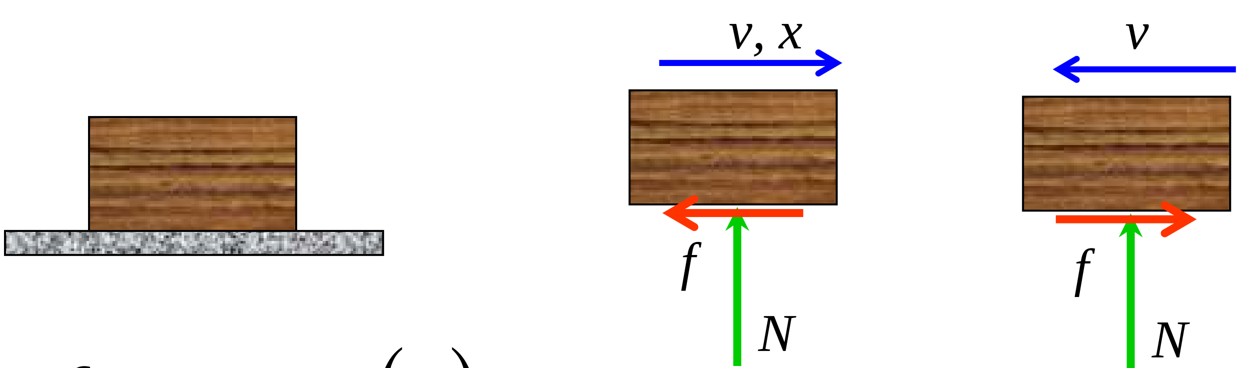
$$-M\omega = -(c_T\dot{\theta})\dot{\theta} = -c_T\dot{\theta}^2$$




- ترکیب میراگرها مانند فنر است

# انواع دیگر میرائی

- انواع دیگری از میرائی موجود است که معمولاً معادل میرائی ویسکوز در نظر گرفته می شود و بعداً بحث خواهد شد.
- میرائی بدلیل اصطکاک خشک (کلمب)



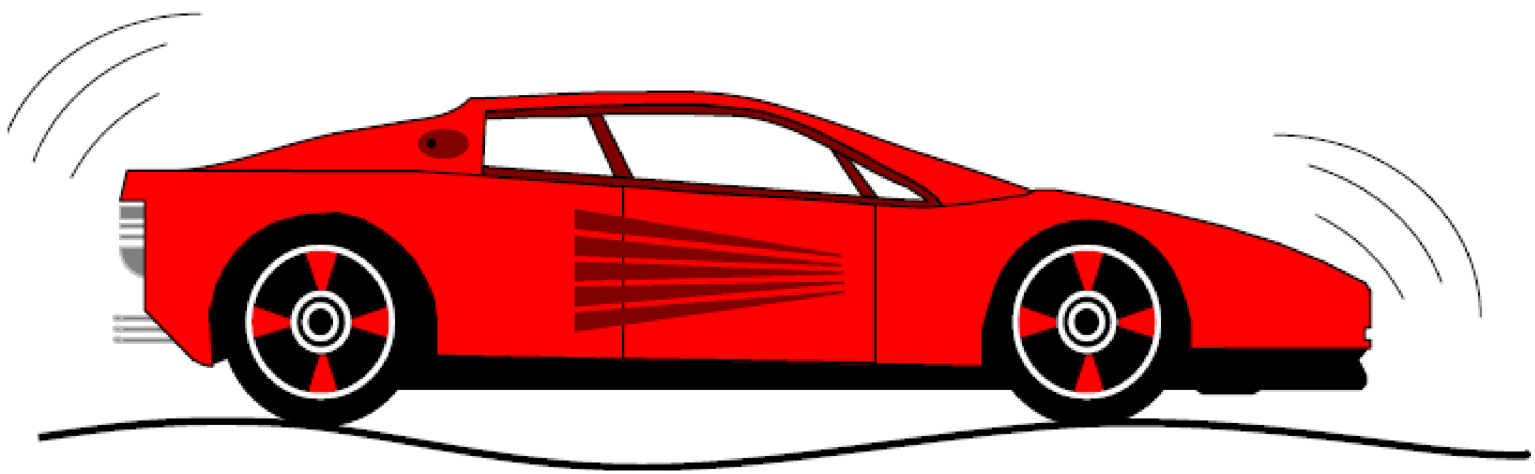

$$f = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu N$$

- توان تلف شده

$$-f\,\dot{x}$$

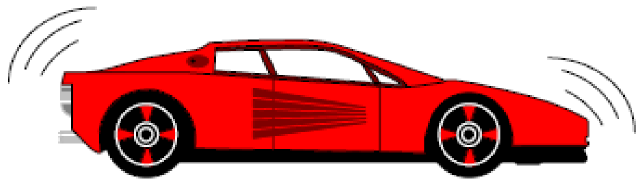
# مدلسازی یک سیستم دینامیکی

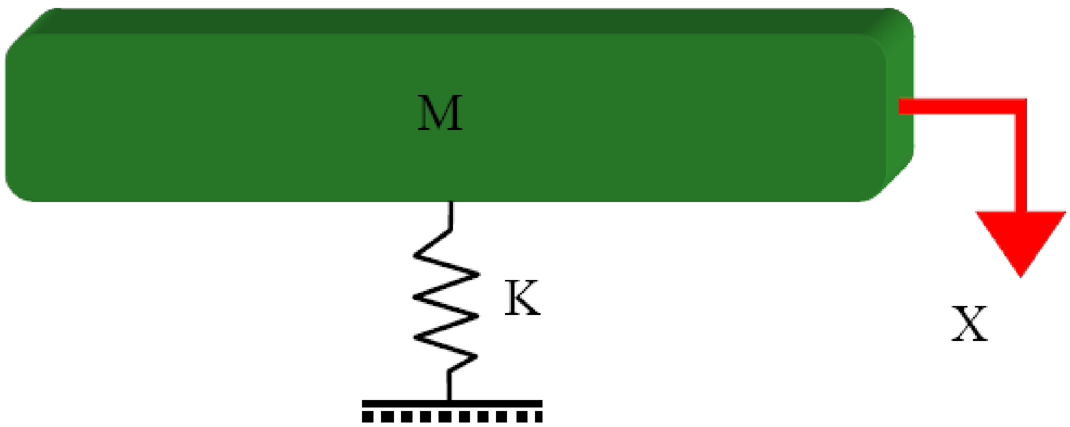
## Modeling Dynamic Systems



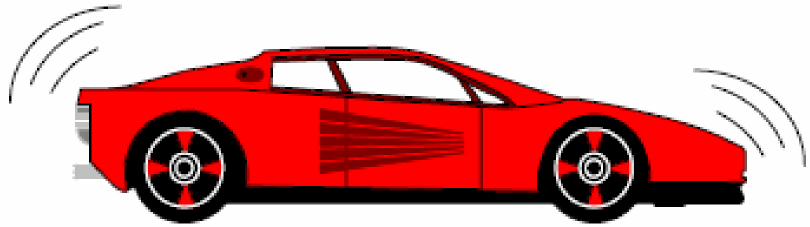
# مدلسازی با سیستم یک درجه آزادی

## Vibrating Systems: Single Degree of Freedom (SDOF)

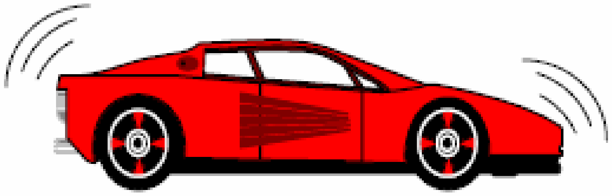


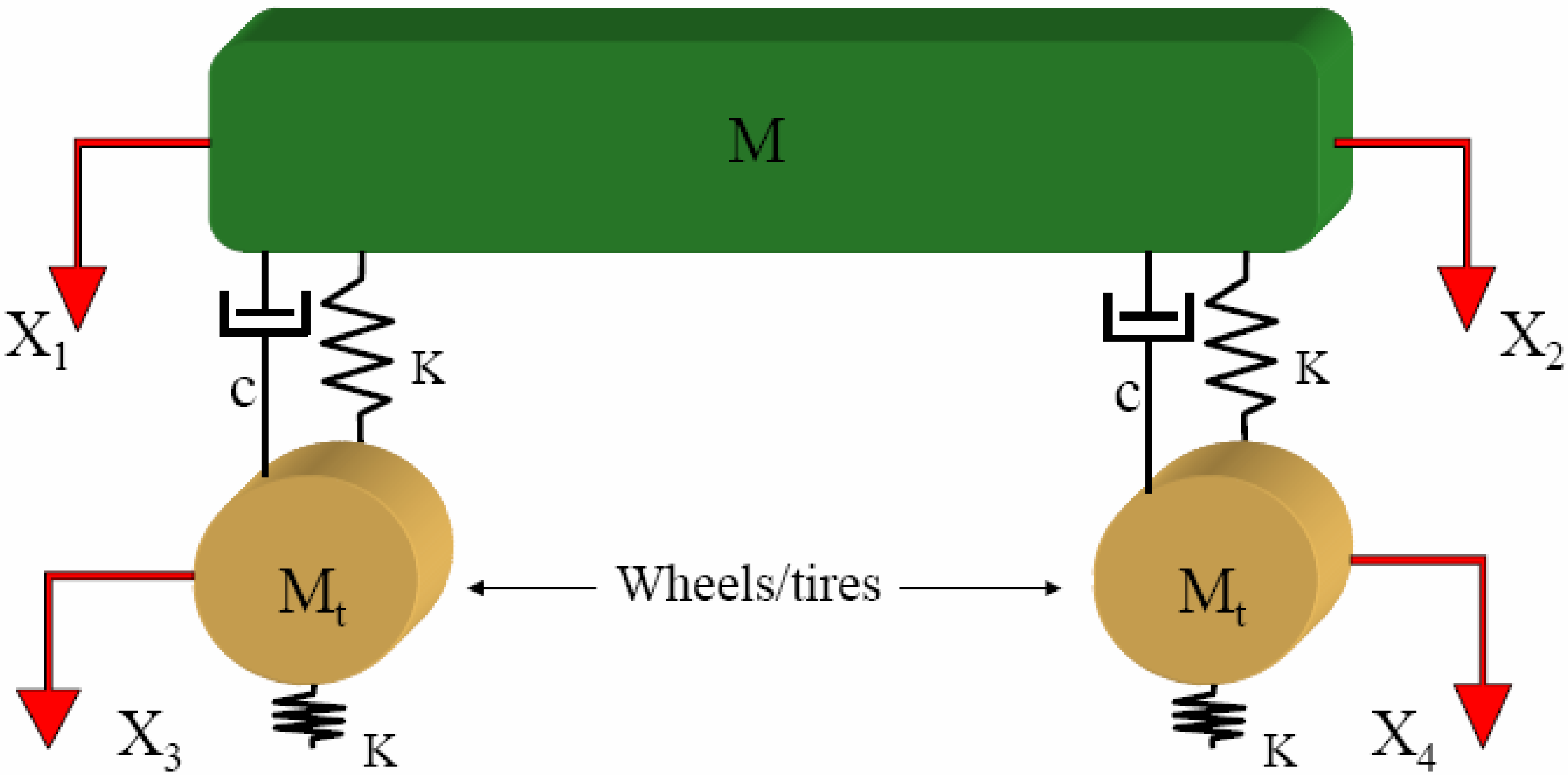


# Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)

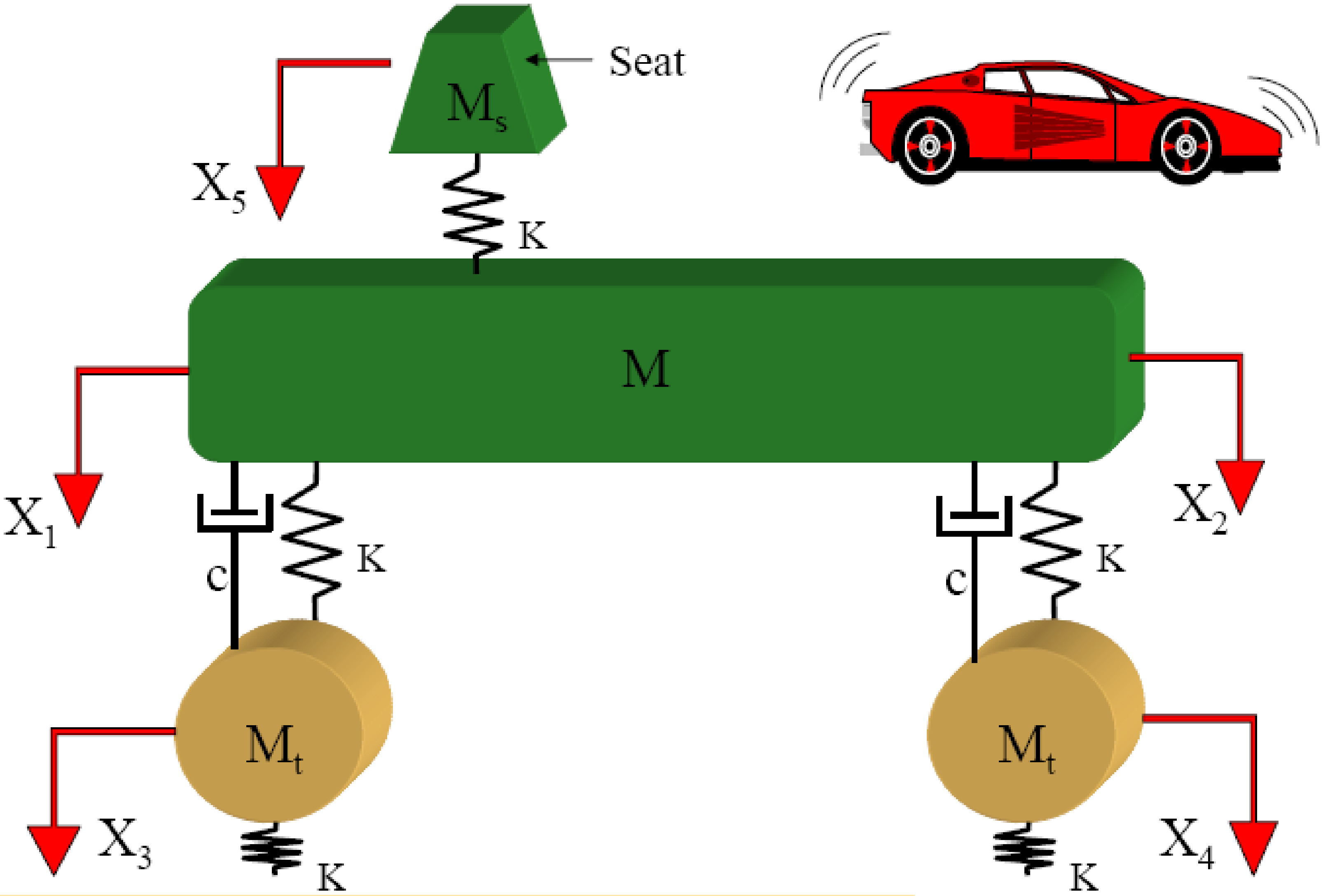


# Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)

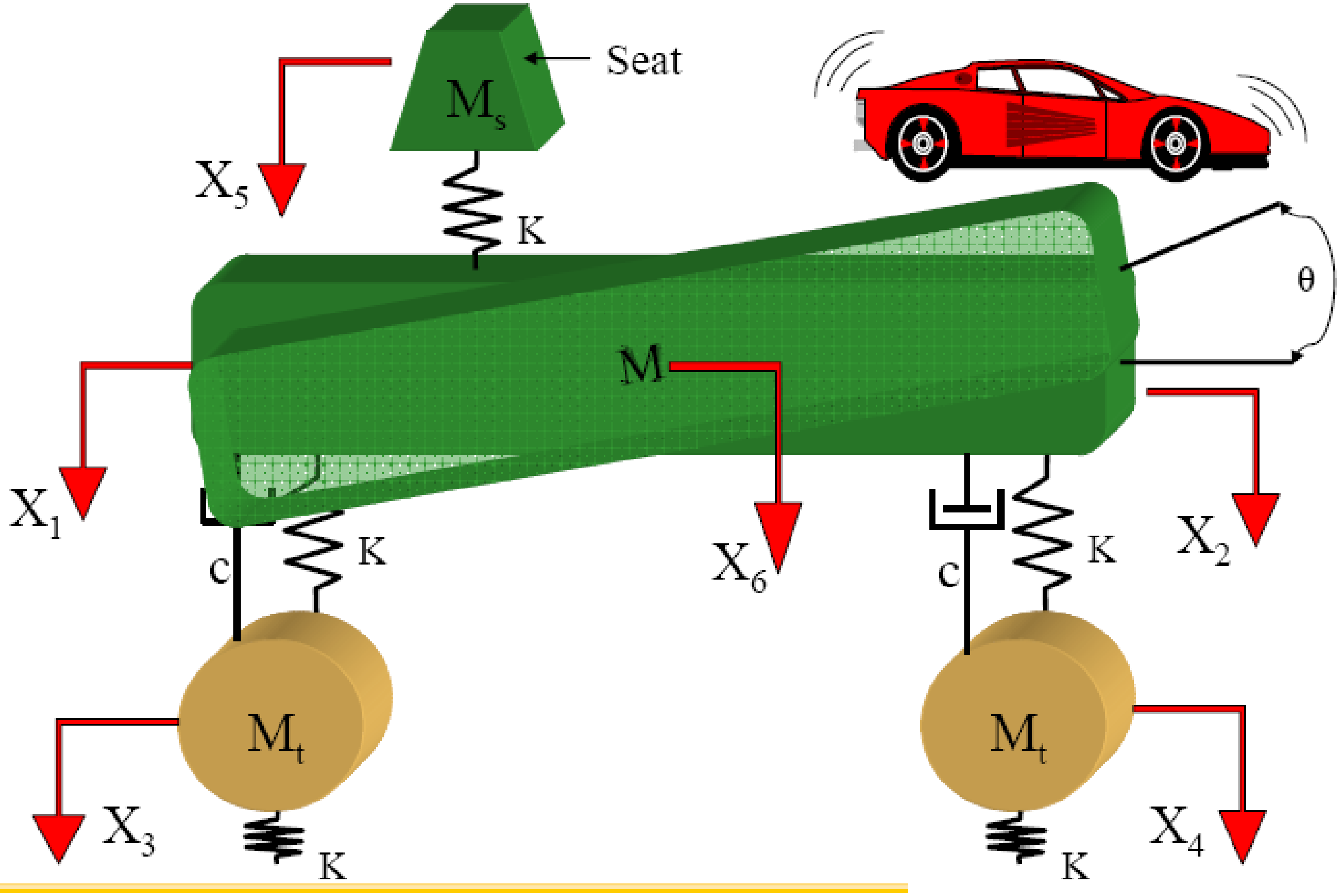




# Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)

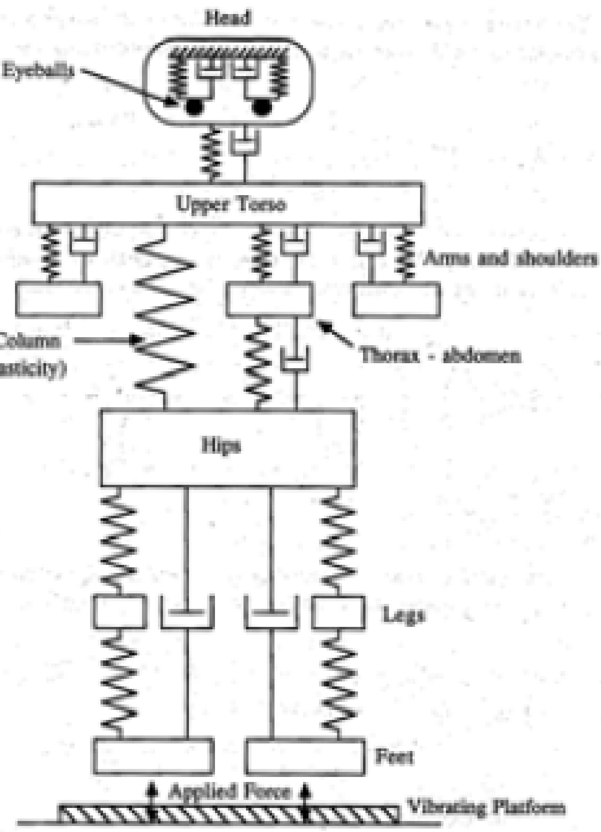


# Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)



# Vibrating Systems: The Human Body

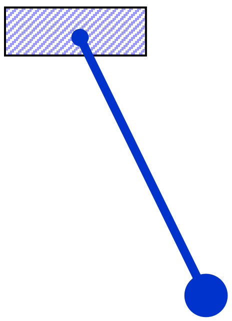
Fig. 1.6. A simplified, multiple, discrete mass–spring–damper model of a human body standing on a vibrating platform.



# ارتعاشات مکانیکی ۲

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

# حرکت هارمونیک



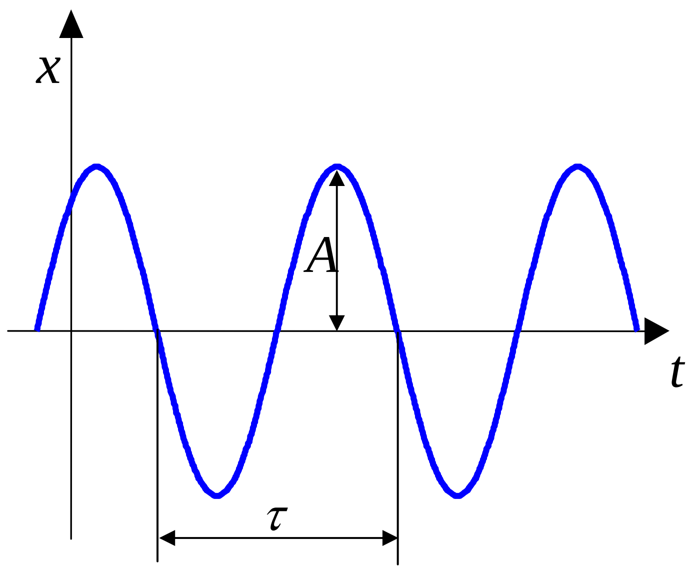
- حرکت نوسانی ممکن است بطور مرتب خود را تکرار نماید:
  - مانند حرکت آونگ ساده
- یا ممکن است نامنظم باشد:
  - مانند حرکت زمین در زلزله
- اگر حرکت بعد از زمان معلومی خود را تکرار نماید آن را **حرکت تناوبی** گویند.
- ساده ترین نوع حرکت تناوبی را **حرکت هارمونیک** گویند

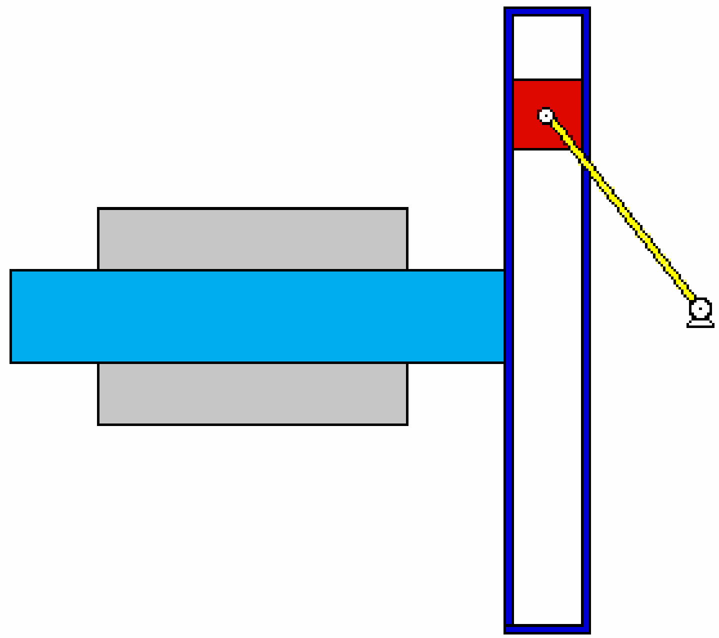
# حرکت هارمونیک

- تعاریف:
  - زمان تناوب ($\tau$): کوتاهترین زمانی که تابع خود را تکرار نماید. (واحد آن ثانیه است)
  - فرکانس ($f$): تعداد تکرار در هر ثانیه (Cycle/s, Hz)

$$f = \frac{1}{\tau}$$

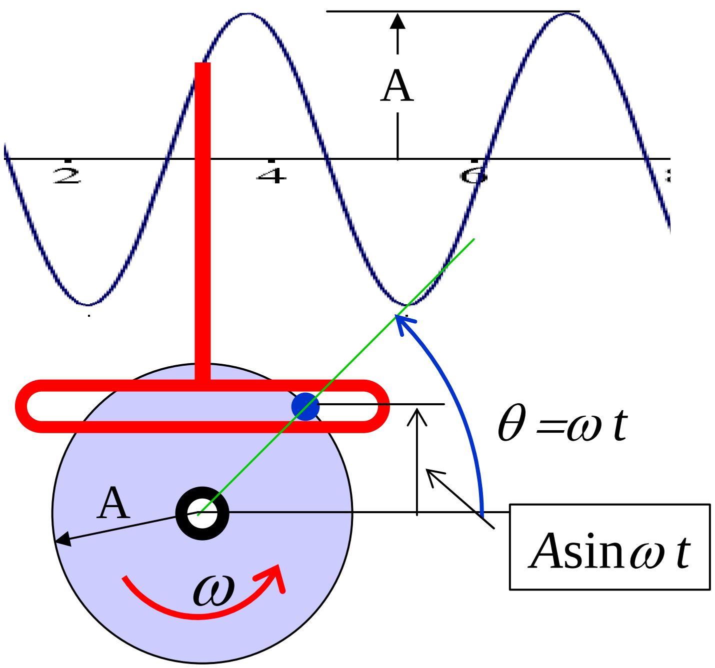
  - دامنه A: بیشترین مقدار تابع است





Created for "Design of Machinery, 3rd ed." by R. L. Norton and
"The Multimedia Handbook of Mechanical Devices" by S. Wang

# حرکت هارمونیکی

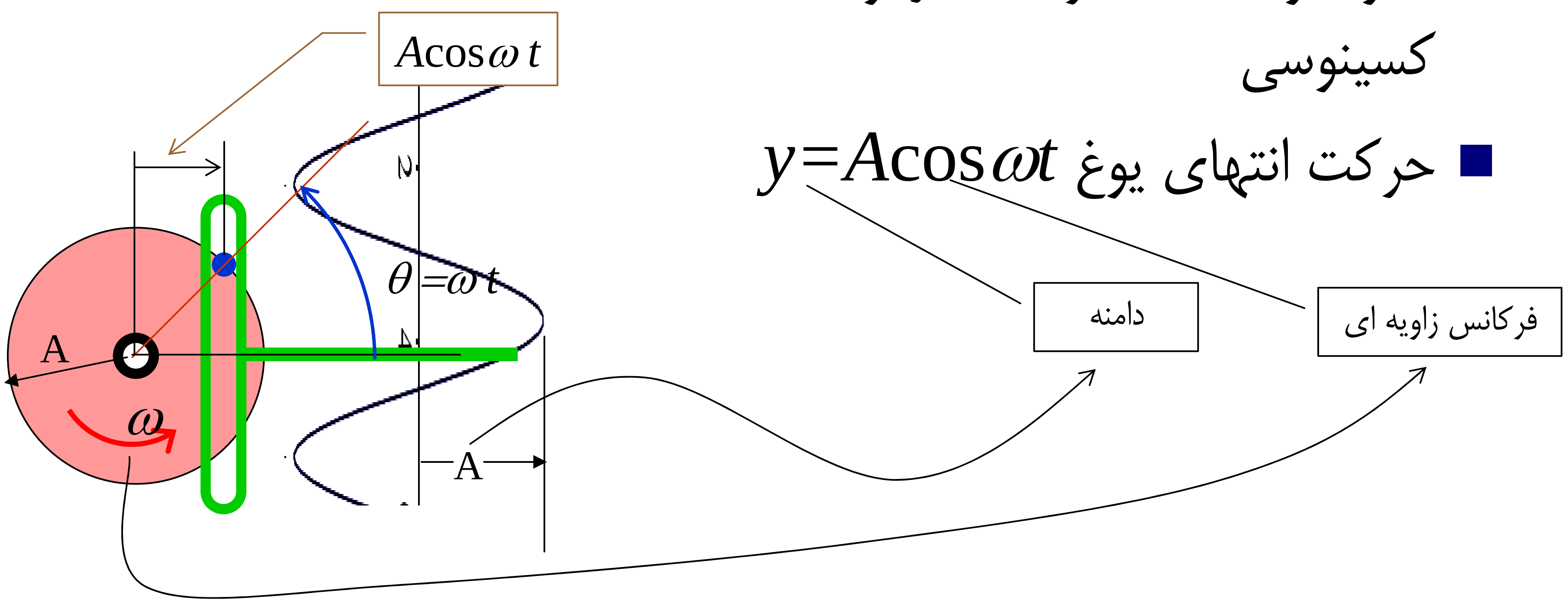



- نحوه تولید یک حرکت هارمونیک سینوسی
- حرکت انتهای یوغ $y = A\sin\omega t$
- فرکانس زاویه ای ($\omega$): سرعت دورانی دیسک در ثانیه و واحد آن $rad/s$

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau}}$$

# حرکت هارمونیکی

- نحوه تولید یک حرکت هارمونیک کسینوسی
- حرکت انتهای یوغ $y = A\cos\omega t$

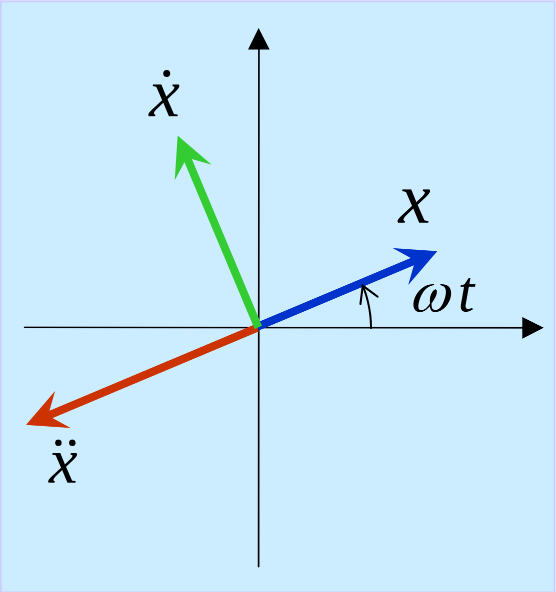


# حرکت هارمونیکی

- مشتقات حرکت هارمونیکی

$$y = A\sin\omega t$$
$$\dot{y} = \omega A\cos\omega t = (\omega A)\sin(\omega t + \pi/2)$$
$$\ddot{y} = -\omega^2 A\sin\omega t = (\omega^2 A)\sin(\omega t + \pi) = -\omega^2 y \quad (*)$$

$$x = A\cos\omega t$$
$$\dot{x} = -\omega A\sin\omega t = (\omega A)\cos(\omega t + \pi/2)$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos\omega t = (\omega^2 A)\cos(\omega t + \pi) = -\omega^2 x \quad (**)$$




دیاگرام فازوری

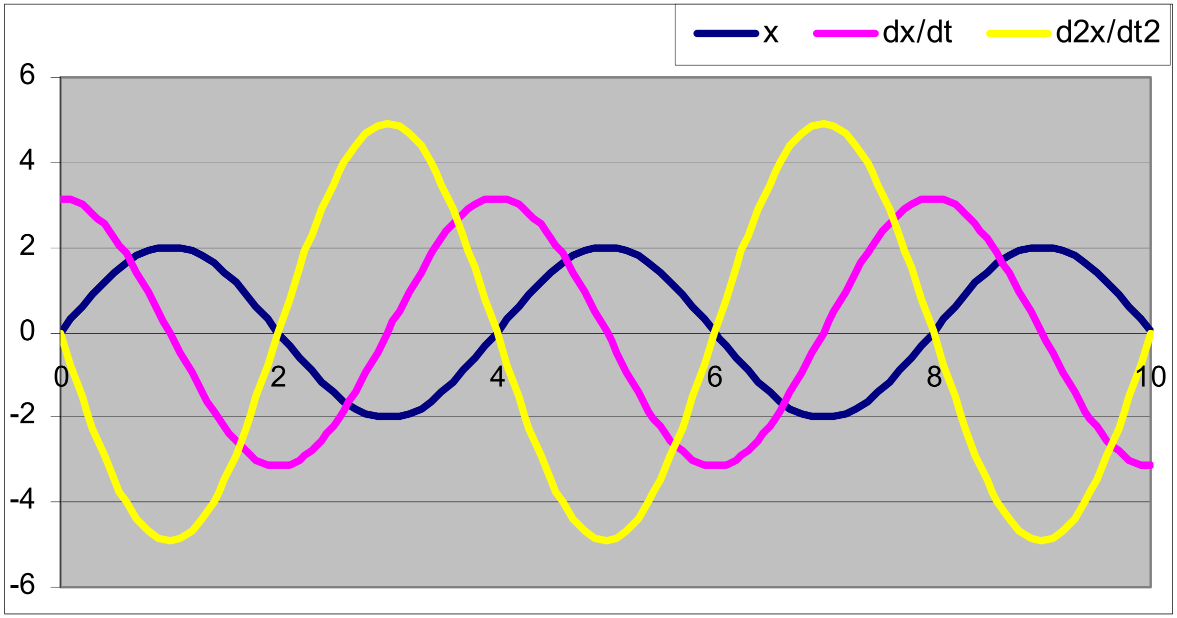
$$(*) \Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0}$$
$$(**) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

# حرکت هارمونیکی

- تابع هارمونیکی جواب عمومی معادله دیفرانسیل

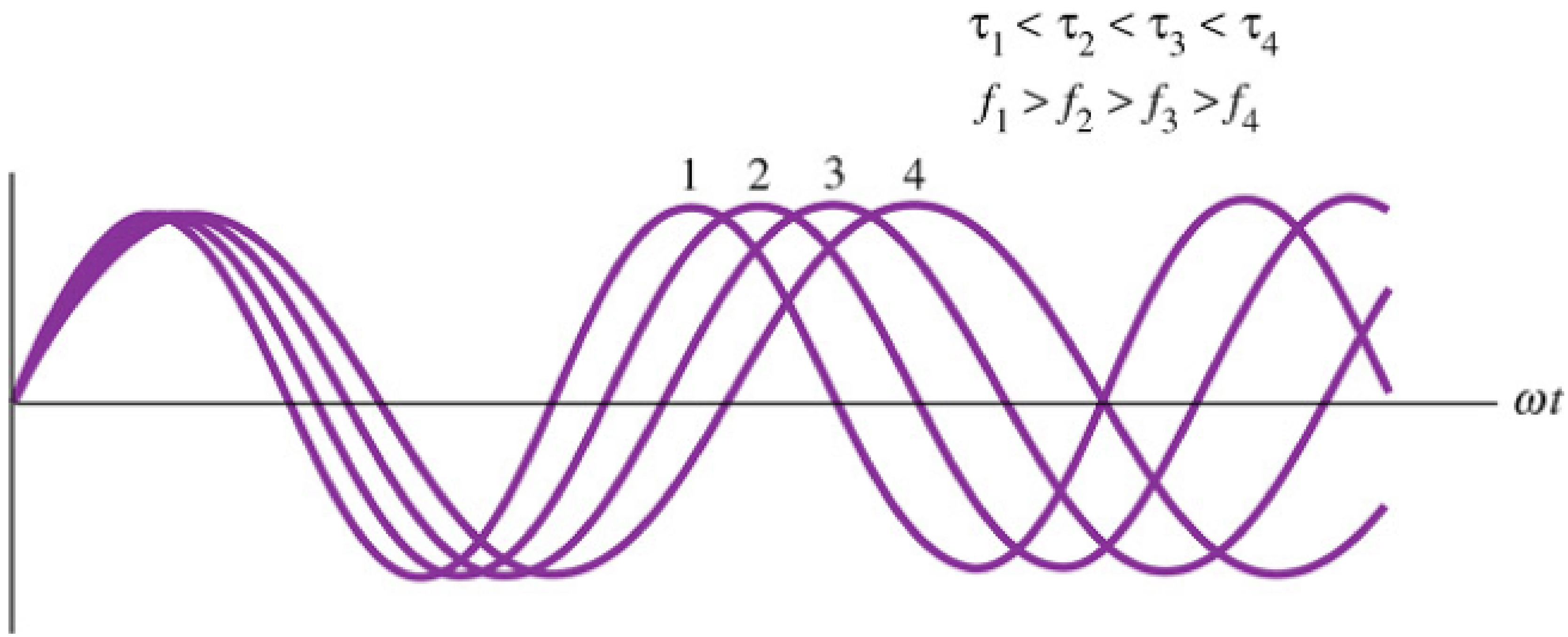
$$\ddot{y}+\omega^2 y=0$$

است




$$A=2$$
$$\omega=\pi/2$$

# Vibration frequency and period

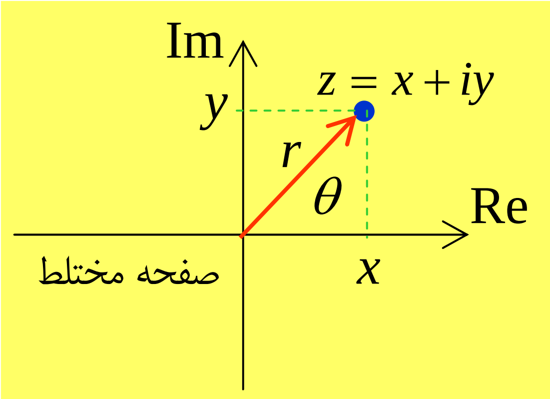


# مقدمه ای بر جبر مختلط

- موهومی یکه
- عدد مختلط $z$
- نمایش عدد مختلط

$$i = \sqrt{-1}$$

$$z = x + iy$$




- اندازه (قدر مطلق) عدد مختلط

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- زاویه (آرگومان) عدد مختلط

$$Arg(z) = \angle z = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

# مقدمه ای بر جبر مختلط

- قسمت حقیقی:

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

- قسمت موهومی:

$$\mathrm{Im}(z) = y$$

- مزدوج $z$

$$\bar{z} = x - iy$$

- مختصات قطبی:

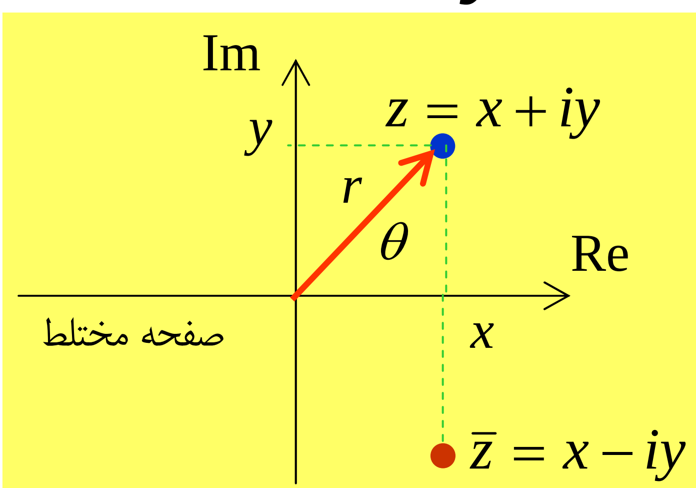
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$ فرمول اویلر



# جبر مختلط

- اگر

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2 \\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{r_1}{r_2}, \quad r_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2 \\ Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2 \end{array}}$$

$$\boxed{|\bar{z}| = |z|, \qquad |\bar{z}||z| = |z|^2}$$

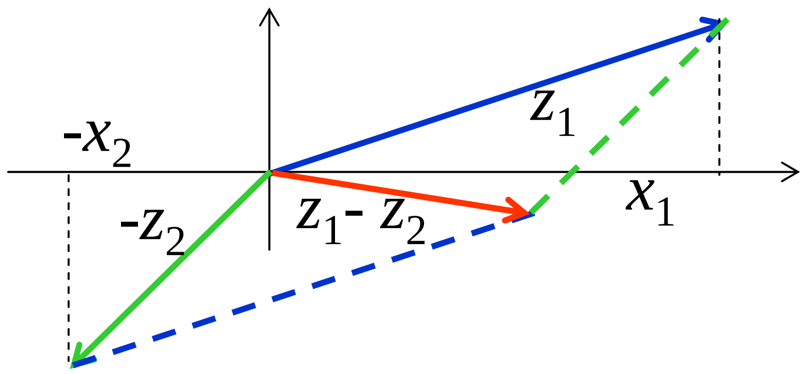
# جبر مختلط

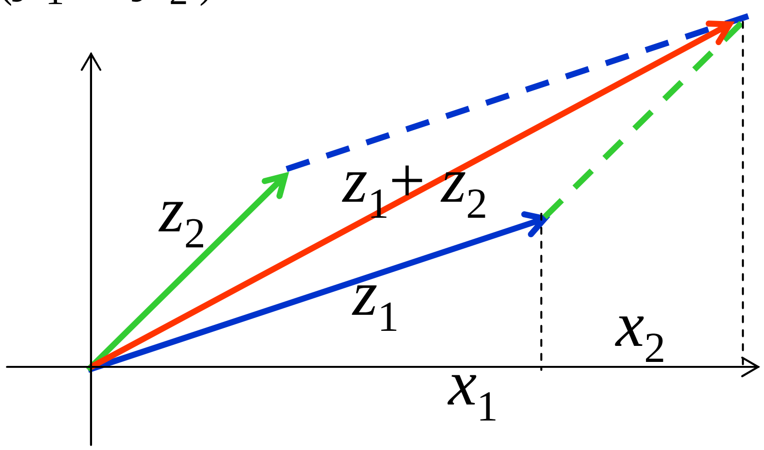
- اگر

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = x_1 + iy_1,\ \ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right)$$

$$z_1 - z_2 = r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right)$$



# حساب مختلط

- مشتق گیری از اعداد مختلط

$$z = re^{i\omega t} = r\cos\omega t + ir\sin\omega t = x + iy$$

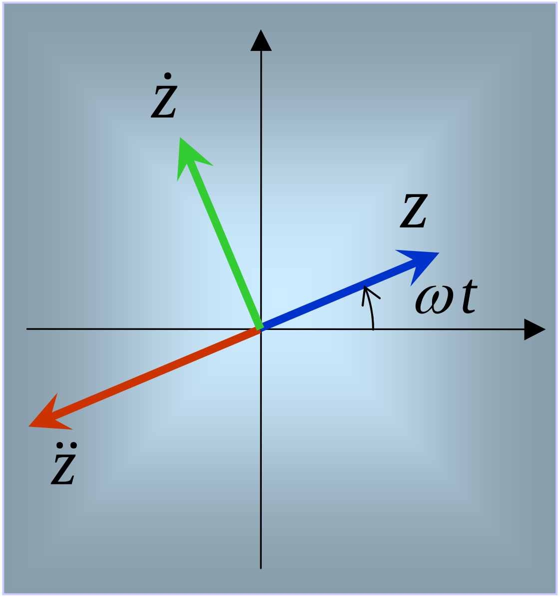
$$\dot{z} = i\omega re^{i\omega t} = -\omega r\sin\omega t + i\omega r\cos\omega t = -\omega y + i\omega x$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 re^{i\omega t} = -\omega^2 z \Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

$$z = re^{i\omega t}$$

$$\dot{z} = i\omega re^{i\omega t} = \omega re^{i(\omega t+\pi/2)}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 re^{i\omega t} = \omega^2 re^{i(\omega t+\pi)}$$




دیاگرام فازوری

# حرکت تناوبی

- هر تابع متناوب (تحت شرایطی) را می توان به صورت سری فوریه نشان داد:
- سری فوریه:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\omega_n x)+b_n\sin(\omega_n x)\right]$$

- ضرایب فوریه:

$$a_0=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(x)dx \qquad a_n=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(x)\cos(\omega_n x)dx$$

$$b_n=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(x)\sin(\omega_n x)dx$$

$$\omega_n=n\omega_1,\quad n=1,2,\cdots \qquad \omega_1=\frac{2\pi}{\tau}$$

# شکل دامنه و اختلاف فاز سری فوریه

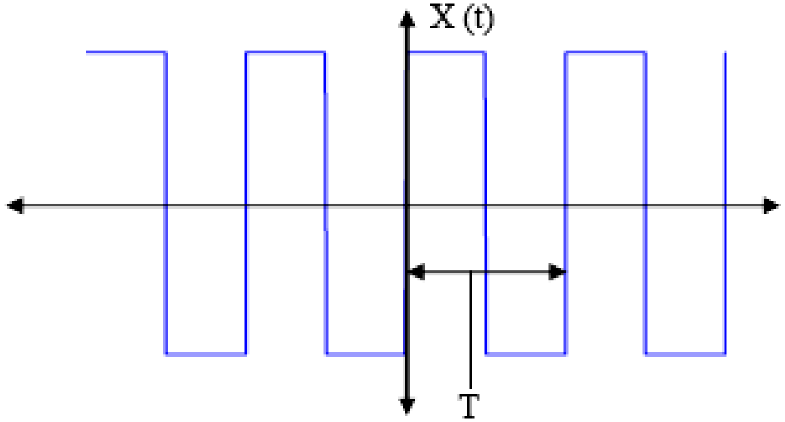
- سری فوریه به شکل زیر هم نوشته می شود:

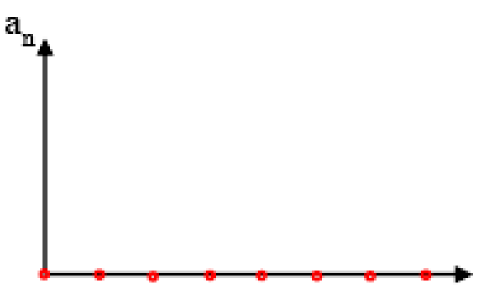
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 x+\delta_n) \qquad c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

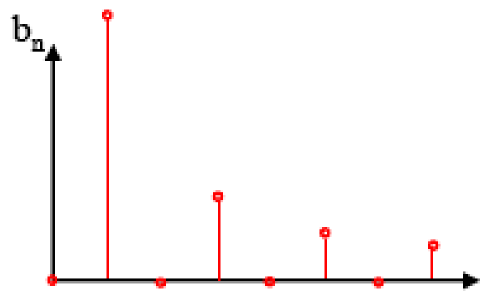
$$\delta_n=\tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- طیف دامنه:
  - ترسیم نموداری از $c_n/2$ برحسب $n\omega_1$ (برای $n=1,2,\ldots$) را **طیفِ دامنهٔ** تابع متناوب $f$ گویند.

# Time to Frequency Domain Conversion: Fourier Series



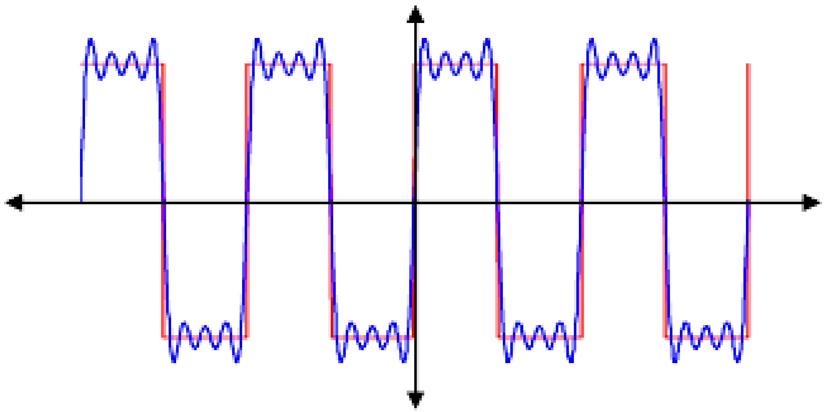




$$x(t) = +\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\omega t) + \cdots$$

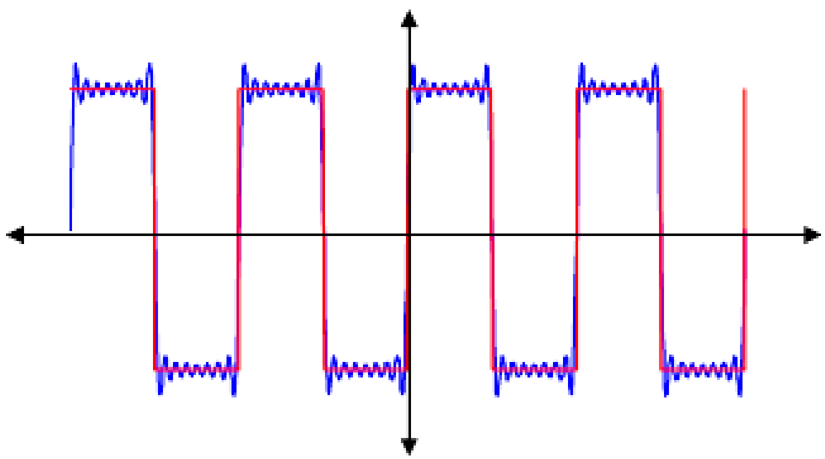
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

# Time to Frequency Domain Conversion: Fourier Series

Example of 4 terms



Example of 8 terms



# شکل مختلط سری فوریه

- سری فوریه مختلط $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 x} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t) e^{-in\omega_1 t}\, dt$$

- **طیف فرکانسِ** ( طیف دامنهٔ) یک تابع متناوب نموداری است از ترسیم نقاط:

$$\left(n\omega_0, \left|c_n\right|\right)$$

- که $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ می‌باشد.

- مقدار پیک: بیشینه تابع
- مقدار متوسط: $\bar{x}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$
- مقدار متوسط مربع: mean square value

$$\overline{x^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

- ریشه مقدار متوسط مربع: RMS

$$\sqrt{\overline{x^2}}$$

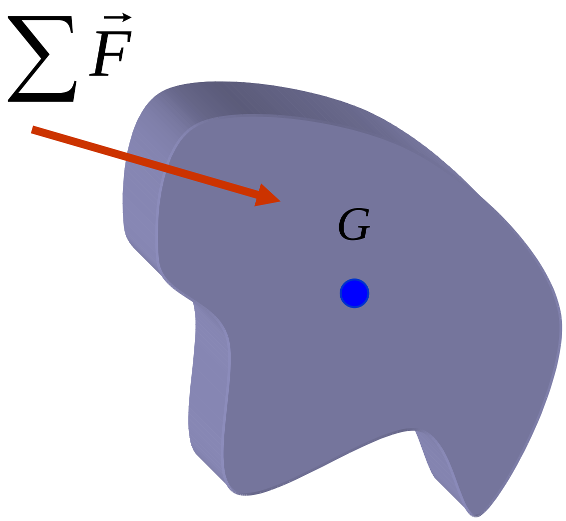
- دسیبل:

$$db=20\log_{10}\left(\frac{x_1}{x_2}\right),\qquad SPL=20\log_{10}\left(\frac{P}{P_o}\right),\quad P_o=20\mu Pa$$

- مثال: $x=A\sin\omega t$
- $A$
- $0\,(0\le t\le 2\pi),\ \frac{2A}{\pi}(0\le t\le \pi)$
-
- $\frac{A^2}{2}$
- $\frac{A}{\sqrt{2}}$

# مروری بر دینامیک (روش نیرو)

- حالت کلی




$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$\sum M_G = J_G \alpha$$

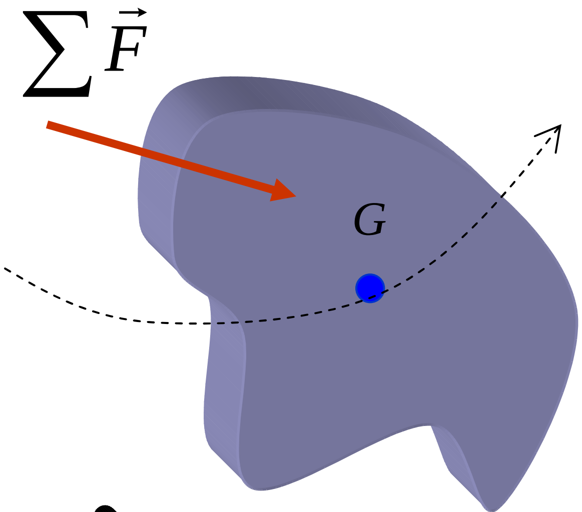
$$\sum M_P = J_G \alpha + m a_G d$$

$P$ نقطه ای که دارای شتاب است

$$\sum M_P = J_P \alpha + \vec{\rho} \times m\vec{a}_P$$

$P$ نقطه ای که دارای شتاب است و متعلق به جسم

# مروری بر دینامیک (روش نیرو)

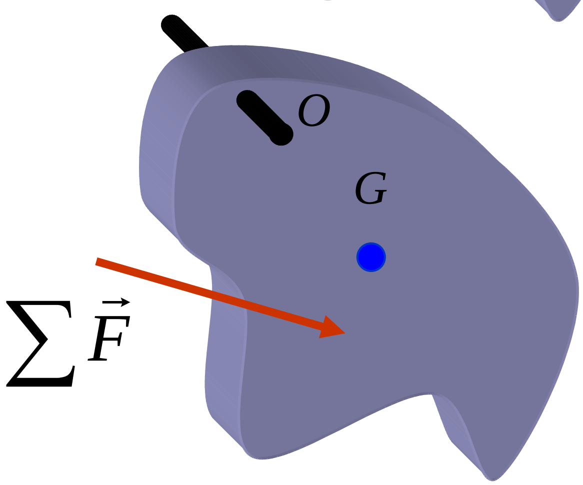



- حرکت انتقالی و حرکت ذره

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$\sum M_G = 0$$

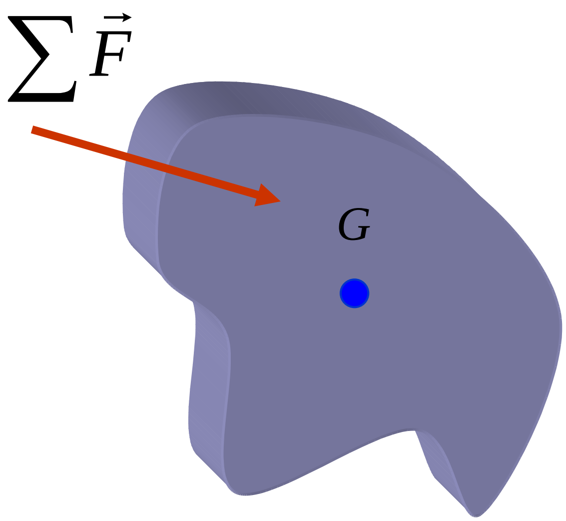
- حرکت دورانی حول یک نقطه:




$$\sum M_O = J_O \alpha$$

# مروری بر دینامیک (روش انرژی)

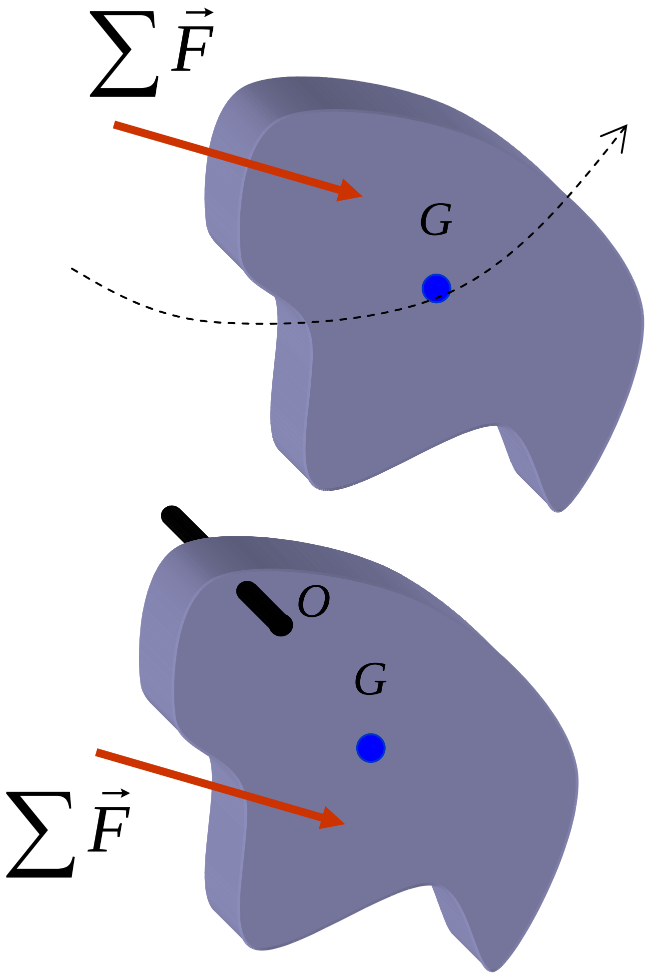
- حالت کلی




$C$ مرکز آنی سرعت صفر

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

# مروری بر دینامیک (روش انرژی)




- حرکت انتقالی و حرکت ذره

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2$$

- حرکت دورانی حول یک نقطه:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} J_O \omega^2}$$

# مقدمه ای بر حل معادلات دیفرانسیل

- در ارتعاشات عمدتاً به معادلات مرتبه دوم برخورد می شود که شکل کلی آنها به صورت زیر است:

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$

- اگر f(t)=0 باشد معادله همگن و راحتتر حل می شود
- در صورتی که شرایط اولیه موجود باشد جواب منحصر به فرد است.

# حل معادله همگن

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$$

- جوابی به صورت $y{=}Ae^{mt}$ فرض می شود.

$$y=Ae^{mt}\Rightarrow \dot{y}=\frac{dy}{dt}=mAe^{mt}\Rightarrow \ddot{y}=m^2Ae^{mt}$$

- با قرار دادن در معادله:

$$\left(am^2+bm+c\right)Ae^{mt}=0$$

- $Ae^{mt}\neq 0$ پس

$$am^2+bm+c=0$$

- و

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

# حل معادله همگن

- با توجه به مقدار زیر رادیکال جوابهای مختلفی را خواهیم داشت

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac<0,}\quad m_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a},\quad y(t)=A_1e^{\left(-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)t}+A_2e^{\left(-\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)t}$$

$$y(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A_1e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t}+A_2e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t}\right)=e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A_1^*\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right)+A_2^*\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right)\right)$$

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac=0,}\ m_1=m_2=-\frac{b}{2a},\ y(t)=(B_1+B_2t)e^{-\frac{b}{2a}t}$$

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac>0,}\ m_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},\ y(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t}\right)$$

# حالت خاص b=0

- لذا فقط حالت اول $\Delta<0$ وجود دارد و جواب معادله به صورت زیر است:

$$\Delta = -4ac < 0, \quad m_{1,2} = \pm i\frac{2\sqrt{ac}}{2a}, \quad y(t) = \left( A_1 e^{i\sqrt{\frac{c}{a}}\,t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{c}{a}}\,t} \right)$$

$$y(t) = \left( A_1^* \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\,t\right) + A_2^* \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\,t\right)\right) = D\sin\left(\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\,t\right) - \phi\right) = D^* \cos\left(\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\,t\right) - \phi^*\right)$$

- همانگونه که قبلاً نیز نشان داده شد این یک تابع هارمونیک است و جواب معادله

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{c}{a} y = 0}$$

# حل معادله غیر همگن

- معادله غیر همگن

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$

دارای مجموع دو جواب عمومی و خصوصی زیر است

$$y(t)=y_g+y_P$$

جواب خصوصی

جواب عمومی که جواب معادله همگن است

- این جوابها با وجود شرایط مرزی منحصر به فرد خواهند بود

# استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیلی

$$Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y e^{-st} dt \qquad y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$\mathscr{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0),$$

$$\mathscr{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0),$$

$$\mathscr{L}\left\{a\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy\right\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$$

# استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیلی

$$\mathscr{L}\left\{a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy\right\}=\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$$

$$a\left(s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)\right)+b\left(sY(s)-y(0)\right)+c\left(Y(s)\right)=F(s)$$

$$Y(s)\left[as^2+bs+c\right]=F(s)+(as+b)y(0)+a\dot{y}(0)$$

$$Y(s)=\frac{F(s)}{as^2+bs+c}+\frac{(as+b)y(0)}{as^2+bs+c}+\frac{a\dot{y}(0)}{as^2+bs+c}$$

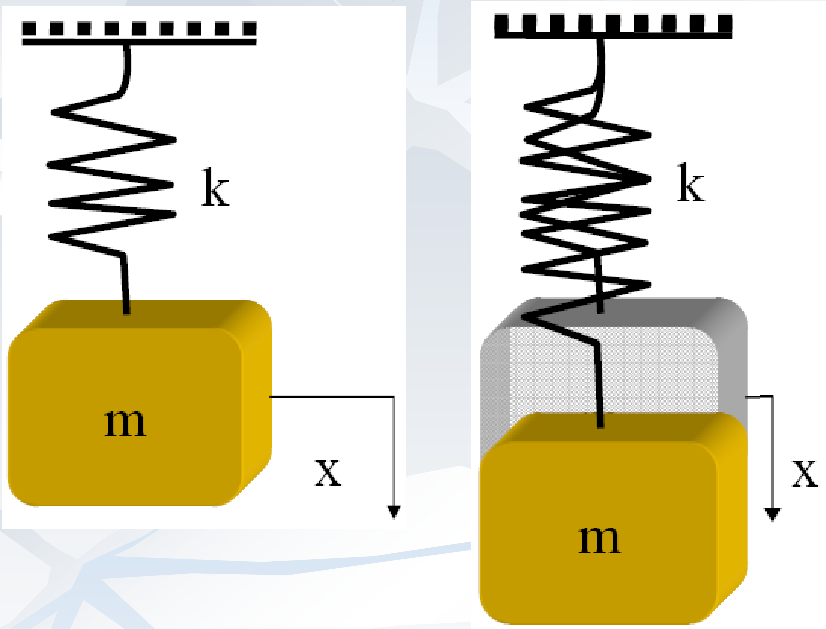
# استفاده از حل عددی

- روشهای حل عددی همچون
  - اویلر
  - اویلر اصلاح شده
  - رانگ کوتا – مرتبه ۴ (دقیقترین جوابها)

# ارتعاشات مکانیکی ۳

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

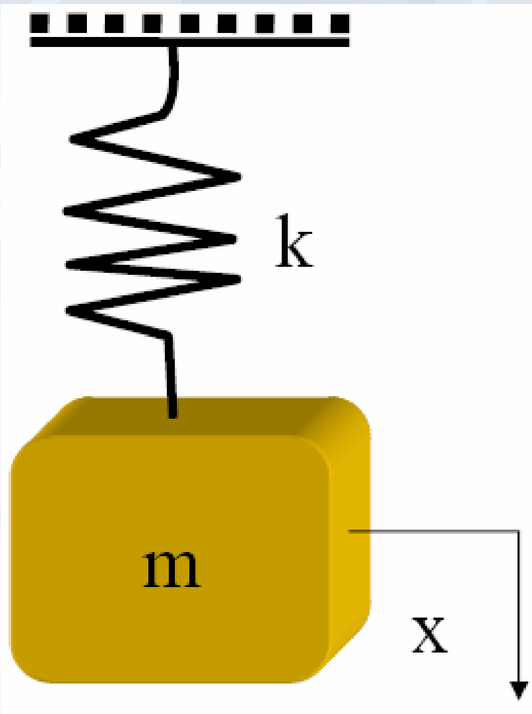
# ارتعاشات آزاد یک درجه آزادی

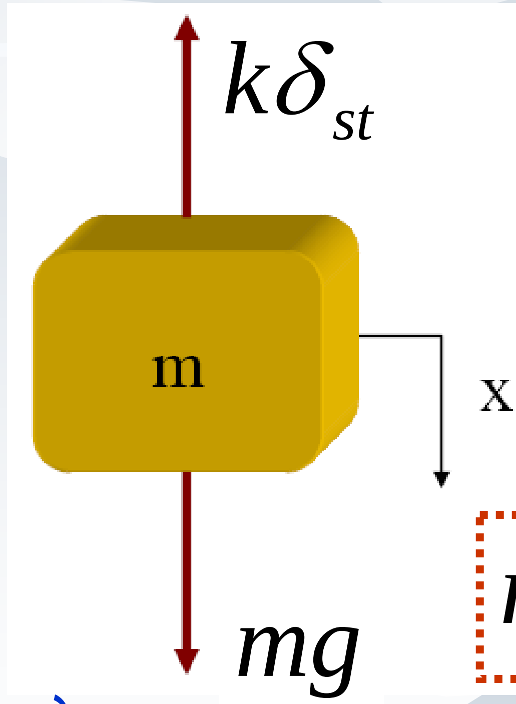



- فرضهای اصلی
  - سیستم نامیرا است
  - نیروی خارجی وجود ندارد
  - حرکت فقط در امتداد قائم است

- شرایط اولیه ای (جابجائی یا سرعت) داده شود و حرکت نتیجه بدست آید

# دیاگرام آزاد: تعادل استاتیکی

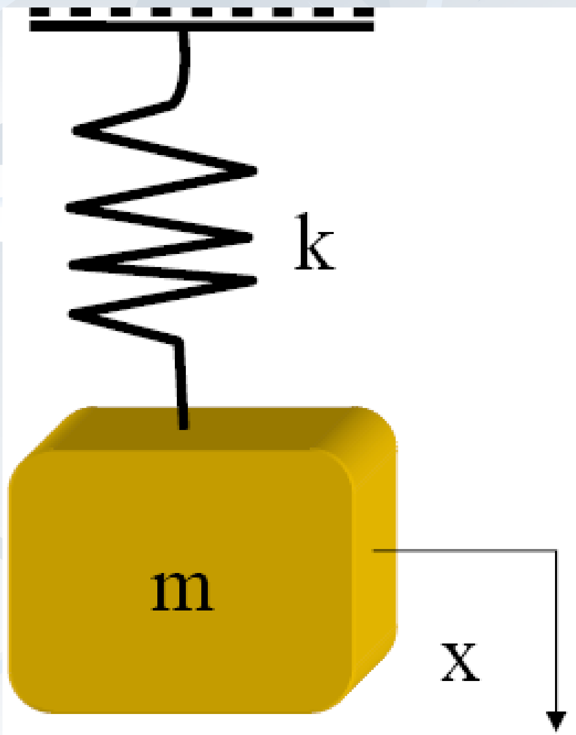


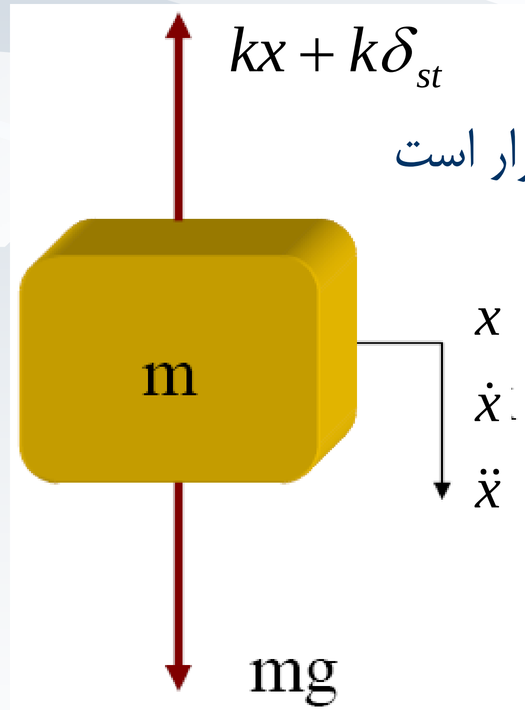




$$\boxed{mg = k\delta_{st}}$$

در حالت سکون X=0 تعادل استاتیکی

# تعادل دینامیکی: دیاگرام آزاد

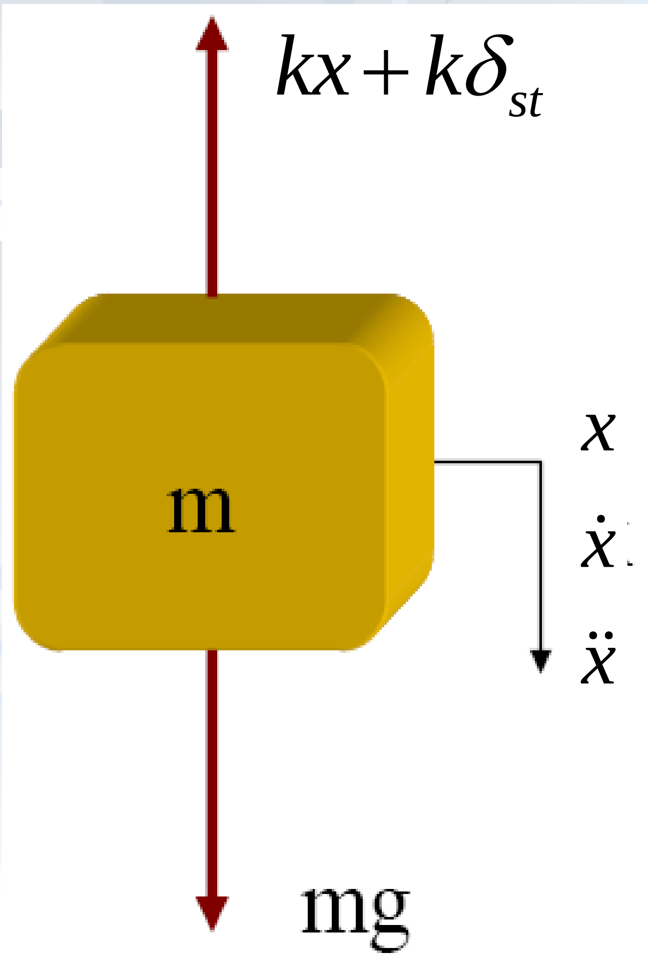



تعادل دینامیکی برقرار است

- توجه: $x$ از موقعیت تعادل استاتیکی اندازه گرفته شده است.

# تعادل دینامیکی: دیاگرام آزاد




- اعمال قانون دوم نیوتن:

$$\downarrow^{+} \sum F = ma$$

$$-kx - k\delta_{st} + mg = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

- معادله حرکت:
- Equation of Motion (EOM)

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

# معادله حرکت EOM

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

- معادله حرکت:
- معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ با ضرایب ثابت
- همگن و خطی
- شکل جوابها:

$$x(t) = X\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

در حال حاضر این جواب بررسی می شود

# معادله حرکت EOM

- معادله حرکت:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

- جوابی به صورت $x(t)=Ce^{\lambda t}$ فرض می شود:

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \qquad \ddot{x}(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

- با قرار دادن در EOM

$$m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0$$

$$\left(m\lambda^2 + k\right)Ce^{\lambda t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

# پاسخ معادله حرکت

- در نتیجه جواب معادله دیفرانسیل:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t}}$$

- که $C_1$ و $C_2$ ثابتهائی هستند، که با اعمال شرایط مرزی بدست می آیند.
- اما:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

# پاسخ معادله حرکت

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t}}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

- در نتیجه:

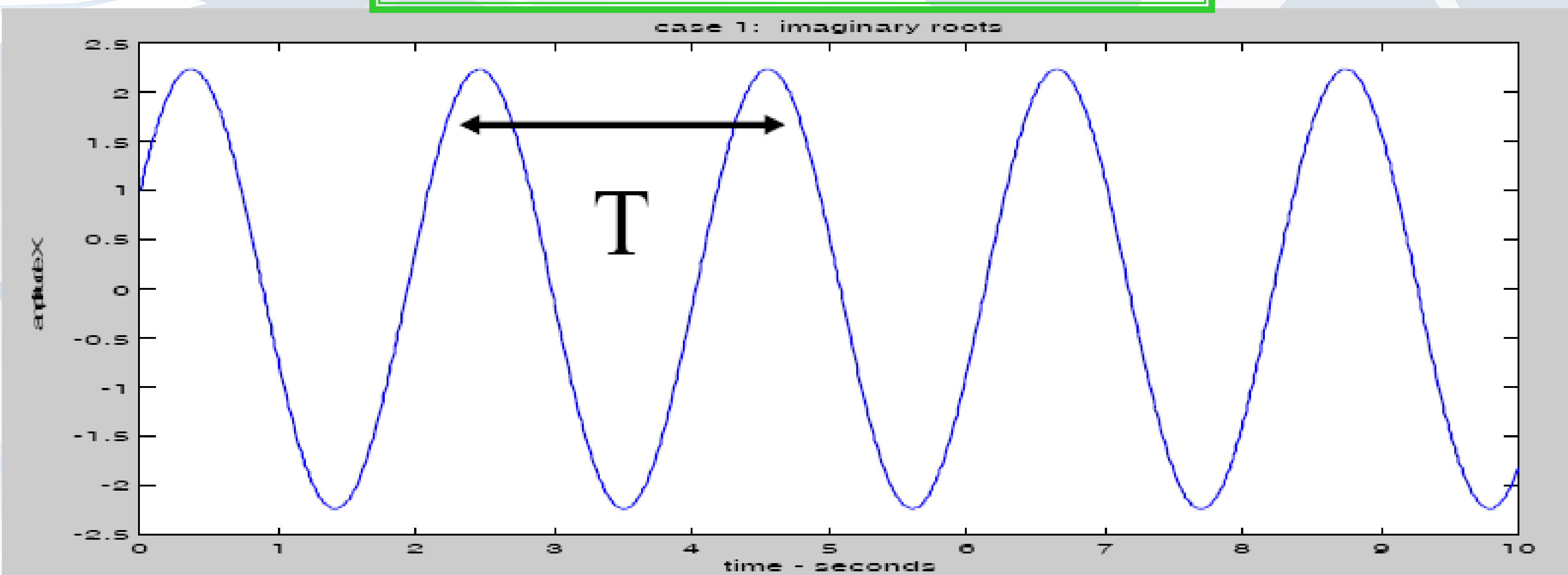
$$x(t) = C_1\left(\cos\sqrt{k/m}\,t + i\sin\sqrt{k/m}\,t\right) + C_2\left(\cos\sqrt{k/m}\,t - i\sin\sqrt{k/m}\,t\right)$$

$$= (C_1 + C_2)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + i(C_1 - C_2)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

# پاسخ معادله حرکت

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$




$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \quad (rad/s)$$ فرکانس طبیعی

# پاسخ معادله حرکت

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)}$$

$$f = \frac{1}{T}$$ فرکانس طبیعی ( $Hz$ یا $cycle/s$)

$$\boxed{x(t) = A\cos(2\pi f_n t) + B\sin(2\pi f_n t)}$$

# پاسخ معادله حرکت

- A و B با اعمال شرایط اولیه بدست می آید:

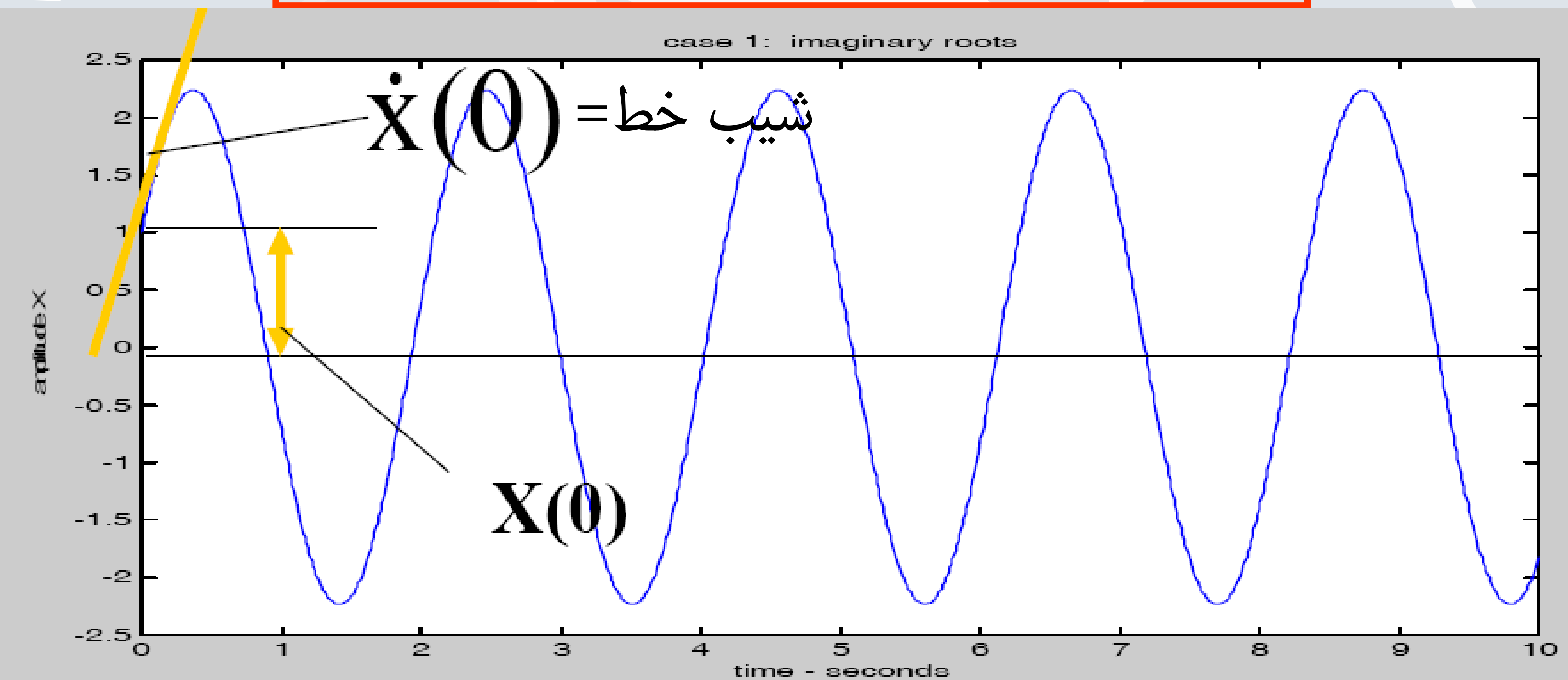
$$x(0)=x_0$$
$$\dot{x}(0)=v_0$$

$$x(0)=A\cos(\omega_n\,0)+B\sin(\omega_n\,0)=x_0 \quad \Rightarrow A=x_0$$
$$\dot{x}(t)=-\omega_n A\cos(\omega_n\,t)+\omega_n B\sin(\omega_n\,t)$$
$$\dot{x}(0)=-\omega_n A\sin(\omega_n\,0)+\omega_n B\cos(\omega_n\,0)=v_0$$

$$\omega_n B=v_0 \qquad\qquad B=\frac{v_0}{\omega_n}$$

# پاسخ معادله حرکت

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$



# شکلهای دیگر پاسخ هارمونیک

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)}$$

$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \phi) = X\cos(\omega_n t)\cos(\phi) + X\sin(\omega_n t)\sin(\phi)$$

$$X\cos\phi = x_0 \qquad X\sin\phi = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \tan\phi = \frac{v_0}{x_0\omega_n}$$

اختلاف فاز

دامنه

$$\boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}\cos\left(\omega_n t - \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0\omega_n}\right)\right)}$$

# شکلهای دیگر پاسخ هارمونیک

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)}$$

$$x(t) = X \sin(\omega_n t + \phi) = X \sin(\omega_n t)\cos(\phi) + X \cos(\omega_n t)\sin(\phi)$$

$$X \cos\phi = \frac{v_0}{\omega_n} \qquad X \sin\phi = x_0$$

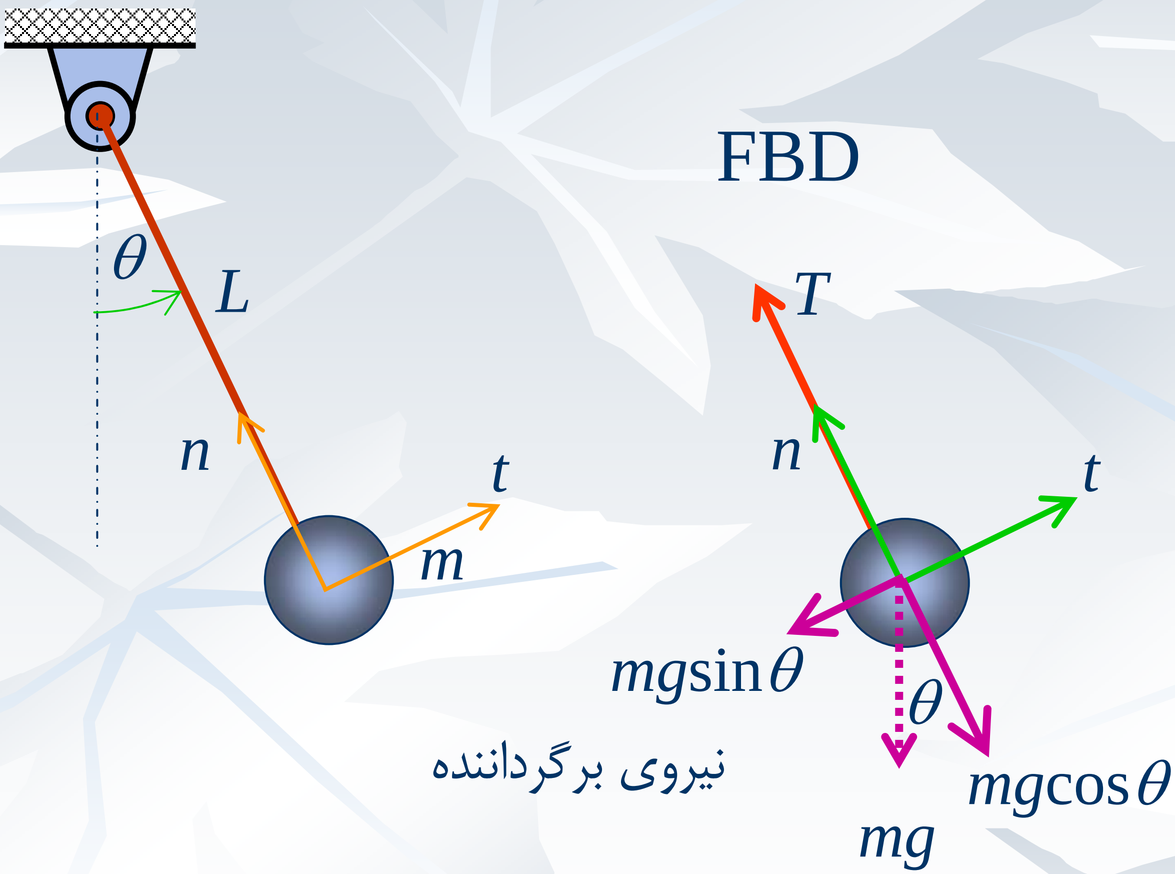
$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \tan\phi = \frac{x_0 \omega_n}{v_0}$$

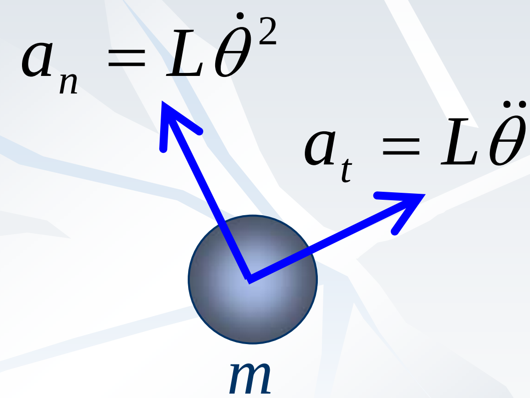
اختلاف فاز

دامنه

$$\boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{v_0}\right)\right)}$$

# مثال: آونگ ساده

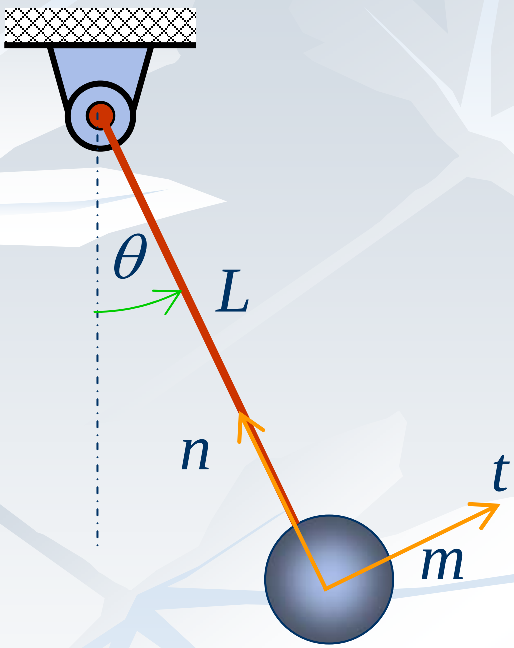



$$\sum F_t = ma_t = mL\ddot{\theta}$$

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

# مثال: آونگ ساده




- معادله حرکت:

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\theta << \pi \quad \Rightarrow \theta = \sin\theta$$

$$L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

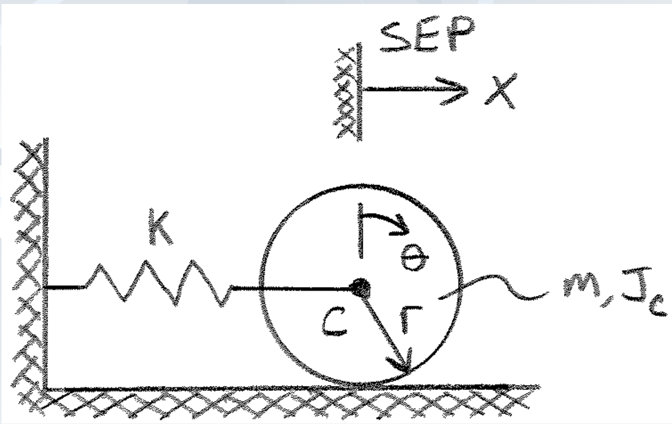
- حل معادله حرکت:

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)$$

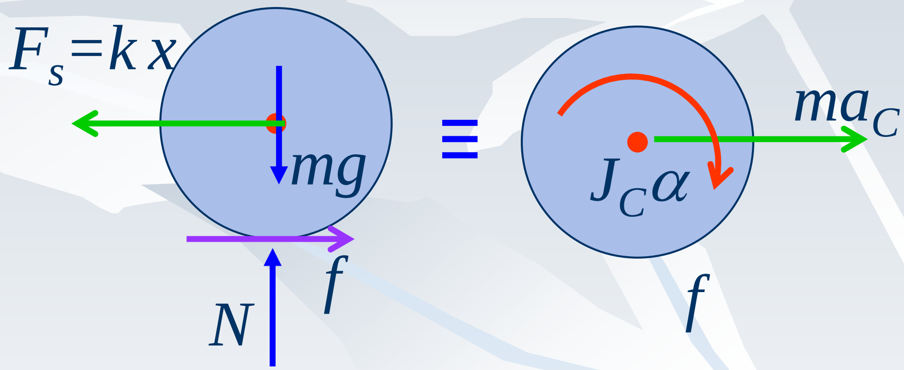
$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}},} \qquad \boxed{\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

# مثال

Static equilibrium position




■ الف: معادله حرکت




■ I) $\theta$ به عنوان مختصات مستقل $x$ مختصات وابسته

$$\sum F_y = 0 \qquad N = mg$$

$$\sum M_C = J_C \alpha \qquad - f\, r = J_C \ddot{\theta}$$

$$\sum F_x = ma_C \qquad -kx + f = m\ddot{x}$$

$$-kr\theta - \frac{J_C \ddot{\theta}}{r} = mr\ddot{\theta}$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\left(J_C + mr^2\right)\ddot{\theta} + kr^2\,\theta = 0}$$

# ادامه

- پاسخ:

$$\underbrace{\left(J_C + mr^2\right)}_{m_{eq}}\ddot{\theta} + \underbrace{kr^2}_{k_{eq}}\theta = 0$$

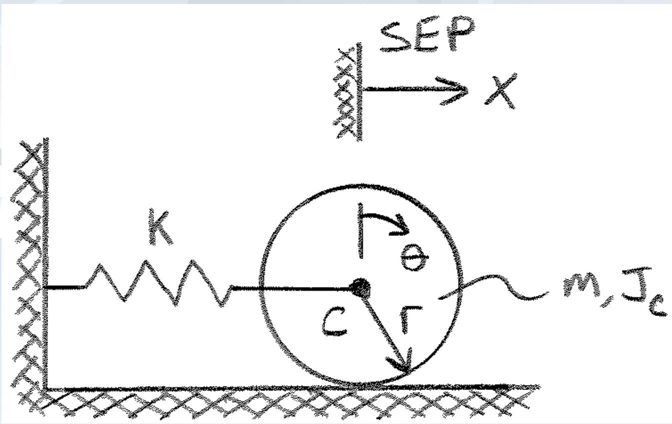
$$m_{eq}\ddot{\theta} + k_{eq}\theta = 0$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

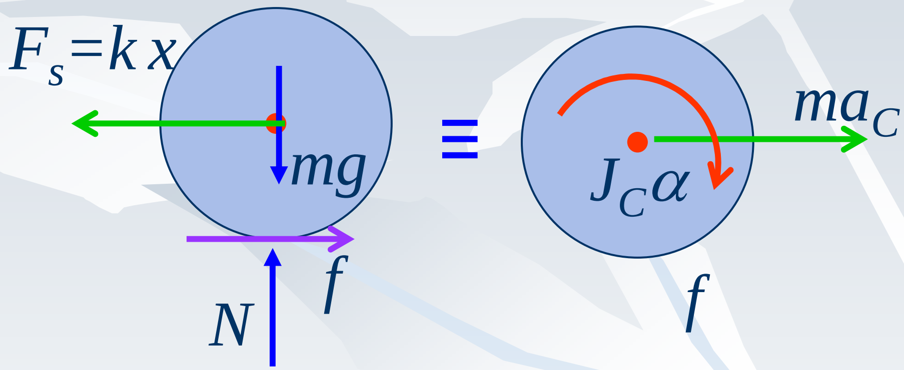
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{kr^2}{J_C + mr^2}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + mr^2}{kr^2}}$$

# مثال

Static equilibrium position




- الف: معادله حرکت




- I) $x$ به عنوان مختصات مستقل $\theta$ مختصات وابسته

$$\sum F_y = 0 \qquad N = mg$$

$$\sum M_C = J_C \alpha \qquad -f\,r = J_C \ddot{\theta}$$

$$\sum F_x = m a_C \qquad -kx + f = m\ddot{x}$$

$$-kx - \frac{J_C \ddot{x}}{r^2} = m\ddot{x}$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\left(\frac{J_C}{r^2} + m\right)\ddot{x} + k\,x = 0}$$

# ادامه

- پاسخ:

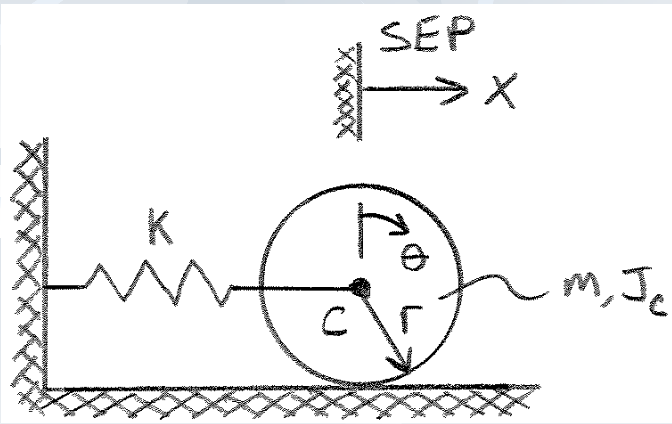
$$\underbrace{\left(\frac{J_C}{r^2}+m\right)}_{\downarrow}\ddot{x}+k\,x=0$$

$$m_{eq}\quad\ddot{x}+\quad kx=0$$

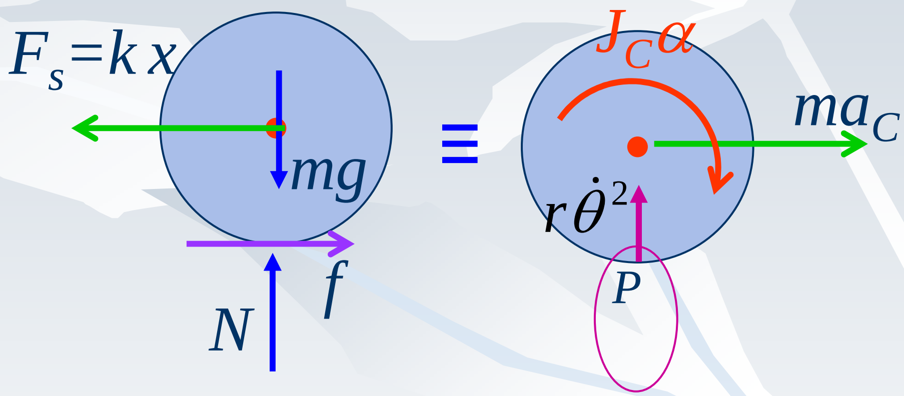
$$\boxed{\begin{aligned}&x(t)=A\cos(\omega_n t)+B\sin(\omega_n t)\\&\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{k}{J_C/r^2+m}},\qquad \tau_n=2\pi\sqrt{\frac{J_C/r^2+m}{k}}\end{aligned}}$$

# مثال

Static equilibrium position




■ الف: معادله حرکت




$$\sum M_P = J_P\alpha + \vec{\rho}\times m\vec{a}_P$$

$$-kr(r\theta) = J_P\ddot{\theta}, \qquad J_P = J_C + mr^2$$

$$\boxed{\left(J_C + mr^2\right)\ddot{\theta} + kr^2\,\theta = 0}$$

$$\sum M_P = J_c\alpha + ma_c d$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$-kr(r\theta) = J_C\ddot{\theta} + m\ddot{x}r = \left(J_C + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\left(J_C + mr^2\right)\ddot{\theta} + kr^2\,\theta = 0}$$

# ادامه

- پاسخ:

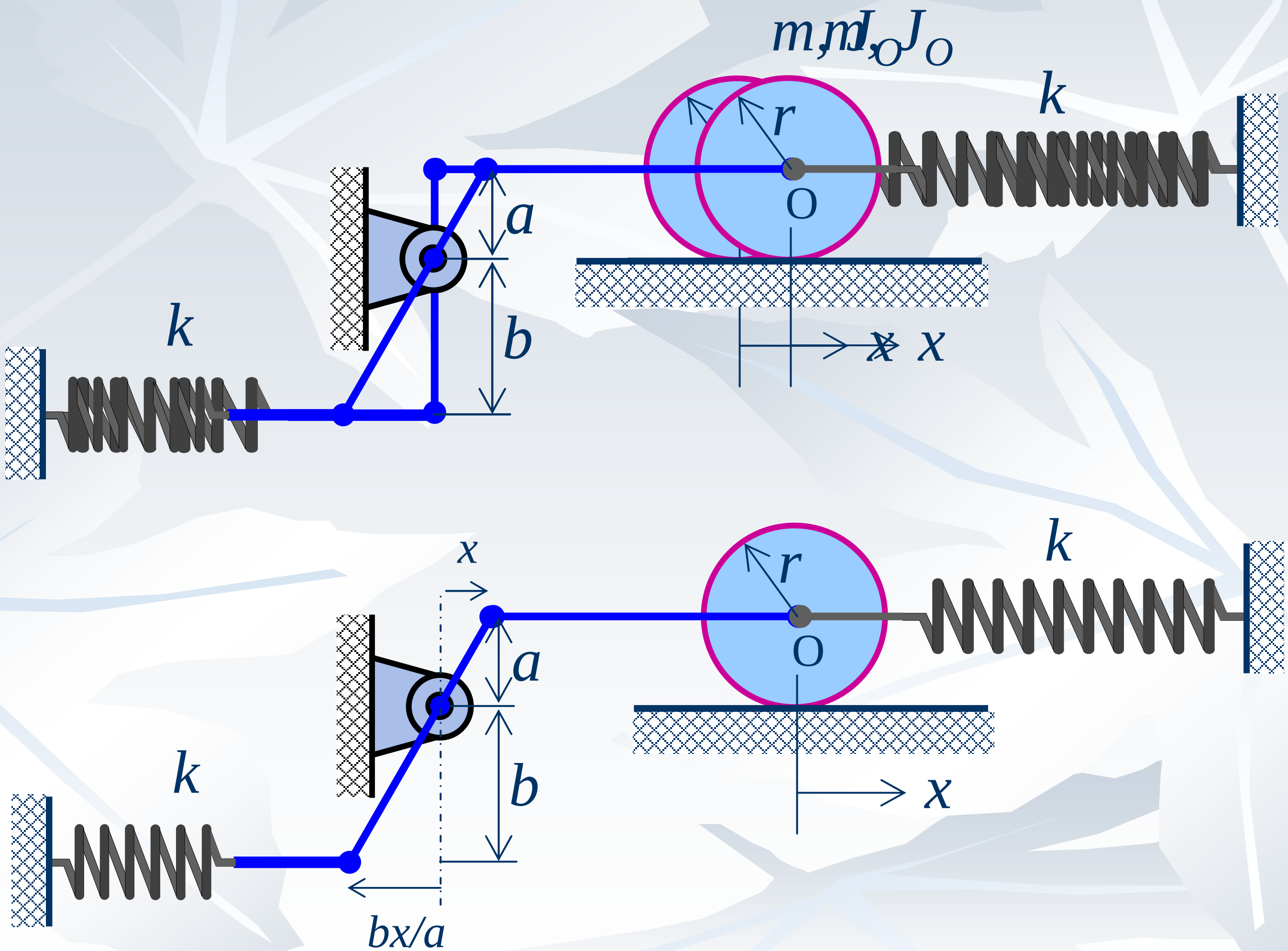
$$\underbrace{\left(J_C + mr^2\right)}_{m_{eq}}\ddot{\theta} + \underbrace{kr^2}_{k_{eq}}\theta = 0$$

$$m_{eq}\ddot{\theta} + k_{eq}\theta = 0$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

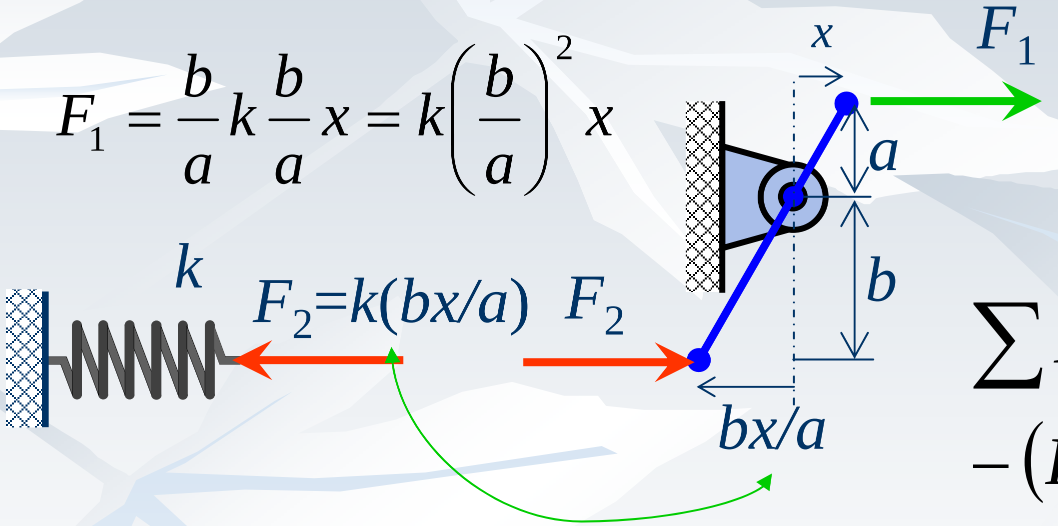
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{kr^2}{J_C + mr^2}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + mr^2}{kr^2}}$$

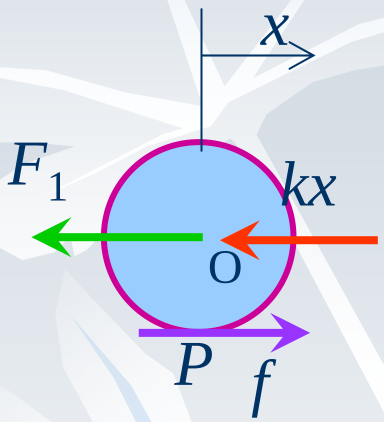
# مثال



$$\sum M = 0,\quad a\,F_1 = bF_2$$

$$F_1 = \frac{b}{a}k\frac{b}{a}x = k\left(\frac{b}{a}\right)^2 x$$




$$\sum M_P = J_P\alpha + \vec{\rho}\times m\vec{a}_P$$

$$-\left(F_1 + kx\right)r = J_P\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\theta = \frac{x}{r}}$$

$$J_P = J_O + mr^2$$

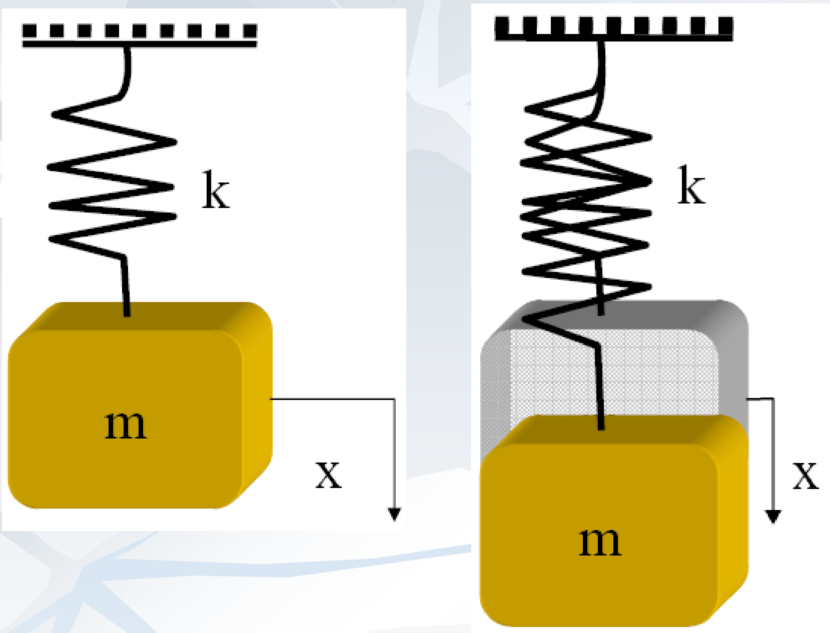
$$-\left(k\left(\frac{b}{a}\right)^2 x + kx\right)r = \left(J_O + mr^2\right)\frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\boxed{\left(\frac{J_O}{r^2} + m\right)\ddot{x} + k\left(\frac{b^2 + a^2}{a^2}\right)x = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_{eq} &= \left(\frac{J_O}{r^2} + m\right), \\ k_{eq} &= k\left(\frac{b^2 + a^2}{a^2}\right) \end{aligned}}$$

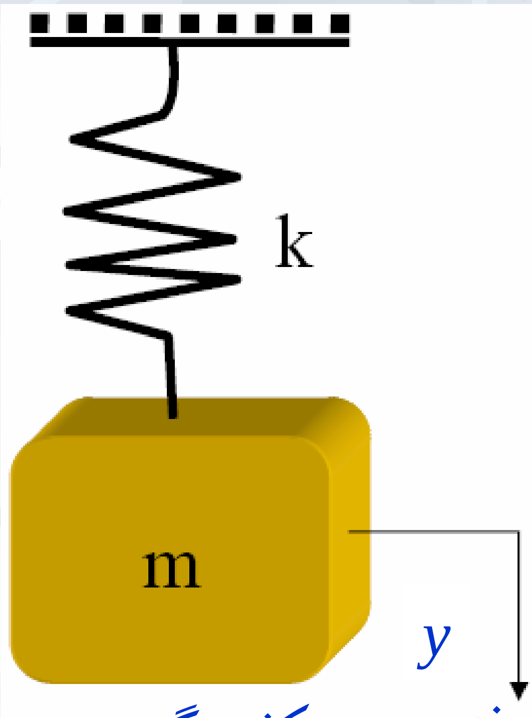
# اثر جابجائی استاتیکی

- فرضهای اصلی
  - سیستم نامیرا است
  - نیروی خارجی وجود ندارد
  - حرکت فقط در امتداد قائم است

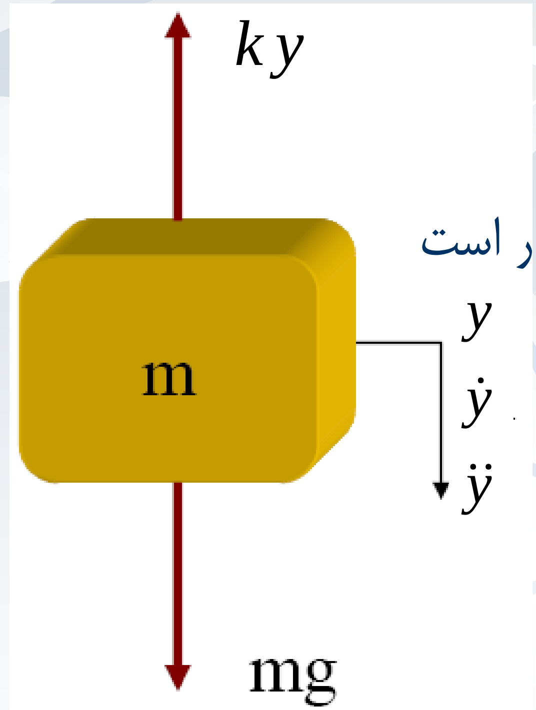



- شرایط اولیه ای (جابجائی یا سرعت) داده شود و حرکت نتیجه بدست آید

# اثر جابجائی استاتیکی



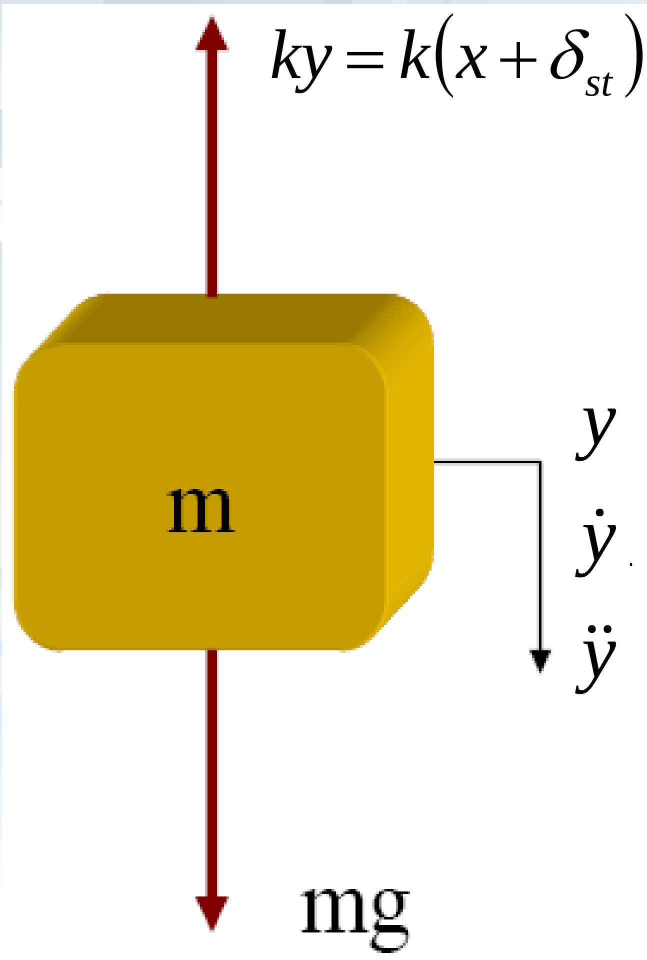

$y=0$ فنر بدون کشیدگی




تعادل دینامیکی برقرار است

- توجه: y از موقعیت بدون کشیدگی فنر اندازه گرفته شده است.

# تعادل دینامیکی: دیاگرام آزاد




- اعمال قانون دوم نیوتن:

$$\downarrow^{+} \sum F = ma$$

$$-ky + mg = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

- معادله حرکت:
- Equation of Motion (EOM)

$$\boxed{m\ddot{y} + ky = mg}$$

# پاسخ

- حل:

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

$$y(t) = y_g + y_P = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) + \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{y(t) = \qquad x(t) \qquad + \quad \delta_{st}}$$

- لازم است که دقت شود آیا لازم است که وزن نادیده گرفته شود!!
- اگر g در معادله حرکت در یکی از متغیرهای مستقل $x, \dot{x}, \ddot{x}$ ضرب شود نمی توان وزن را نادیده گرفت.

# Torsional System: SDOF

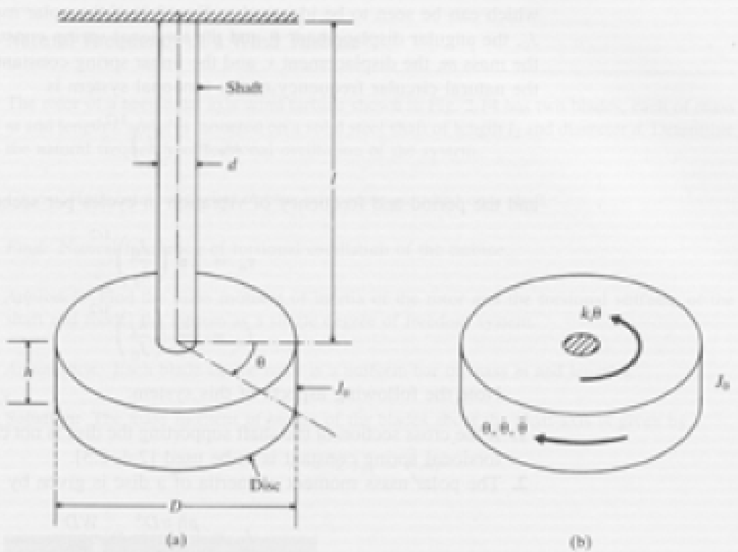


FIGURE 2.13 Torsional vibration of a disc.

Equation of Motion:

$$J_o\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

Solution Form:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

Here $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k_t}{J}} = \dfrac{2\pi}{T} =$ natural frequency (rad/sec)

Compare with Translatory System

Equation of Motion: $m\ddot{x} + k\ x = 0$

Solution Form: $x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

# روش انرژی

- از دینامیک می دانیم که چنانچه نیروی خارجی بر سیستمی اثر نکند:
- مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی برابر مقدالر ثابتی است.

$$T + U = \text{constant}$$

$$d(T + U) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

# روش ریلی

- در این روش با فرض معلوم بودن پاسخ انرژی جنبشی بیشینه را با انرژی پتانسیل  بیشینه مساوی قرار داده می شود.

$$T+U=\text{constant}$$

$$T_{Max}=U_{Max}$$

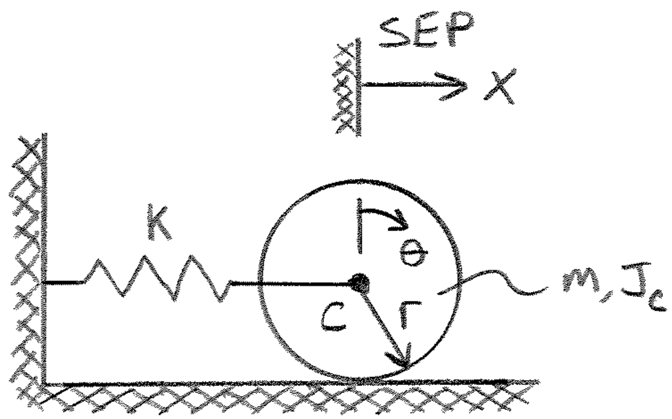
$$x=X\sin(\omega_n t+\delta)\rightarrow x_{Max}=X$$

$$\dot{x}=\omega_n X\cos(\omega_n t+\delta)\rightarrow \dot{x}_{Max}=\omega_n X$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{Max}=\frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2=\frac{1}{2}m(\omega_n X)^2 \\ U_{Max}=\frac{1}{2}kx_{Max}^2=\frac{1}{2}kX^2 \end{array}\right\}\frac{1}{2}m(\omega_n X)^2=\frac{1}{2}kX^2\Rightarrow\omega_n^2=\frac{k}{m}$$

# روش انرژی

- حرکت را از حال تعادل در نظر گرفته و باید در فشردگی اولیه فنر دقت شود.




$$U=\frac{1}{2}kx^2 \qquad T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}J_P\dot{\theta}^2$$

$$T+U=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}J_P\dot{\theta}^2=Const.$$

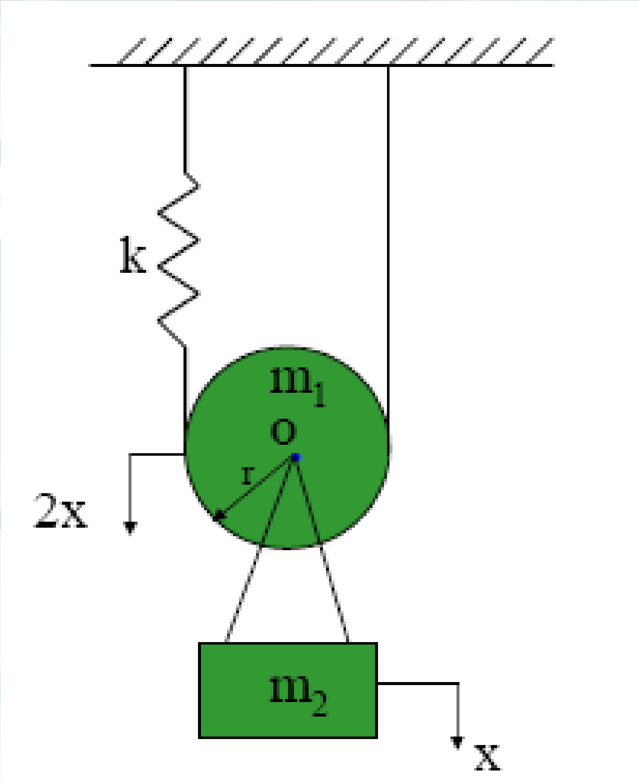
$$\boxed{x=r\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{1}{2}k2x\dot{x}+\frac{1}{2}\frac{J_P}{r^2}2\ddot{x}\dot{x}=0$$

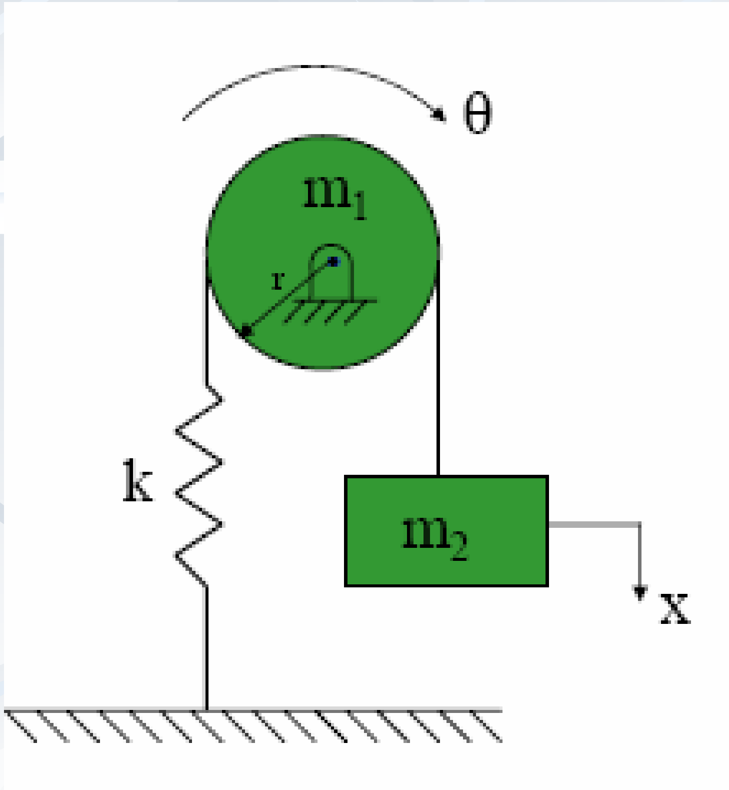
$$\left(kx+\frac{J_P}{r^2}\ddot{x}\right)\dot{x}=0\Rightarrow\frac{J_P}{r^2}\ddot{x}+kx=0$$

$$\boxed{\left(\frac{J_C}{r^2}+m\right)\ddot{x}+kx=0}$$

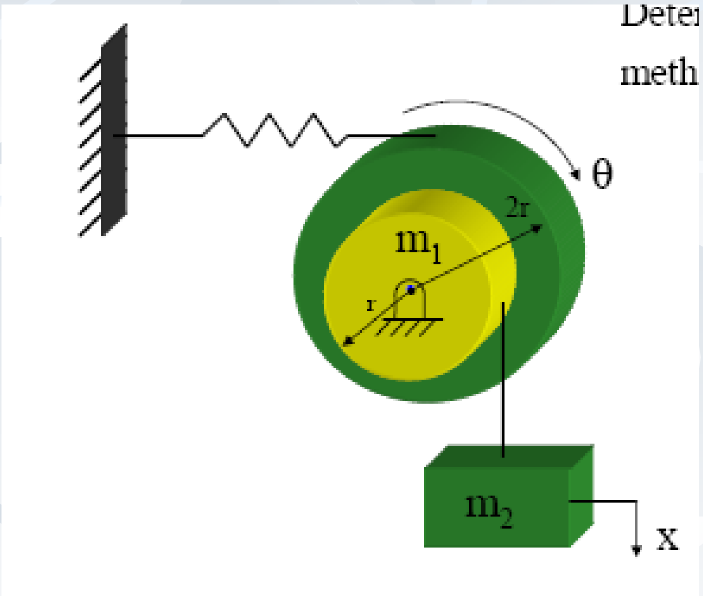
# تمرین



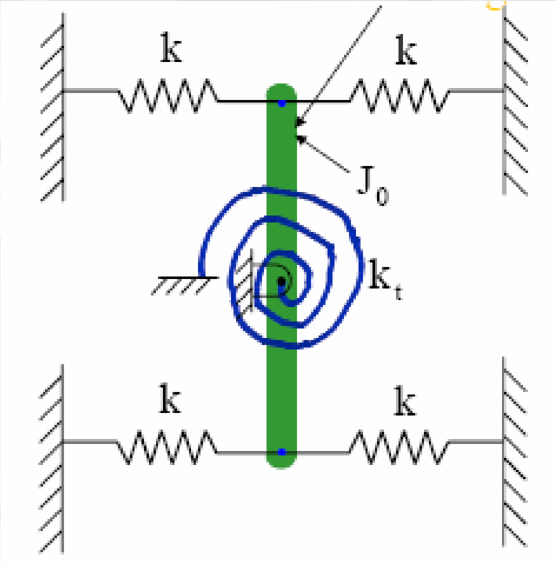
# تمرین



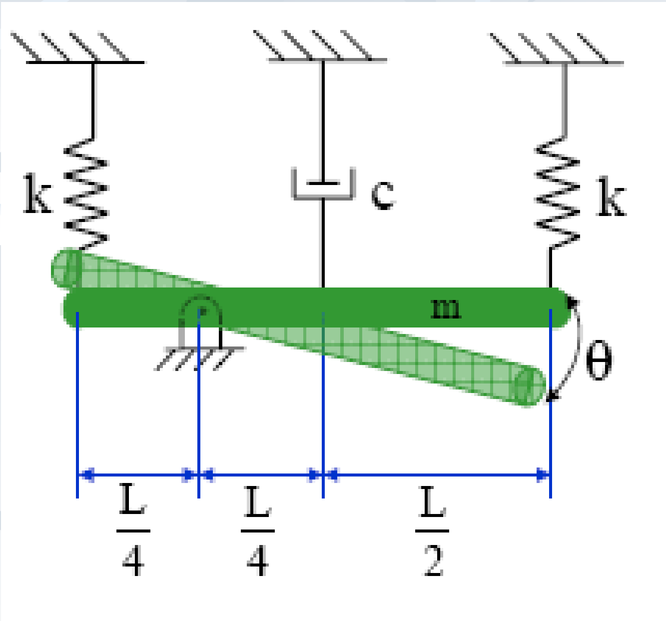
# تمرین

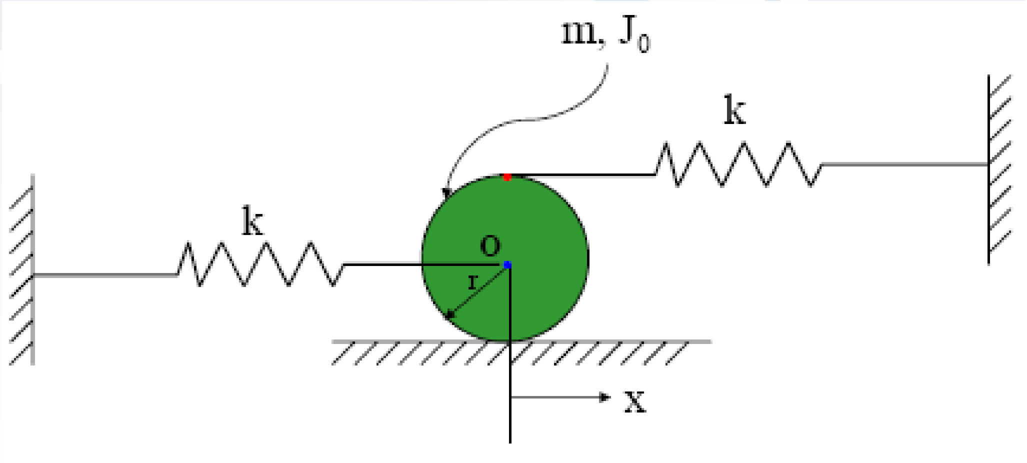


# تمرین

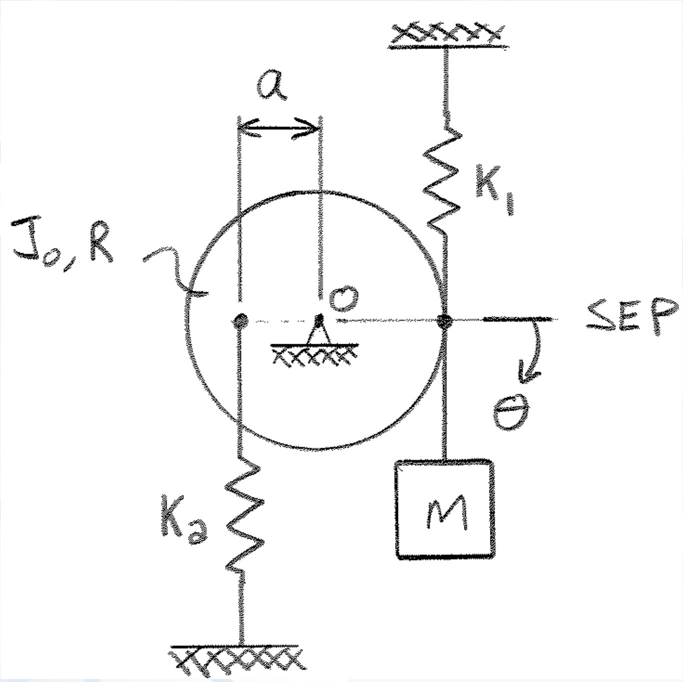


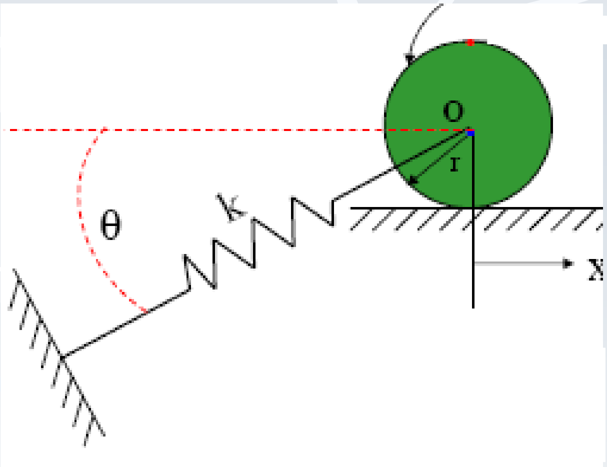
# تمرین



# تمرین

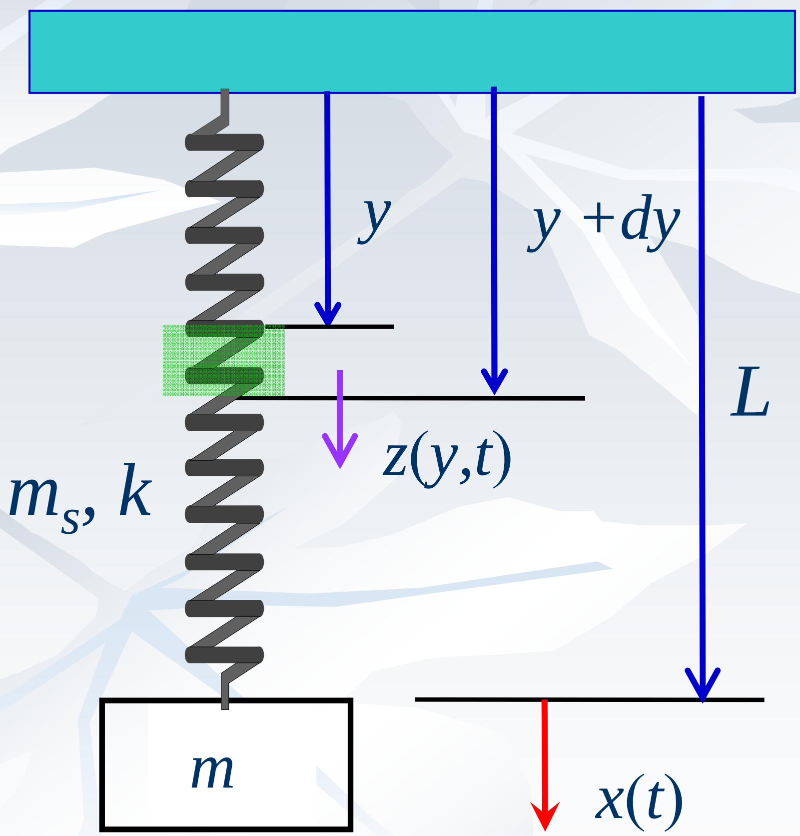


# ارتعاشات مکانیکی ٤

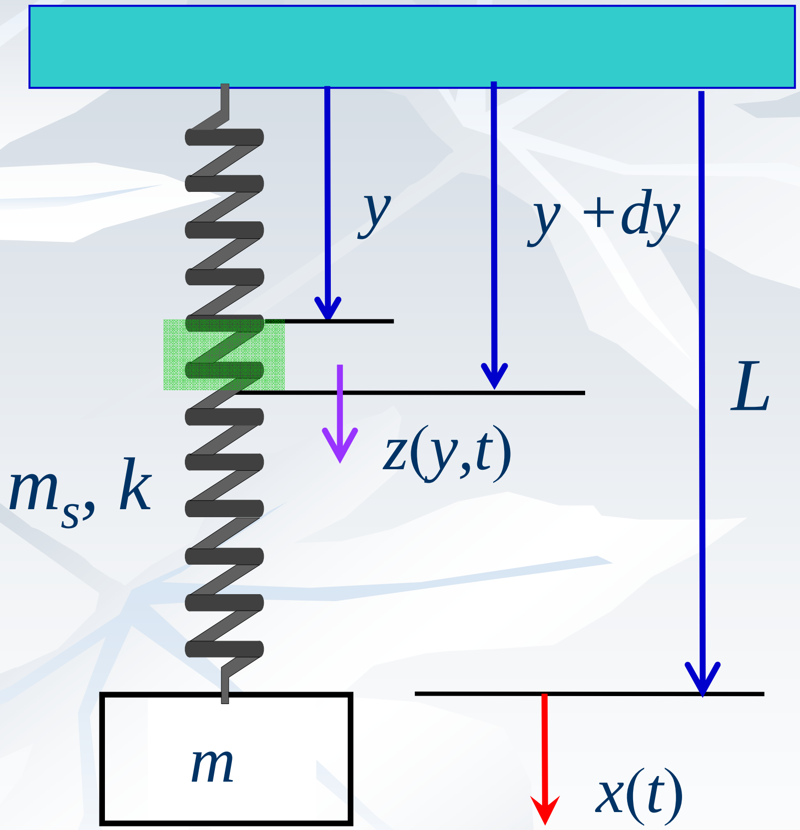
سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

# تاثیر جرم فنر




- هدف: بدست آوردن جرم مؤثر فنر
- فنر دارای جرم $m_s$ و طول $L$ است.
- المان $dy$ را روی فنر در نظر می گیریم
- جرم المان= $dm_s=m_s dy/L$
- جابجائی المان $z$ است که برحسب $x$ و $y$ بدست می آید
- فرض می شود جابجائی نقاط روی فنر برحسب $y$ خطی است.
- در نتیجه: $$z=\frac{y}{L}z_{\max}=\frac{y}{L}x(t)$$

# تاثیر جرم فنر




- سرعت المان: $\dot{z} = \frac{y}{L}\dot{z}_{\max} = \frac{y}{L}\dot{x}(t)$
- انرژی جنبشی:

$$T = T_S + T_m$$

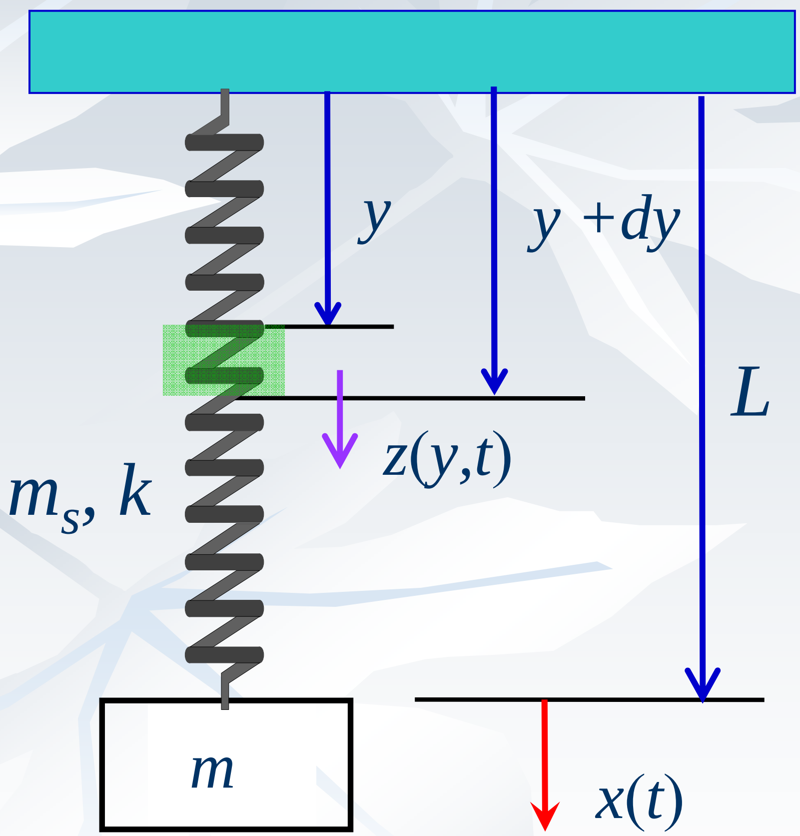
$$T_S = \frac{1}{2}\int_L \dot{z}^2 dm_s = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{y}{L}\dot{x}\right)^2 \frac{m_s}{L}dy$$

$$= \frac{m_s}{2L^3}\left(\int_0^L y^2 dy\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_s}{3}\dot{x}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_s}{3}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3} + m\right)\dot{x}^2$$

# تاثیر جرم فنر




- انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m_s}{3} + m\right)}_{m_{eq}}\dot{x}^2$$

- انرژی پتانسیل فنر:

$$U_S = \frac{1}{2}k(x)^2$$

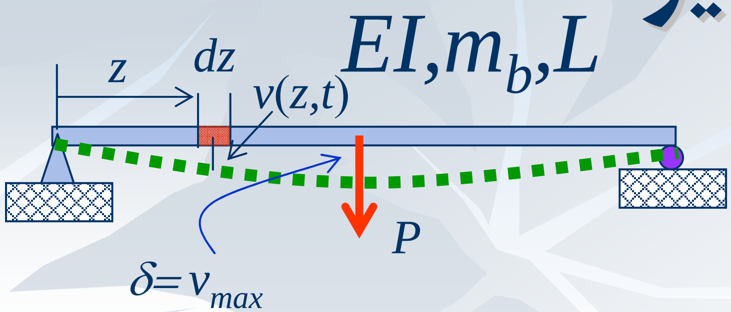
- روش ریلی:

$$T_{\max} = U_{\max}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3} + m\right)\omega_n^2 X^2 = \frac{1}{2}k(X)^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{\frac{m_s}{3} + m}$$

# تاثیر جرم تیر




- المانی از تیر در نظر گرفته می شود،
  خیز تیر در اثر نیروی مرکزی:

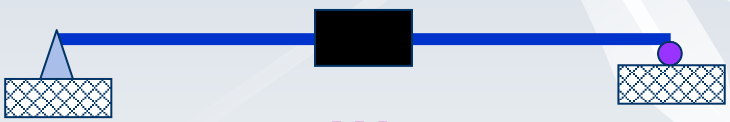
$$v(z)=\frac{Pz}{48EI}\left(3L^2-4z^2\right)\qquad 0\le z\le \tfrac{L}{2}$$

- بیشترین خیز:

$$\delta=v_{\max}=\frac{PL^3}{48EI}\Rightarrow k_b=\frac{48EI}{L^3}$$

- در نتیجه خیز تیر بصورت تابعی از بیشترین خیز

$$v(z)=\frac{v_{\max}}{L^3}\left(3L^2z-4z^3\right)\qquad 0\le z\le \frac{L}{2}$$

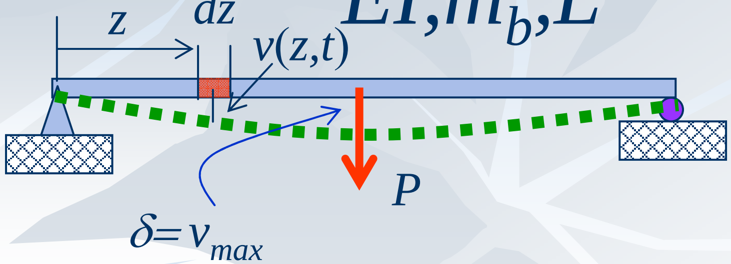


$\equiv$


$$k_b=\frac{48EI}{L^3}$$

# تاثیر جرم تیر

$EI, m_b, L$

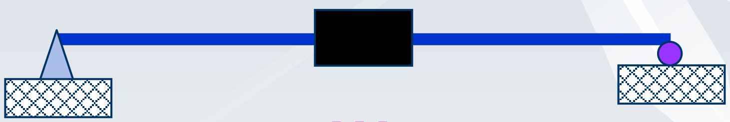



$$v(z)=\frac{v_{\max}}{L^3}\left(3L^2z-4z^3\right)$$

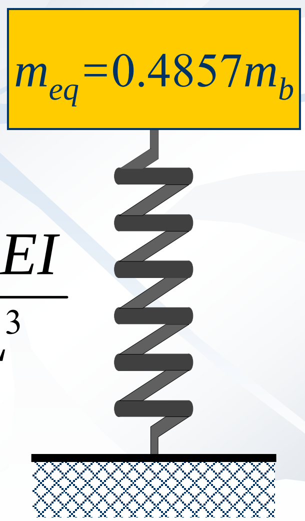
- انرژی جنبشی مربوط به المان

$$dT=\frac{1}{2}\left(dm_b\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{m_b}{L}dz\right)\frac{\dot{v}_{\max}^2}{L^6}\left(3L^2z-4z^3\right)^2$$



$\equiv$




$$k_b=\frac{48EI}{L^3}$$

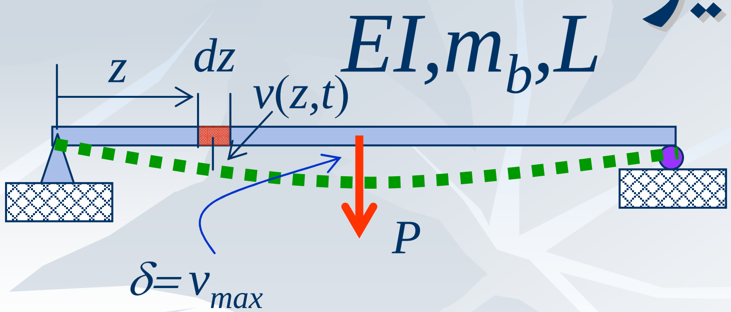
- انرژی جنبشی کل

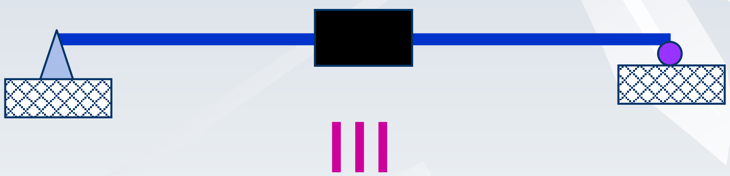
$$T=\int dT=\frac{1}{2}\left(\frac{m_b}{L}\right)\frac{\dot{v}_{\max}^2}{L^6}2\int_0^{L/2}\left(9L^4z^2+16z^6-24L^2z^4\right)dz$$

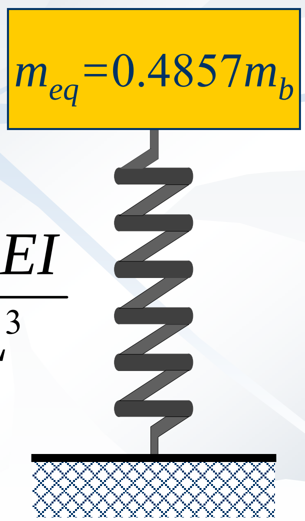
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{m_b}{L}\right)\frac{\dot{v}_{\max}^2}{L^6}2\left(3L^4\frac{L^3}{8}+\frac{16}{7}\frac{L^7}{128}-\frac{24}{5}L^2\frac{L^5}{32}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(0.4857\,m_b\right)\dot{v}_{\max}^2$$

# تاثیر جرم تیر






$$k_b = \frac{48EI}{L^3}$$

- در نتیجه:

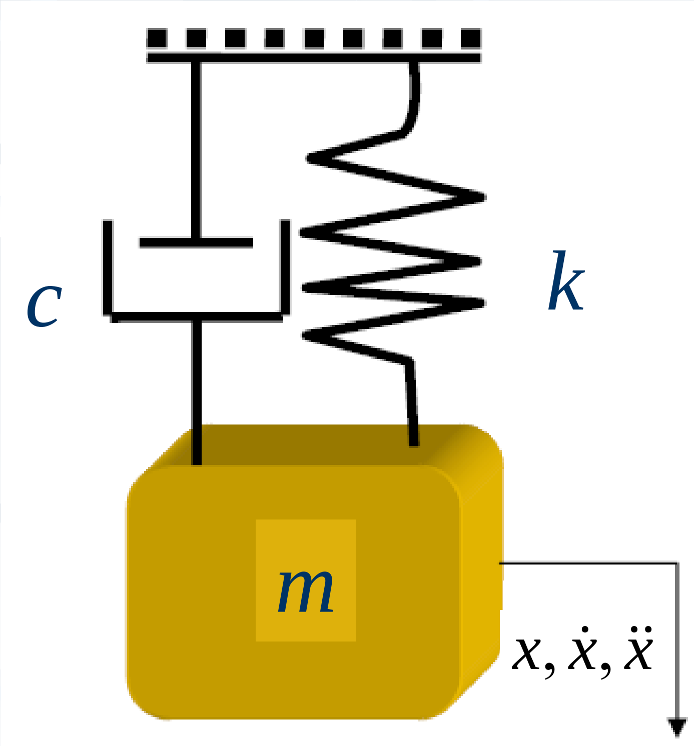
$$\omega_n^2 = \frac{k_b}{m_{eq}} = \frac{\frac{48EI}{L^3}}{0.4857m_b} = \frac{98.82EI}{m_b L^3}$$

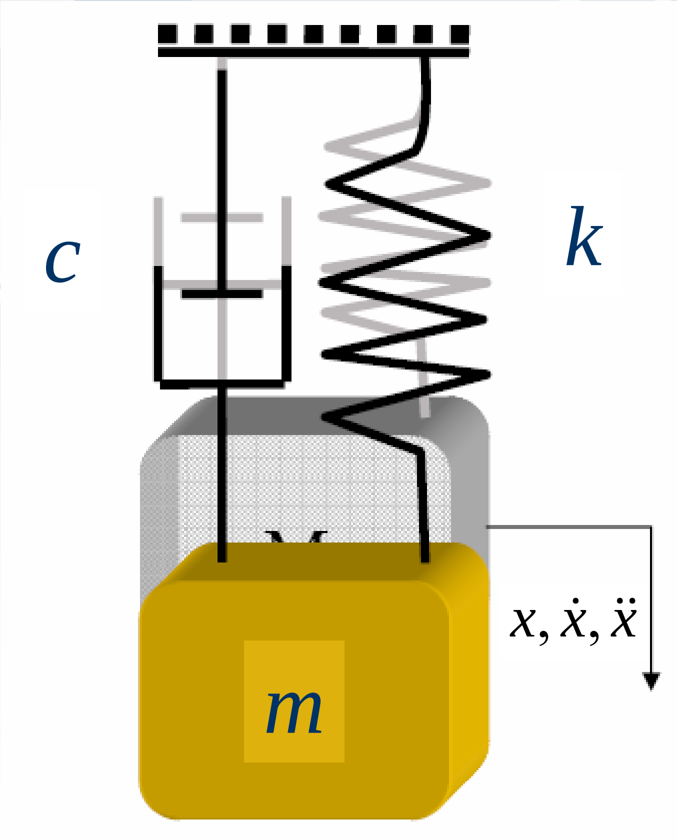
فرکانس طبیعی اول تیر

$$\omega_1^2 = (\beta L)^4 \frac{EI}{m_b L^3} = \pi^4 \frac{EI}{m_b L^3} = 97.41\frac{EI}{m_b L^3}$$

# ارتعاشات آزاد میرا

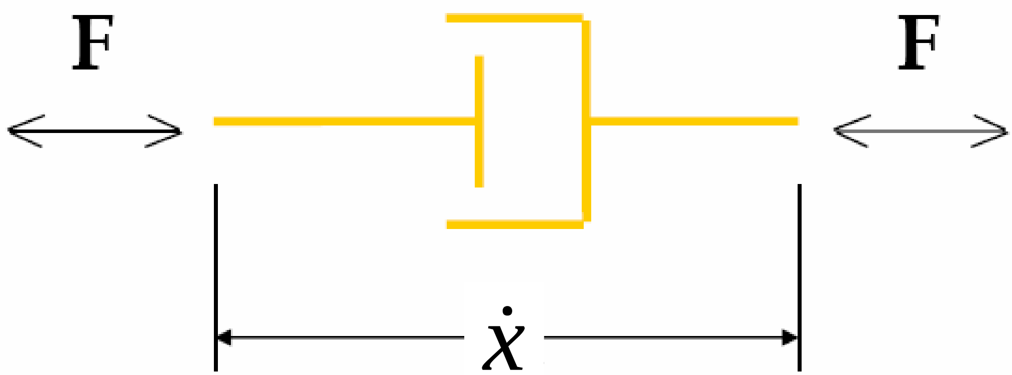
# ارتعاشات آزاد میرا

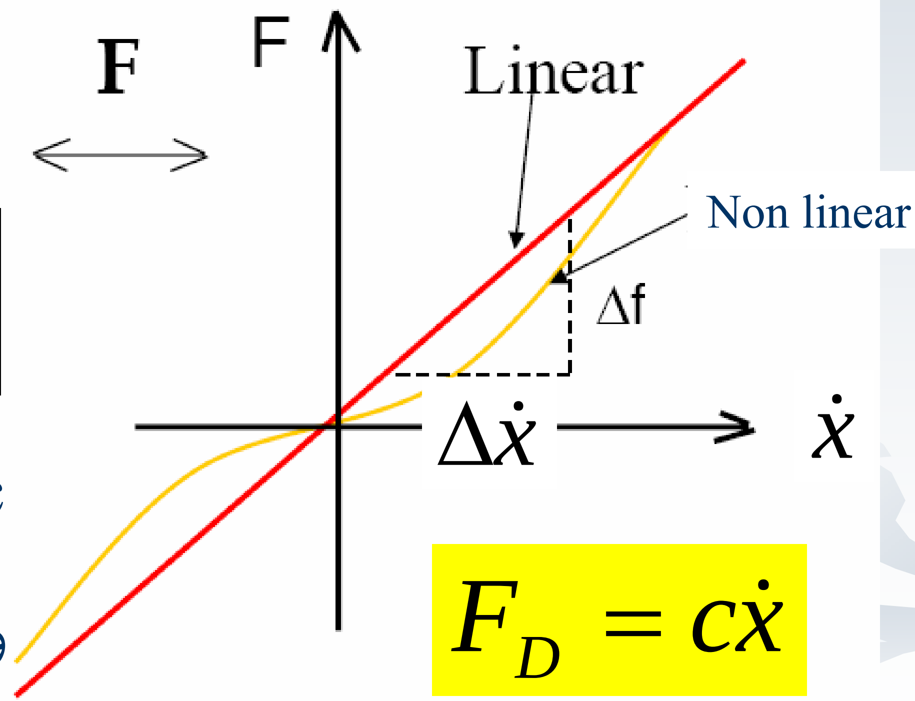


# ارتعاشات آزاد میرا

- نیرو و سرعت متناسب و خطی هستند



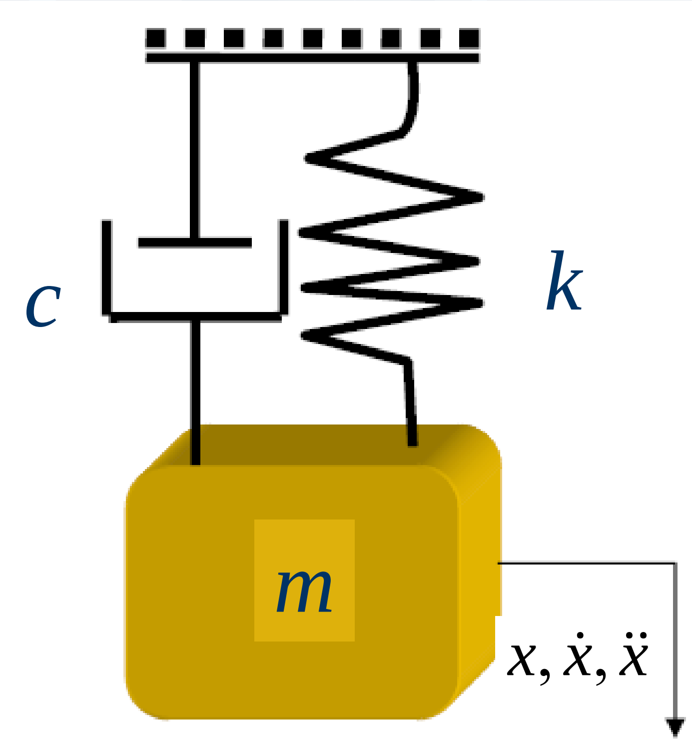



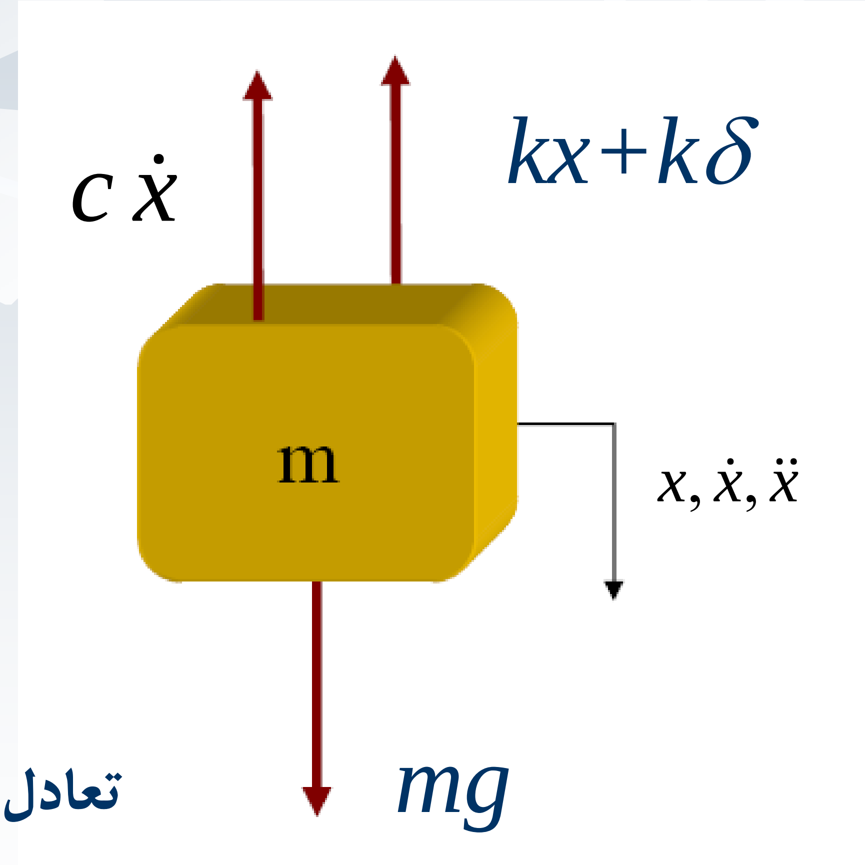

$$F_D = c\dot{x}$$

c ضریب میرائی ویسکوز می باشد.

واحد: N.s/m یا kg/s یا lb.sec/ft

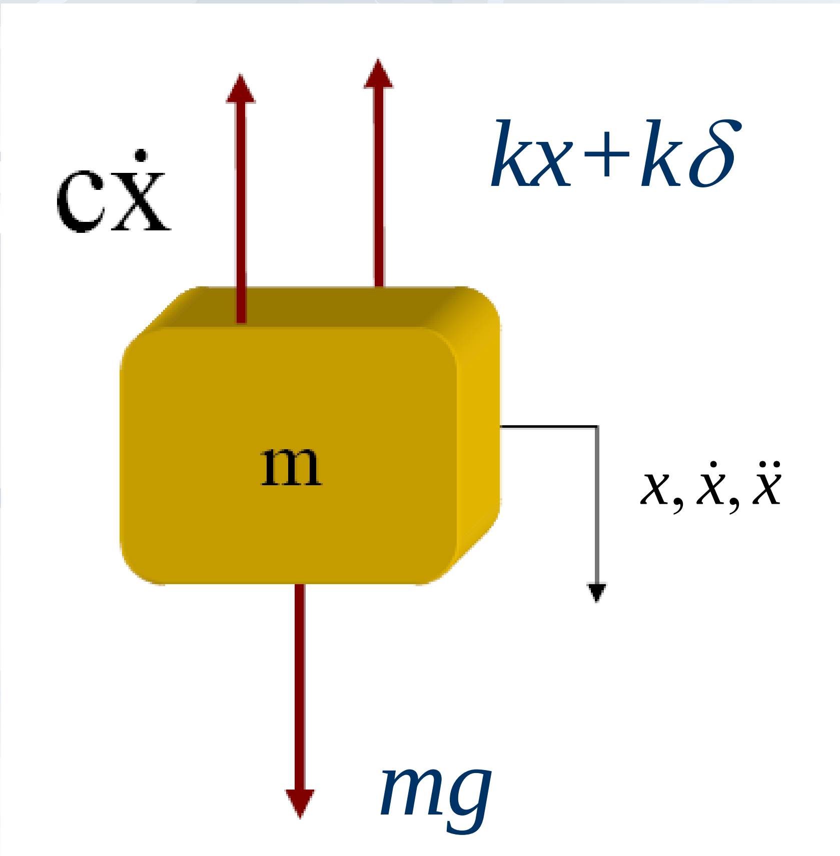
# دیاگرام آزاد جسم




تعادل دینامیکی

# معادله حرکت




- قانون دوم نیوتن:

$$\downarrow^{+} \sum F = ma$$

$$-kx - k\delta_{st} - c\dot{x} + mg = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

- معادله حرکت:

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

# پاسخ سیستم

- معادله حرکت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

- این معادله:
  - معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ خطی
  - همگن
  - ضرایب ثابت
- دارای حلی به شکلهای زیر فرض می شود:

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

# پاسخ

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t},$$

- معادله مشخصه: $(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ae^{\lambda t} = 0, \Rightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} + A_2 e^{\left(\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t}$$

# پاسخ

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left( A_1 e^{\left(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} \right)$$

- بسته به مقدار زیر رادیکال، رفتار تابع تفاوت می کند.
- الف) حالت بحرانی:

$$c^2 - 4mk = 0 \Rightarrow c^2 = 4mk \Rightarrow c = 2\sqrt{mk} = c_c$$

- این میرائی میرائی بحرانی نام دارد و با $c_c$ نشان می دهند.
- پاسخ در این حالت چون $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{c}{2m}t}$$

# میرائی بحرانی

- $A_1$ و $A_2$ با شرایط مرزی محاسبه می شود

$$\frac{c}{2m} = \frac{2\sqrt{km}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

$$x(t) = \left(A_1 + A_2 t\right)e^{-\omega_n t}$$

$$x(0) = x_0 = A_1$$

$$\dot{x}(t) = \left(A_2\right)e^{-\omega_n t} - \omega_n\left(A_1 + A_2 t\right)e^{-\omega_n t}$$

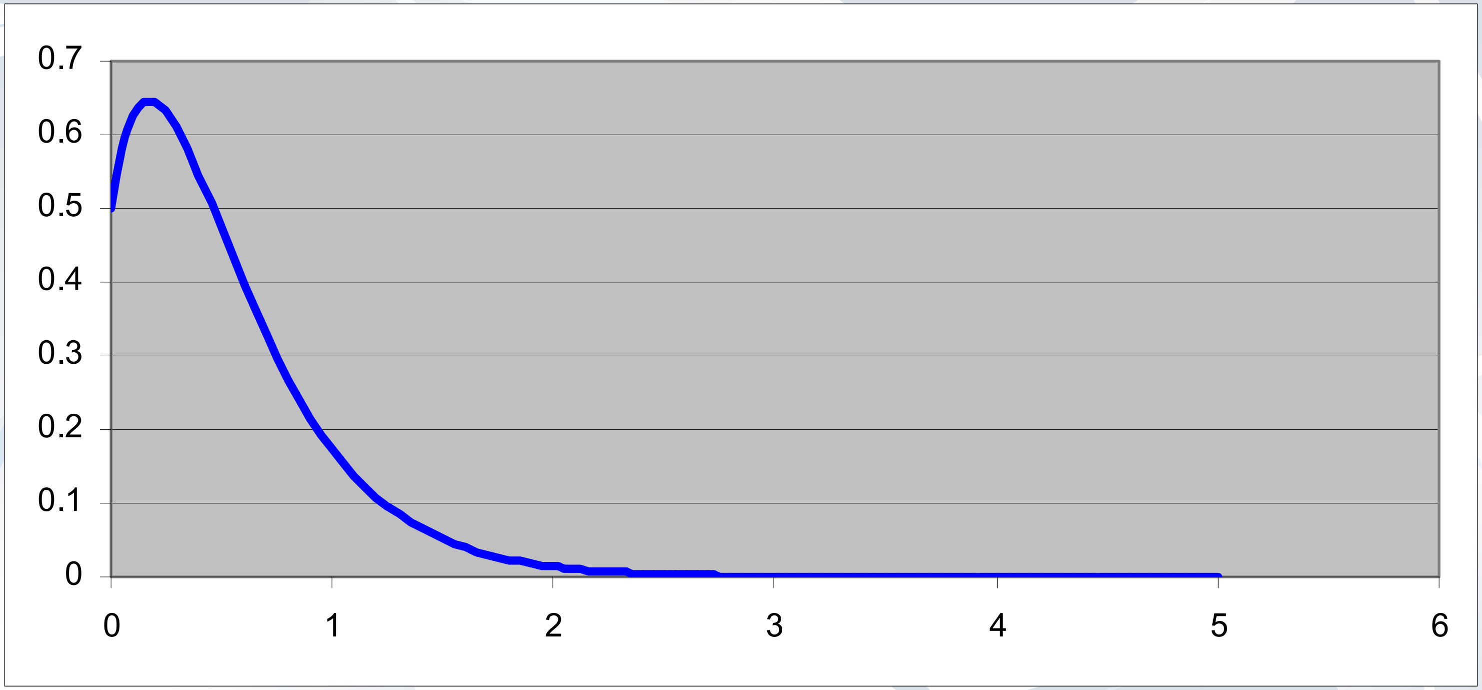
$$\dot{x}(0) = v_0 = \left(A_2\right) - \omega_n\left(x_0\right)$$

$$A_2 = v_0 + \omega_n x_0$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 + \left(v_0 + \omega_n x_0\right)t\right)e^{-\omega_n t}}$$

# میرائی بحرانی

$$x(t) = \left[x_0 + \left(v_0 + \omega_n x_0\right)t\right]e^{-\omega_n t}$$




$$x_0 = 0.5,\ \ v_0 = 2, \qquad m = 1 \quad k = 10 \qquad c = c_c = 2\sqrt{10}$$

# ب) زیر میرائی Underdamped

- ب) زیر میرائی: اگر زیر رادیکال کمتر از صفر باشد:

$$c^2 - 4mk < 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left( A_1 e^{i\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}\right)t} + A_2 e^{-i\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}\right)t} \right)$$

- نسبت میرائی $\xi$: نسبت میرائی به میرائی بحرانی:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}\sqrt{\frac{m}{m}} = \frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{c}{2m}\frac{1}{\omega_n}$$

# پاسخ

- همچنین:

$$\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}=\frac{\sqrt{c_c^2-c^2}}{2m}=\frac{c_c\sqrt{1-\xi^2}}{2m}=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\omega_d$$

فرکانس میرا $\omega_d$

- در نتیجه:

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1e^{i\omega_d t}+A_2e^{-i\omega_d t}\right)$$

$$\boxed{x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left(B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)\right)}$$

- که با شرایط مرزی $B_1$ و $B_2$ بدست می آید:

$$\dot{x}(t)=-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)\right)$$
$$+\omega_d e^{-\xi\omega_n t}\left(-B_1\sin(\omega_d t)+B_2\cos(\omega_d t)\right)$$

# پاسخ

- اعمال شرایط مرزی:

$$x(0)=e^{-\xi\omega_n t}\left(B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)\right)=x_0 \quad\Rightarrow \boxed{B_1=x_0}$$

$$\dot{x}(0)=-\xi\omega_n x_0+\omega_d B_2=v_0 \quad\Rightarrow \boxed{B_2=\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}}$$

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t)+\left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

# پاسخ

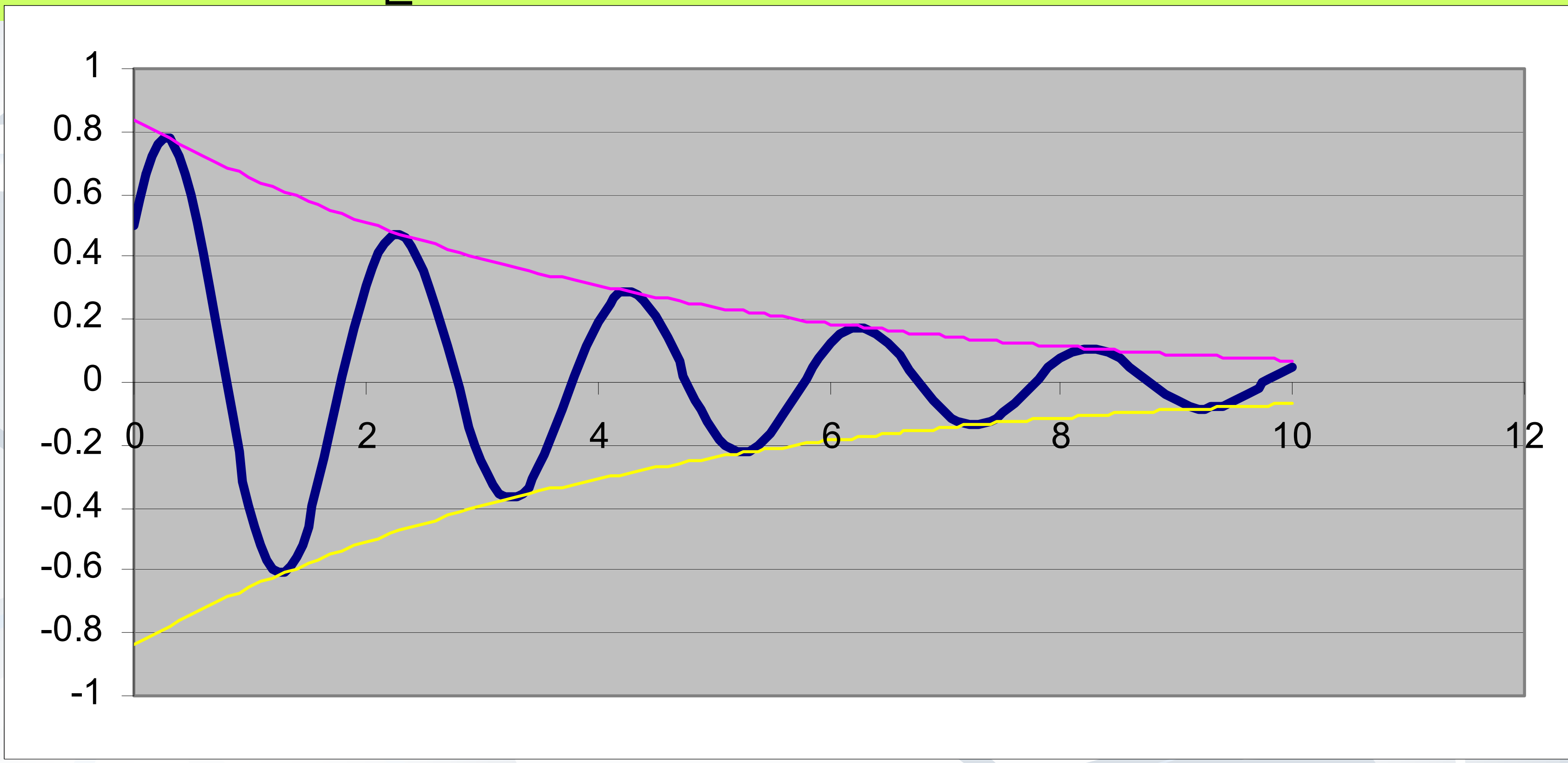
- اشکال مختلف پاسخ:

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t)+\left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

$$x(t)=Xe^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\phi)\qquad X=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}\qquad \phi=\tan^{-1}\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{x_0\omega_d}$$

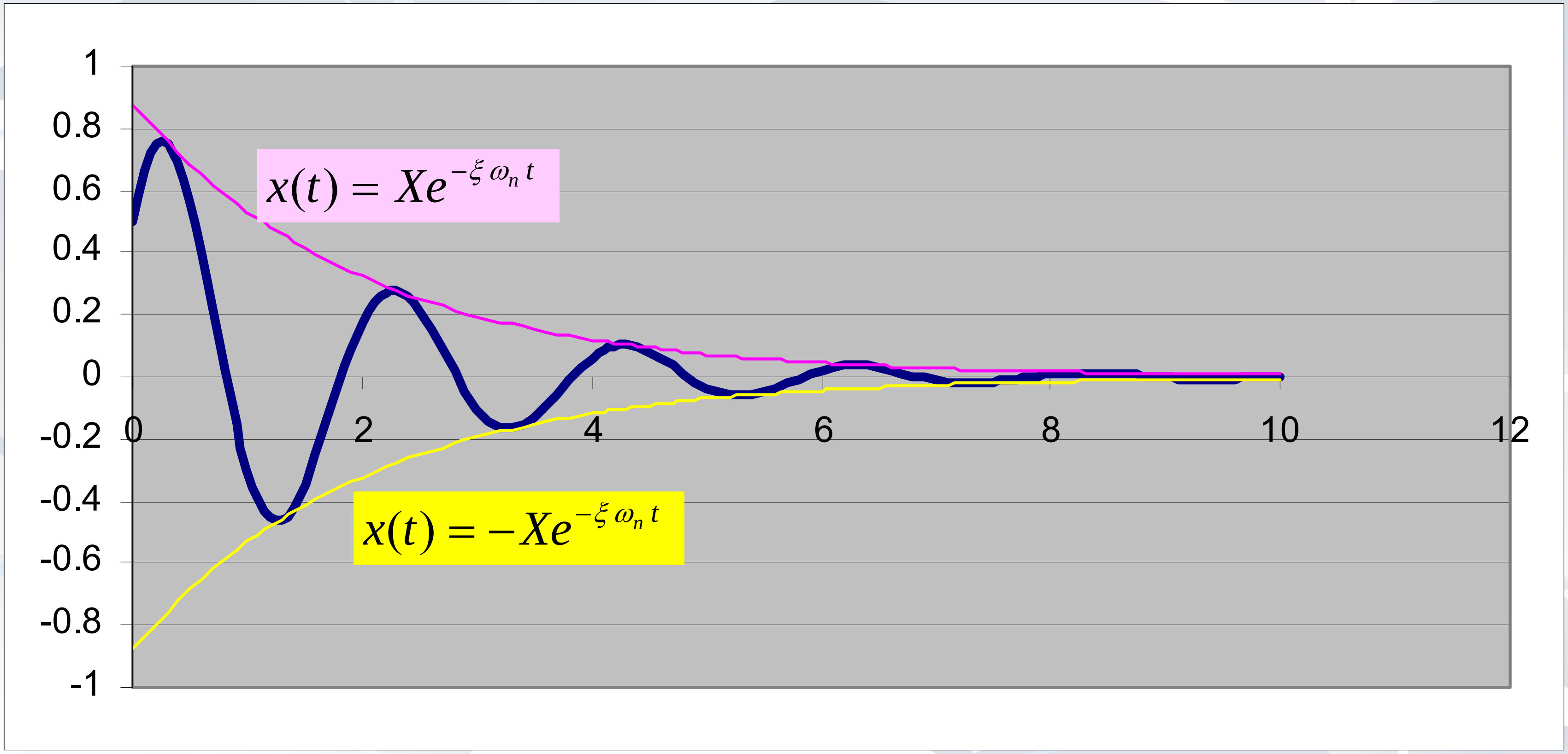
$$x(t)=Xe^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\psi)\qquad X=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}\qquad \psi=\tan^{-1}\frac{x_0\omega_d}{v_0+\xi\omega_n x_0}$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left[ x_0 \cos(\omega_d t) + \left( \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right]$$



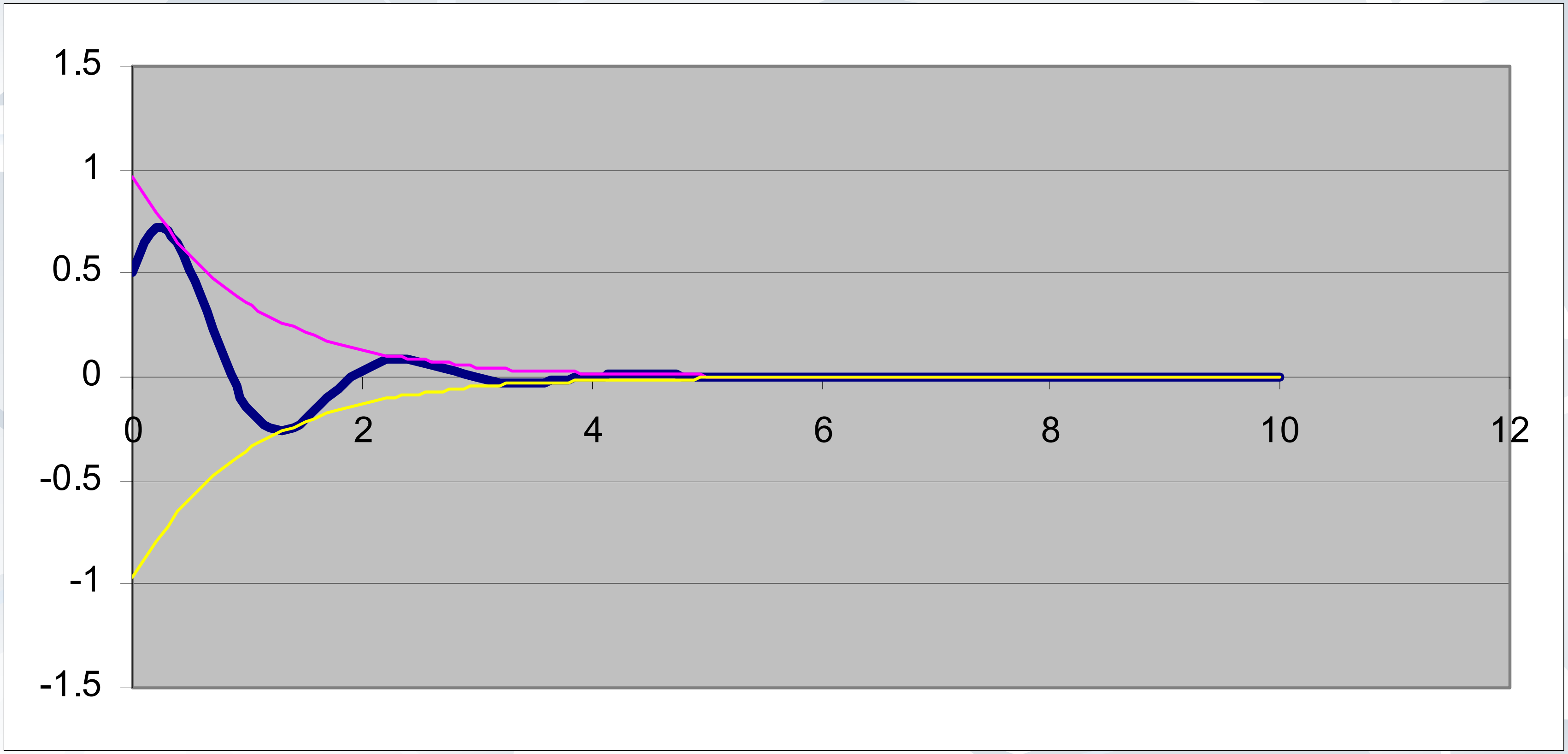

$$x_0 = 0.5, \;\; v_0 = 2, \qquad m = 1 \quad k = 10 \qquad c = 0.5, \;\; \xi = 0.0791$$

$$x(t) = Xe^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \qquad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{x_0 \omega_d}$$



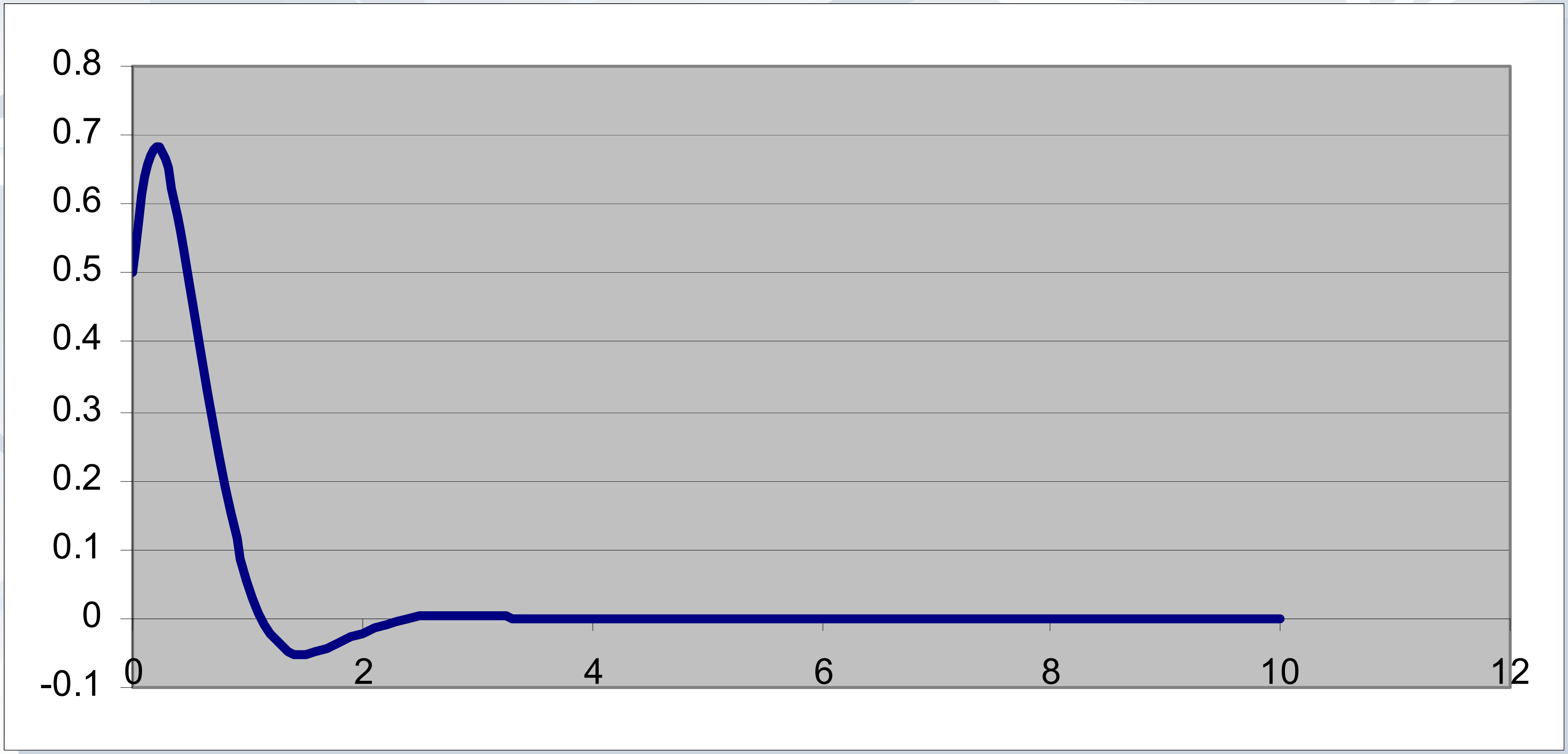

$$x_0 = 0.5, \; v_0 = 2, \qquad m = 1 \quad k = 10 \qquad c = 1, \; \xi = 0.158$$

$$x(t) = Xe^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) \qquad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad \psi = \tan^{-1} \frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \xi \omega_n x_0}$$




$$x_0 = 0.5, \; v_0 = 2, \qquad m = 1 \quad k = 10 \qquad c = 2, \; \xi = 0.316$$

$$x(t) = Xe^{-\xi\,\omega_n t}\sin(\omega_d\, t + \psi) \qquad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\,\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad \psi = \tan^{-1}\frac{x_0\omega_d}{v_0 + \xi\,\omega_n x_0}$$




$$x_0 = 0.5,\ v_0 = 2, \qquad m = 1 \quad k = 10 \qquad c = 4,\ \xi = 0.632$$

# ب) فوق میرائی Overdamped

- ب) فوق میرائی: اگر زیر رادیکال بیشتر از صفر باشد:

$$c^2 - 4mk > 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left( A_1 e^{\left(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} \right)$$

- نسبت میرائی ζ بزرگتر از ۱:

# پاسخ

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 e^{\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}+A_2 e^{-\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right)$$

- که با شرایط مرزی $A_1$ و $A_2$ بدست می آید:

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 e^{\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}+A_2 e^{-\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right)$$

$$\dot{x}(t)=-\xi\,\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 e^{\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}+A_2 e^{-\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right)$$

$$+\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{-\xi\,\omega_n t}\left(A_1 e^{\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}-A_2 e^{-\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right)$$

# پاسخ

- اعمال B.C.

$$\boxed{x(0) = A_1 + A_2 = x_0}$$

$$\dot{x}(0) = -\xi\,\omega_n x_0 + \left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)(A_1 - A_2) = v_0$$

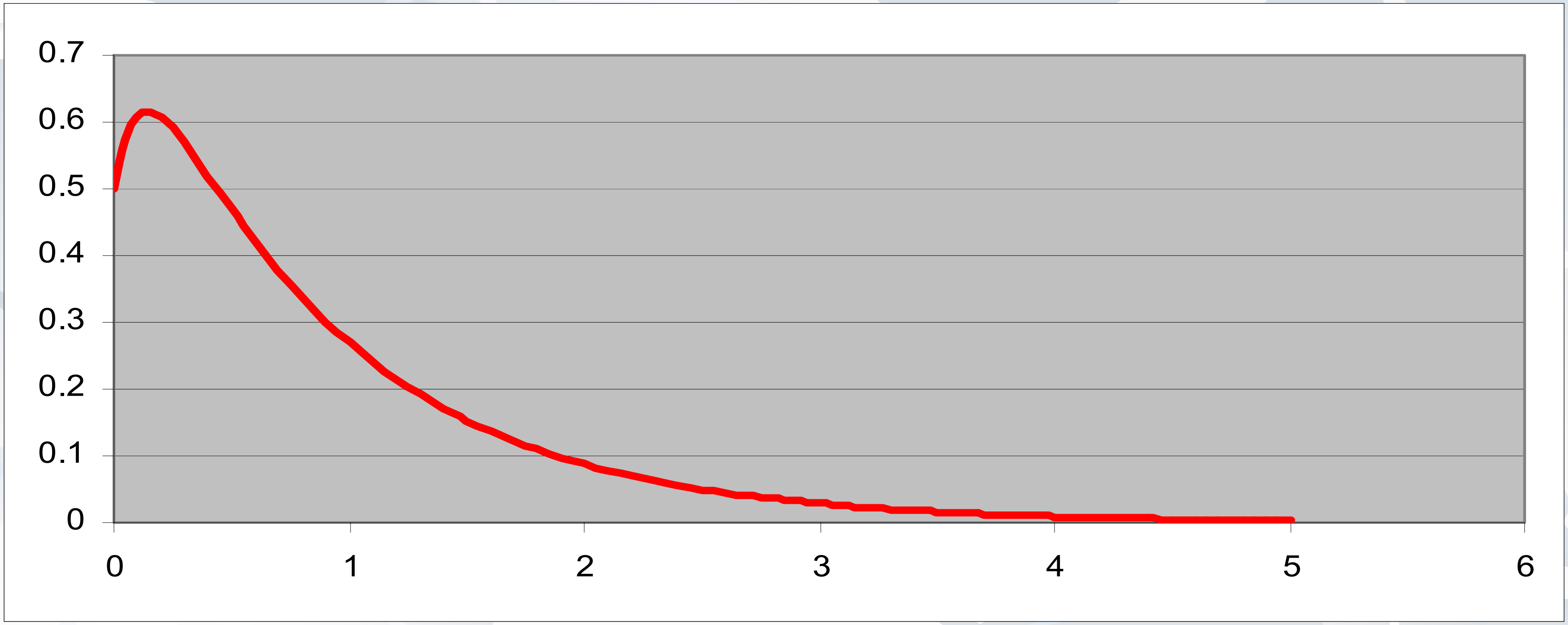
$$\boxed{A_1 - A_2 = \frac{v_0 + \xi\,\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0 + \xi\,\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) = \frac{\omega_n x_0\left(\sqrt{\xi^2 - 1} + \xi\right) + v_0}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

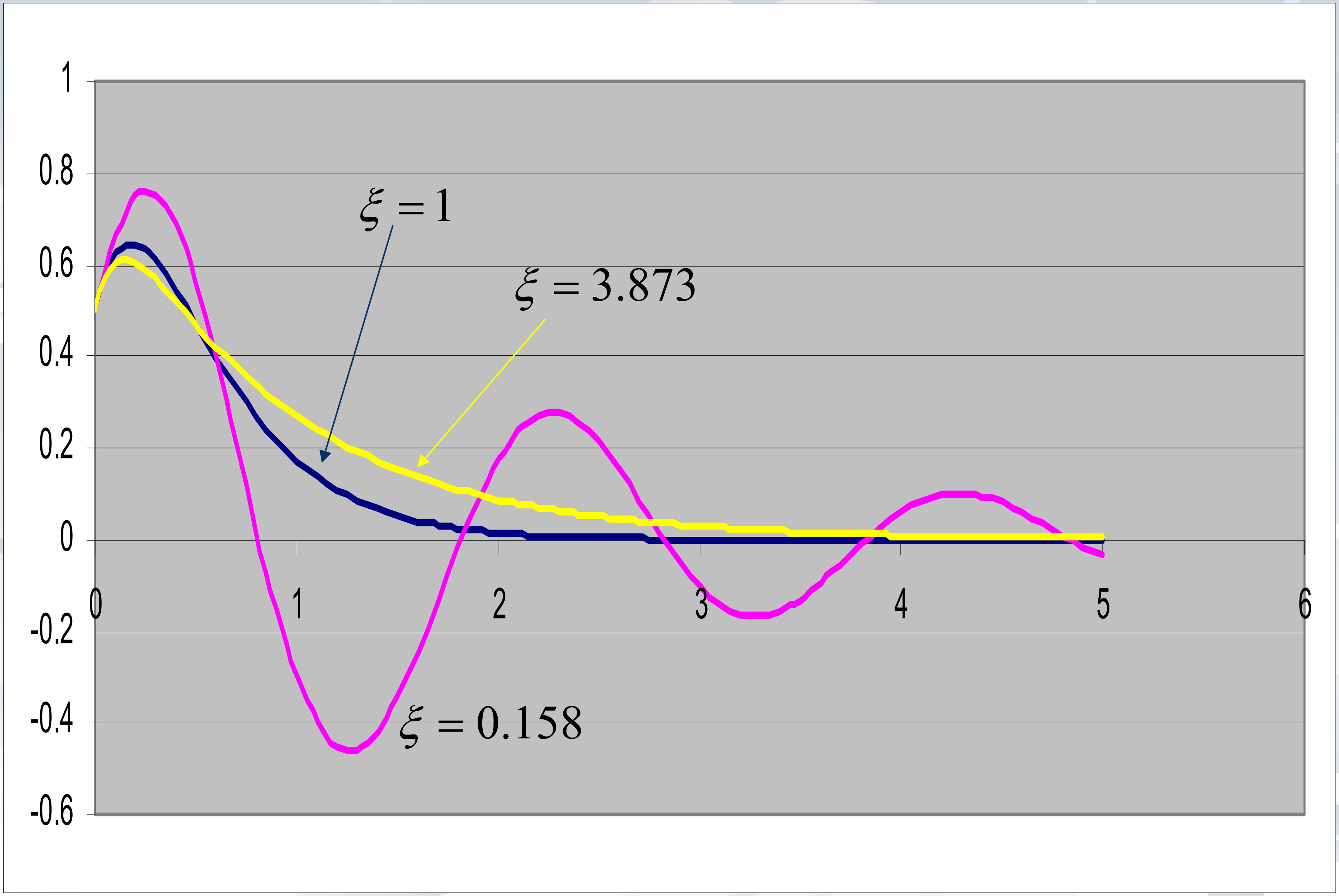
$$A_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0 + \xi\,\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) = \frac{\omega_n x_0\left(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi\right) - v_0}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

# پاسخ

$$x(t)=\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}\left\{\left[\omega_n x_0\left(\sqrt{\xi^2-1}+\xi\right)+v_0\right]e^{\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}+\left[\omega_n x_0\left(\sqrt{\xi^2-1}-\xi\right)-v_0\right]e^{-\left(\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right\}$$




$$x_0=0.5,\ v_0=2,\quad m=1\quad k=10\quad c=10,\ \xi=3.873$$

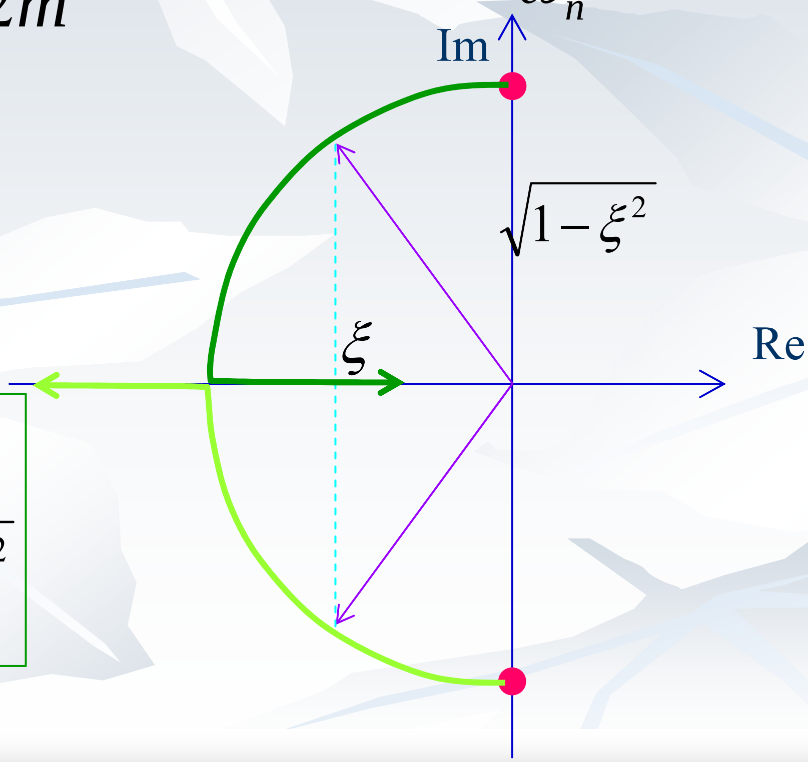

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
1
2
3
4
5
6
$\xi = 1$
$\xi = 3.873$
$\xi = 0.158$

# مکان هندسی ریشه ها Root locus

- مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه در کنترل دارای کاربرد می باشد:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n}=\left[-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}\right]$$




زیر میرا

$$0\le\xi\le1$$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n}=-\xi\pm i\sqrt{1-\xi^2}$$

نامیرا

$$\xi=0$$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n}=\pm i$$

# Root locus مکان هندسی ریشه ها

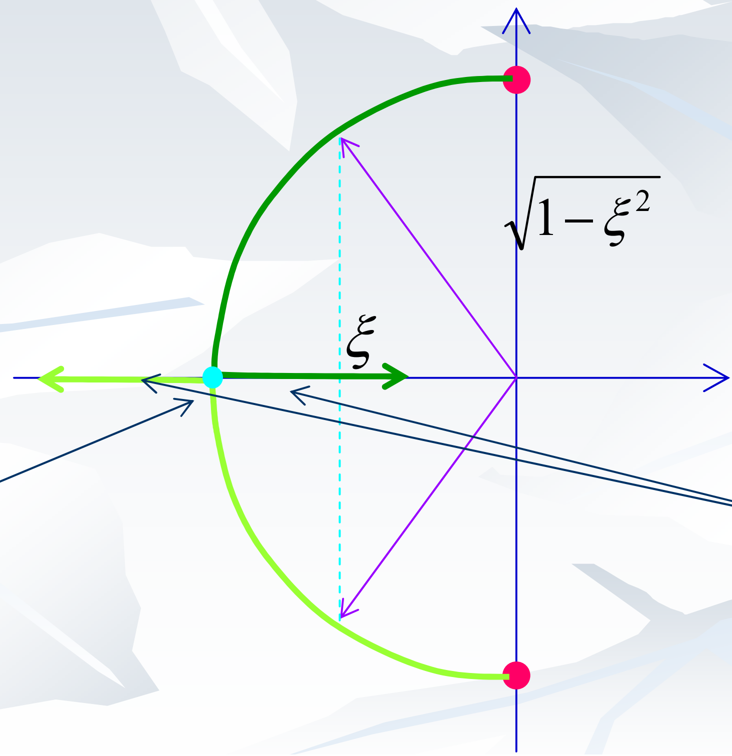
$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n} = \left[-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right]$$

میرائی بحرانی

$\xi = 1$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n} = -1$$

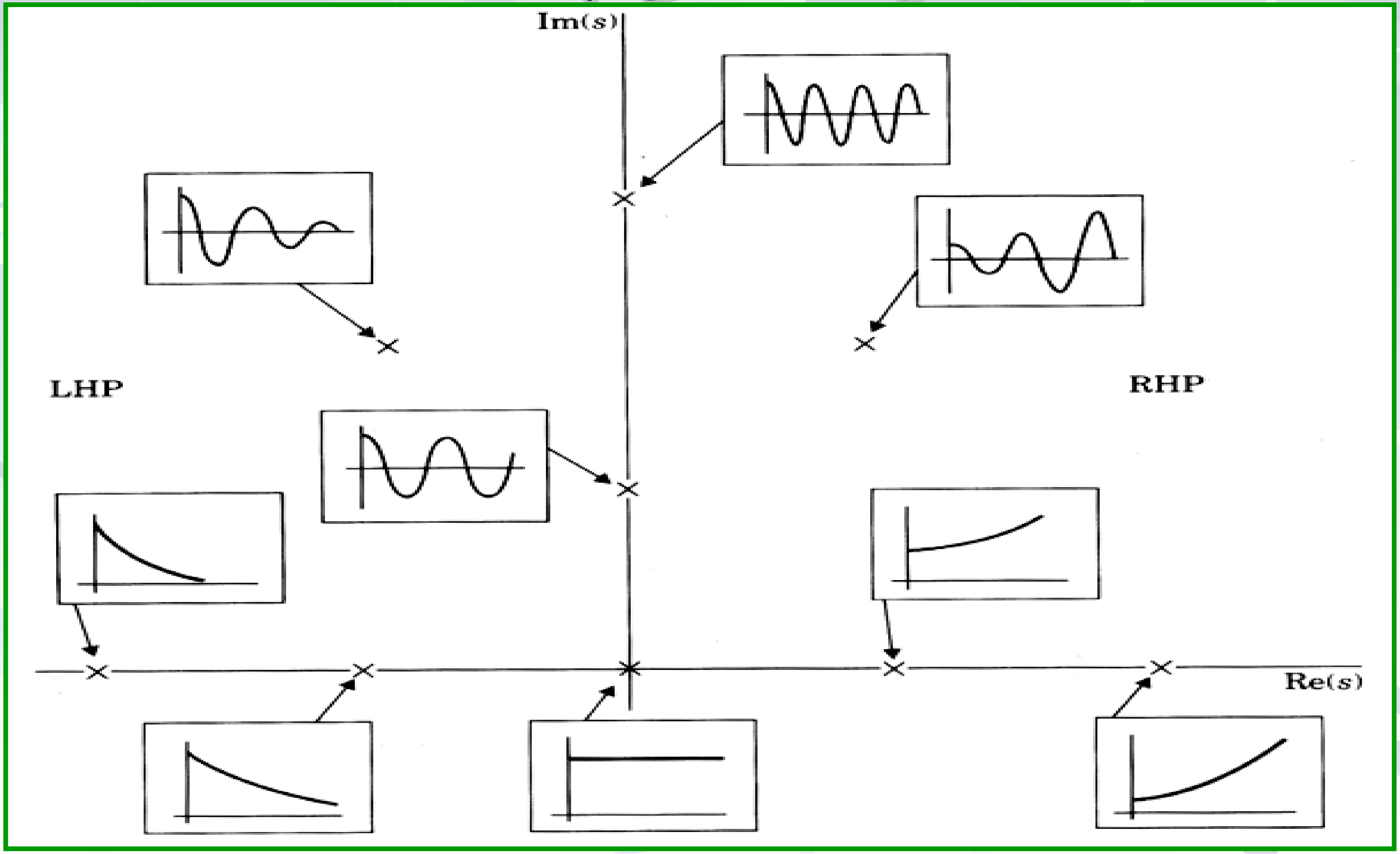



فوق میرا

$\xi > 1$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

# مکان هندسی ریشه ها

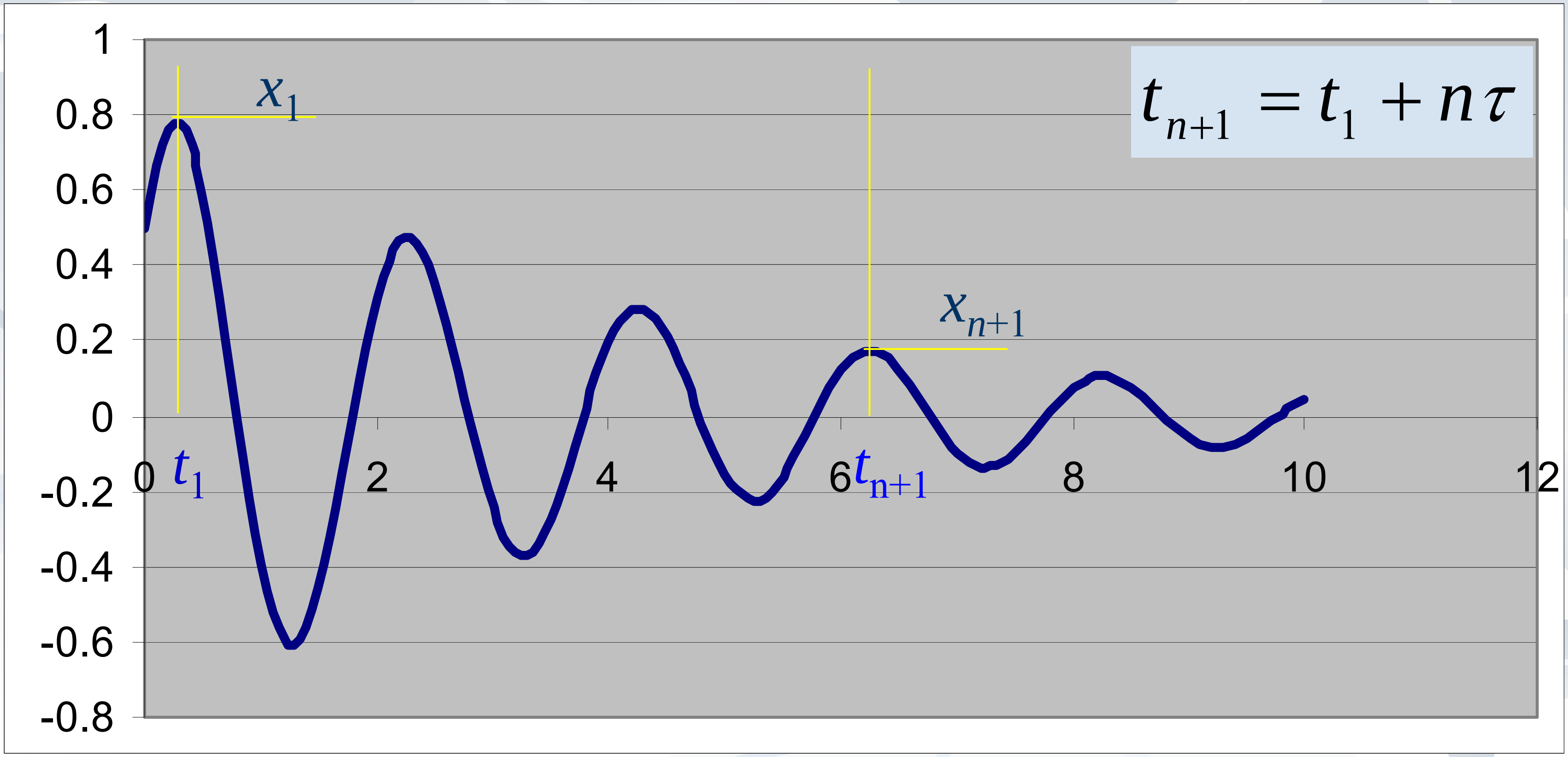


# بعضی از مقادیر نسبت میرائی

| | $\xi$ |
|---|---|
| Automobile shock absorbers | 0.1-0.5 |
| Rubber | 0.04 |
| Riveted steel structures | 0.03 |
| Concrete | 0.02 |
| Wood | 0.003 |
| Cold rolled steel | 0.0006 |
| Cold rolled aluminum | 0.0002 |
| Phosphor bronze | 0.00007 |

# کاهش لگاریتمی

- روشی تجربی برای اندازه گیری نسبت میرائی و ضریب میرائی:



# کاهش لگاریتمی

- دامنه ارتعاش در زمان $t_1$:
- دامنه ارتعاش در زمان $t_{n+1}$:

$$x_1 = Xe^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

$$x_{n+1} = Xe^{-\xi \omega_n t_{n+1}} \cos(\omega_d t_{n+1} - \phi)$$

$$\boxed{t_{n+1} = t_1 + n\tau = t_1 + n\frac{2\pi}{\omega_d}}$$

$$x_{n+1} = Xe^{-\xi \omega_n (t_1 + n2\pi/\omega_d)} \cos\left(\omega_d\left(t_1 + n\frac{2\pi}{\omega_d}\right) - \phi\right)$$

$$= Xe^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\xi \omega_n (n2\pi/\omega_d)} \cos(\omega_d t_1 + 2n\pi - \phi)$$

$$= Xe^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\left(2n\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}\right)} \cos(\omega_d t_1 + 2n\pi - \phi)$$

# کاهش لگاریتمی

- نسبت دو دامنه:

$$\frac{x_1}{x_{n+1}}=\frac{Xe^{-\xi\,\omega_n\,t_1}\cos(\omega_d\,t_1-\phi)}{Xe^{-\xi\,\omega_n\,t_1}e^{-\left(2n\pi\,\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}\cos(\omega_d t_1+2n\pi-\phi)}=e^{\left(2n\pi\,\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

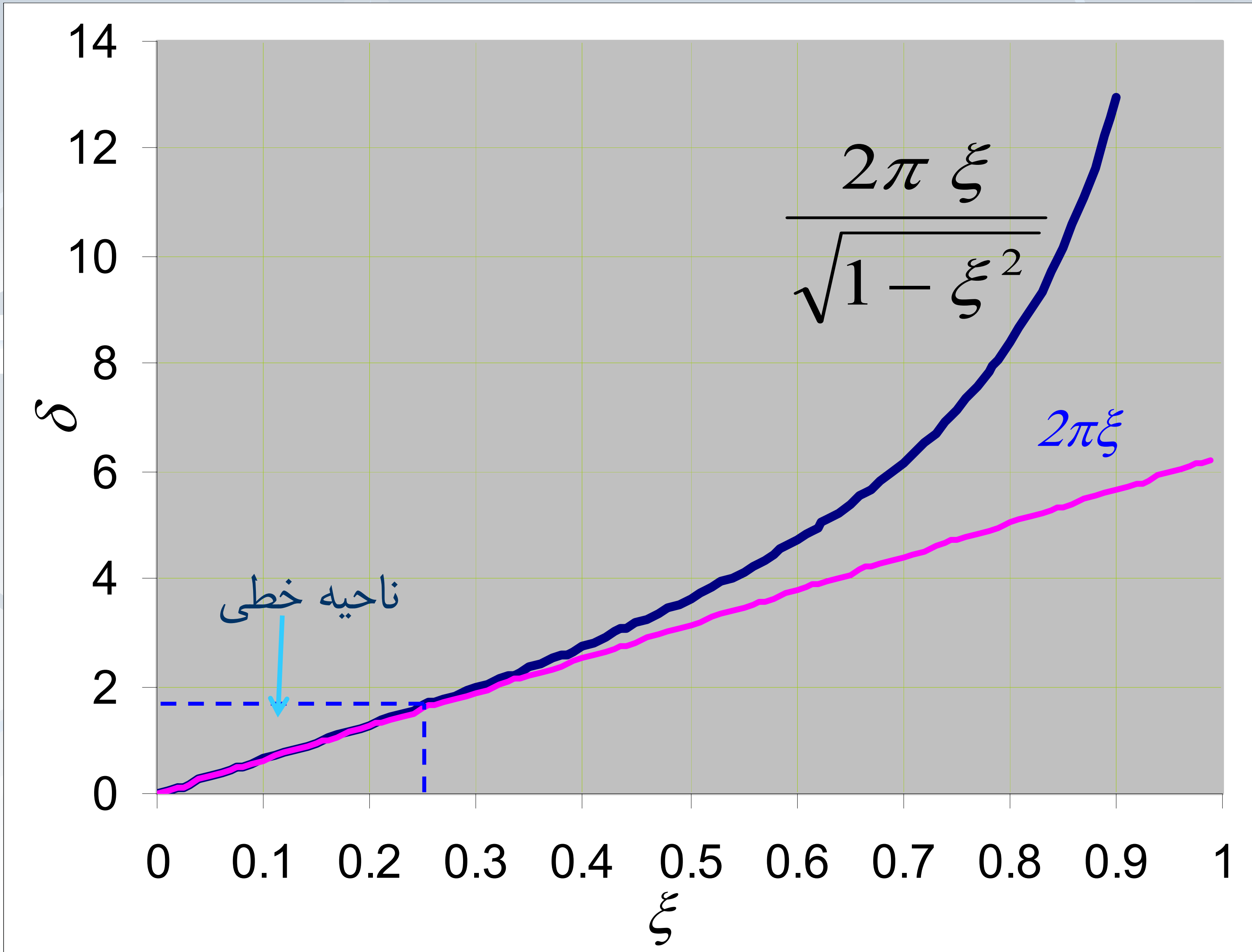
- با لگاریتم گرفتن از دو طرف معادله:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)=\frac{2n\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)=\frac{2\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

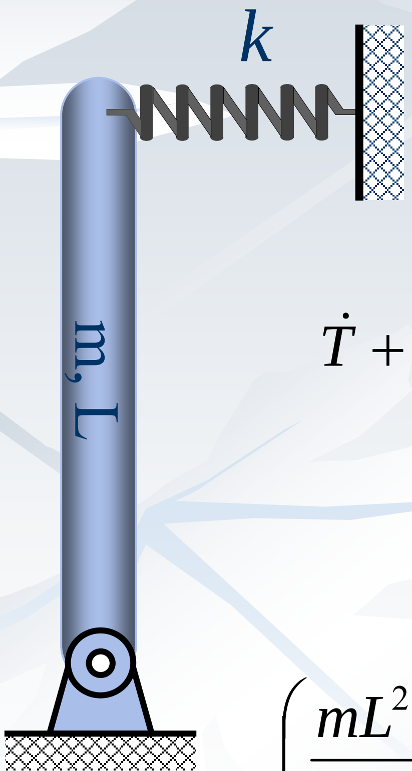
- با داشتن نسبت دامنه ها از این معادله می توان $\xi$ را محاسبه کرد.

کاهش لگاریتمی


14
12
10
8
6
4
2
0
$\delta$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
$\xi$
$\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$
$2\pi\xi$
ناحیه خطی

# Stability پایداری

- سیستم مقابل را در نظر بگیرید:




$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 \qquad U=\frac{1}{2}k(L\theta)^2+mg\,\tfrac{L}{2}(\cos\theta-1)$$

$$\dot{T}+\dot{U}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}k(L\theta)^2+mg\,\tfrac{L}{2}(\cos\theta-1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)2\ddot{\theta}\dot{\theta}+\frac{1}{2}k\left(L^2\,2\theta\dot{\theta}\right)-mg\,\tfrac{L}{2}\dot{\theta}(\sin\theta)=0$$

$$\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta}+k\left(L^2\theta\right)-mg\,\tfrac{L}{2}\sin\theta=\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta}+\left(kL^2-mg\,\tfrac{L}{2}\right)\theta=0$$

# Stability پایداری


$$\underbrace{\left(\frac{mL^2}{3}\right)}_{m_{eq}}\ddot{\theta}+\underbrace{\left(kL^2-mg\,\tfrac{L}{2}\right)}_{k_{eq}}\theta=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{kL^2-mgL/2}{\frac{mL^2}{3}}}=\sqrt{\frac{3\left(kL-mg/2\right)}{mL}}$$

- درصورتی ارتعاش وجود دارد که $\omega_n$ عدد حقیقی باشد

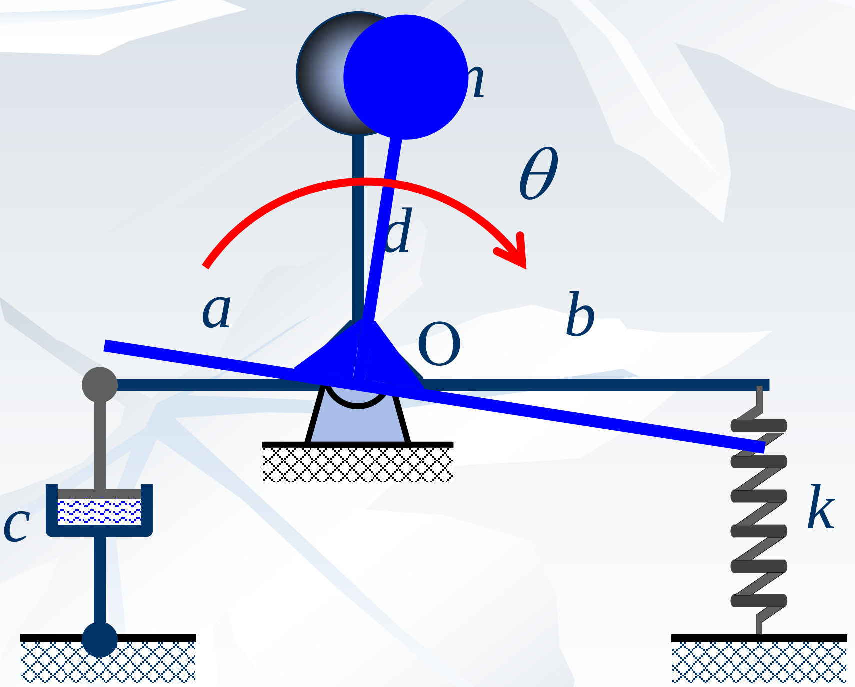
$$\left(kL-mg\right)=k_{eq}>0$$

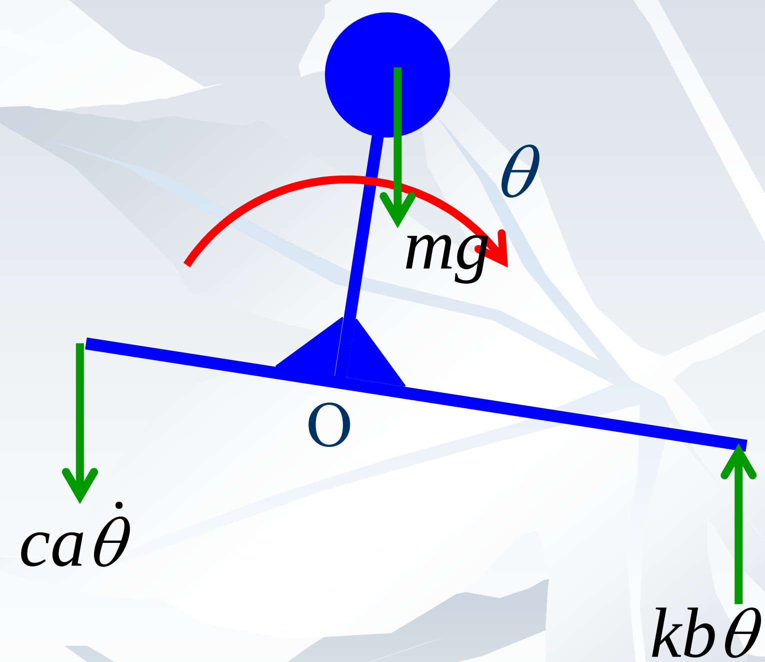
- برای داشتن شرایط پایدار ارتعاشات

$$\boxed{k_{eq}>0,\quad c_{eq}>0}$$

# مثال

- معادله حرکت سیستم مقابل را بدست آورید

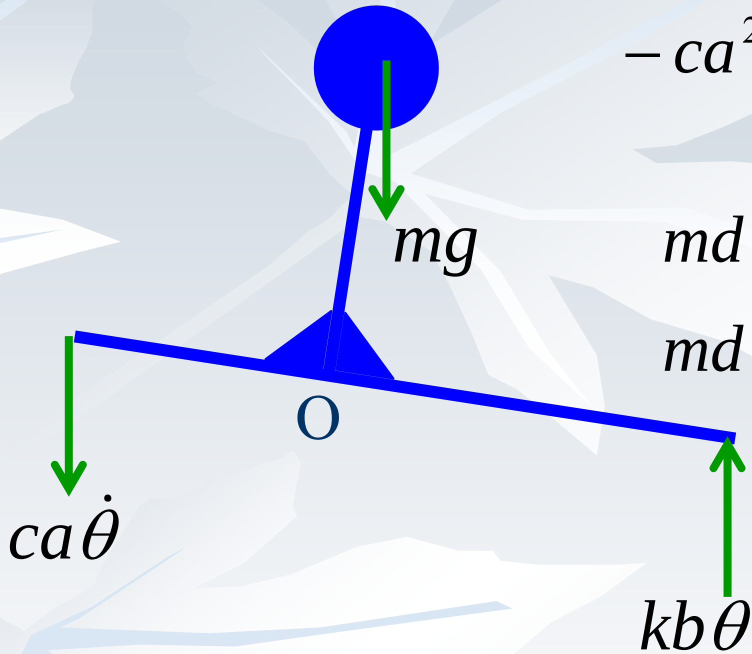



$$\sum M_O = J_o\ddot{\theta}$$

$$-ca^2\dot{\theta} - kb^2\theta + mgd\sin\theta = md^2\ddot{\theta}$$

# مثال




$$-ca^2\dot{\theta}-kb^2\theta+mgd\sin\theta=md^2\ddot{\theta}$$

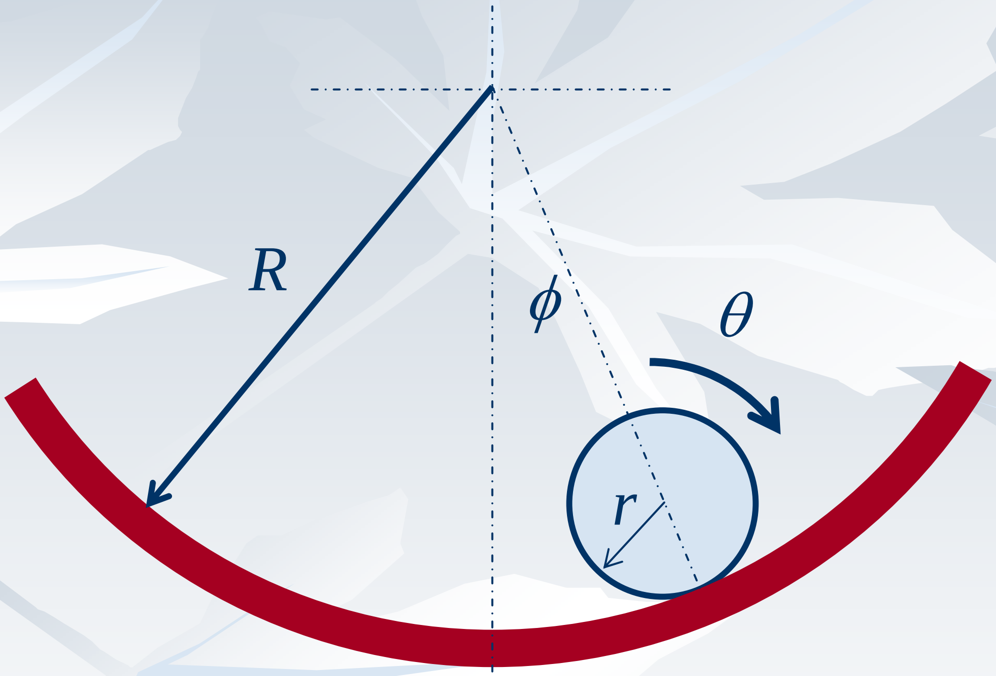
$$md^2\ddot{\theta}+ca^2\dot{\theta}+kb^2\theta-mgd\sin\theta=0$$

$$md^2\ddot{\theta}+ca^2\dot{\theta}+\left(kb^2-mgd\right)\theta=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{kb^2-mgd}{md^2}},\qquad c_c=2\sqrt{m_{eq}k_{eq}}=2\sqrt{md^2\left(kb^2-mgd\right)}$$

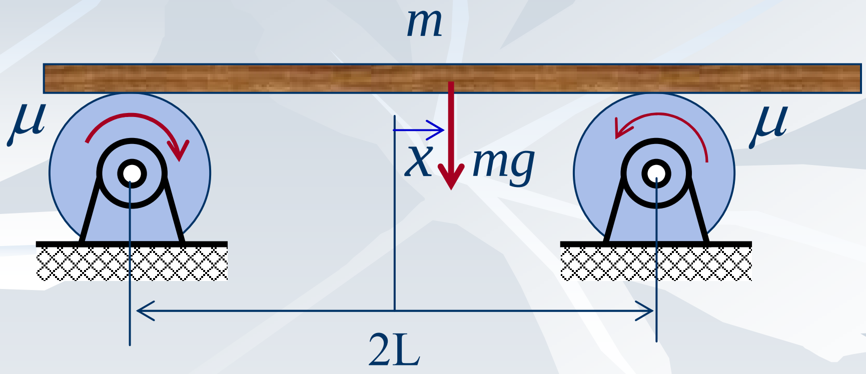
$$\xi=\frac{c_{eq}}{c_c}=\frac{ca^2}{2\sqrt{md^2\left(kb^2-mgd\right)}},\qquad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

# مثال




$$T = \frac{1}{2} J_{?} \dot{\theta}^2 \qquad U = mg\,?$$

# مثال



# روش انرژی برای سیستم داری میرائی

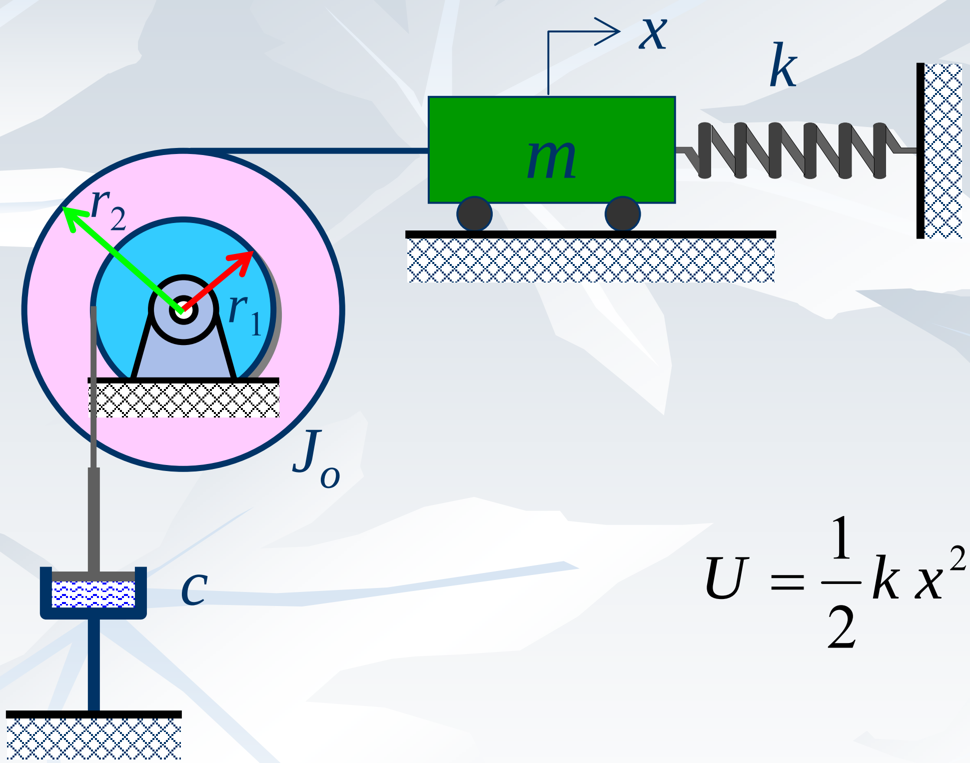
- در یک سیستم ارتعاشی میرا چون نیروی خارجی غیر از وزن و فنر وجود دارد در نتیجه: $\Delta T + \Delta U = W_{1\to 2} = \Delta W$
- و اگر طرفین معادله بر $\Delta t$ تقسیم و $\Delta t$ به صفر میل داده شود:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

- یعنی مجموع نرخ تغییر انرژی پتانسیل و جنبشی معادل توان نیروی اعمالی است. توان نیز برای نیرو و کوپل به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_F = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad P_M = \vec{M}\cdot\vec{\omega} \qquad P = P_F + P_M$$

# روش انرژی برای سیستم داری میرائی




- انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_O \left( \frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[ m + \left( \frac{J_O}{r_2^2} \right) \right] \dot{x}^2$$

- انرژی پتانسیل:

$$U = \frac{1}{2} k\, x^2$$

- توان میراگر:

$$P = \vec{F}_D \cdot \vec{v} = -c\left(r_1\dot{\theta}\right)\left(r_1\dot{\theta}\right) = -c\left( r_1 \frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2 = -c\left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{x}^2$$

# روش انرژی برای سیستم داری میرائی

- لذا:

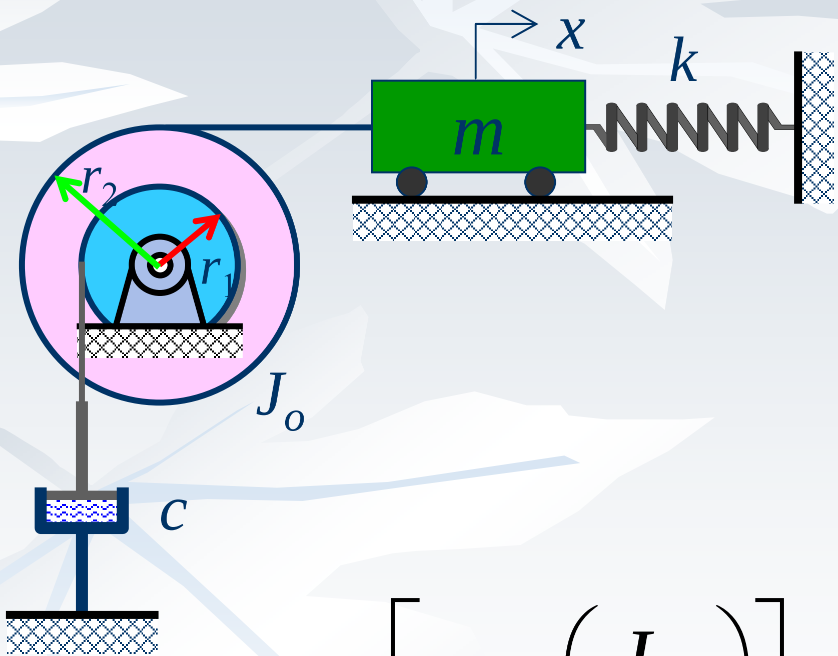
$$\dot{T}+\dot{U}=P$$

$$\dot{T}=\frac{1}{2}\left[m+\left(\frac{J_O}{r_2^2}\right)\right]2\ddot{x}\dot{x}=\left[m+\left(\frac{J_O}{r_2^2}\right)\right]\ddot{x}\dot{x}\qquad \dot{U}=\frac{1}{2}k2x\,\dot{x}=kx\dot{x}$$

$$P=-c\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\dot{x}^2\qquad \dot{T}+\dot{U}=\left[m+\left(\frac{J_O}{r_2^2}\right)\right]\ddot{x}\dot{x}+kx\dot{x}=-c\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\dot{x}^2$$

$$\boxed{\left[m+\left(\frac{J_O}{r_2^2}\right)\right]\ddot{x}+c\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\dot{x}+kx=0}$$

# مثال




- برای مثال قبل اگر فرکانس طبیعی $5Hz$ و $m=10kg$، $J_O=5kg.m^2$، $r_1=10cm$ و $r_2=25cm$ باشند، اگر با یک جابجائی اولیه مشخص شود که بعد از ۱۰ سیکل دامنه ۸۰٪ کاهش پیدا کرده، مطلوب است مقدار $k$ و $c$

$$\left[m+\left(\frac{J_O}{r_2^2}\right)\right]\ddot{x}+c\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\dot{x}+kx=0$$

# حل

$$m_{eq} = \left[ m + \left( \frac{J_O}{r_2^2} \right) \right] = 10 + \frac{5}{0.25^2} = 90\,\text{kg}$$

$$c_{eq} = c\left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 0.16c$$

- فرکانس طبیعی:

$$\omega_n = 2\pi\, f_n = 2\pi 5 = 10\pi = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow \boxed{k_{eq} = 90 \times 100\pi^2 = 88826\, N/m}$$

- کاهش لگاریتمی

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left( \frac{X_1}{X_{n+1}} \right) = \frac{2\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{10} \ln\left( \frac{1}{0.2} \right) = 0.161$$

- چون $\xi$ کوچک است:

$$\delta = 0.161 = 2\pi\,\xi \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{0.161}{2\pi} = 0.0256$$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{0.16c}{2m_{eq}\omega_n} = \frac{0.16c}{2 \times 90 \times 10\pi} = 0.0256 \Rightarrow \boxed{c = 904.8 \approx 905\ \text{N.s/m}}$$

# روش کار مجازی

- وقتی که یک سیستم دینامیکی در حال تعادل دینامیکی باشد، جابجائی مجازی باعث تغییرتی مجازی در انرژیها و کارنیروهای غیر فنر و وزن می شود.

$$\delta T + \delta U = \delta W$$

$$\delta T = \delta\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}\left[m2\dot{x}\delta\dot{x} + J_G 2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}\right]$$

$$= m\ddot{x}\delta x + J_G\ddot{\theta}\,\delta\theta$$

$$\delta U = \delta\left[\frac{1}{2}kx^2 + mgy\right] = kx\delta x + mg\,\delta y$$

$$\delta W = \delta\left[W_{damper} + W_{other}\right] = \delta W_{damper} + \delta W_{other}$$

# روش کار مجازی

- درنتیجه:

$$\delta T + \delta U = \delta W$$

$$m\ddot{x}\,\delta x + J_G\,\ddot{\theta}\,\delta\theta + kx\,\delta x + mg\,\delta y = \delta W_{damper} + \delta W_{other}$$

کارمجازی نیروی اینرسی (انتقالی و دورانی)

کارمجازی نیروی فنر

کارمجازی وزن

کارمجازی نیروی میراگر

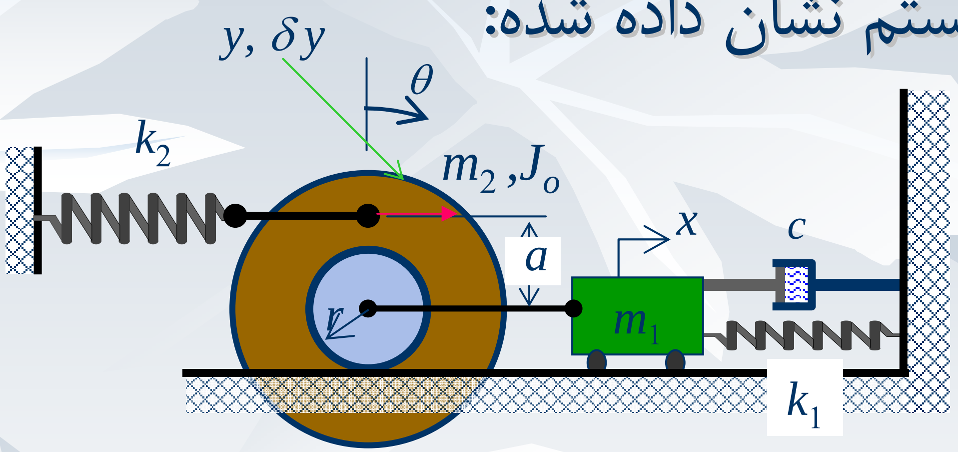
کارمجازی نیروهای دیگر

- که در حالت کلی:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n1} m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \sum_{j=1}^{n2} J_{Gj} \ddot{\theta}_j \delta\theta_j + \sum_{k=1}^{n3} k_k x_k \delta x_k + \sum_{l=1}^{n4} m_l g\, \delta y_l + \sum_{m=1}^{n5} c_m \dot{x}_m \delta x_m = \sum_{r=1}^{n6} F_r \delta x_r}$$

# مثال: روش کار مجازی

- مطلوب است معادله حرکت سیستم نشان داده شده:




$$\sum_{i=1}^{n1} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = m_1 \ddot{x} \delta x + m_2 \ddot{x} \delta x,$$

$$\sum_{j=1}^{n2} J_{Gj} \ddot{\theta}_j \delta \theta_j = J_O \ddot{\theta} \delta \theta$$

$$\sum_{k=1}^{n3} k_k x_k \delta x_k = k_1 x \delta x + k_2 y \delta y$$

$$\sum_{m=1}^{n5} c_m \dot{x}_m \delta x_m = c \dot{x} \delta x$$

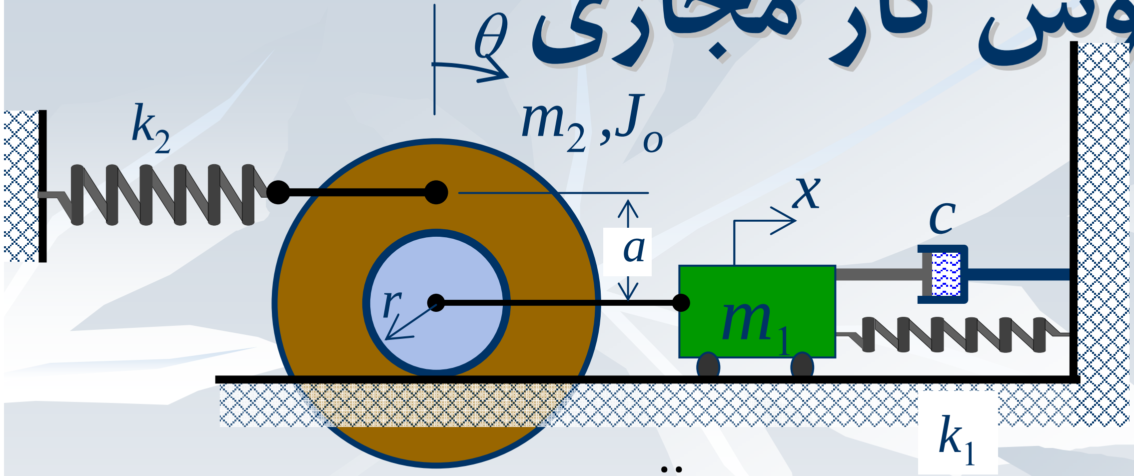
$$\sum_{l=1}^{n4} m_l g \, \delta y_l = 0 \qquad \sum_{r=1}^{n6} F_r \delta x_r = 0$$

روابط سینماتیکی:

$$\theta = \frac{x}{r}, \quad \delta\theta = \frac{\delta x}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{r}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$y = (r+a)\theta = \frac{r+a}{r} x, \quad \delta y = \frac{r+a}{r} \delta x,$$

# مثال: روش کار مجازی




$$m_1\ddot{x}\delta x + m_2\ddot{x}\delta x + J_O\ddot{\theta}\delta\theta + k_1 x\delta x + k_2 y\delta y + c\dot{x}\delta x = 0$$

$$m_1\ddot{x}\delta x + m_2\ddot{x}\delta x + J_O\frac{\ddot{x}}{r}\frac{\delta x}{r} + k_1 x\delta x + k_2\frac{r+a}{r}x\frac{r+a}{r}\delta x + c\dot{x}\delta x = 0$$

$$\left[\left(m_1 + m_2 + \frac{J_O}{r^2}\right)\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k_1 + k_2\left(\frac{r+a}{r}\right)^2\right)x\right]\delta x = 0$$

$$\boxed{\left(m_1 + m_2 + \frac{J_O}{r^2}\right)\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k_1 + k_2\left(\frac{r+a}{r}\right)^2\right)x = 0}$$

# ادامه

$$\underbrace{\left(m_1 + m_2 + \frac{J_O}{r^2}\right)}_{m_{eq}}\ddot{x} + c\dot{x} + \underbrace{\left(k_1 + k_2\left(\frac{r+a}{r}\right)^2\right)}_{k_{eq}}x = 0$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \left(\frac{k_1 + k_2\left(\frac{r+a}{r}\right)^2}{m_1 + m_2 + \frac{J_O}{r^2}}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{c}{2\sqrt{m_{eq}k_{eq}}} = \frac{c}{2\sqrt{\left(m_1 + m_2 + \frac{J_O}{r^2}\right)\left(k_1 + k_2\left(\frac{r+a}{r}\right)^2\right)}}}$$

# شکل استاندارد معادله حرکت

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\xi = \frac{c}{2m}\frac{1}{\omega_n}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \overbrace{2\xi\omega_n}^{c/m}\dot{x} + \overbrace{\omega_n^2}^{k/m}x = 0$$

$$\xi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

# میرائی کلمب (اصطکاک خشک)
# (Coulomb damping)

- براساس قانون اصطکاک کلمب: نیروی لازم برای ایجاد لغزش بین دو جسم در تماس متناسب با نیروی عمودی بین آن دو جسم است.
- بنابراین نیروی F بصورت زیر بدست می آید

$$F = \mu N = \mu W = \mu mg$$

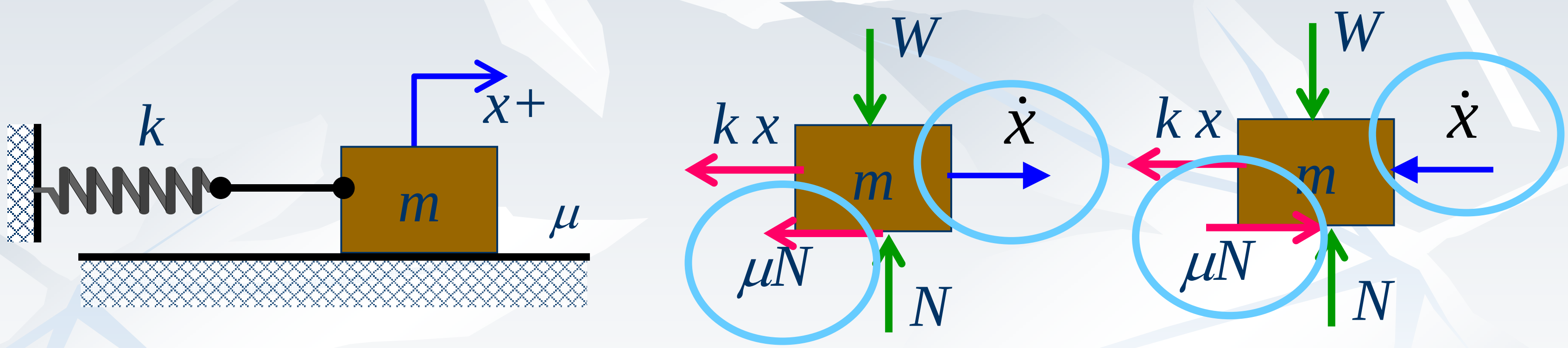
که $N$ نیروی عمودی و $\mu$ ضریب اصطکاک لغزشی یا جنبشی است.

- میرائی کلمب را گاهی *میرائی ثابت* *constant damping* نیز می گویند.

$\mu$ is usu 0.1 for lubricated metal, 0.3 for nonlubricated metal on metal, 1.0 for rubber on metal

# میرائی کلمب

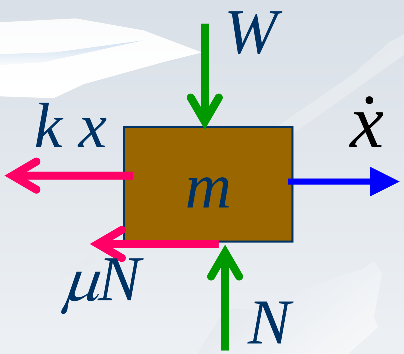
- معادله حرکت:
- یک سیستم یک درجه آزادی با اصطکاک خشک را در نظر بگیرید




- چون نیروی اصطکاک با **جهت سرعت** تغییر می کند نیاز است که دو حالت بررسی گردد.

# میرائی کلمب

- **حالت الف):** وقتی که $x$ مثبت و $dx/dt$ هم مثبت است و زمانیکه $x$ منفی و $dx/dt$ مثبت است.




- معادله حرکت را می توان چنین نوشت (از شکل)

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N$$

- جواب خصوصی و عمومی این معادله:

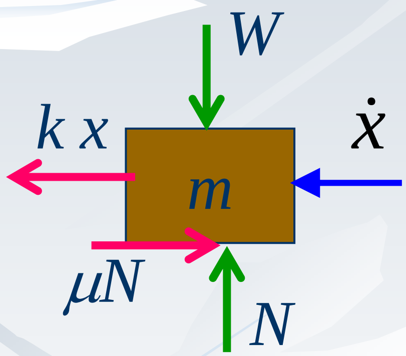
$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \boxed{-\frac{\mu N}{k}}$$

است و

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# میرائی کلمب

- **حالت ب):** وقتی که $x$ مثبت و $dx/dt$ منفی است و زمانیکه $x$ منفی و $dx/dt$ منفی هم است.
- معادله حرکت را می توان چنین نوشت (از شکل)



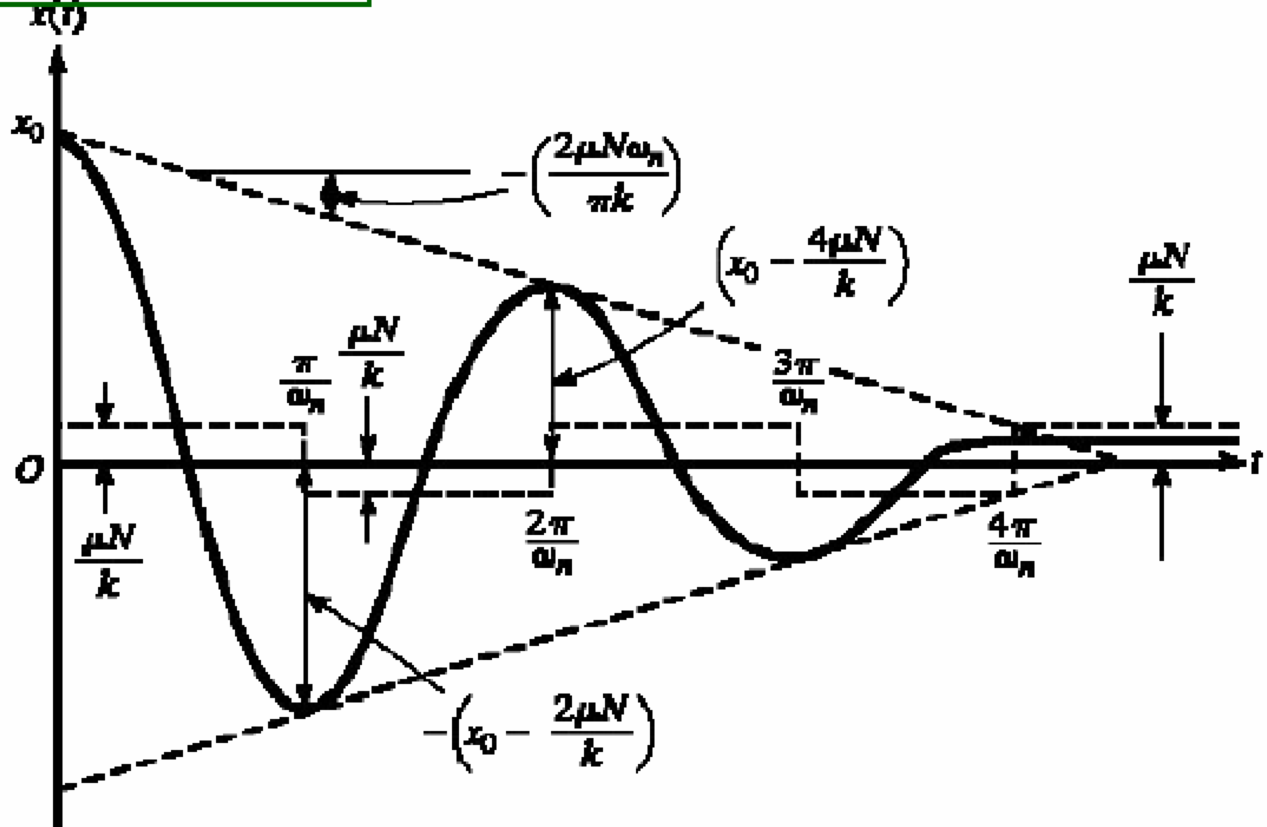

$$m\ddot{x} + kx = \mu N$$

- جواب خصوصی و عمومی این معادله:

$$x(t) = A_3 \cos\omega_n t + A_4 \sin\omega_n t + \boxed{\frac{\mu N}{k}}$$

است

$$x(t) = (x_0 - \mu N / k)\cos\omega_n t + \mu N / k$$




$$x(t) = (x_0 - 3\mu N / k)\cos\omega_n t - \mu N / k$$

Fig. 2.34 Motion of the mass with Coulomb damping

# میرائی کلمب

- با فرض شرط اولیه جابجائی اولیه: $x(0) = x_0$

$$\dot{x}(0) = 0$$

- چون با رها کردن جرم بدون سرعت اولیه سرعت منفی خواهد بود لذا برای $0 \le t \le \pi/\omega_n$:

$$x(t) = A_3 \cos\omega_n t + A_4 \sin\omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

وبا اعمال شرایط اولیه:

$$x_0 = A_3 + \frac{\mu N}{k} \Rightarrow A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}, \; A_4 = 0$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega_n t + \frac{\mu N}{k}} \quad 0 \le t \le \pi/\omega_n$$

# میرائی کلمب

- در $t=\pi/\omega_n$ جرم برای لحظه ای متوقف می شود و جهت سرعت عکس می شود لذا:

$$x(\pi/\omega_n) = -x_0 + \frac{2\mu N}{k}$$

$$\dot{x}(\pi/\omega_n) = 0$$

- در نتیجه طی نیم سیکل دامنه به اندازه $2\mu N/k$ کاهش دامنه داده است و چون سرعت مثبت است برای $\pi/\omega_n \le t \le 2\pi/\omega_n$:

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t - \frac{\mu N}{k}$$

وبا اعمال شرایط اولیه:

$$\pi/\omega_n \le t \le 2\pi/\omega_n$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega_n t - \frac{\mu N}{k}}$$

# میرائی کلمب

- این حرکت تاجائی ادامه می یابد که نیروی بازگرداننده فنر قادر به مقابله با نیروی اصطکاک نباشد، یعنی: $x \le \mu N / k$
- لذا چون در هر نیم سیکل کاهش دامنه معادل $2\mu N/k$ است لذا می توان تعداد نیم سیکل $(r)$ که سیستم ارتعاش می کند تا متوقف شود را بدست آورد:

$$x_0 - r\frac{2\mu N}{k} \le \frac{\mu N}{k} \quad \Rightarrow \quad r \ge \frac{kx_0}{2\mu N} - \frac{1}{2}$$

# میرائی کلمب

- مشخصه های سیستم با میرائی کلمب:
  - معادله حرکت غیر خطی است، در حالیکه در میرائی ویسکوز معادله خطی است.
  - فرکانس طبیعی پاسخ ارتعاش نسبت به سیستم نامیرا تغییری نکرده در حالیکه در میرائی ویسکوز کاهش می یابد
  - حرکت دارای نوسان است درحالیکه در میرائی ویسکوز می تواند نوسان نداشته باشد.
  - بعد از چند نوسان سیستم متوقف می شود، در حالیکه در میرائی ویسکوز از نظر تئوری حرکت تا بینهایت ادامه دارد

# میرائی کلمب

- مشخصه های سیستم با میرائی کلمب:
  - در میرائی کلمب دامنه ارتعاش خطی کاهش می یابد، میرائی ویسکوز دامنه بصورت نمائی کاهش می یابد.
  - در هر سیکل دامنه ارتعاش $4\mu N/k$ کاهش می یابد که می توان از آن شیب پوش منحنی را پیدا کرد. لذا

$$x_m - x_{m+1} = \frac{4\mu N}{k},\ t_m - t_{m+1} = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$Slope = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\mu N\omega_n}{\pi k}$$

# میرائی کلمب: روش انرژی

- با استفاده از کار نیروی اصطکاک در یک نیم سیکل می توان کاهش دامنه در یک نیم سیکل را بدست آورد.
- کار نیروی اصطکاک در یک نیم سیکل:

$$W_F = -F\Delta x = -\mu N\left(x_m + x_{m+0.5}\right)$$

- تغییر در انرژی جنبشی صفر و تغییر در انرژی پتانسیل:

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\left(x_{m+0.5}^2 - x_m^2\right) = \frac{1}{2}k\left(x_{m+0.5} - x_m\right)\left(x_{m+0.5} + x_m\right)$$

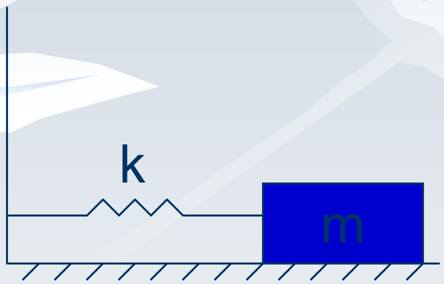
$$\Delta U + \Delta T = W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\left(x_{m+0.5} - x_m\right)\left(x_{m+0.5} + x_m\right) = -\mu N\left(x_m + x_{m+0.5}\right)$$

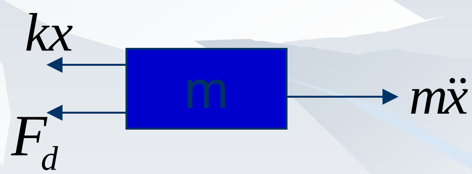
$$\left(x_m - x_{m+0.5}\right) = \frac{2\mu N}{k}$$

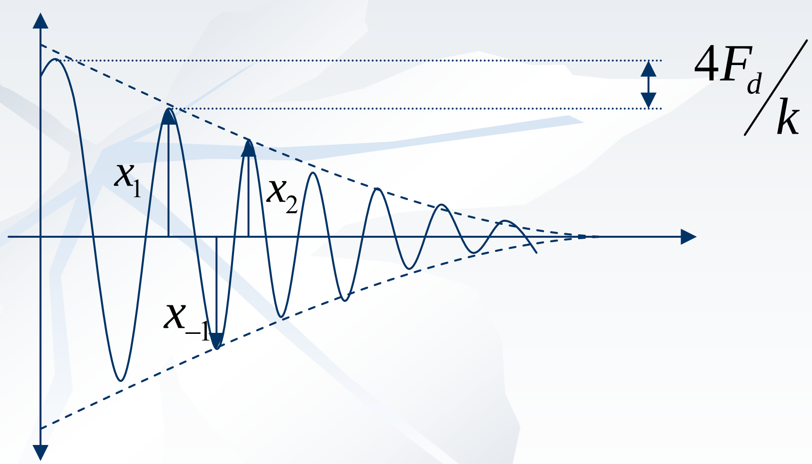
# Coulomb Damping

$$F_d = \mu N$$

where $\mu$ is the coefficient of friction, N is the normal force




$$\frac{1}{2}k\left(x_1^2 - x_{-1}^2\right) - F_d\left(x_1 + x_{-1}\right) = 0$$

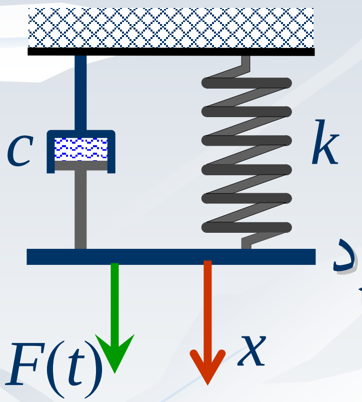
$$\frac{1}{2}k\left(x_1 - x_{-1}\right) = F_d \rightarrow x_1 - x_{-1} = \frac{2F_d}{k}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{4F_d}{k}$$

# مثال

# کار انجام شدۀ فنر و میراگر

- هدف بدست آوردن منحنی نیرو تغییرمکان و کار انجام شده است.
- فرض کنید سیستم فنر و میراگری به یک میله بدون وزن متصل شده اند.




- در اثر جابجائی $x$ نیروئی در فنر و میراگر ایجاد می شود

$$F(t) = kx + c\dot{x}$$

- اگر حرکت هارمونیک فرض شود یعنی: $x(t)=X\sin(\omega t+\phi)$

$$F(t) = kX\sin(\omega t+\phi) + c\omega X\cos(\omega t+\phi)$$

# کار انجام شدهٔ فنر و میراگر

- در نتیجه:

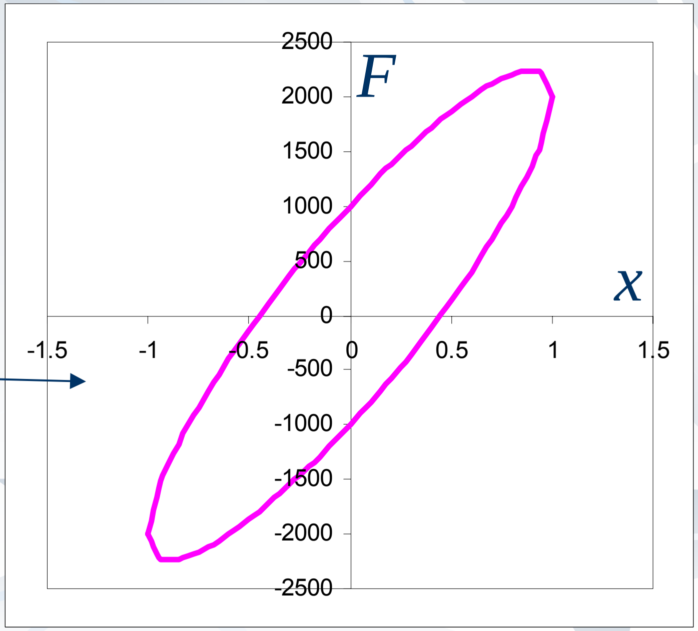
$$F(t) = kX\sin(\omega t+\phi) \pm c\omega\sqrt{X^2 - X^2\sin^2(\omega t+\phi)}$$

$$\boxed{F(t) = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2}}$$

$$F^2 + k^2x^2 = c^2\omega^2\left(X^2 - x^2\right)$$

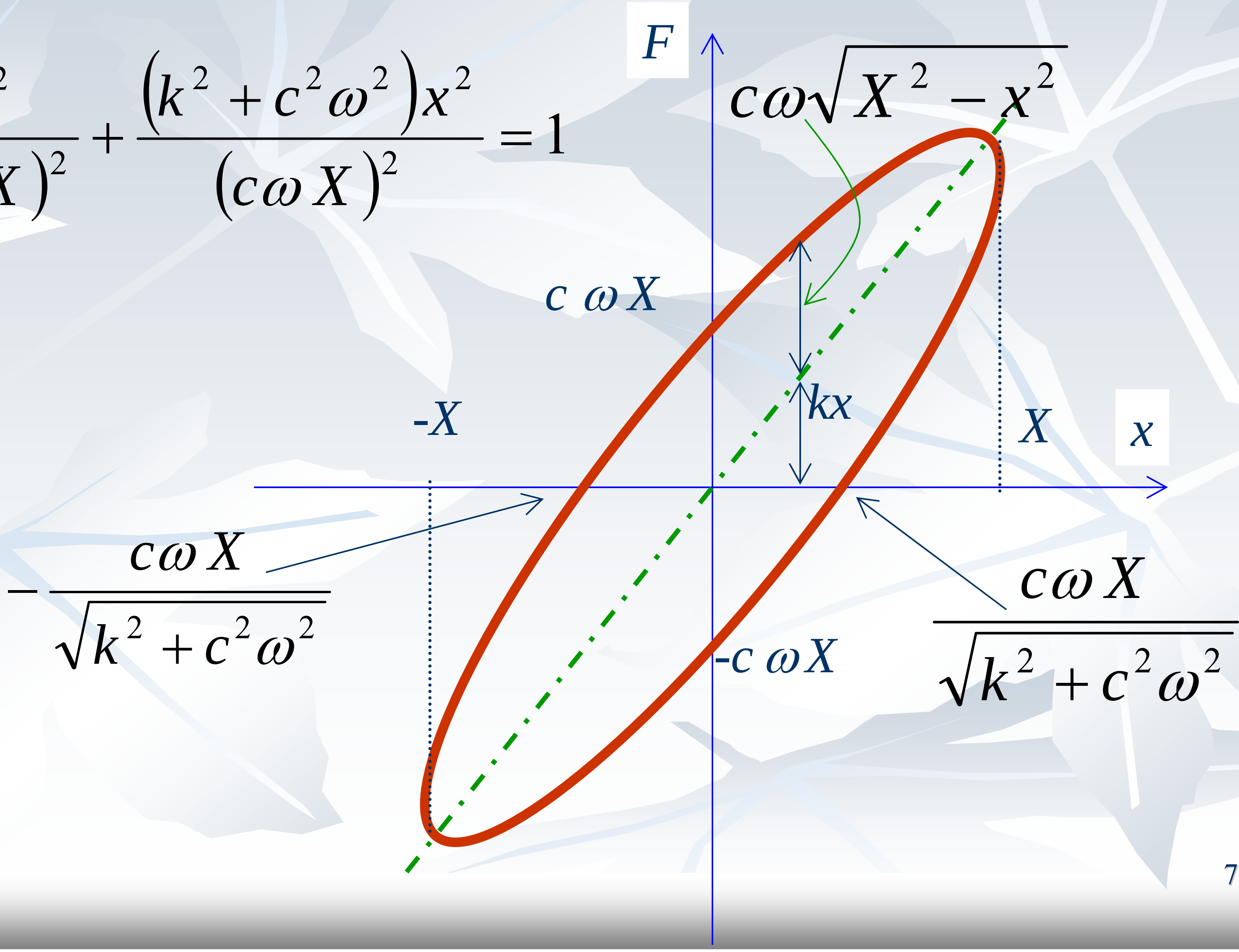
$$\frac{F^2}{(c\omega X)^2} + \frac{\left(k^2 + c^2\omega^2\right)x^2}{(c\omega X)^2} = 1$$

معادله بیضی



# کار انجام شدهٔ فنر و میراگر

$$\frac{F^2}{(c\omega X)^2}+\frac{\left(k^2+c^2\omega^2\right)x^2}{(c\omega X)^2}=1$$



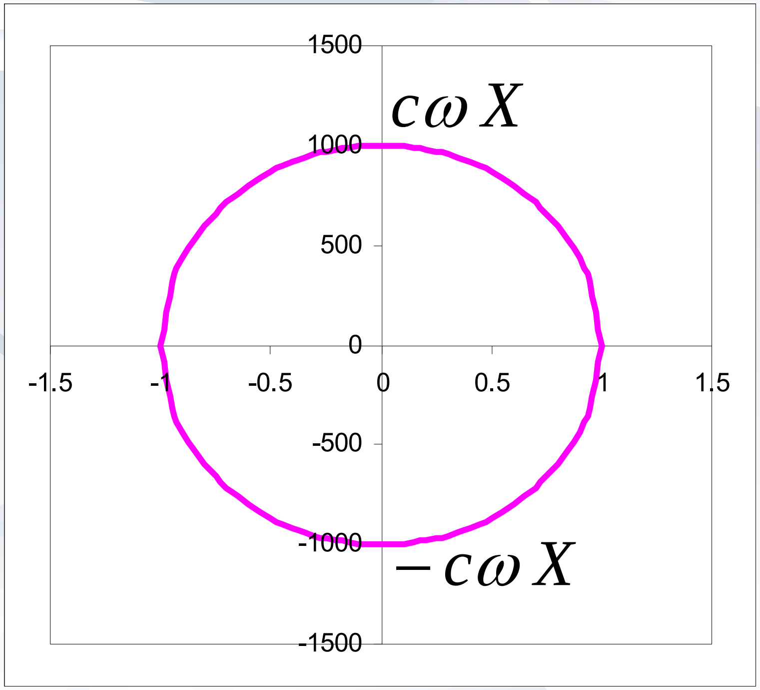
# کار انجام شدهٔ فنر و میراگر

- اگر میراگر وجود نداشته باشد: $F=kx$ که معادله خط با شیب k است
- اگر فنر وجود نداشته باشد:

$$\frac{F^2}{(c\omega X)^2}+\frac{x^2}{X^2}=1$$

- که معادله یک بیضی با ابعاد:

$$a = X, \quad b = c\omega X$$



# کار انجام شدهٔ فنر و میراگر

- برای فنر:

$$W_S = \oint F_S\, dx = \int_0^{\tau} F_S \dot{x} dt = \int_0^{2\pi/\omega} kX \sin(\omega t+\phi)\omega X \cos(\omega t+\phi) dt = 0$$

- برای میراگر:

$$W_D = \oint P_D\, dt = \int_0^{\tau} F_D \dot{x} dt = \int_0^{\tau} c\dot{x}^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} c\omega^2 X^2 \cos^2(\omega t+\phi) dt = c\omega^2 X^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(u) \frac{du}{\omega}$$

$$= \frac{c\omega X^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du = \frac{c\omega X^2}{2} \left[ u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{2\pi} = c\pi\omega X^2$$

- مساحت بیضی:

$$\boxed{\pi ab = \pi c\omega X^2}$$

# کار انجام شدهٔ فنر و میراگر

- برای فنر و میراگر:

$$W = W_S + W_D = c\pi\omega X^2$$

- چون فنر مصرف کننده انرژی نیست.

# حلقه هیسترزس

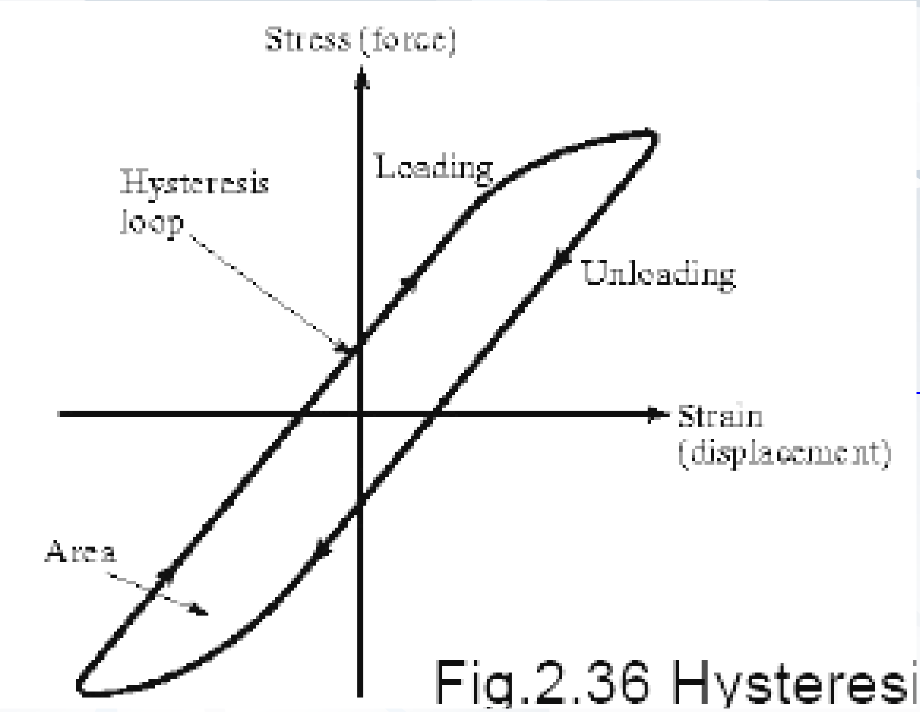
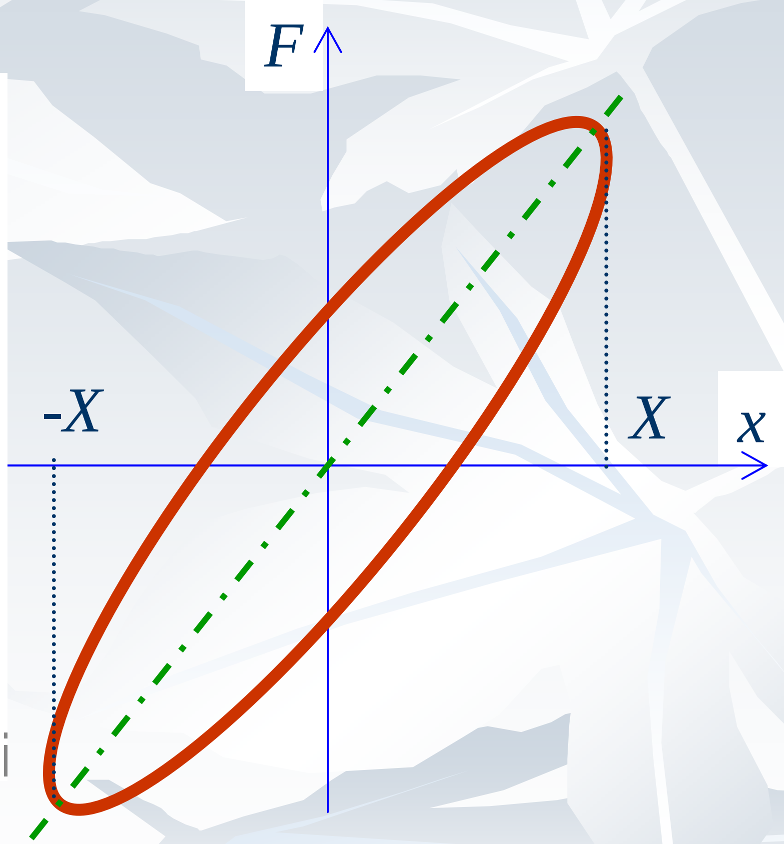
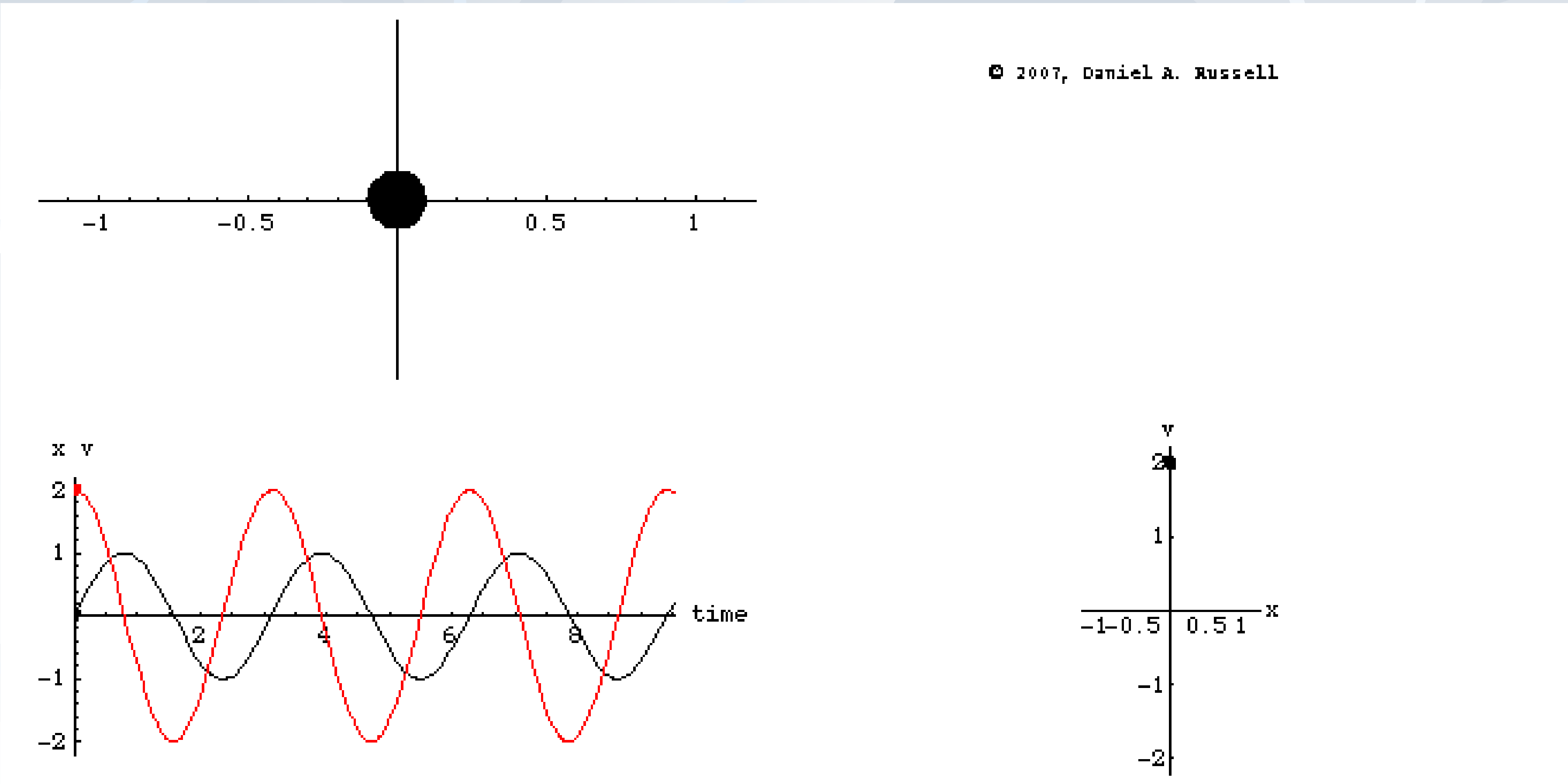


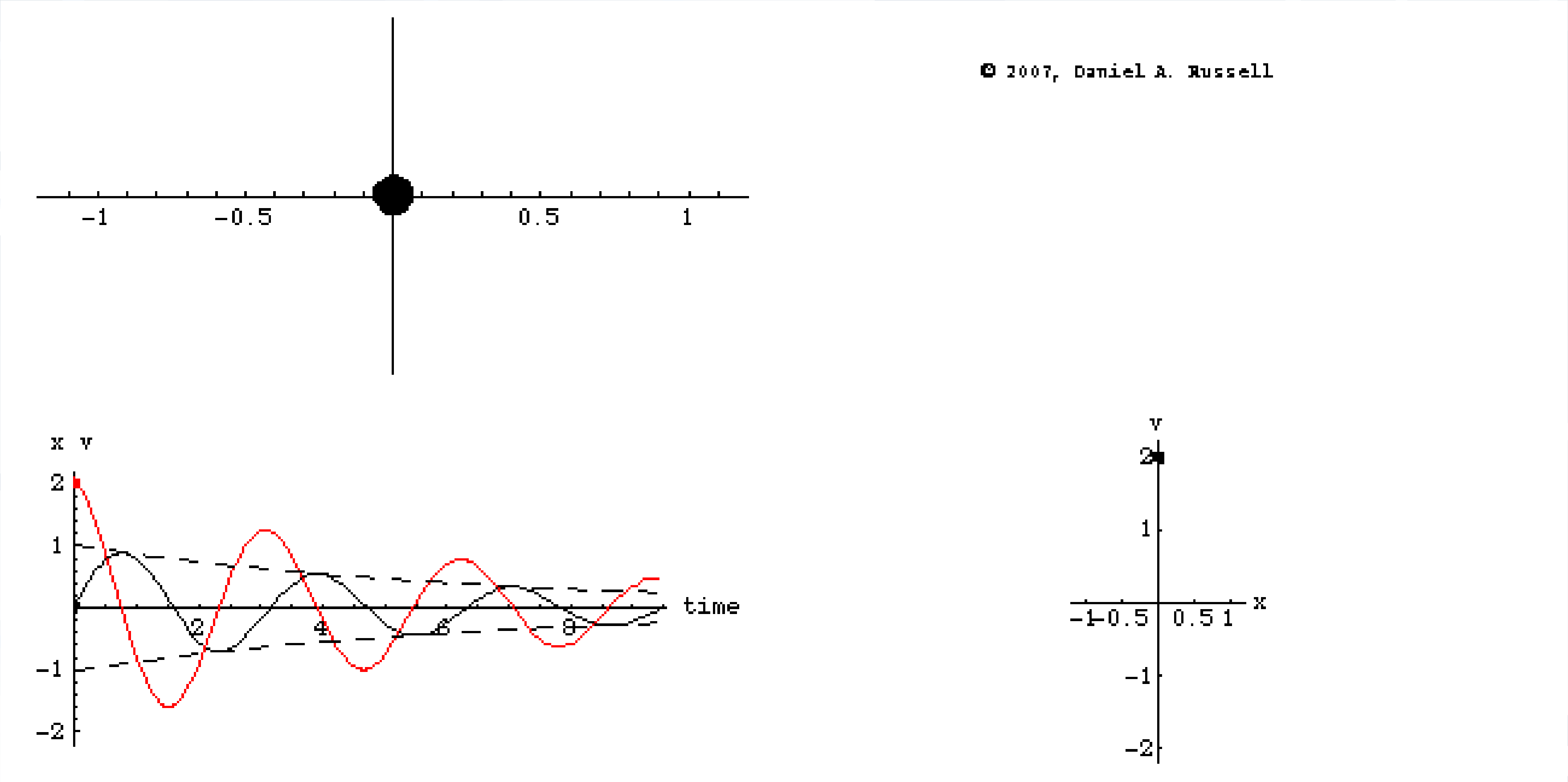

Fig.2.36 Hysteresi



# سرعت جابجائی سیستم نامیرا



# سرعت جابجائی سیستم میرا



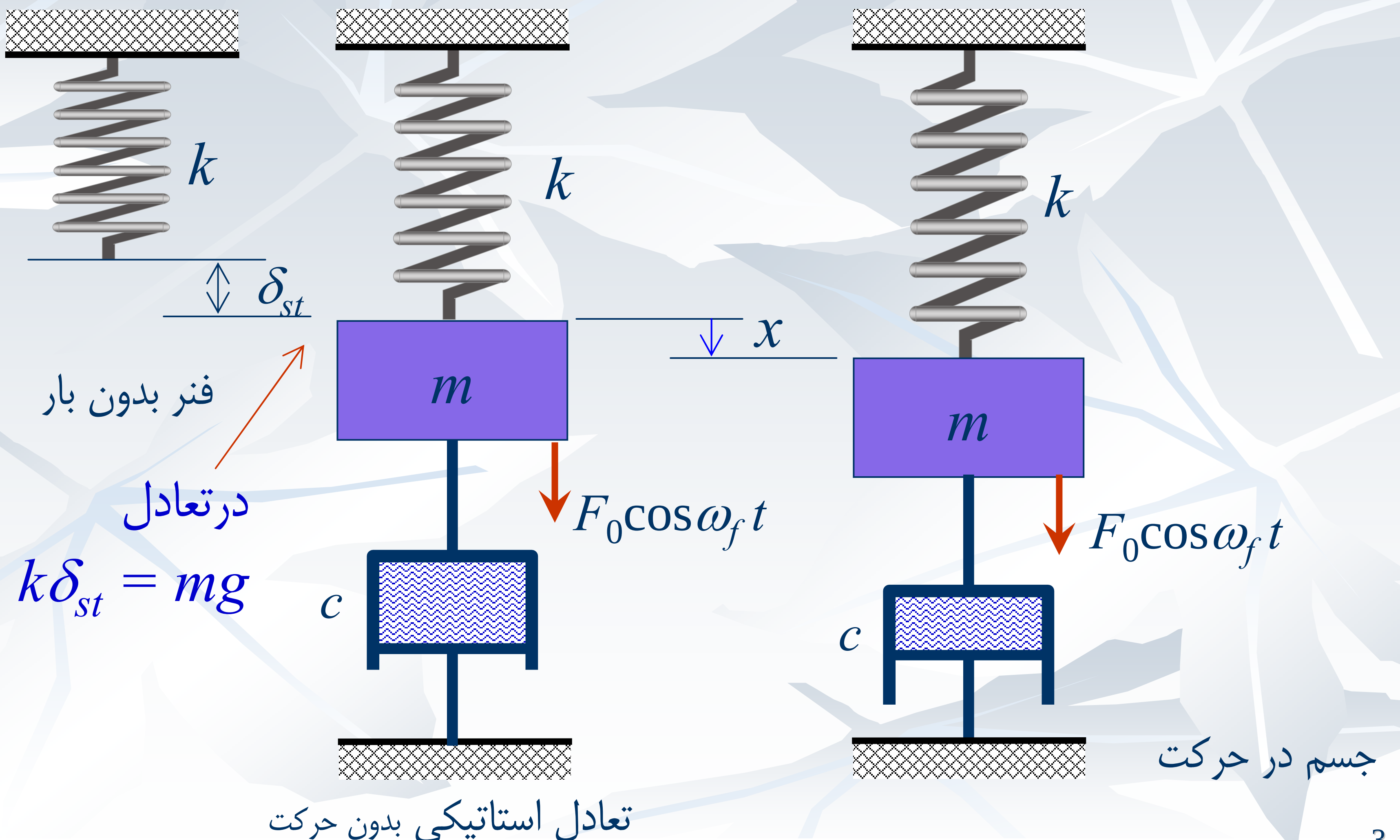
# ارتعاشات مکانیکی ۵
# ارتعاش اجباری با تحریک هارمونیک

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

# مقدمه

- در سیستم های بحث شده قبلی، بعد از اعمال شرایط اولیه انرژی به سیستم اضافه نمی شود.
- حال انرژی یا **نیرو** به سیستم اضافه می شود تا ارتعاشات ادامه پیدا کند
- مفاهیم مهم:
  - نیرو اجباری (Forcing Force)
  - جابجائی اجباری (Forcing displacement)
  - تشدید (Resonance)
  - ضریب بزرگنمائی (Magnification factor)
  - زاویه فاز (Phase angle)

# سیستم ارتعاشی با نیروی اجباری




درتعادل

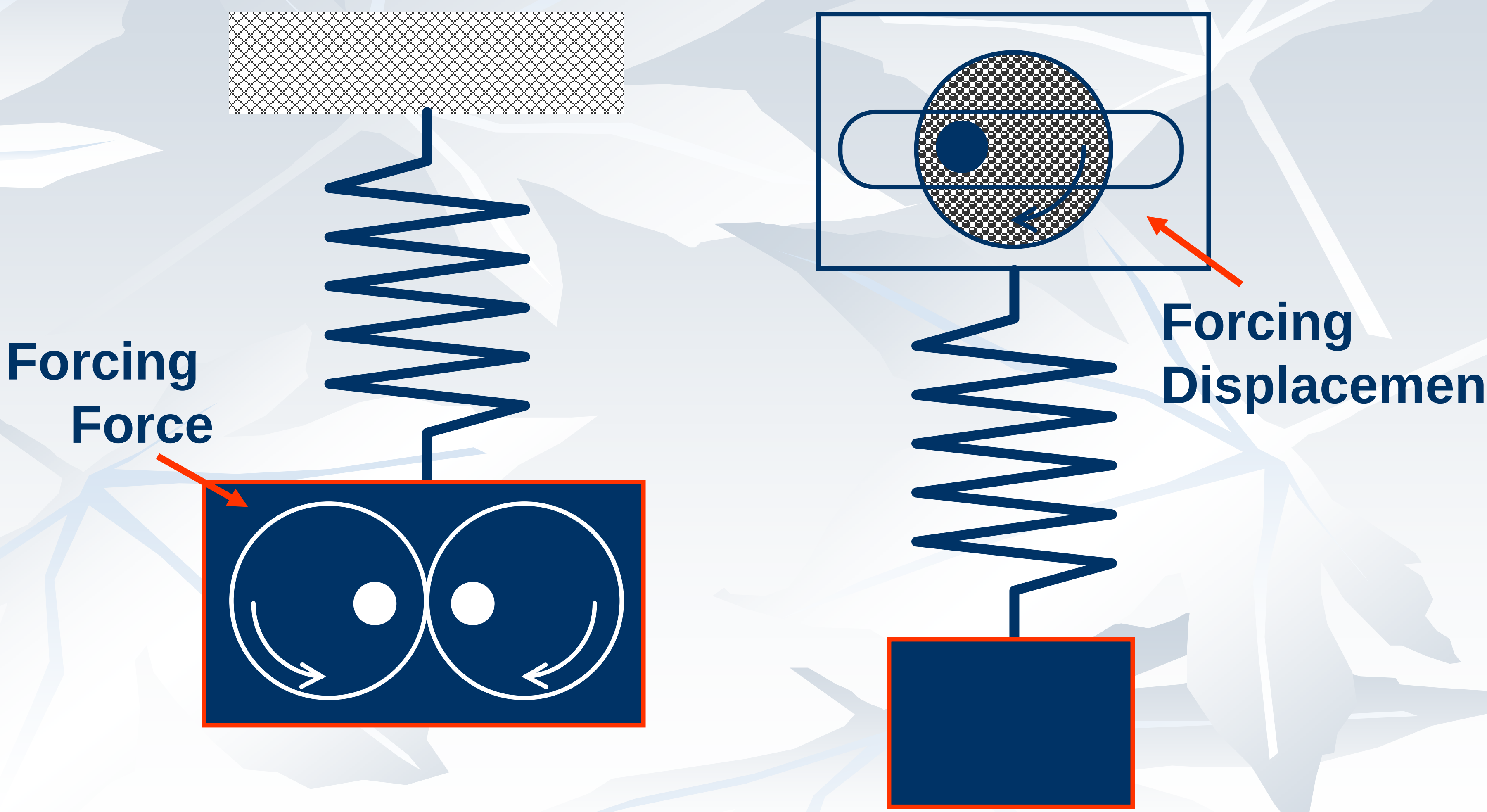
$$k\delta_{st} = mg$$

# چرا نیروی با تابع هارمونیک (کسینوسی)؟

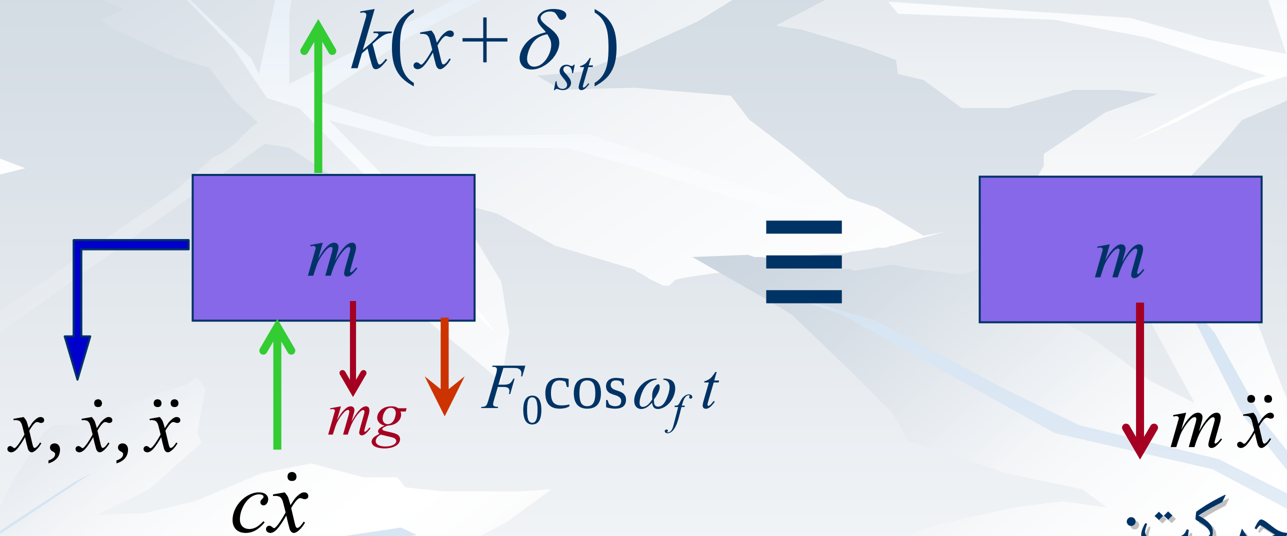
$$F_0 \cos\omega_f t$$

- در بسیاری از موارد بکاربرده می شود:
  - سیستمهای دورانی
  - تحریک بوسیله یک سیستم ارتعاشی دیگر
  - تحریک بوسیله تابع موج (زلزله، جریان سیال)
- اگر هم تابع هارمونیک نباشد، می توان:
  - از سری فوریه می توان برای نمایش توابع دیگر استفاده کرد
  - برای هر تابع هارمونیکی پاسخ را بدست آورد
  - از برهم نهش پاسخها پاسخ به تابع دلخواه بدست می آید.

# نیروی اجباری و جابجائی اجباری



# دیاگرام آزاد برای نیروی اجباری




- معادله حرکت:

$$+\downarrow \sum F: \quad mg - c\dot{x} - k\left(x+\delta_{st}\right) + F_0 \cos\omega_f t = m\ddot{x}$$

$$mg = k\delta_{st}$$

$$\boxed{-c\dot{x} - kx + F_0 \cos\omega_f t = m\ddot{x}}$$

# معادله حرکت با نیروی اجباری

$$-c\dot{x} - kx + F_0 \cos\omega_f t = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega_f t}$$

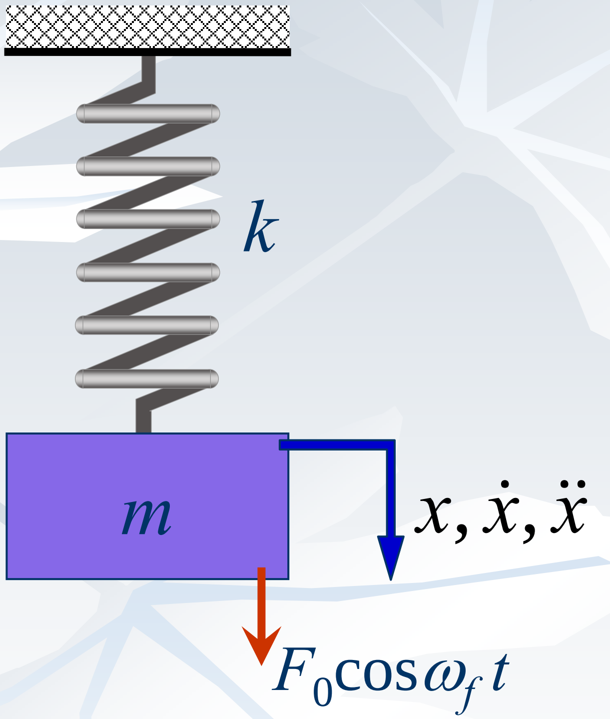
- که در شکل استاندارد نیز:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t}$$

- ابتدا به بررسی سیستم بدون میرائی پرداخته می شود. $c=\xi=0$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F_0 \cos\omega_f t}$$

# تحریک هارمونیک بدون میرائی




- سیستم جرم و فنری را که نیروی هارمونیک $F_0 \cos\omega_f t$ (یا هرنیروی هارمونیک دیگر) به آن اعمال می شود درنظر بگیرید.
- $\omega_f$ فرکانس نیروی تحریک است.
- $F_0$ دامنه نیروی تحریک
- معادله حرکت در شکل استاندارد:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \cos\omega_f t \qquad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- این معادله دارای دو جواب عمومی (همگن) و جواب خصوصی است:
- جواب عمومی: جواب ارتعاش آزاد است:

$$x_g(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

که $A$ و $B$ مقادیر ثابت می باشند

- جواب خصوصی به صورت مقابل فرض می شود که باید در معادله صدق کند:

$$x_p(t) = X\cos(\omega_f t)$$

# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- در جواب خصوصی لازم است که دامنه $X$ بدست آید:

$$x_p(t) = X\cos\left(\omega_f t\right)$$

$$\overbrace{-\omega_f^2 X\cos\omega_f t}^{\ddot{x}_p} + \overbrace{\omega_n^2 X\cos\omega_f t}^{\omega_n^2 x_p} = f_0\cos\omega_f t$$

- که باحل آن برای $X$

$$X = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}$$

- در نتیجه جواب خصوصی

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\cos\left(\omega_f t\right)$$

# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- ترکیب جواب خصوصی وعمومی:

$$x(t) = \underbrace{\frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\cos(\omega_f t)}_{x_p(t)} + \underbrace{A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)}_{x_g(t)}$$

- ثابتهای انتگرالگیری A و B با اعمال شرایط مرزی بدست می آید.

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\cos(\omega_f t) + A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_f f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\sin(\omega_f t) - \omega_n A\sin(\omega_n t) + \omega_n B\cos(\omega_n t)$$

# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- ثابتهای انتگرالگیری $A$ و $B$ با اعمال شرایط مرزی بدست می آید.

$$x_0 = x(0) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} + A \quad \Rightarrow \boxed{A = x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}}$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n B \qquad \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_n}}$$

- در نتیجه:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\cos(\omega_f t) + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\right)\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\left[\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)\right] + x_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

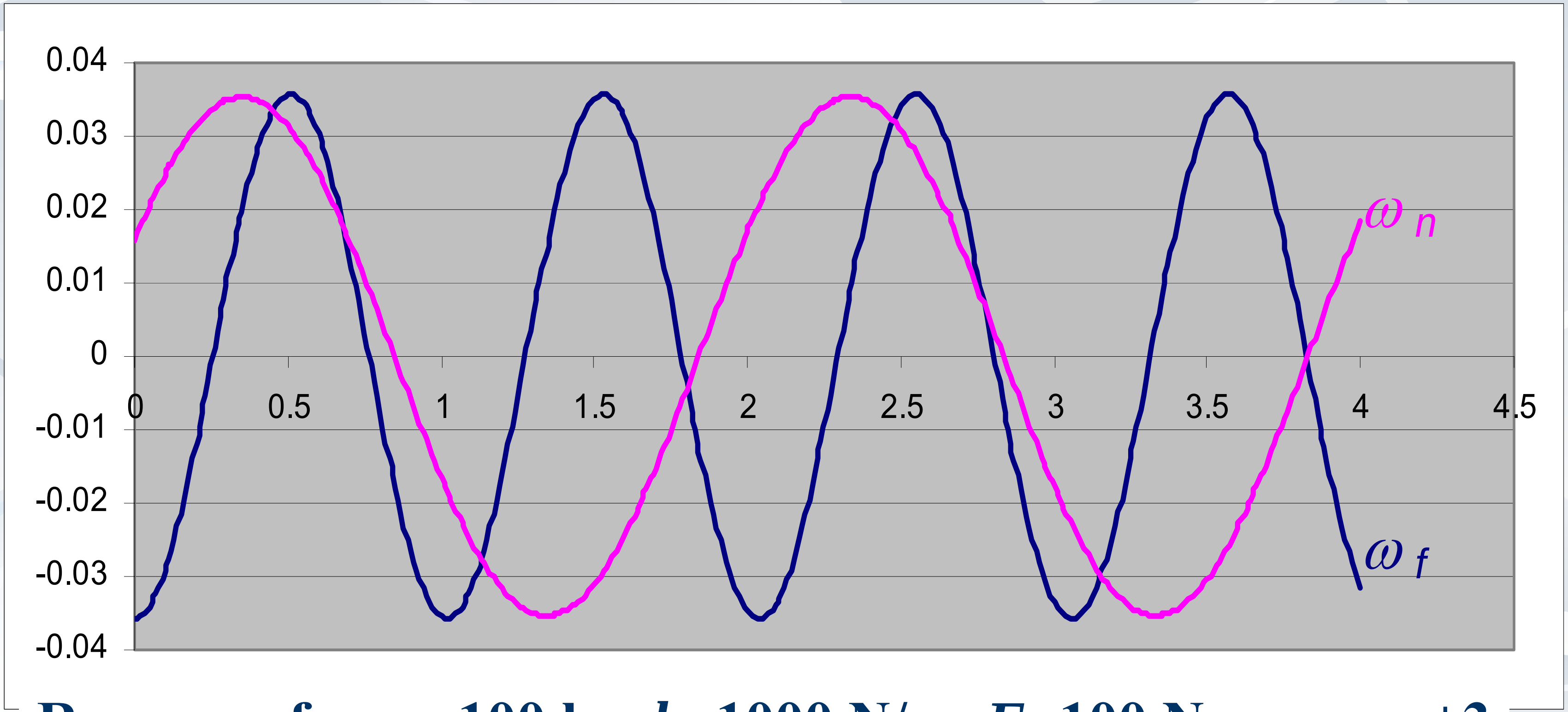
# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- این پاسخ:
  - در هردو فرکانس طبیعی $\omega_n$ و فرکانس تحریک $\omega_f$ ارتعاش می کند.
  - زمانی که دامنه ارتعاش بینهایت می شود (تشدید)
  - حتی اگر شرایط اولیه معادل صفر است هردو فرکانس موجودند

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\left[\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)\right] + x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

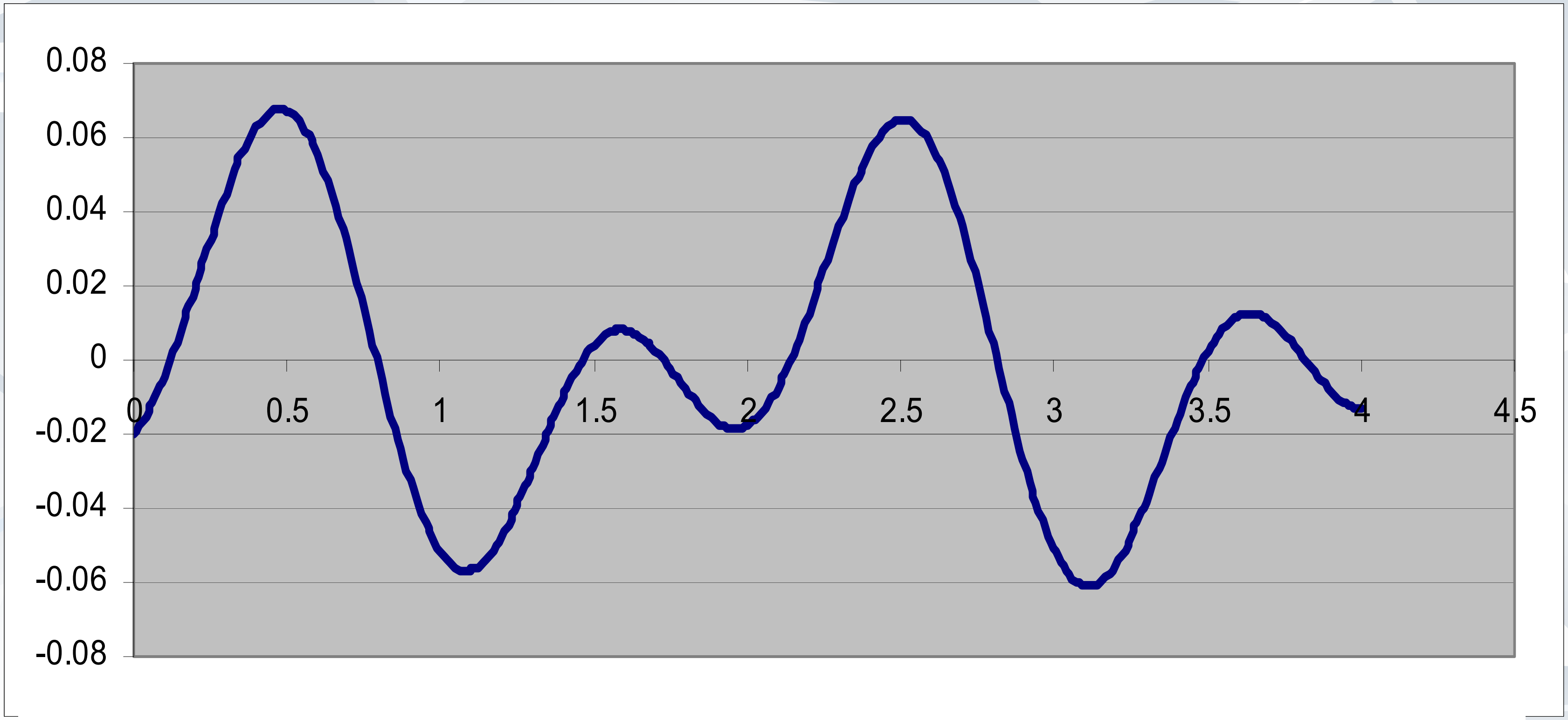
- پاسخ بافرکانس تحریک و فرکانس طبیعی




**Response for *m*=100 kg, *k*=1000 N/m, *F*=100 N, $\omega_f = \omega_n + 3$**
**$v_0$=0.1m/s and $x_0$= -0.02 m.**

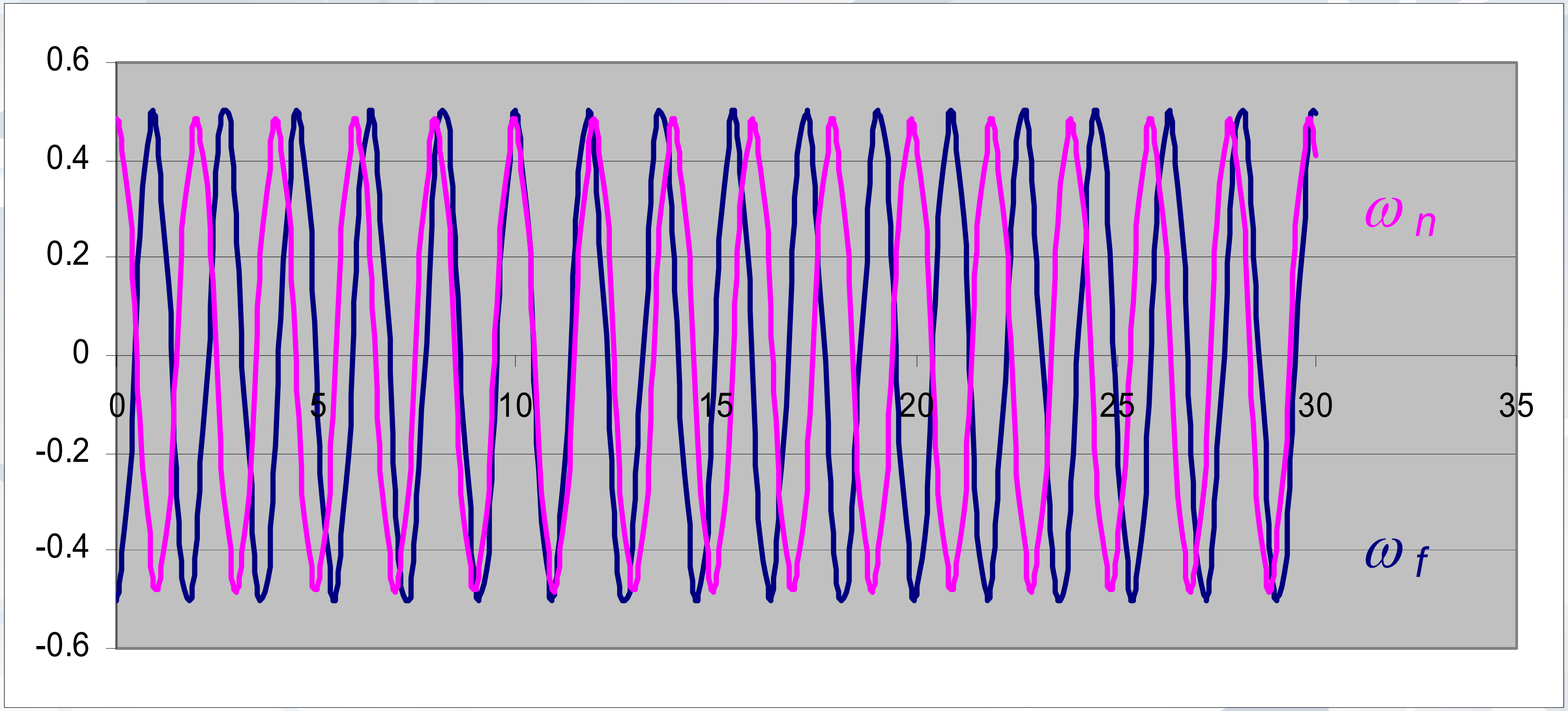
# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- پاسخ کلی سیستم که مشخصاً دارای دو فرکانس متفاوت است




**Response for *m*=100 kg, *k*=1000 N/m, *F*=100 N, $\omega_f = \omega_n + 3$**
**$v_0$=0.1m/s and $x_0$= -0.02 m.**

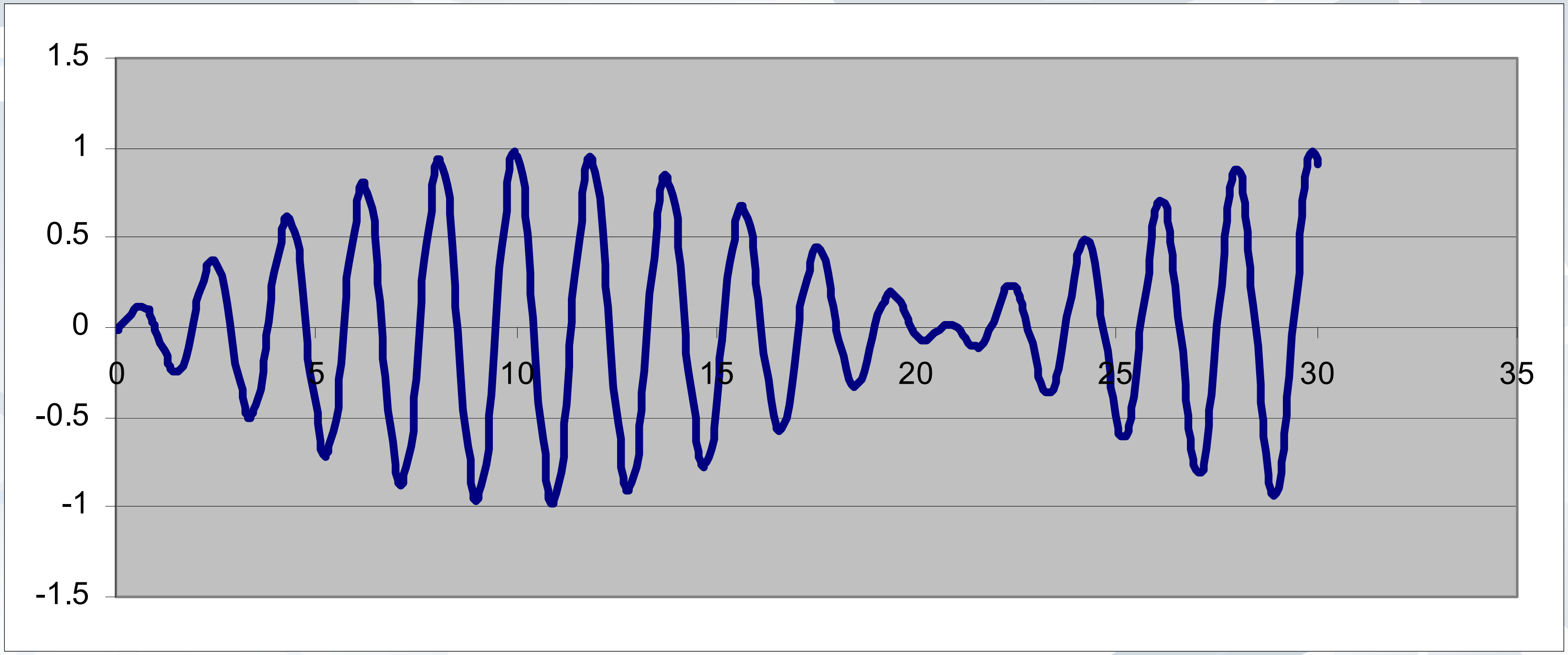
# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک




**Response for *m*=100 kg, *k*=1000 N/m, *F*=100 N, $\omega_f = \omega_n + 0.3$ $v_0$=0.1m/s and $x_0$= -0.02 m.**

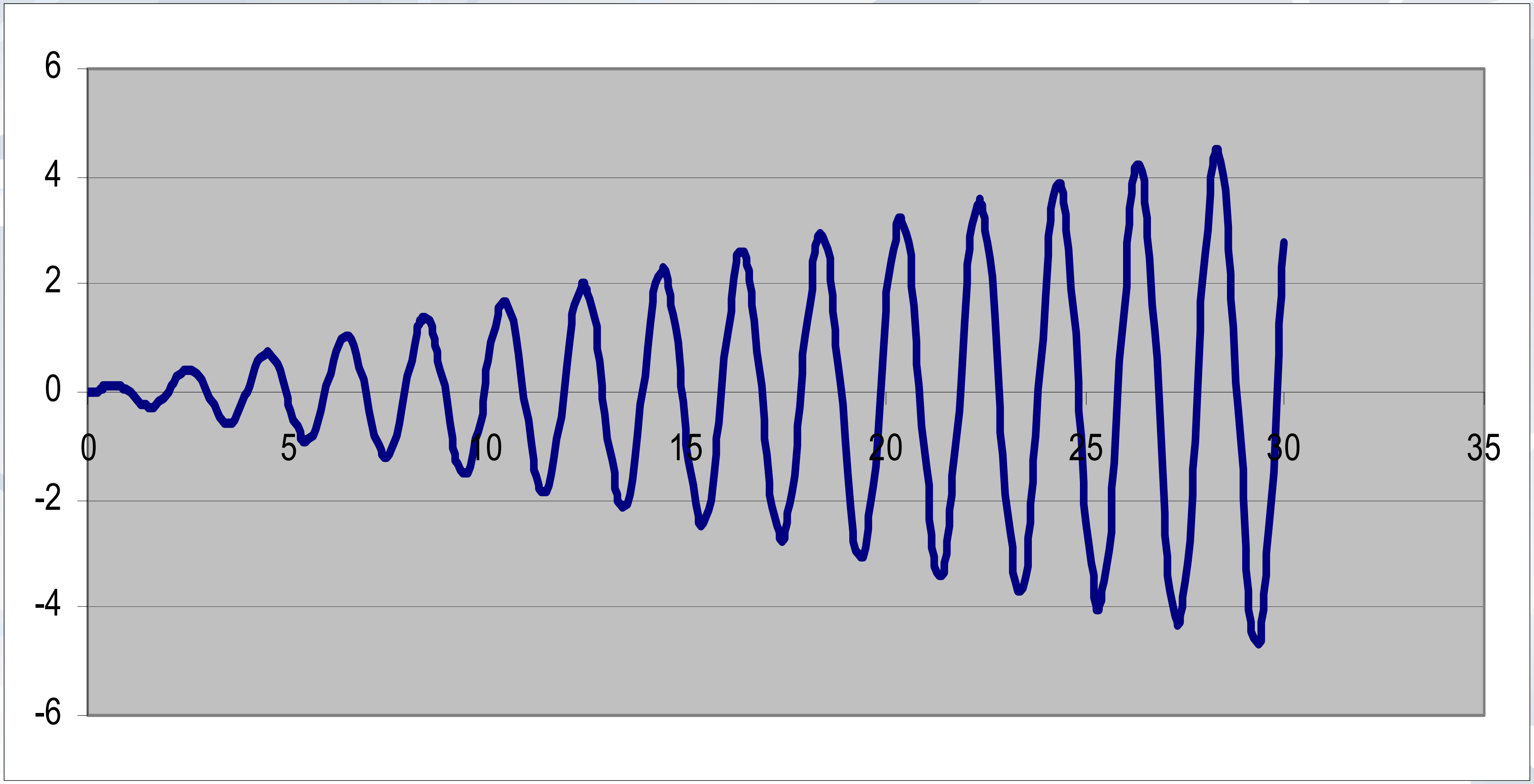
# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

- پاسخ کلی سیستم




**Response for $m$=100 kg, $k$=1000 N/m, $F$=100 N, $\omega_f = \omega_n + 0.3$ $v_0$=0.1m/s and $x_0$= -0.02 m.**

# پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک




**Response for $m$=100 kg, $k$=1000 N/m, $F$=100 N, $\omega_f \approx \omega_n$**
**$v_0$=0.1m/s and $x_0$= -0.02 m.**

# شرایط خاص جواب

- بافرض شرایط اولیه صفر:

$$x(t)=\frac{f_0}{\omega_n^2-\omega_f^2}\left[\cos\left(\omega_f t\right)-\cos\left(\omega_n t\right)\right]$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$x(t)=\frac{2f_0}{\omega_n^2-\omega_f^2}\left[\sin\left(\frac{\omega_f+\omega_n}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_n-\omega_f}{2}t\right)\right]$$

- حال اگر $\omega_n-\omega_f=2\varepsilon$ مقدار کوچکی باشد و $\omega_n+\omega_f=2\omega_n$ باشد آنگاه:

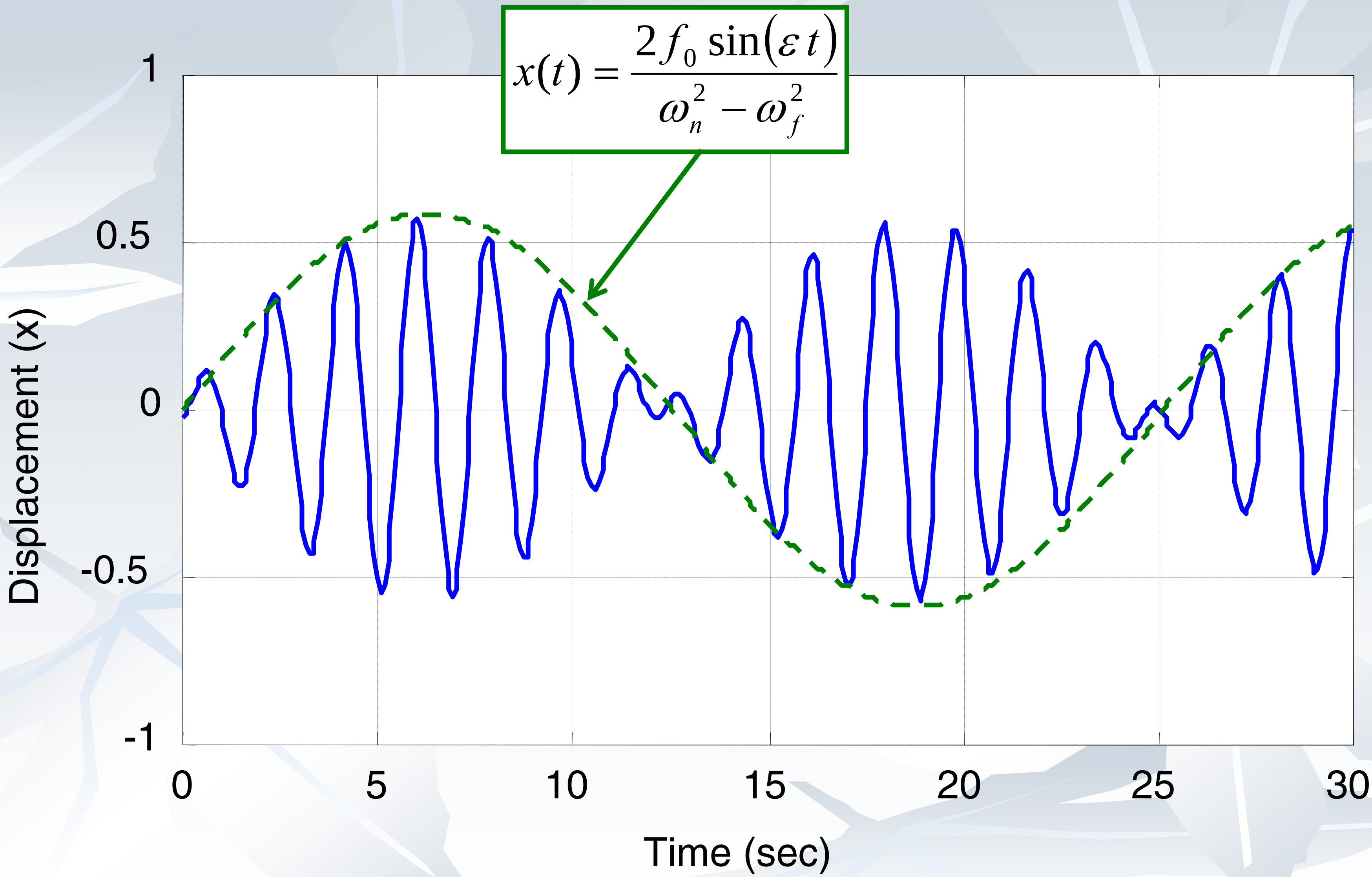
$$x(t)=\frac{2f_0\sin\left(\varepsilon t\right)}{\omega_n^2-\omega_f^2}\left[\sin\left(\omega_n t\right)\right]$$

# شرایط خاص جواب (تپش)

- در این حالت تپش یا ضربان اتفاق می افتد و دامنه به صورت سینوسی کم و زیاد می شود.
- اگر $\omega_f \to \omega_n$ در نتیجه $\varepsilon$ عدد بسیار کوچکی است و در نتیجه سینوس زاویه کوچک با خود آن برابر است.

$$x(t) = \frac{2f_0 \sin(\varepsilon t)}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\left[\sin(\omega_n t)\right] = \frac{2f_0(\varepsilon t)}{4\omega_n \varepsilon}\left[\sin(\omega_n t)\right]$$

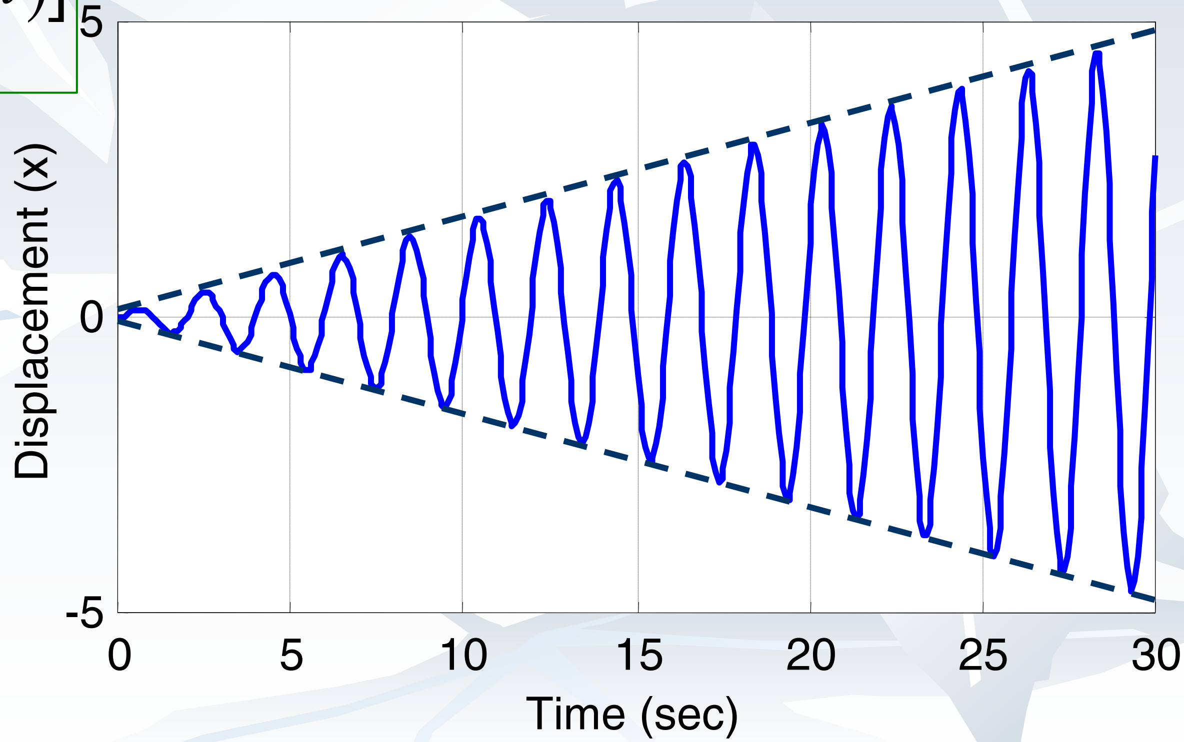
$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{2\omega_n} t\left[\sin(\omega_n t)\right]}$$


$x(t) = \dfrac{2 f_0 \sin(\varepsilon t)}{\omega_n^2 - \omega_f^2}$
Displacement (x)
Time (sec)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
25
30

# شرایط خاص جواب (تشدید)

- این حالت را تشدید یا رزونانس گویند که دامنه بصورت خطی بسمت بینهایت میل می کند

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_n} t\left[\sin(\omega_n t)\right]$$



# مقایسه ارتعاش آزاد و اجباری

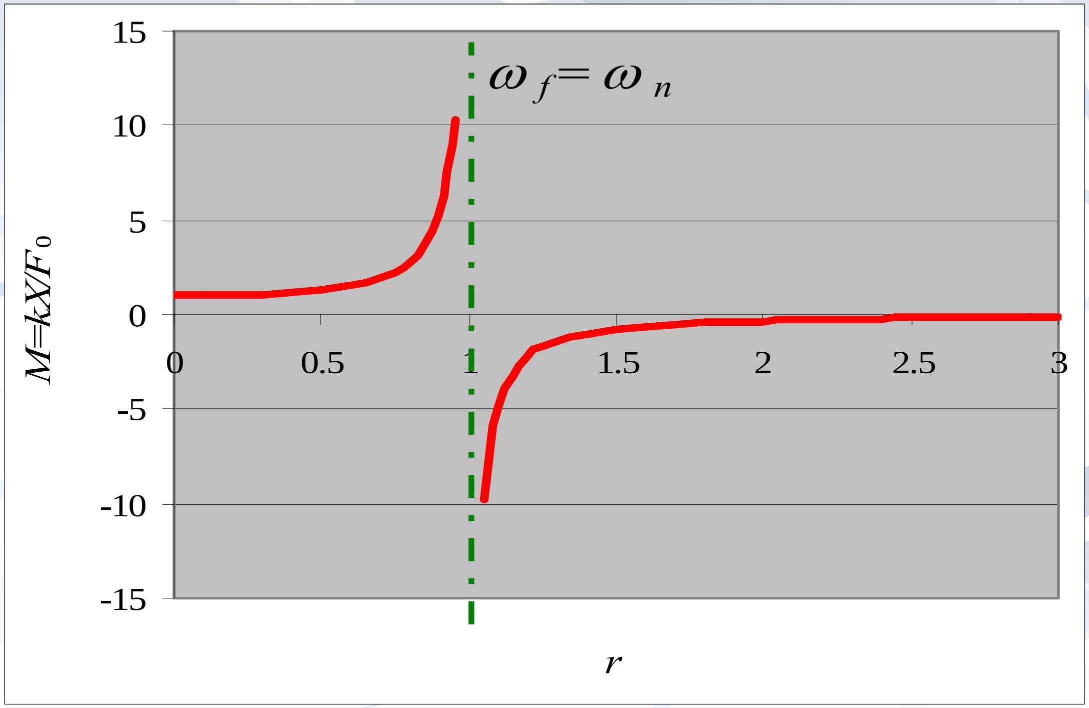
- مجموع دوجمله هارمونیک با فرکانسهای متفاوت می باشد.
- پاسخ دارای دامنه و فازی است که موثر از نیرو است.
- برای $\omega_f=\omega_n$ پاسخ تعریف نشده است، چون بر 0 تقسیم شده است.
- اگر فرکانس تحریک $\omega_f$ به فرکانس طبیعی میل کند دامنه جواب خصوصی بسیار بزرگ می شود.
- قسمت جواب خصوصی به پاسخ پایدار معروف است و اغلب بصورت دامنه و فاز می نویسند و دامنه را برحسب فرکانس تحریک $\omega_f$رسم می کنند :

$$x(t) = X\cos(\omega_f t + \phi) \qquad \boxed{X = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}}, \ \phi = 0$$

# ترسیم نمودار بزرگنمائی

- برای ترسیم نمودار باید از مقادیر بی بعد استفاده کرد لذا:

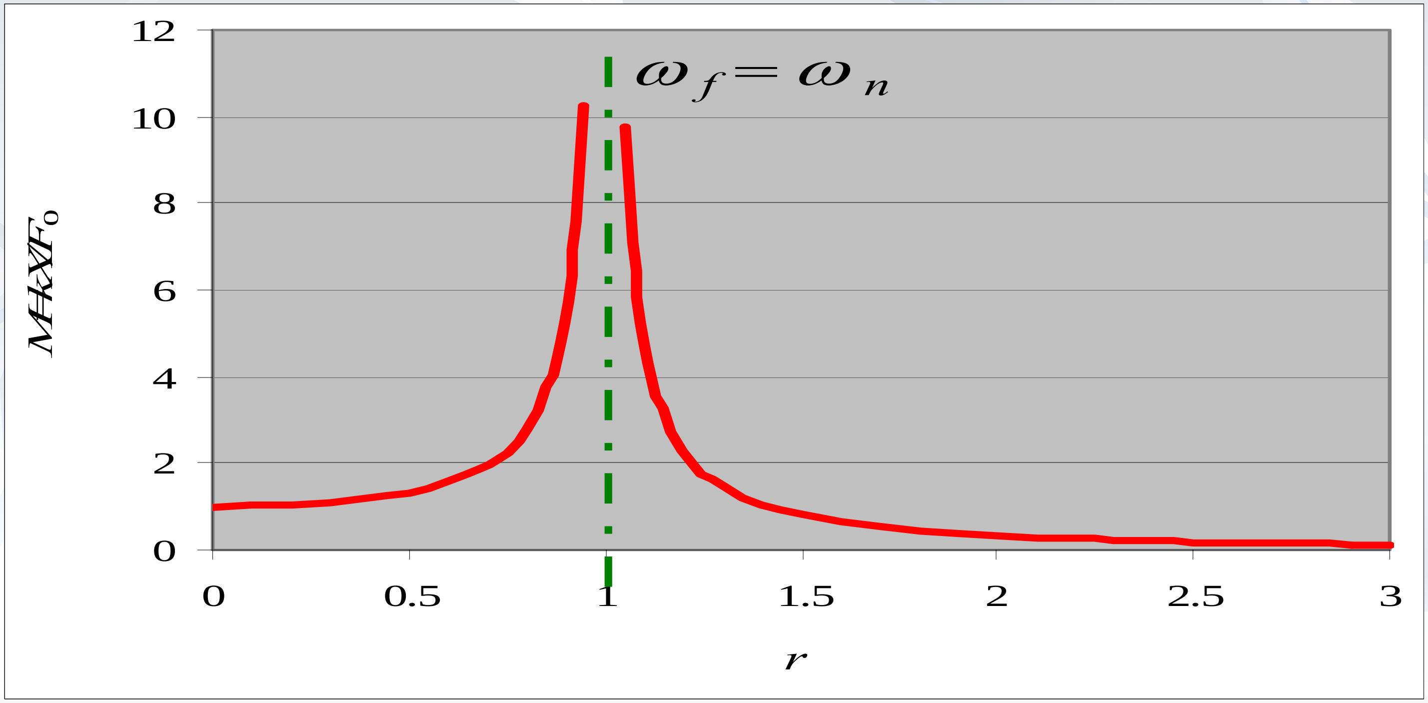
$$X = \frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\omega_f^2/\omega_n^2}, \Rightarrow \quad M = \frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1-r^2} \qquad \phi = 0$$



# ترسیم نمودار بزرگنمائی

- معمولاً این ترسیمه به صورت قدر مطلق M ترسیم می شود که:

$$X=\frac{F_0}{k}\frac{1}{\left|1-\omega_f^2/\omega_n^2\right|},\Rightarrow \quad M=\frac{kX}{F_0}=\frac{1}{\left|1-r^2\right|} \qquad \phi=\begin{cases}0 & \omega_f<\omega_n\\ 180 & \omega_f>\omega_n\end{cases}$$



**مثال:** پاسخ را برای ($m$=10 kg، $k$=1000 N/m، $F$=23 N، $\omega_f$=2$\omega_n$، $x_0$=0، $v_0$=0.2 m/s) محاسبه و رسم نمائید.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000\ \text{N/m}}{10\ \text{kg}}} = 10\ \text{rad/s},\ \omega_f = 2\omega_n = 20\ \text{rad/s}$$

$$f_0 = \frac{F}{m} = \frac{23\ \text{N}}{10\ \text{kg}} = 2.3\ \text{N/kg},\ \frac{v_0}{\omega_n} = \frac{0.2\ \text{m/s}}{10\ \text{rad/s}} = 0.02\ \text{m}$$

$$\frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^{\ 2}} = \frac{2.3\ \text{N/kg}}{(10^2 - 20^2)\ \text{rad}^2/\text{s}^2} = -7.9667\times 10^{-3}\ \text{m}$$

$$x(t) = 0.02\sin 10t + 7.667\times 10^{-3}(\cos 10t - \cos 20t)$$

**مثال:** به یک سیستم جرم و فنر شرایط اولیه صفر ونیروی هارمونیک با فرکانس 10 Hz و اندازه 20 N اعمال می شود اگر k=2000N/m و دامنهٔ پاسخ اندازه گرفته شده 0.1m باشد، جرم سیستم را محاسبه نمائید.

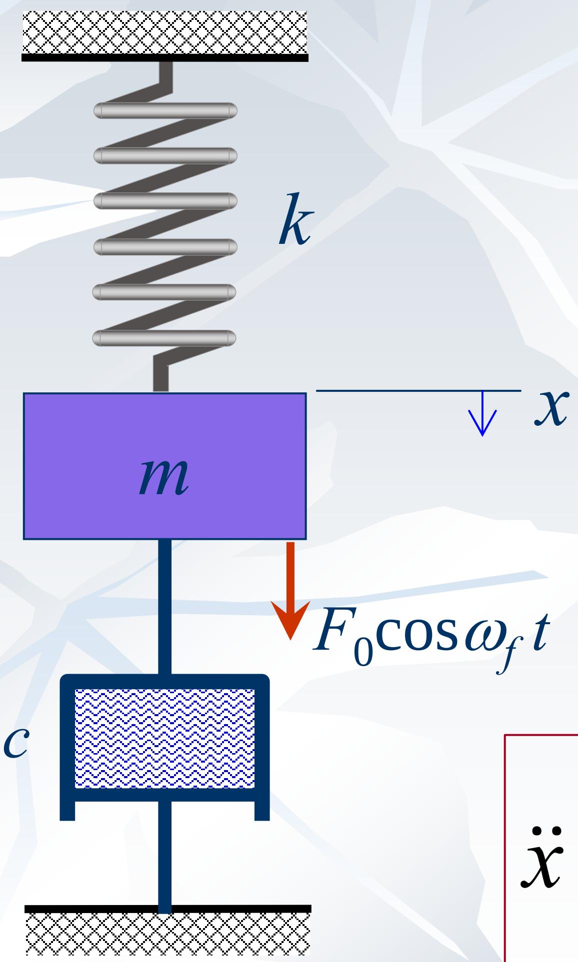
$$x(t)=\frac{f_0}{\omega_n^2-\omega^2}\left(\cos 20\pi t-\cos\omega_n t\right)\text{for zero initial conditions}$$

$$\text{trig identity}\Rightarrow x(t)=\underbrace{\frac{2f_0}{\omega_n^2-\omega^2}}_{0.1\,\mathrm{m}}\sin\left(\frac{\omega_n-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_n+\omega}{2}t\right)$$

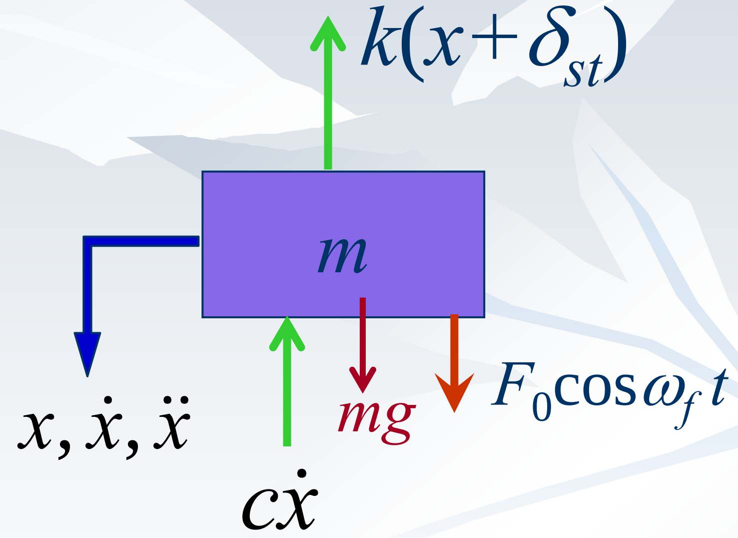
$$\Rightarrow\frac{2f_0}{\omega_n^2-\omega^2}=0.1\Rightarrow\frac{2(20/m)}{\left(2000/m\right)-(20\pi)^2}=0.1$$

$$\underline{m=0.45\,\mathrm{kg}}$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک




- یک سیستم دارای میرائی را در نظر بگیرید.




$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- معادله حرکت دارای دو پاسخ خصوصی و عمومی است:
  - پاسخ عمومی: فرض شده $0<\xi<1$

$$x_g(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right)$$

  - پاسخ خصوصی: به صورت مقابل فرض می شود:

$$x_p(t) = X\cos(\omega_f t - \phi)$$

  - در نتیجه:

$$x_p(t) = X\cos(\omega_f t - \phi) \qquad \dot{x}_p(t) = -\omega_f X\sin(\omega_f t - \phi)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega_f^2 X\cos(\omega_f t - \phi)$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- با قرار دادن در معادله:

$$\ddot{x}_p + 2\xi\omega_n \dot{x}_p + \omega_n^2 x_p = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$$-\omega_f^2 X\cos(\omega_f t-\phi)+2\xi\omega_n\left[-\omega_f X\sin(\omega_f t-\phi)\right]$$
$$+\omega_n^2\left[X\cos(\omega_f t-\phi)\right]=\frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$$\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)X\cos(\omega_f t-\phi)-2\xi\omega_n\left[\omega_f X\sin(\omega_f t-\phi)\right]=\frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- استفاده از روابط مثلثاتی:

$$\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)X\left[\boxed{\cos\left(\omega_f t\right)}\cos(\phi)+\boxed{\sin\left(\omega_f t\right)}\sin(\phi)\right]$$

$$-2X\xi\omega_n\omega_f\left[\boxed{\sin\left(\omega_f t\right)}\cos(\phi)-\boxed{\cos\left(\omega_f t\right)}\sin(\phi)\right]=\frac{F_0}{m}\boxed{\cos\omega_f t}$$

$$\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)X\cos(\phi)+2X\xi\omega_n\omega_f\sin(\phi)=\frac{F_0}{m} \qquad (1)$$

$$\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)X\sin(\phi)-2X\xi\omega_n\omega_f\cos(\phi)=0 \qquad (2)$$

$$(1)\times 2\xi\omega_n\omega_f+(2)\times\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)=2\xi\omega_n\omega_f\frac{F_0}{m}$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- استفاده از روابط قبل:

$$(1)\times 2\xi\omega_n\omega_f + (2)\times\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\left[\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2\right]X\sin\phi = 2\xi\omega_n\omega_f\frac{F_0}{m}}$$

$$(1)\times\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)-(2)\times 2\xi\omega_n\omega_f \Rightarrow$$

$$\boxed{\left[\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2\right]X\cos\phi = \left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)\frac{F_0}{m}}$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- استفاده از روابط قبل:

$$X^2 = \frac{\left(\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2\right)}{\left(\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2\right)^2}\left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$X = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2}} = \frac{\left(\frac{F_0}{k}\right)}{\sqrt{\left(1-\omega_f^2/\omega_n^2\right)^2+\left(2\xi\,\omega_f/\omega_n\right)^2}}$$

$$\boxed{\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}$$

$$\boxed{r = \frac{\omega_f}{\omega_n}}$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- همچنین:

$$\left[\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2\right]X\sin\phi=2\xi\omega_n\omega_f\frac{F_0}{m}$$

$$\left[\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\xi\omega_n\omega_f\right)^2\right]X\cos\phi=\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)\frac{F_0}{m}$$

$$\tan\phi=\frac{2\xi\omega_n\omega_f}{\left(\omega_n^2-\omega_f^2\right)}=\frac{2\xi r}{1-r^2},\qquad \boxed{\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)}$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- پاسخ کلی:

$$x(t)=\underbrace{e^{-\xi\omega_n t}\left[A_1\cos(\omega_d t)+A_2\sin(\omega_d t)\right]}_{\text{پاسخ گذرا}}+\underbrace{X\cos(\omega_f t-\phi)}_{\text{پاسخ حالت پایدار}}$$

- که $A_1$ و $A_2$ با اعمال شرایط مرزی بدست می آیند و $\boldsymbol{X}$ و $\phi$:

$$\boxed{\frac{kX}{F_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}$$

$$\boxed{\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)}$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

- بدست آوردن $A_1$ و $A_2$:

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left[A_1\cos(\omega_d t)+A_2\sin(\omega_d t)\right]+X\cos(\omega_f t-\phi)$$

$$\dot{x}(t)=-\xi\omega_n x(t)+e^{-\xi\omega_n t}\left[-\omega_d A_1\sin(\omega_d t)+\omega_d A_2\cos(\omega_d t)\right]-\omega_f X\sin(\omega_f t-\phi)$$

$$x(0)=x_0=A_1+X\cos(\phi)\quad\Rightarrow\quad A_1=x_0-X\cos(\phi)$$

$$\dot{x}(0)=v_0=-\xi\omega_n x_0+\omega_d A_2+\omega_f X\sin(\phi)$$

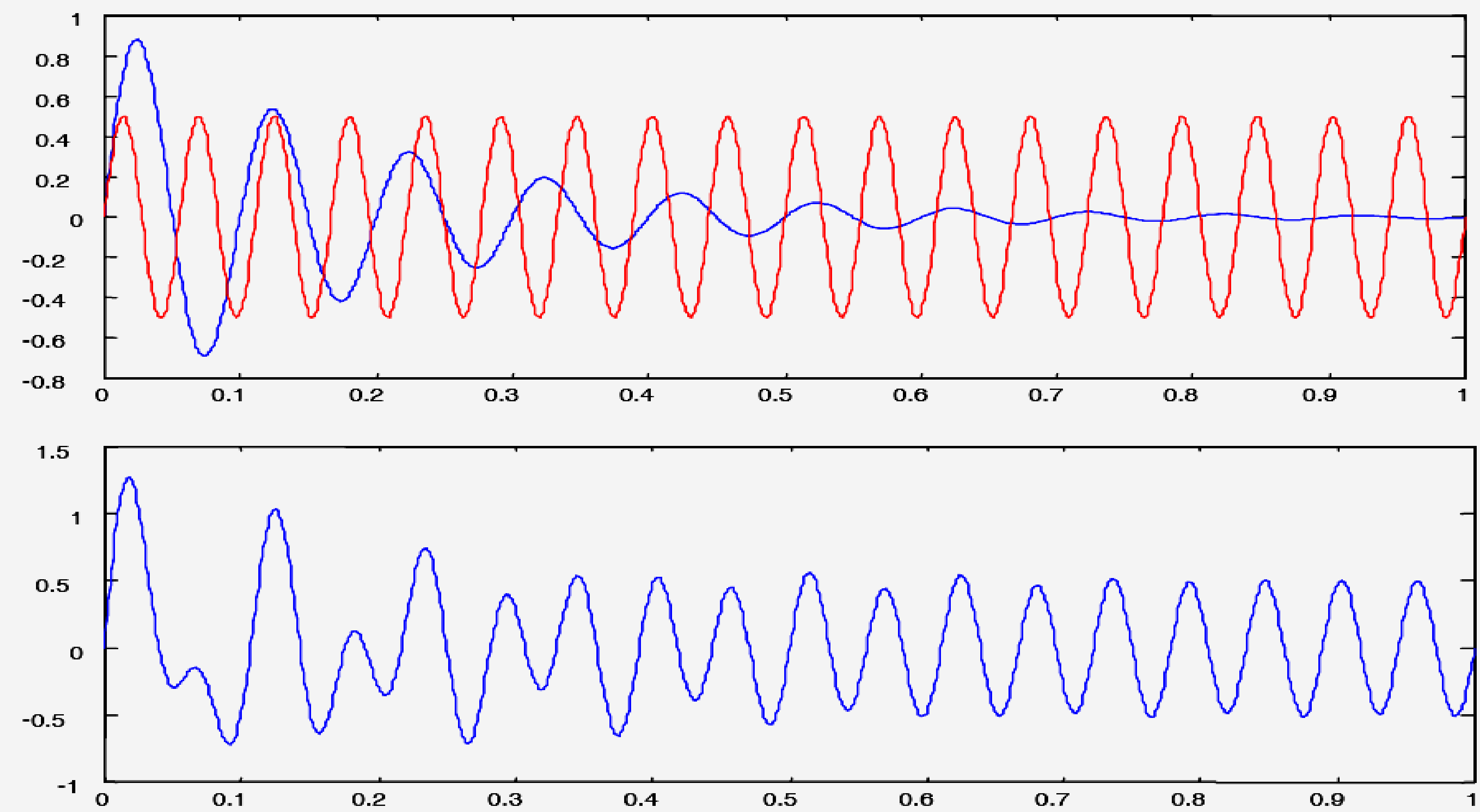
$$\Rightarrow\quad A_2=\frac{1}{\omega_d}\left[v_0+\xi\omega_n x_0-\omega_f X\sin(\phi)\right]$$

- برای شرایط مرزی صفر

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left[A_1\cos(\omega_d t)+A_2\sin(\omega_d t)\right]+X\cos(\omega_f t-\phi)$$

$$A_1=-X\cos(\phi),\qquad A_2=-\frac{\omega_f}{\omega_d}X\sin(\phi)$$

# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک



# پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

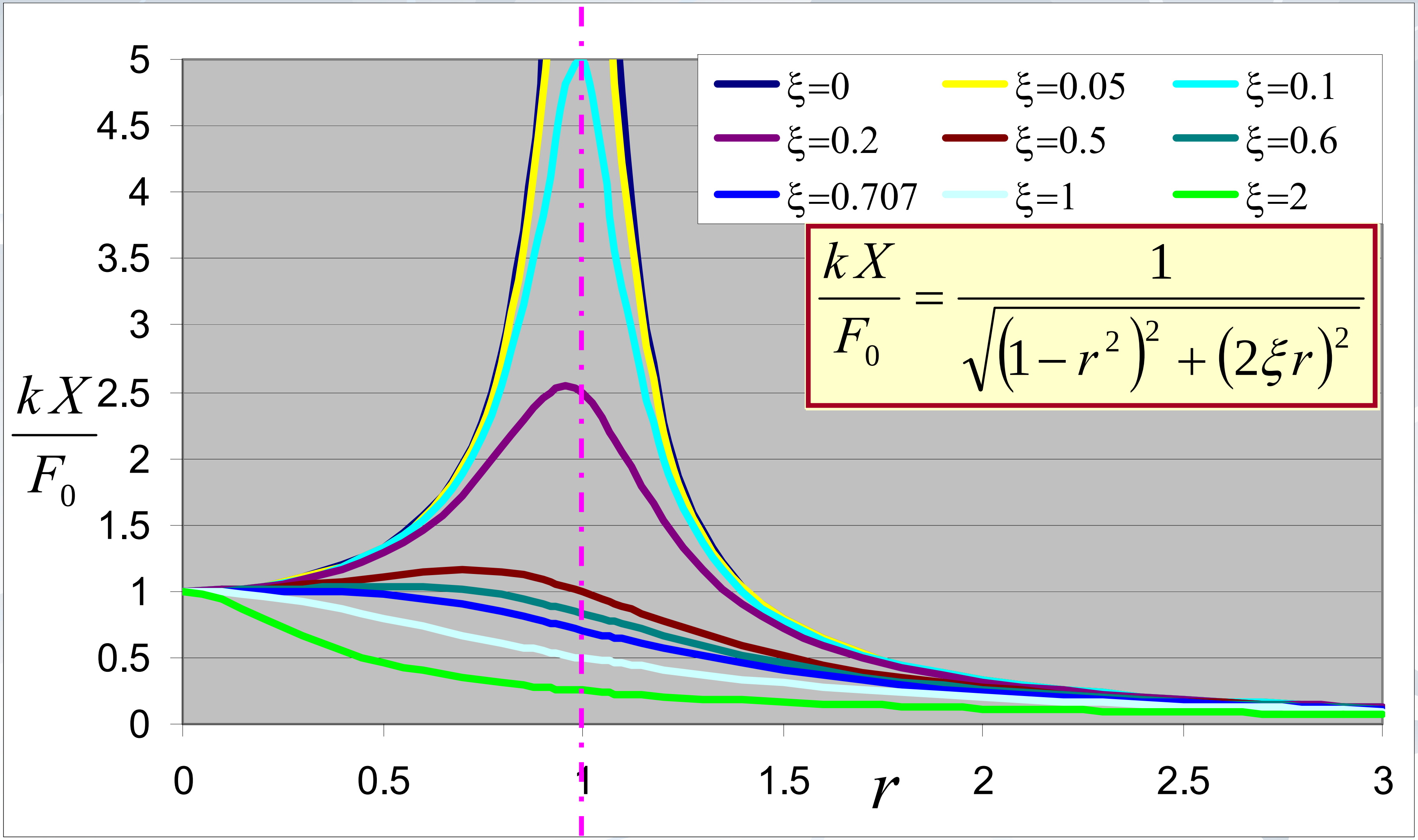
- بدلیل میرائی بعداز مدتی پاسخ گذرا حذف و فقط پاسخ حالت پایدار باقی می ماند.

$$x(t) = X\cos(\omega_f t - \phi)$$

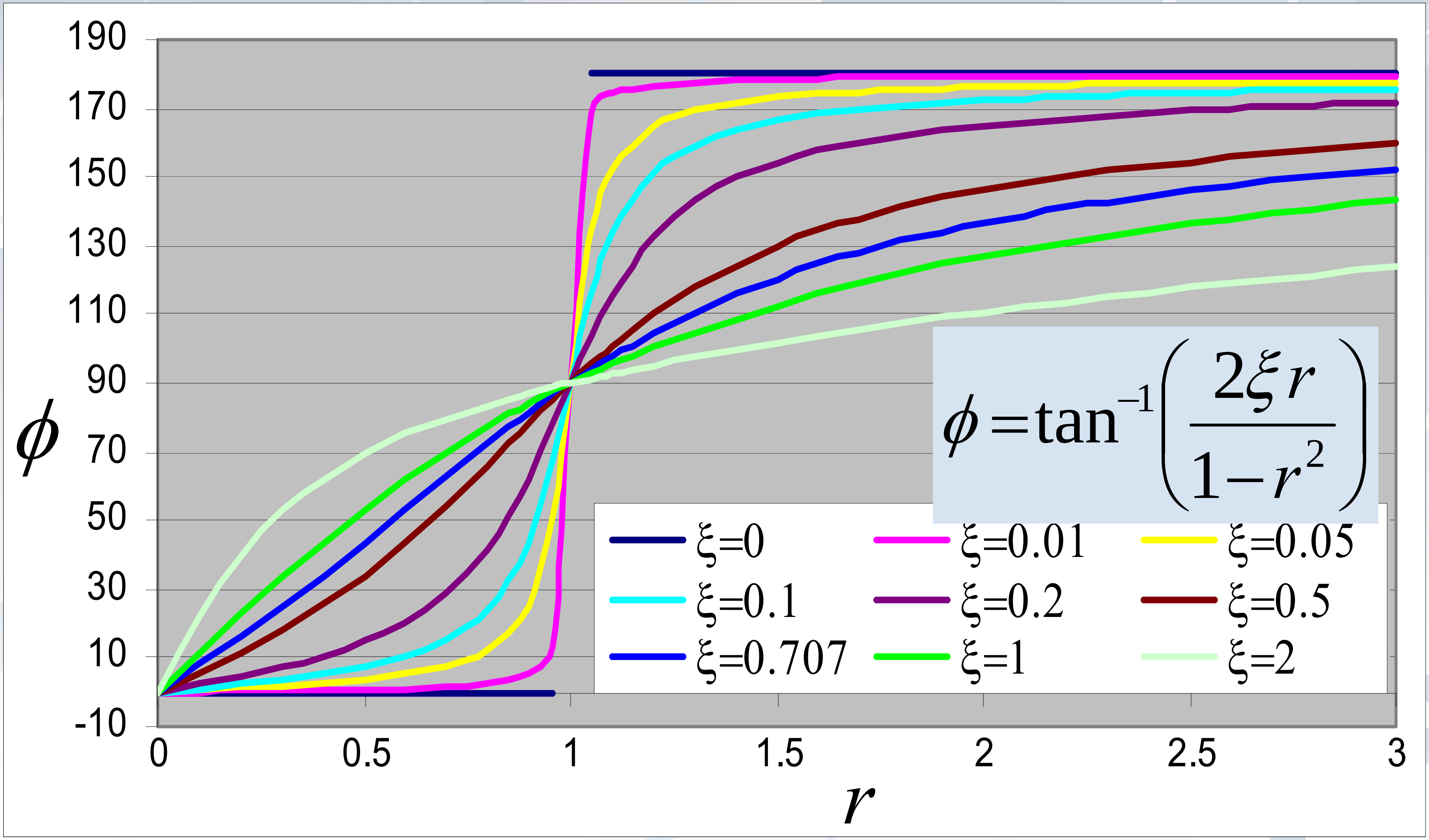
$$\boxed{\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

# نمودار بزرگنمائی



# زاویه فاز

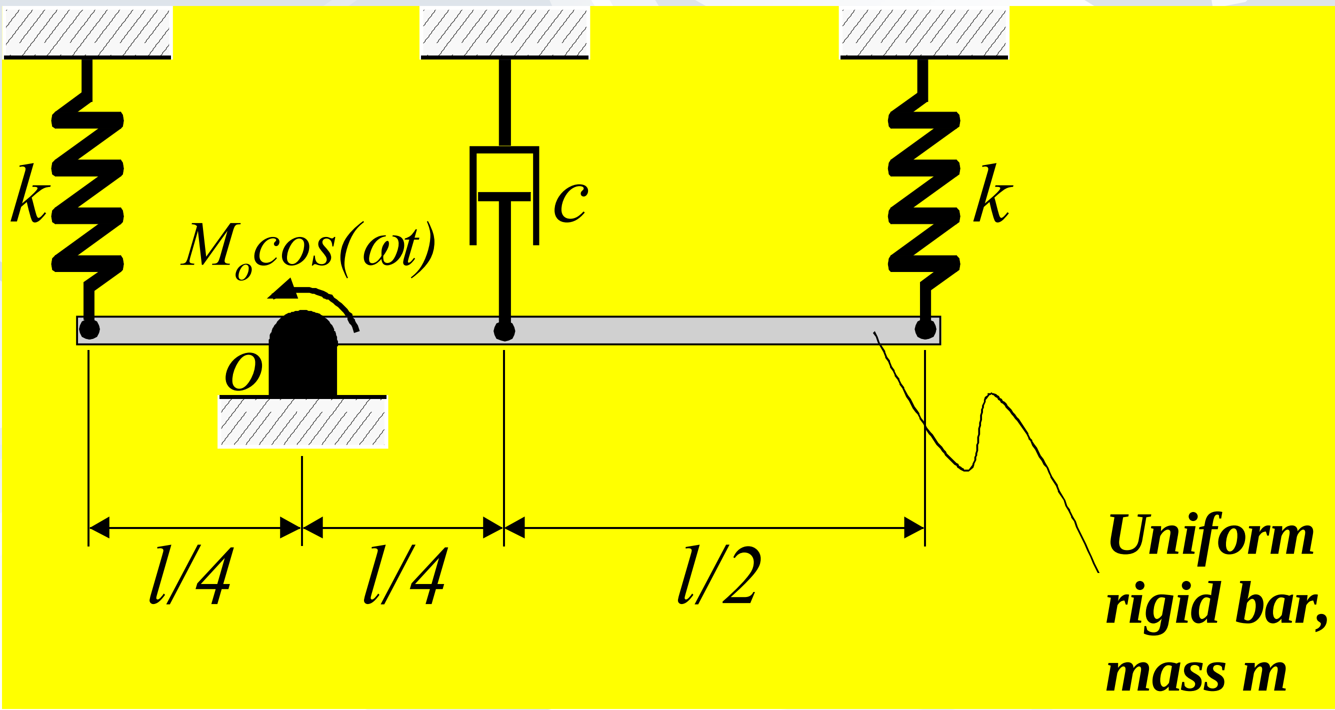

190
170
150
130
110
90
70
50
30
10
-10
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$r$
$\phi$
$\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\xi r}{1-r^2}\right)$
ξ=0
ξ=0.01
ξ=0.05
ξ=0.1
ξ=0.2
ξ=0.5
ξ=0.707
ξ=1
ξ=2

# مثال

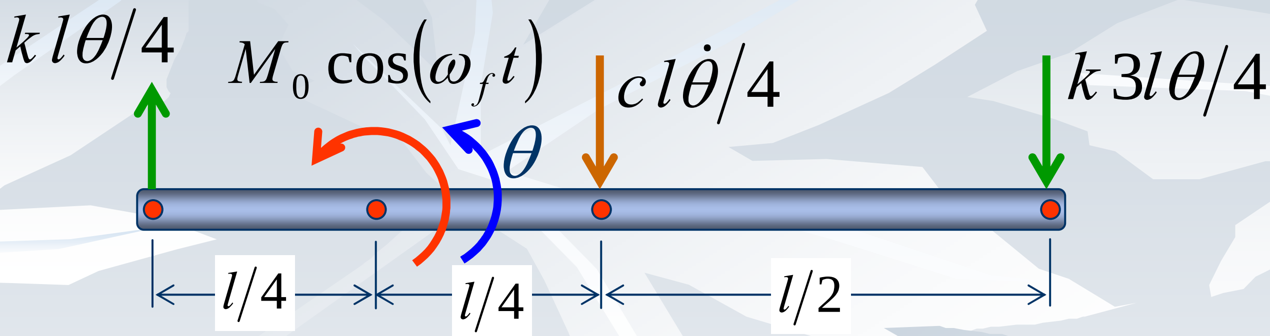
$l = 1m$ $\quad k = 5000\,N/m$ $\quad c = 1000\,N\cdot s/m$ $\quad m = 10kg$

$M_o = 100N\cdot m$ $\quad \omega = 1000rpm$

معادله حرکت و پاسخ حالت پایدار؟



# مثال

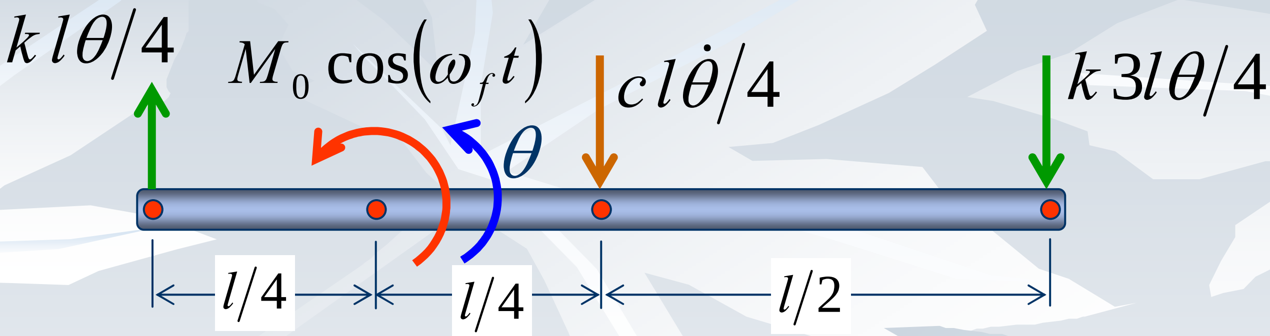



$$\sum M_O^{+} = J_0\ddot{\theta} \qquad M_0\cos(\omega_f t) - \frac{kl}{4}\theta\frac{l}{4} - \frac{cl}{4}\dot{\theta}\frac{l}{4} - \frac{3kl}{4}\theta\frac{3l}{4} = \left(\frac{ml^2}{12} + m\frac{l^2}{16}\right)\ddot{\theta}$$

$$M_0\cos(\omega_f t) - \frac{10kl^2}{16}\theta - \frac{cl^2}{16}\dot{\theta} = ml^2\left(\frac{7}{48}\right)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{7ml^2}{48}\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{16}\dot{\theta} + \frac{10kl^2}{16}\theta = M_0\cos(\omega_f t)$$

# مثال

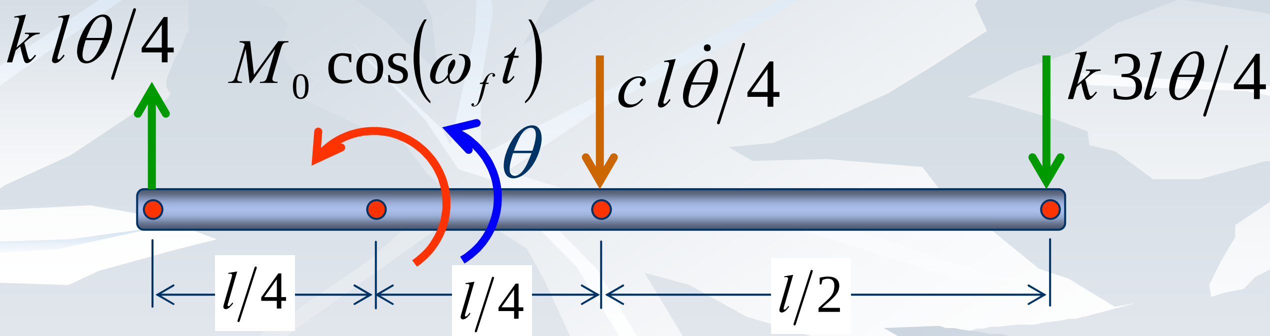



$$\frac{7ml^2}{48}\ddot{\theta}+\frac{cl^2}{16}\dot{\theta}+\frac{10kl^2}{16}\theta=M_0\cos(\omega_f t)$$

$$k_{eq}=\frac{10kl^2}{16} \qquad c_{eq}=\frac{cl^2}{16} \qquad m_{eq}=\frac{7ml^2}{48}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{10kl^2/16}{7ml^2/48}}=\sqrt{\frac{30k}{7m}}$$

# مثال




$$\ddot{\theta}+\frac{3c}{7m}\dot{\theta}+\frac{30k}{7m}\theta=\frac{48M_0}{7ml^2}\cos(\omega_f t)$$

$$\ddot{\theta}+2\xi\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=f_0\cos(\omega_f t)$$

$$T=\frac{(f_0)}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_f^2)^2+(2\xi\omega_n\omega_f)^2}}$$

$$\theta(t)=T\cos(\omega_f t-\phi)$$

$$\boxed{\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)}$$

# مثال

$$l = 1m \qquad k = 5000\, N/m \qquad c = 1000\, N\cdot s/m \qquad m = 10kg$$

$$M_o = 100\, N\cdot m \qquad \omega_f = 1000 rpm = \frac{2\pi}{60}1000 = \frac{2000\pi}{60} = 104.8 \;\; rad/s$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3000}{70}\dot{\theta} + \frac{150000}{70}\theta = \frac{4800}{70}\cos(104.8t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = f_0\cos(\omega_f t) \qquad T = \frac{(f_0)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2}}$$

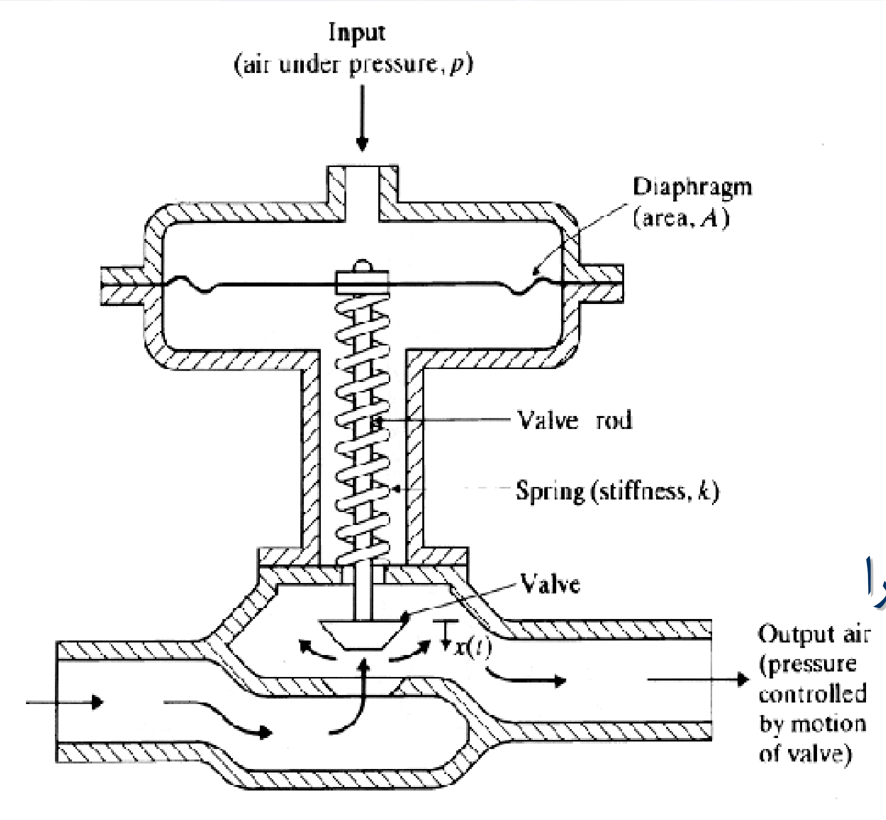
$$\omega_n = \sqrt{150000/70} = 46.29, \qquad 2\xi\omega_n = \frac{3000}{70} = 42.86, \quad 2\xi\omega_n\omega_f = 4491.4$$

$$T = \frac{4800/70}{\sqrt{(150000/70 - 104.8^2)^2 + (4491.4)^2}} = 6.92\times 10^{-3}\; Rad$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{4491.4}{150000/70 - 104.8^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4491.4}{150000/70 - 104.8^2}\right) = 153.1^\circ = 2.67\,rad$$

$$\theta(t) = T\cos(\omega_f t - \phi) = 6.92\times 10^{-3}\cos(104.8t - 2.67)$$

# مثال

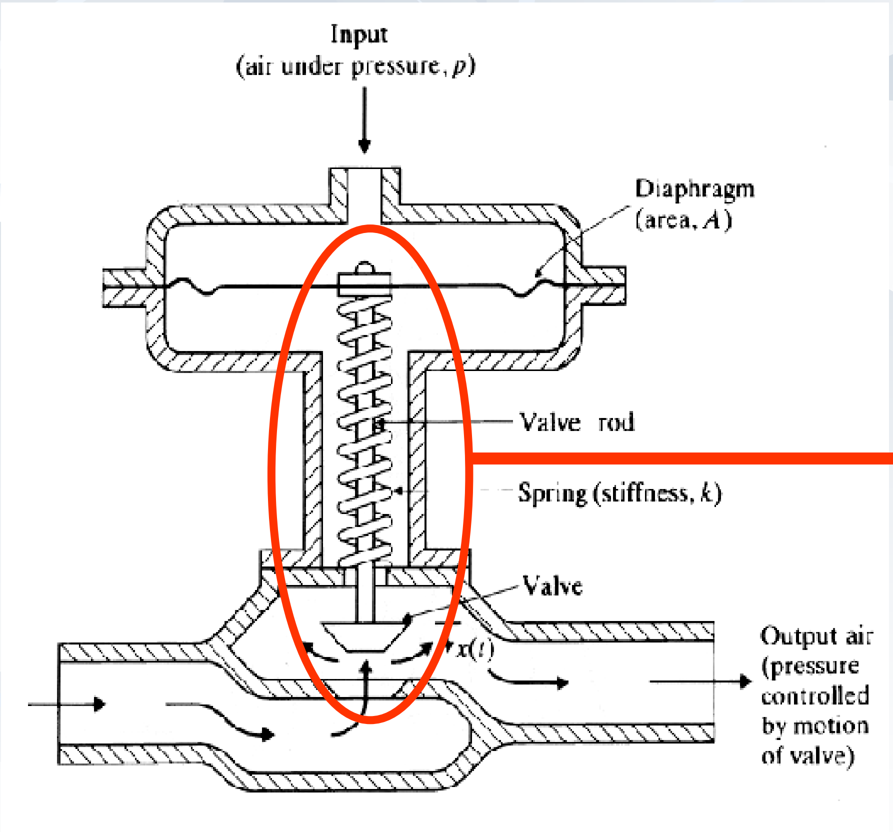


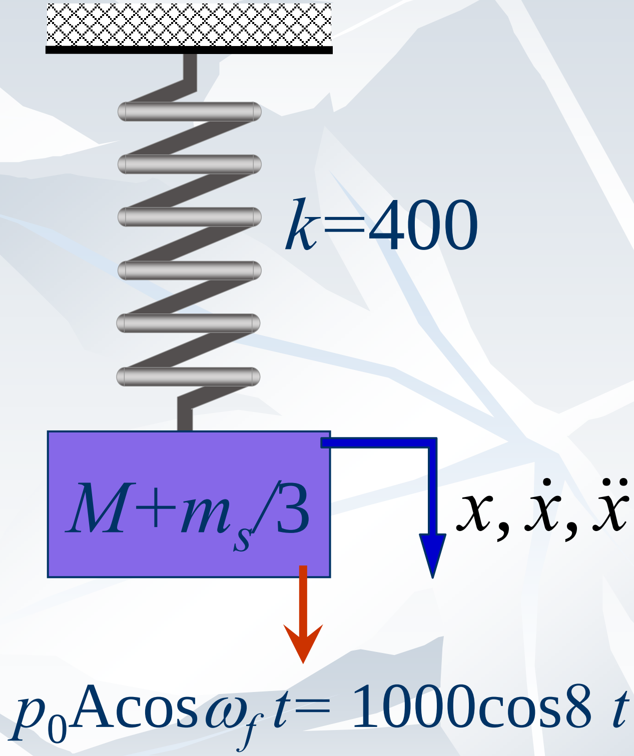

عملگر فنری نشان داده شده با استفاده از فشار هوای متغیر با زمان $p(t)$ بعنوان ورودی از کنترلر پنوماتیکی عمل می کند. تاثیر آن خروجی جابجائی $x(t)$ به مقداری است که متناسب با فشار هوای ورودی است. دیافراگم لاستیکی دارای دارای سطح مقطع A است که تحت فشار هوای ورودی و در مقابل فنر با سختی $k$ تغییر شکل می دهد. وزن فنر $15\ lb$ و وزن شیر و میله آن $20\ lb$ است. پاسخ شیر تحت فشار نوسانی هارمونیکی $p(t)=p_0\cos\omega t$ را برای داده های زیر بدست آورید.

$$p_o = 10\,psi \qquad \omega = 8\,rad/s \qquad A = 100 in^2$$

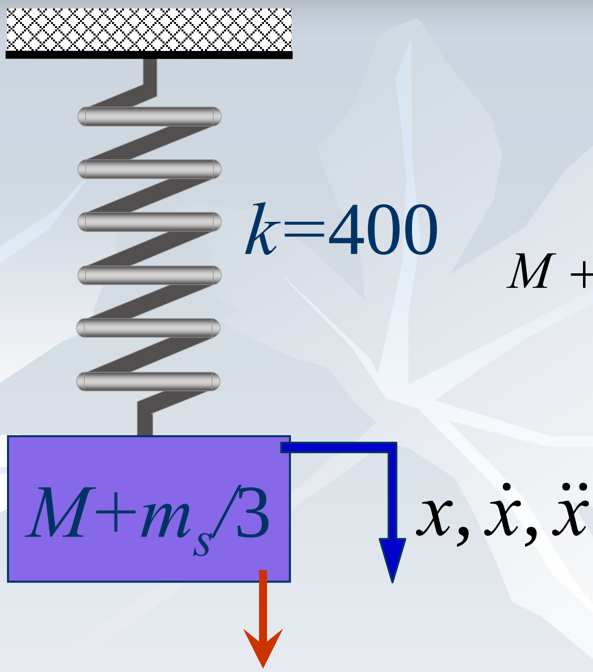
$$k = 400\, lb_f / in$$

# حل




$$M + m_s/3 = \frac{1}{g}\left[20 + 15/3\right] = \frac{25}{32.2 \times 12} = 0.0647\,\frac{lb \cdot s^2}{in}$$




# حل

$$M + m_s/3 = \frac{1}{g}[20 + 15/3] = \frac{25}{32.2 \times 12} = 0.0647\,\frac{lb \cdot s^2}{in}$$

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = F_0 \cos \omega_f t$$

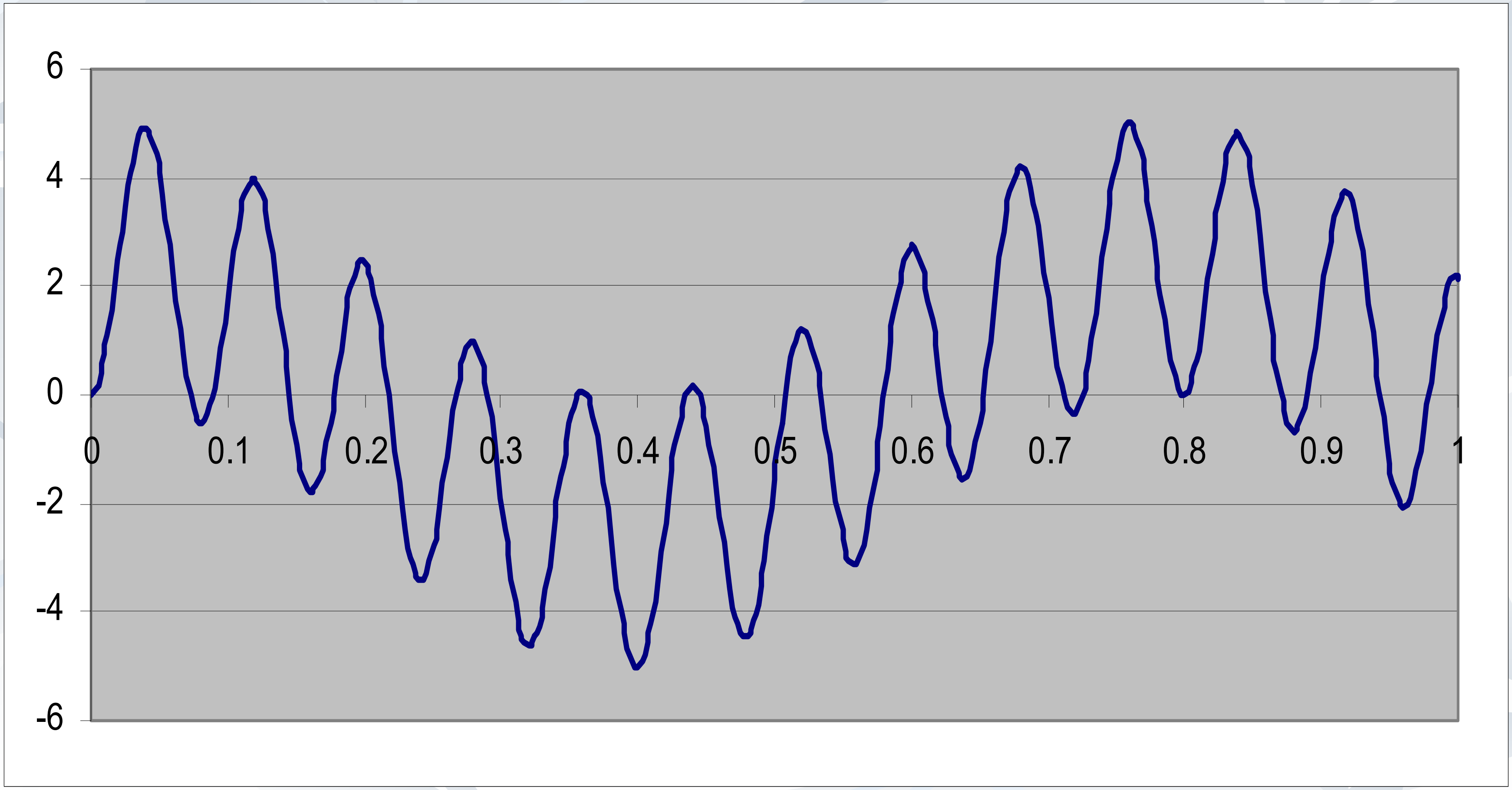
$$0.0647\ddot{x} + 400x = 1000 \cos 8t$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}\left[\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)\right]$$

$$x(t) = \frac{1000/0.0647}{400/0.0647 - 64}\left[\cos(8t) - \cos\left(\sqrt{400/0.0647}\; t\right)\right]$$

$$x(t) = 2.526\left[\cos(8t) - \cos(78.63\,t)\right]$$

# حل



# مقدار بیشینه ضریب بزرگنمائی

- برای بدست آوردن مقدار بیشینه باید نسبت به r از معادله مربوطه مشتق گرفته معادل صفر قرار داد.

$$\frac{kX}{F_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

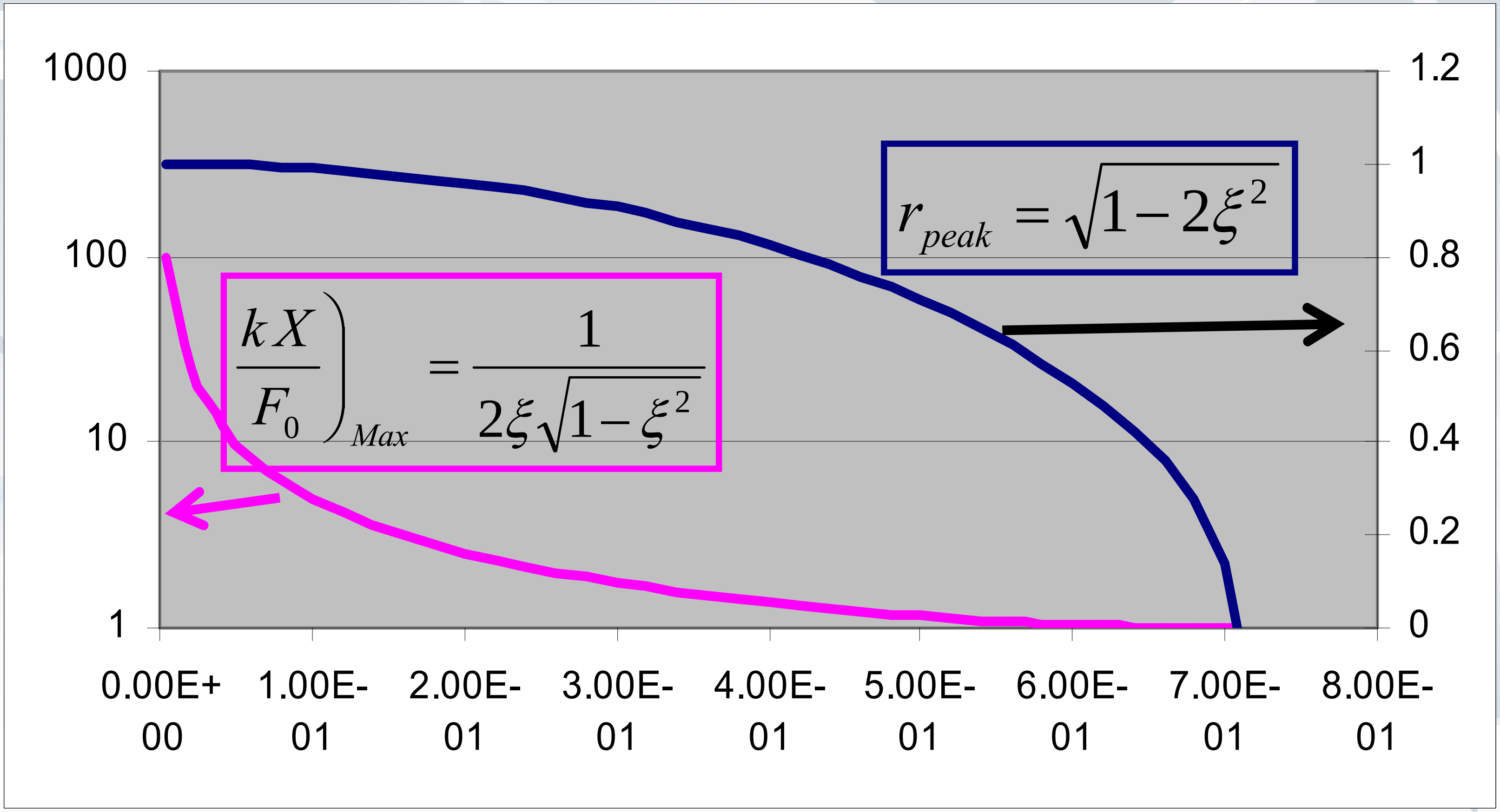
$$\frac{d}{dr}\left(\frac{kX}{F_0}\right)=0 \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}\right)=-\frac{\dfrac{2(-2r)\left(1-r^2\right)+2\times 4\xi^2 r}{2\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}=0$$

$$-r\left(1-r^2\right)+2\xi^2 r=0 \qquad \begin{cases} r=0 \\ r^2=1-2\xi^2 \end{cases} \qquad \boxed{r_{peak}=\sqrt{1-2\xi^2}} \qquad \xi\le 1\big/\sqrt{2}$$

$$\boxed{\left.\frac{kX}{F_0}\right)_{Max}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-1+2\xi^2\right)^2+4\xi^2\left(1-2\xi^2\right)}}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

# مقدار بیشینه ضریب بزرگنمائی

$$\left.\frac{kX}{F_0}\right)_{Max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad r_{peak} = \sqrt{1-2\xi^2}$$



# در باره ضریب بزرگنمائی

- توجه شود که حتی مقادیر کوچک میرائی ضریب بزرگنمائی را و در نتیجه دامنه پاسخ را به مقدار زیادی می تواند کاهش می دهد.
- توجه شود که مقدار بیشینه پاسخ در فرکانسی کمتر از $\omega_n$ اتفاق می افتد.
- برای نسبت میرائی کمتر از ۱ ضریب بزرگنمائی همواره بیشتر از ۱ است.
- برای نسبت میرائی بیشتر از ۱ ضریب بزرگ نمائی همواره کمتر از ۱ است.

# نیروی هارمونیکی مختلط

- فرض کنید نیروی هارمونیکی بصورت مختلط ارائه شود:

$$f(t) = F_0 e^{i\omega_f t}$$

- لذا:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_f t}$$

- یا

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}$$

- پاسخ خصوصی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر فرض می شود:

$$x(t) = Xe^{i\omega_f t} \qquad \dot{x}(t) = i\omega_f Xe^{i\omega_f t} = \omega_f Xe^{i(\omega_f t + \pi/2)}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_f^2 Xe^{i\omega_f t} = \omega_f^2 Xe^{i(\omega_f t + \pi)}$$

# نیروی هارمونیکی مختلط

- با قرار دادن در معادله حرکت:

$$-m\omega_f^2 Xe^{i\omega_f t} + ic\omega_f Xe^{i\omega_f t} + kXe^{i\omega_f t} = F_0 e^{i\omega_f t}$$

$$\left[\left(k - m\omega_f^2\right) + ic\omega_f\right] Xe^{i\omega_f t} = F_0 e^{i\omega_f t}$$

$$\boxed{\left[\left(k - m\omega_f^2\right) + ic\omega_f\right]} X = F_0$$

- $Z(i\omega)=(k-m\omega_f^2)+ic\omega_f$ را امپدانس مکانیکی گویند.
- در نتیجه می توان نوشت:

$$\boxed{X = \frac{F_0}{k - m\omega_f^2 + ic\omega_f} = \frac{F_0}{k}\left[H\left(i\omega\right)\right]}$$

برای جداسازی قسمتهای حقیقی و موهومی صورت مخرج در مزدوج مخرج ضرب می شود

# پاسخ به نیروی هارمونیکی مختلط

- لذا:

$$X = \frac{F_0\left(k - m\omega_f^2 - ic\omega_f\right)}{\left(k - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2}$$

$$X = F_0\left[\frac{k - m\omega_f^2}{\left(k - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2} - i\frac{c\omega_f}{\left(k - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2}\right]$$

- هر عدد مختلط را می توان با مقدار و آرگومان نشان داد.

$$Z = x + iy = |Z|e^{Arg(Z)} \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad Arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

# پاسخ به نیروی هارمونیکی مختلط

- لذا:

$$X = |X| e^{-i\phi}$$

$$|X| = F_0 \left[ \sqrt{\frac{\left(k - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2}{\left[\left(k - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2\right]^2}} \right] = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2}\right)$$

$$\boxed{|X| = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right)}$$

# پاسخ به نیروی هارمونیکی مختلط

- همچنین از پاسخ فرکانسی مختلط (که قبلاً ارائه شد) نیز استفاده می شود

$$\frac{kX}{F_0} = H(i\omega_f) = \frac{1}{1 - r^2 + i2\xi r}$$

$$H(i\omega_f) = \left|H(i\omega_f)\right| e^{-i\phi}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

$$\left|H(i\omega_f)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

$$\boxed{x_P(t) = \frac{F_0}{k} H(i\omega_f) e^{i\omega_f t} = \frac{F_0}{k}\left|H(i\omega_f)\right| e^{i(\omega_f t - \phi)}}$$

# پاسخ به نیروی هارمونیکی مختلط

- اگر $f(t)=F_0\cos(\omega_f t)$ باشد، قسمت حقیقی $x_p$ جواب است:

$$x_P(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{F_0}{k}H(i\omega_f)e^{i\omega_f t}\right]=\frac{F_0}{k}\left|H(i\omega_f)\right|\mathrm{Re}\left[e^{i(\omega_f t-\phi)}\right]$$

$$x_P(t)=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\cos(\omega_f t-\phi)$$

- اگر $f(t)=F_0\sin(\omega_f t)$ باشد، قسمت موهومی $x_p$ جواب است:

$$x_P(t)=\mathrm{Im}\left[\frac{F_0}{k}H(i\omega_f)e^{i\omega_f t}\right]=\frac{F_0}{k}\left|H(i\omega_f)\right|\mathrm{Im}\left[e^{i(\omega_f t-\phi)}\right]$$

$$x_P(t)=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\sin(\omega_f t-\phi)$$

# استفاده دیگر از نمایش مختلط (دیاگرام فازوری)

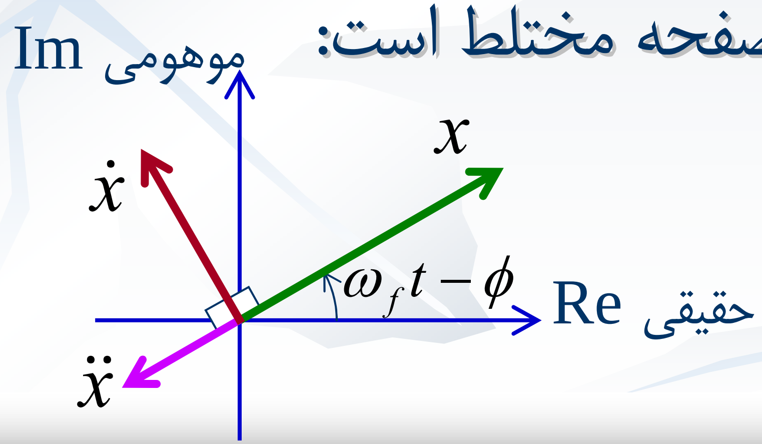
- همانگونه که قبلاً گفته شد، نماش مختلط پاسخ حالت پایدار و مشتقاتش عبارتند از:

$$x(t) = Xe^{i\omega_f t} = |X|e^{i(\omega_f t-\phi)}$$

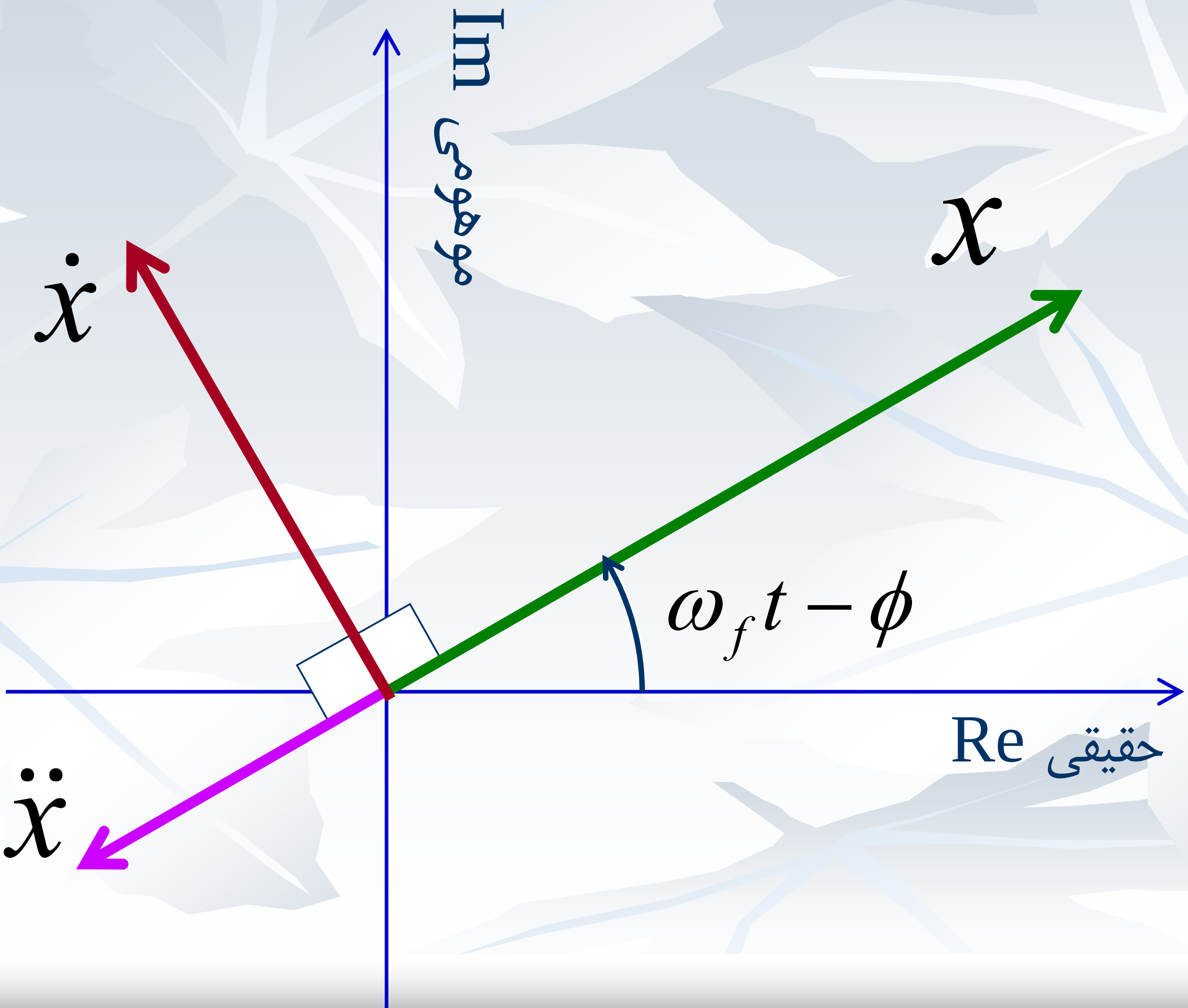
$$\dot{x}(t) = i\omega_f Xe^{i\omega_f t} = \omega_f Xe^{i(\omega_f t+\pi/2)} = \omega_f |X|e^{i(\omega_f t-\phi+\pi/2)}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_f^2 Xe^{i\omega_f t} = \omega_f^2 Xe^{i(\omega_f t+\pi)} = \omega_f^2 |X|e^{i(\omega_f t-\phi+\pi)}$$

- نمایش هرکدام از اینها برداری در صفحه مختلط است:



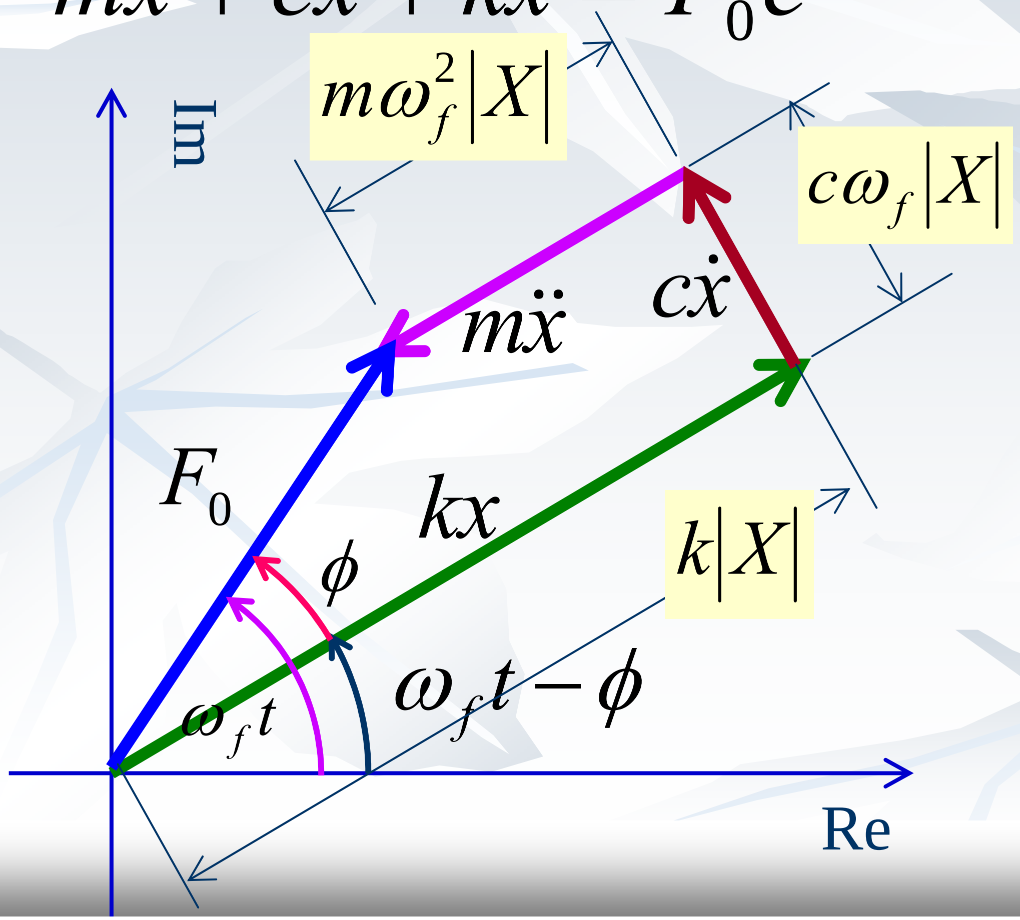
# دیگرام فازوری



# دیگرام فازوری

- حال معادله حرکت را در نظر بگیرید، و هر جمله آن را به عنوان یک بردار در نظر بگیرید:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_f t}$$

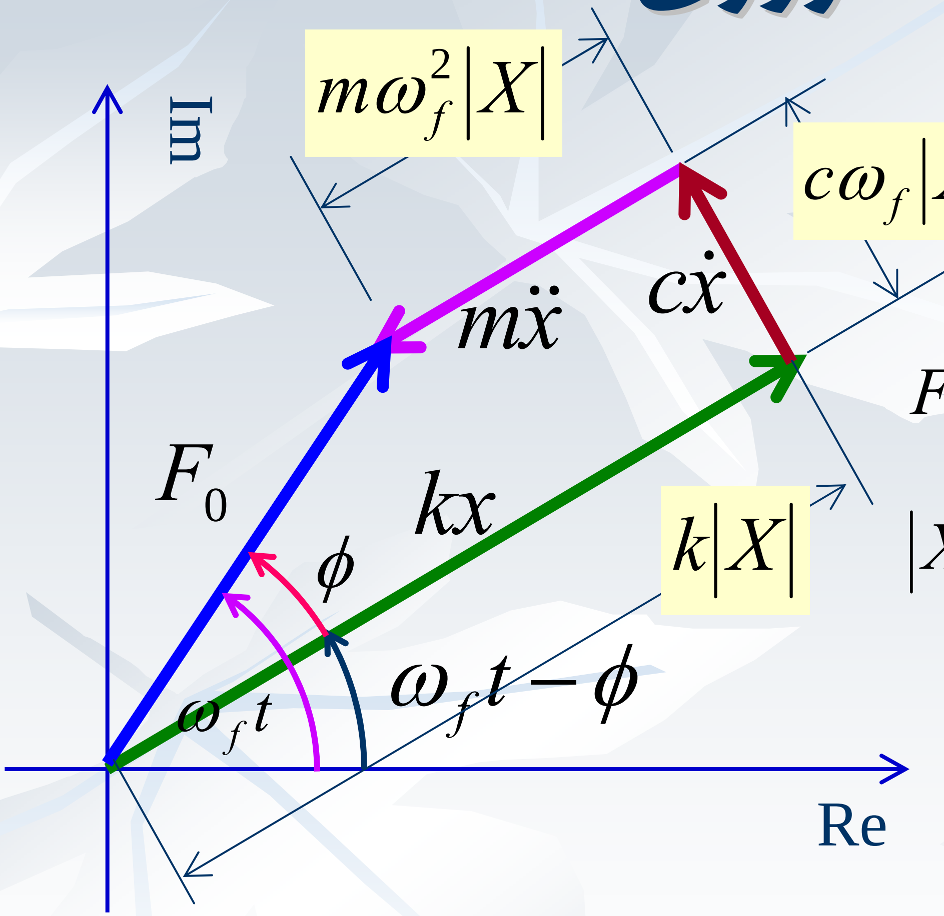



$$\tan\phi = \frac{c\omega_f|X|}{k|X| - m\omega_f^2|X|}$$

$$= \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2}$$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{2\xi r}{1 - r^2}}$$

# دیگرام فازوری



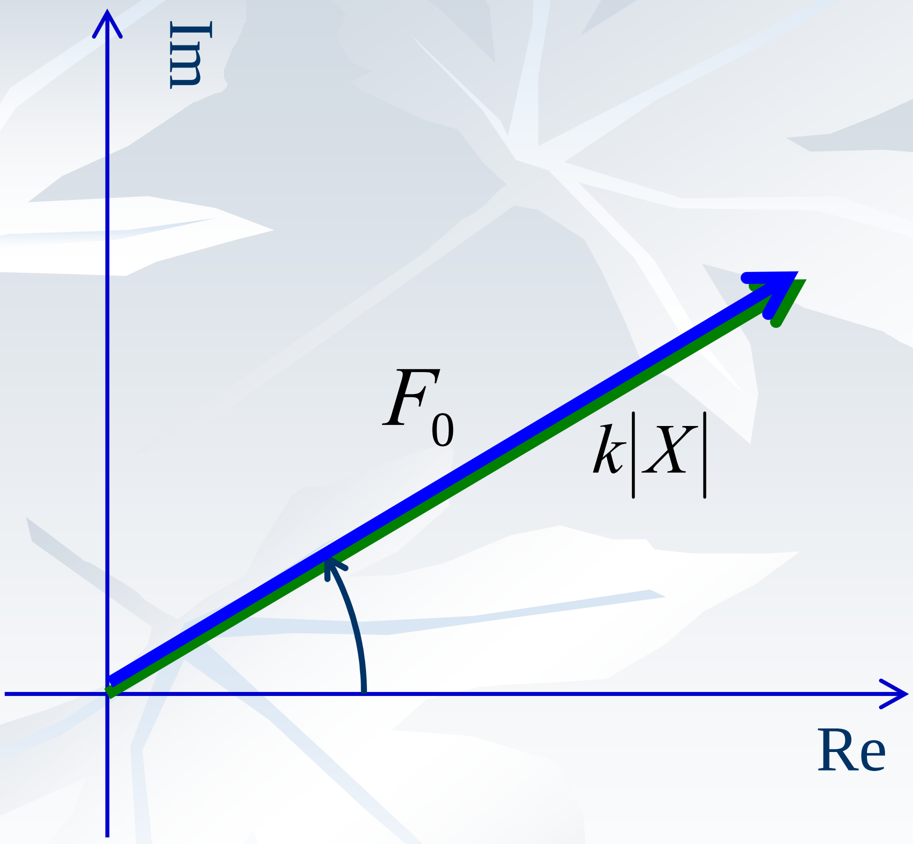

$$F_0^{\,2}=\left(k-m\omega_f^2\right)^2|X|^2+\left(c\omega_f\right)^2|X|^2$$

$$|X|=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega_f^2\right)^2+\left(c\omega_f\right)^2}}$$

$$\boxed{\tan\phi=\frac{2\xi r}{1-r^2}}$$

$$\boxed{\frac{k|X|}{F_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}$$

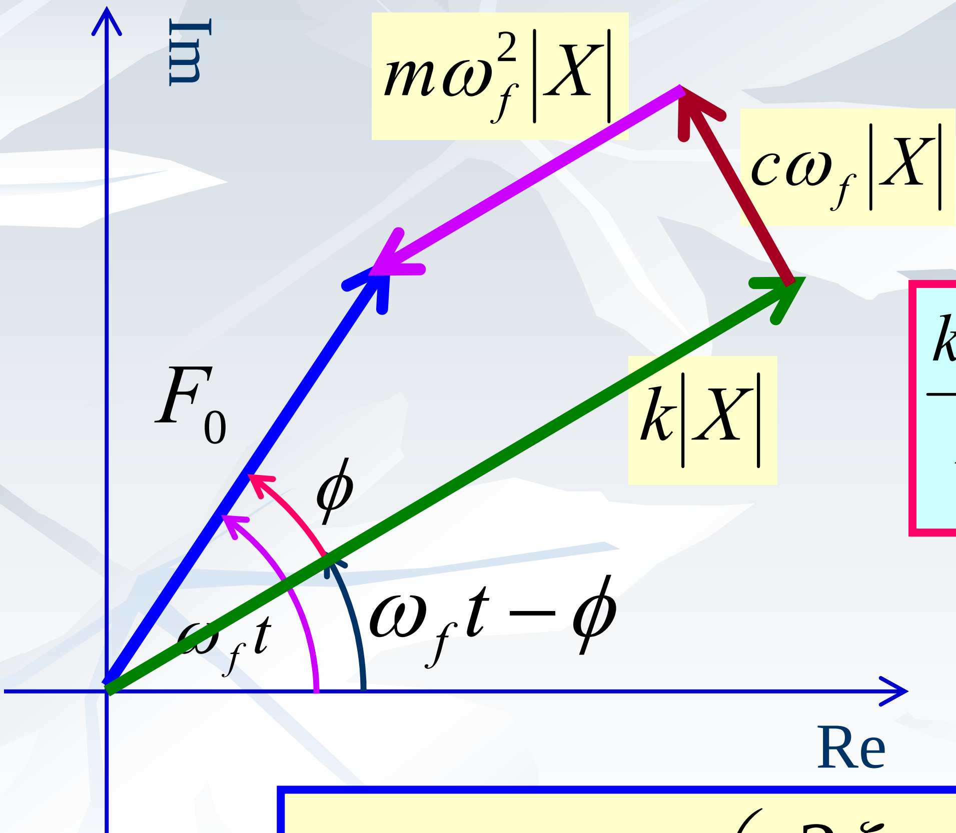
# اشکال مختلف دیگرام فازوری: ۱ $\omega_f=0$




$$\frac{k|X|}{F_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}=1$$

$$\tan\phi=\frac{2\xi r}{1-r^2}=0$$

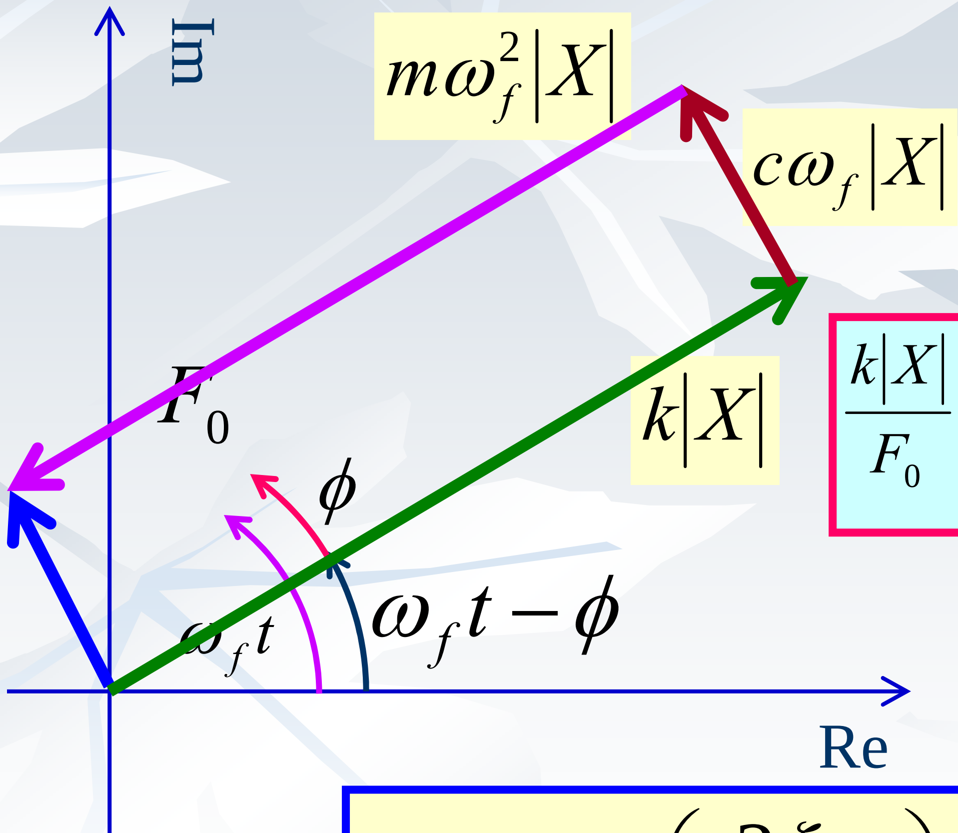
# اشکال مختلف دیگرام فازوری: ۲  $\omega_f < \omega_n$




$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} > 1$$

$$0 < \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) < 90$$

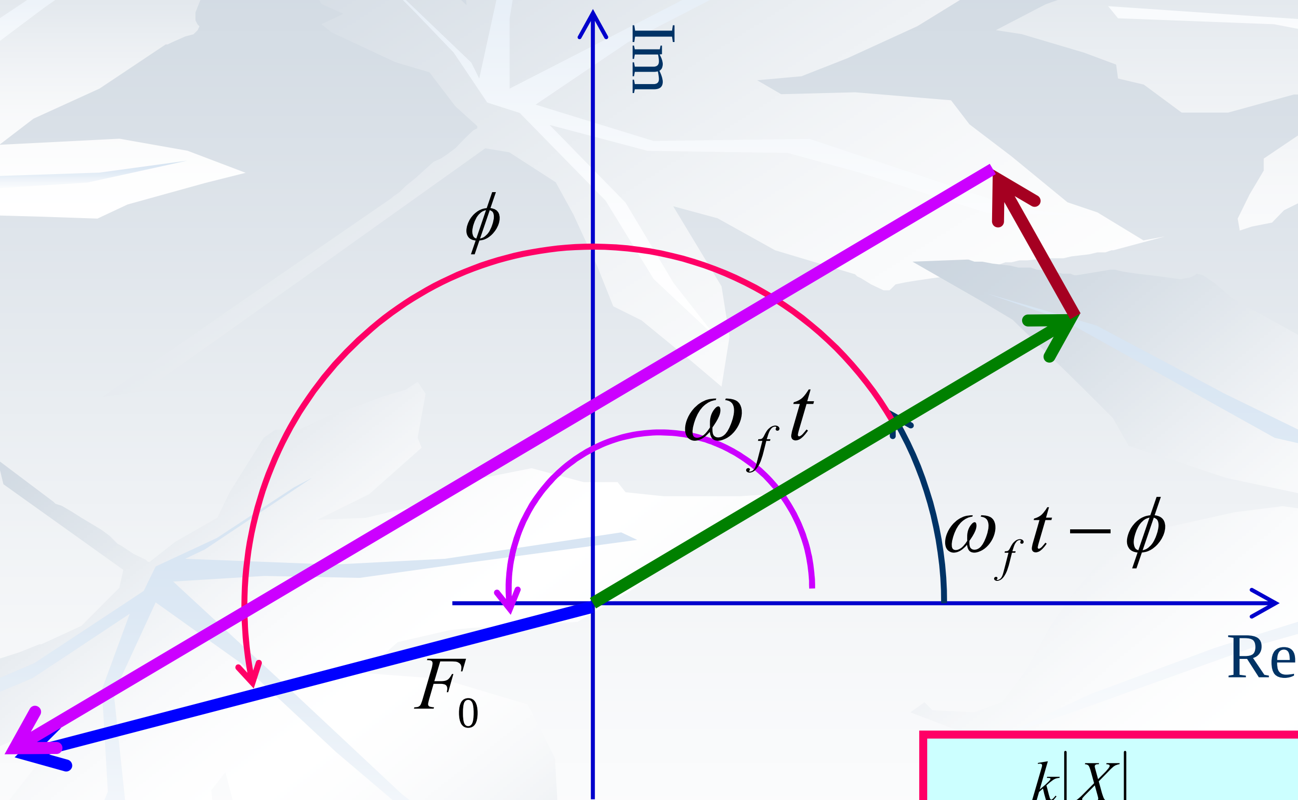
# اشکال مختلف دیگرام فازوری: ۲ $\omega_f = \omega_n$




$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} = \frac{k}{c\omega_f} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) = 90$$

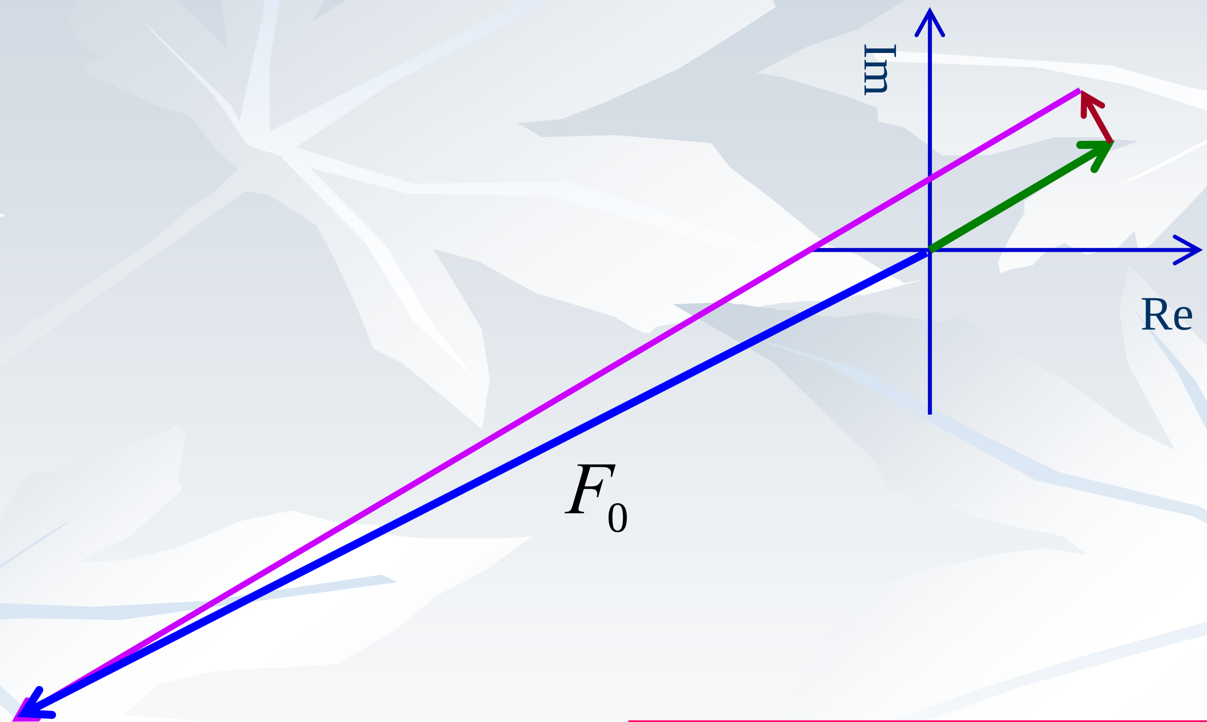
# اشکال مختلف دیگرام فازوری: ۲ $\omega_f > \omega_n$




$$0 < \frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} < \infty$$

$$90 < \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) < 180$$

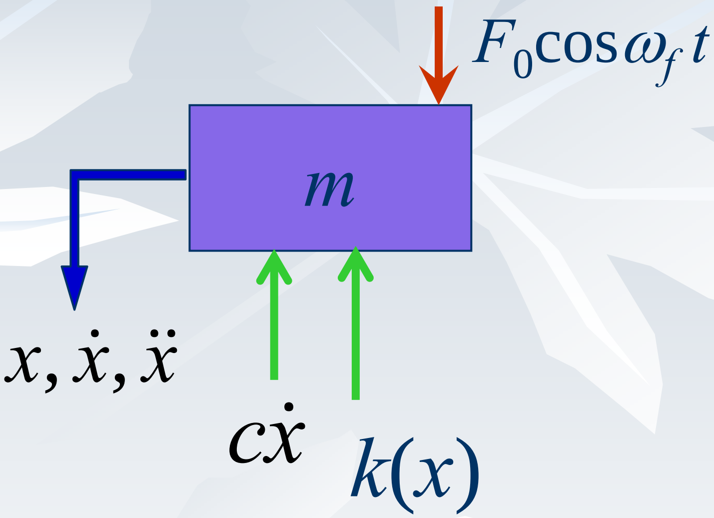
# اشکال مختلف دیگرام فازوری: ۲ $\omega_f >> \omega_n$




$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) \to 180$$

$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \to 0$$

# نیروی انتقال یافته به پایه




- نیرو از طریق فنر و میراگر به پایه منتقل می گردد.
- این نیرو در مقاومت پایه و سروصدا و طراحی یک فونداسیون مناسب اهمیت خواهد داشت.

$$F(t) = F_S(t) + F_D(t) = kx + c\dot{x}$$

$$F(t) = kX\cos(\omega_f t - \phi) - c\omega_f X \sin(\omega_f t - \phi)$$

# نیروی انتقال یافته به پایه

$$F(t) = kX\cos(\omega_f t - \phi) - c\omega_f X\sin(\omega_f t - \phi) = F_T\cos(\omega_f t - \psi)$$

$$kX\left[\cos(\omega_f t)\cos(\phi) + \sin(\omega_f t)\sin(\phi)\right] - c\omega_f X\left[\sin(\omega_f t)\cos(\phi) - \cos(\omega_f t)\sin(\phi)\right]$$
$$= F_T\left[\cos(\omega_f t)\cos(\psi) + \sin(\omega_f t)\sin(\psi)\right]$$

$$\left(k\cos(\phi) + c\omega_f\sin(\phi)\right)X\cos(\omega_f t) + \left(k\sin(\phi) - c\omega_f\cos(\phi)\right)X\sin(\omega_f t)$$
$$= F_T\left[\cos(\omega_f t)\cos(\psi) + \sin(\omega_f t)\sin(\psi)\right]$$

# نیروی انتقال یافته به پایه

$$\left.\begin{aligned} F_T\cos(\psi) &= \left(k\cos(\phi)+c\omega_f\sin(\phi)\right)X \\ F_T\sin(\psi) &= \left(k\sin(\phi)-c\omega_f\cos(\phi)\right)X \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} F_T^2 = {} & X^2\left(k^2\cos^2(\phi)+\left(c\omega_f\right)^2\sin^2(\phi)+2k\cos(\phi)c\omega_f\sin(\phi)\right) \\ & + X^2\left(k^2\sin^2(\phi)+\left(c\omega_f\right)^2\cos^2(\phi)-2k\sin(\phi)c\omega_f\cos(\phi)\right) \end{aligned}$$

$$F_T^2 = X^2\left(k^2+\left(c\omega_f\right)^2\right)$$

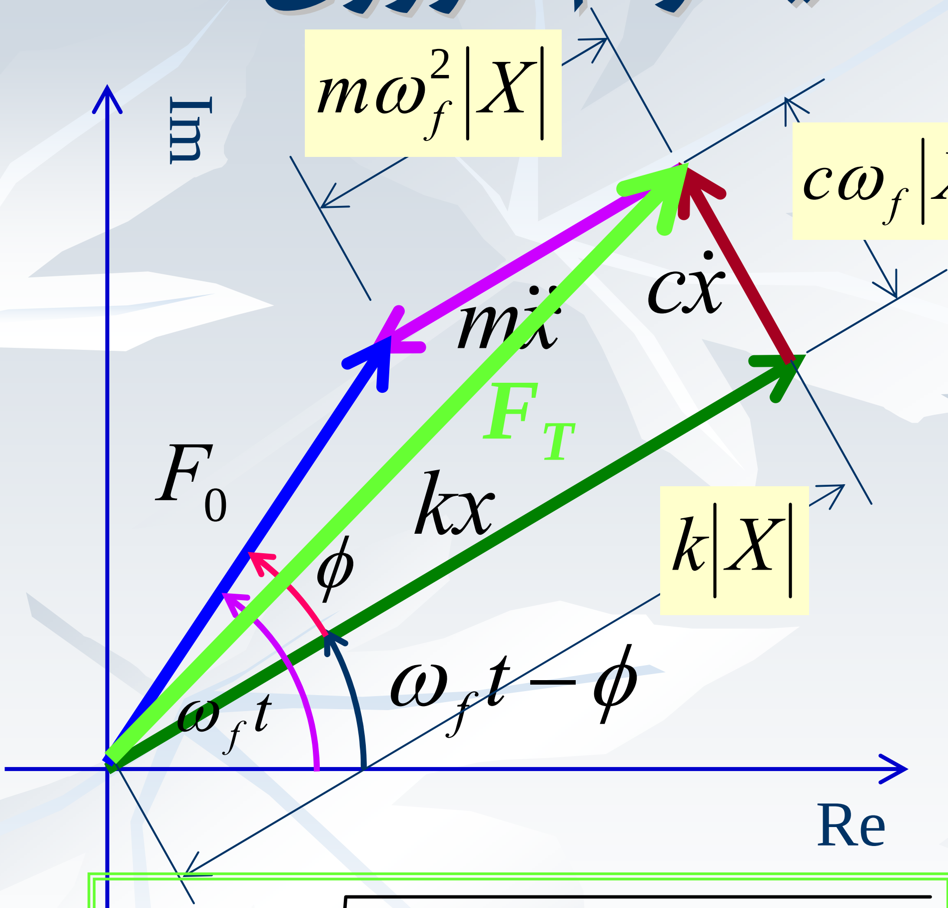
# نیروی انتقال یافته به پایه

$$F_T^2 = k^2 X^2 \left( 1 + \left( \frac{c\omega_f}{k} \right)^2 \right)$$

$$F_T = kX\sqrt{1 + (2\xi r)^2} = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

# نیروی انتقال یافته دیاگرام فازوری




$$F_0^2=\left(k-m\omega_f^2\right)^2|X|^2+\left(c\omega_f\right)^2|X|^2$$

$$|X|=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega_f^2\right)^2+\left(c\omega_f\right)^2}}$$

$$F_T=\sqrt{k^2|X|^2+\left(c\omega_f\right)^2|X|^2}$$

$$=\frac{F_0\sqrt{k^2+\left(c\omega_f\right)^2}}{\sqrt{\left(k-m\omega_f^2\right)^2+\left(c\omega_f\right)^2}}$$

$$\boxed{\frac{F_T}{F_0}=\sqrt{\frac{1+\left(2\xi r\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}$$

# ارتعاشات مکانیکی ۶
# ارتعاش اجباری با تحریک هارمونیک
# (تحریک پایه Base Excitation)

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

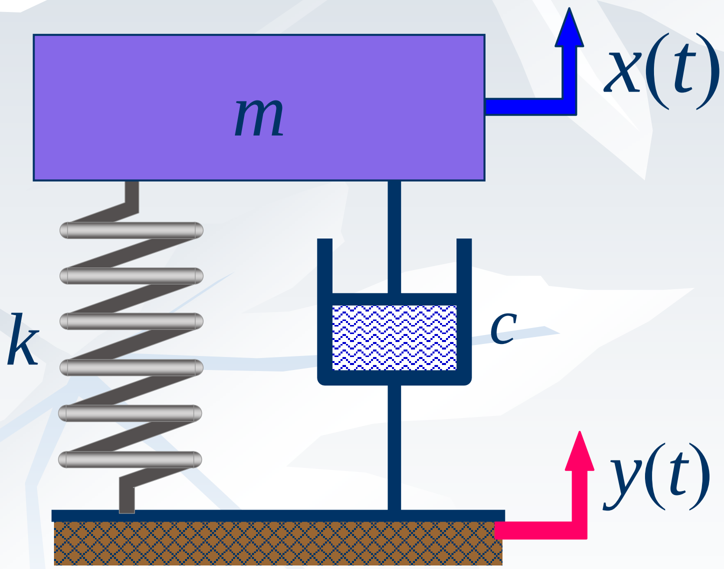
دانشگاه بیرجند

# Base Excitation تحریک پایه

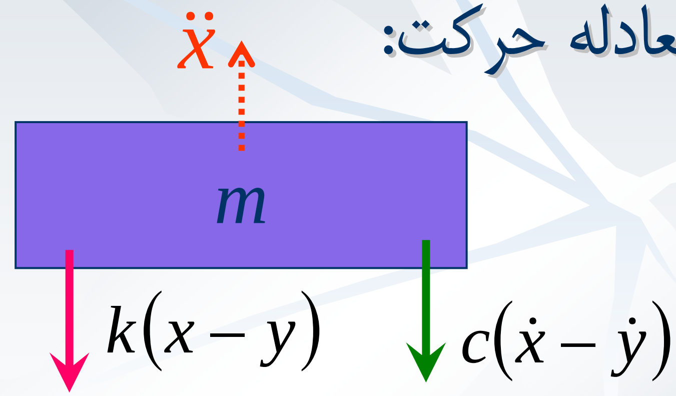
- یکی از شاخه های مهم تحلیل ارتعاشی است
  - که عبور تحریک از طریق پایۀ مرتعش را به سازه پیشگیری می کند.
- عایق سازی ارتعاشات
  - ارتعاشات در اتومبیل
  - انتقال ارتعاشات در کارخانه یا کارگاه به دستگاه حساس
  - طراحی ضربه گیر برای وسایل حساس
  - درایو کامپیوتر و....

# Base Excitation تحریک پایه

- در بعضی از مسائل ارتعاشی حرکت پایه باعث ار تعاش جسم می شود که تحت عنوان تحریک پایه یا جابجائی اجباری شناخته می شوند.




- معادله حرکت:




$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m\ddot{x} + k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = 0 \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

# تحریک پایه هارمونیک

- اگر تحریک پایه به صورت هارمونیک باشد: $y(t)=Y_b\sin(\omega_b t)$
- آنگاه: $m\ddot{x}=-k(x-y)-c(\dot{x}-\dot{y})$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kY_b\sin\omega_b t+c\omega_b Y_b\cos\omega_b t$$

- این معادله به شکل زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=A\sin(\omega_b t-\alpha)$$

$$A=Y_b\sqrt{k^2+(c\omega_b)^2}\qquad \alpha=\tan^{-1}\left(-\frac{c\omega_b}{k}\right)$$

- حال برای آن حلی ارائه می گردد

# پاسخ تحریک پایه هارمونیک

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\sin\left(\omega_b t - \alpha\right)$$

- برای بدست آوردن پاسخ:

$$x_p\left(t\right) = X\sin\left(\omega_b t - \alpha - \phi_1\right)$$

- در نتیجه:

$$\boxed{X = \frac{A}{\sqrt{\left(k - m\omega_b^2\right)^2 + \left(c\omega_b\right)^2}}}, \qquad \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega_b}{k - m\omega_b^2}\right)$$

- حال اگر $\phi = \alpha + \phi_1$

# پاسخ تحریک پایه هارمونیک

- درنتیجه

اتحاد مثلثاتی

$$\tan\phi = \frac{\tan\alpha + \tan\phi_1}{1-\tan\alpha\tan\phi_1} = \frac{-\dfrac{c\omega_b}{k} + \dfrac{c\omega_b}{k-m\omega_b^2}}{1-\left(-\dfrac{c\omega_b}{k}\right)\left(\dfrac{c\omega_b}{k-m\omega_b^2}\right)} = \frac{\dfrac{\left(k-k+m\omega_b^2\right)c\omega_b}{\left(k-m\omega_b^2\right)k}}{\dfrac{\left(k-m\omega_b^2\right)k+\left(c\omega_b\right)^2}{\left(k-m\omega_b^2\right)k}}$$

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{cm\omega_b^3}{k\left(k-m\omega_b^2\right)+\left(c\omega_b\right)^2}\right)}$$

# پاسخ تحریک پایه هارمونیک

$$X=\frac{A}{\sqrt{\left(k-m\omega_b^2\right)^2+\left(c\omega_b\right)^2}},\quad A=Y_b\sqrt{k^2+\left(c\omega_b\right)^2}$$

$$\frac{X}{Y_b}=\frac{\sqrt{k^2+\left(c\omega_b\right)^2}}{\sqrt{\left(k-m\omega_b^2\right)^2+\left(c\omega_b\right)^2}}=\frac{\sqrt{1+\left(2\xi r\right)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\boxed{\phi=\tan^{-1}\left(\frac{cm\omega_b^3}{k\left(k-m\omega_b^2\right)+\left(c\omega_b\right)^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi r^3}{\left(1-r^2\right)+\left(2\xi r\right)^2}\right)}$$

# پاسخ تحریک پایه هارمونیک

- در $r=0$

$$\left.\frac{X}{Y_b}\right|_{r=0}=\left.\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\right|_{r=0}=1 \qquad \phi_{r=0}=\tan^{-1}\left.\left(\frac{2\xi r^3}{(1-r^2)+(2\xi r)^2}\right)\right|_{r=0}=0$$

- $r=1$

$$\left.\frac{X}{Y_b}\right|_{r=1}=\left.\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\right|_{r=1}=\frac{\sqrt{1+4\xi^2}}{2\xi} \qquad \phi_{r=1}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2\xi}\right)$$

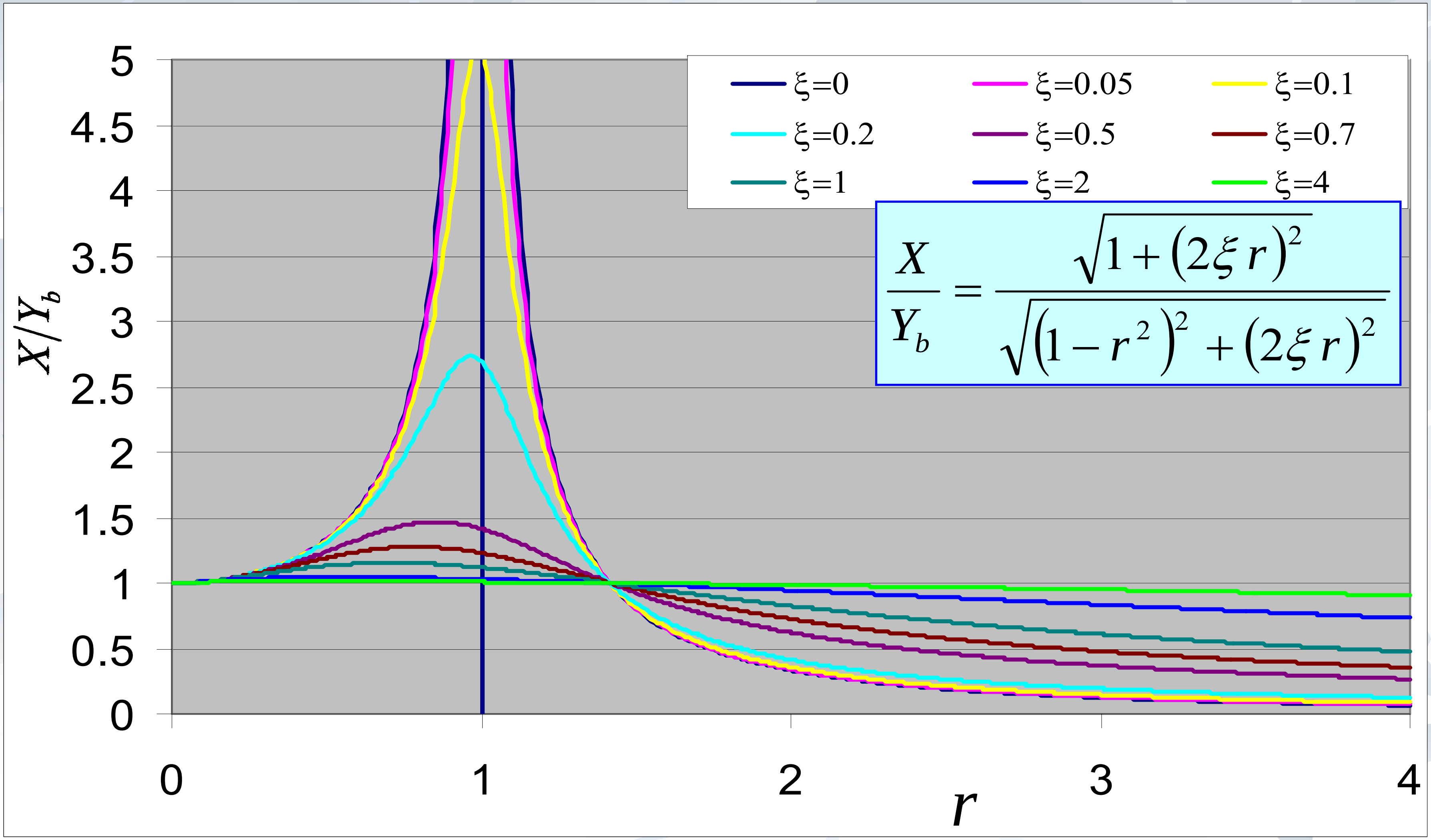
- $r=\sqrt{2}$

$$\left.\frac{X}{Y_b}\right|_{r=\sqrt{2}}=\left.\frac{\sqrt{1+8\xi^2}}{\sqrt{1+8\xi^2}}\right|_{r=\sqrt{2}}=1 \qquad \phi_{r=\sqrt{2}}=\tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}\xi}{8\xi^2-1}\right)$$

- $r\rightarrow\infty$

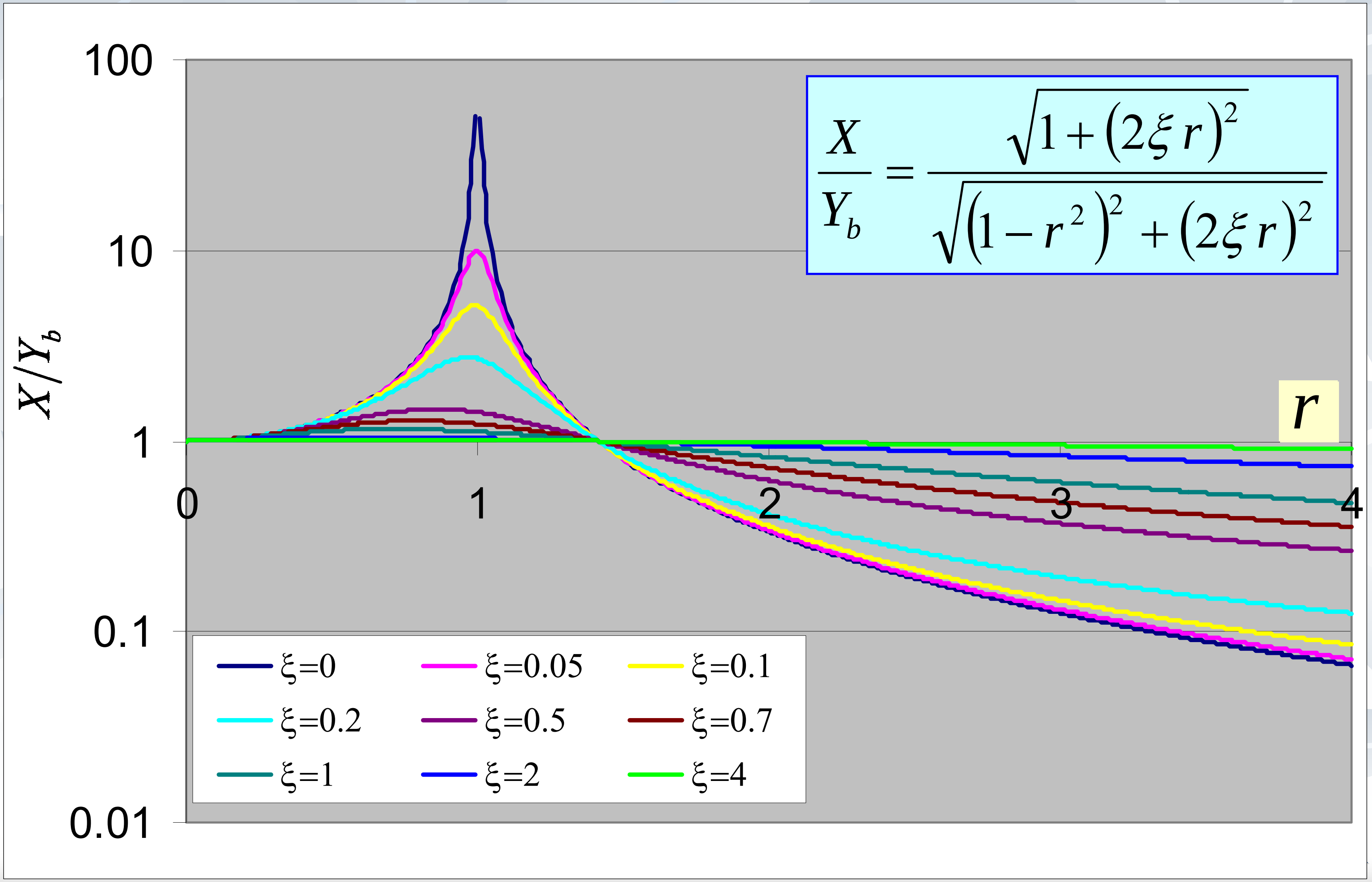
$$\left.\frac{X}{Y_b}\right|_{r\to\infty}=\left.\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\right|_{r\to\infty}=0 \qquad \phi_{r\to\infty}=\tan^{-1}\left.\left(\frac{2\xi r^3}{(1-r^2)+(2\xi r)^2}\right)\right|_{r\to\infty}=90$$

# دامنه پاسخ خصوصی (ضریب انتقال $T_d$)

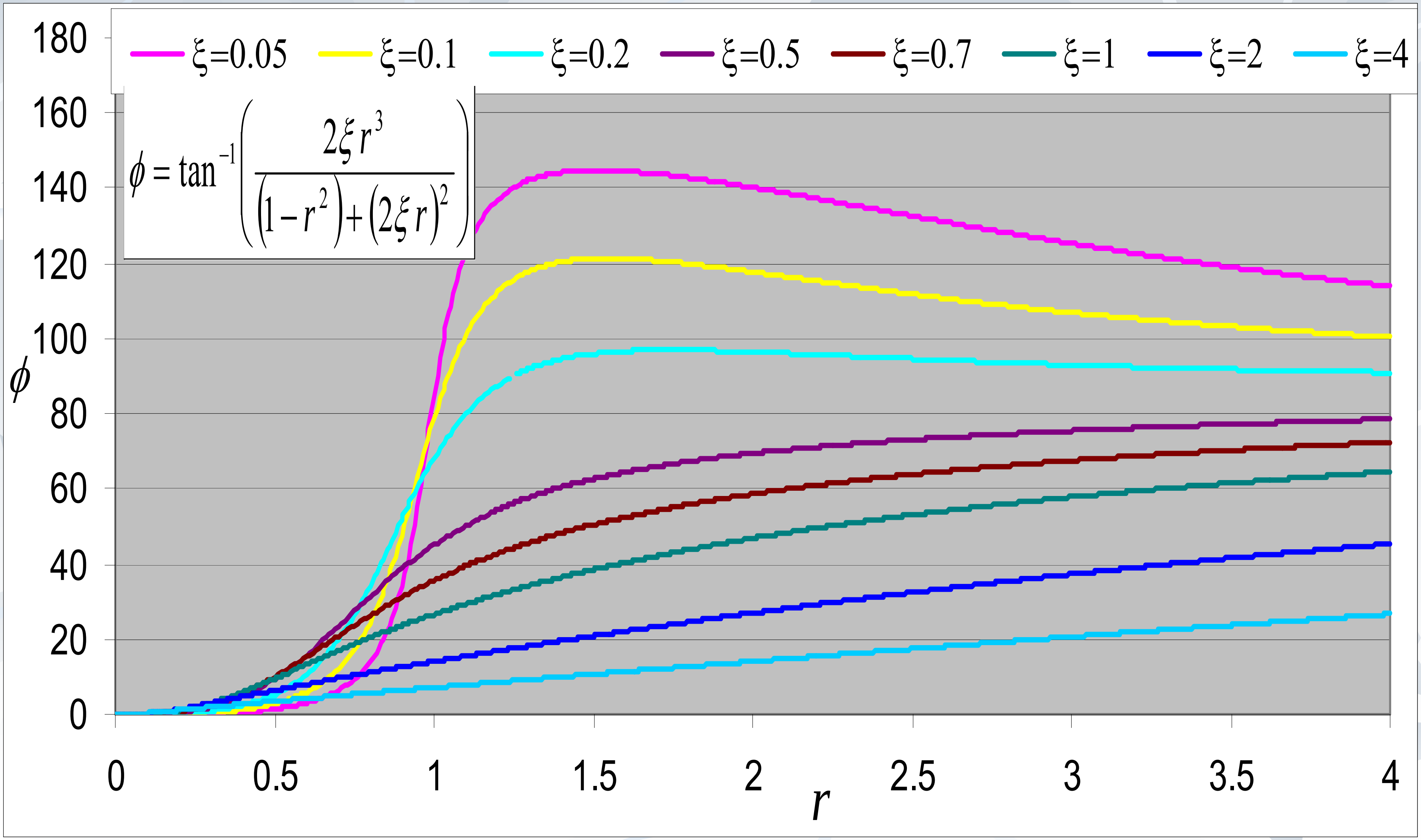



$$\frac{X}{Y_b}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

# دامنه پاسخ خصوصی (ضریب انتقال $T_d$)



# زاویه فاز


ξ=0.05
ξ=0.1
ξ=0.2
ξ=0.5
ξ=0.7
ξ=1
ξ=2
ξ=4
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r^3}{(1-r^2)+(2\xi r)^2}\right)$
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
$\phi$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
$r$

# ضریب انتقال بیشینه

$$\frac{X}{Y_b}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{X}{Y_b}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{\dfrac{2(4\xi^2 r)\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}{2\sqrt{1+(2\xi r)^2}}-\dfrac{\left[2(-2r)(1-r^2)+2\times 4\xi^2 r\right]\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}=0$$

$$(2\xi^2 r)\left[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2\right]+\left[(1-r^2)r-2\xi^2 r\right]\left[1+(2\xi r)^2\right]=0$$

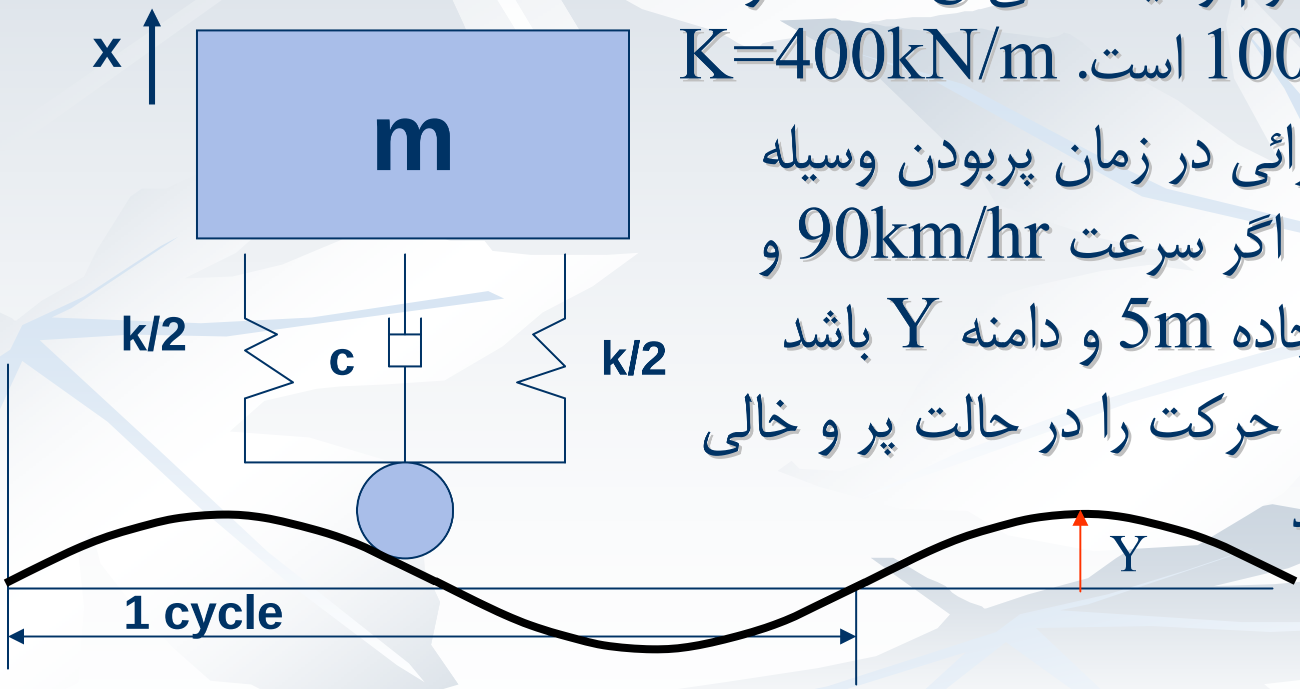
$$(-2r^2+r^4)(2\xi^2)+(1-r^2)\left[1+(2\xi r)^2\right]=0$$

$$1-r^2-2\xi^2 r^4=0\Rightarrow r^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+8\xi^2}}{4\xi^2}$$

$$\boxed{r_{Peak}=\frac{\sqrt{\sqrt{1+8\xi^2}-1}}{2\xi}}$$

# مثال

- شکل وسیله نقلیه ای را روی یک جاده ناهموار نشان می دهد. فرض شده که وسیله دارای یک درجه آزادی در جهت قائم است. همچنین چرخ از جاده جدا نمی شود، جرم وسیله خالی 250kg و با بار1000kg است. K=400kN/m و نسبت میرائی در زمان پربودن وسیله 0.5 است. اگر سرعت 90km/hr و طول موج جاده 5m و دامنه Y باشد نسبت دامنه حرکت را در حالت پر و خالی بدست آورید



- نسبت دامنه

$$\frac{X}{Y_b}=\sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{\left(1-r^2\right)^2+(2\xi r)^2}}$$

- داده ها:

$$v=90\,\mathrm{km/hr}=25\,m/s$$

$$\omega_b=\frac{2\pi}{\tau}\quad \xi_{full}=0.5$$

$$\tau=\frac{L}{v}=\frac{5}{25}=0.2\sec$$

$$\omega_b=\frac{2\pi}{0.2}=31.42\ rad/s$$

- در حال پربودن وسیله:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m_{full}}}=\sqrt{\frac{400000}{1000}}=20\ rad/s\quad r=\frac{\omega_b}{\omega_n}=\frac{31.42}{20}=1.571\quad \xi=0.5$$

$$c=2\sqrt{km}\,\xi=2\sqrt{4\times10^8}\times0.5=20000N.s/m$$

# ادامه

- در نتیجه نسبت دامنه در حال پر بودن

$$\frac{X}{Y_b}=\sqrt{\frac{1+(2\times 0.5\times 1.571)^2}{(1-1.571^2)^2+(2\times 0.5\times 1.571)^2}}=0.866$$

- در حالت بدون بار

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m_{empt}}}=\sqrt{\frac{400000}{250}}=40\ rad/s \quad r=\frac{\omega_b}{\omega_n}=\frac{31.42}{40}=0.785$$

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{20000}{2\sqrt{4\times 10^5\times 250}}=1$$

$$\frac{X}{Y_b}=\sqrt{\frac{1+(2\times 1\times 0.7854)^2}{(1-0.7854^2)^2+(2\times 1\times 0.7854)^2}}=1.326$$

# مثال

- سرعت بحرانی اتومبیلی را بدست آورید که در یک جاده با سطح مواج سینوسی با طول موج ۱۵ متر و دامنه 0.075 متر حرکت می کند. فنرهای اتومبیل تحت وزن خودش 0.125 متر فشرده شده است. همچنین دامنه حرکت را در سرعت 50km/hr بدست آورید.
- حل: فرکانس طبیعی سیستم: $\omega_n = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{9.81/0.125} = 8.86 \text{ rad/s}$
- فرکانس حرکت پایه:

$$\begin{matrix} v & 1 \\ 15 & \tau \end{matrix} \qquad \tau_b = \frac{15}{v} \Rightarrow \omega_b = \frac{2\pi v}{15}$$

- سرعت بحرانی در تشدید

$$\omega_n = \omega_b \Rightarrow 8.86 = \frac{2\pi v}{15} \Rightarrow v = \frac{15 \times 8.86}{2\pi} = 21.15 \ m/s = 76.14 \ km/hr$$

# ادامه

- دامنه در سرعت 50km/hr

$$v = \frac{50}{3.6} = 13.89\ m/s$$

$$\omega_b = \frac{2\pi \times 13.89}{15} = 5.818\ rad/s \qquad r = \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{5.818}{8.859} = 0.657$$

$$\frac{X}{Y_b} = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{\left(1-r^2\right)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1}{\left(1-0.657^2\right)} = 1.758$$

$$X = 1.758 Y_b = 0.132\ m = 13.2\, cm$$

# توصیف مختلط حرکت پایه

- حال چنانچه y به صورت مختلط توصیف گردد $y(t) = Y_b e^{i\omega_b t}$
- آنگاه

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY_b e^{i\omega_b t} + ic\omega_b Y_b e^{i\omega_b t}$$

- با فرض

$$x_p = Xe^{i\omega_b t}$$

$$\left[k - m\omega_b^2 + ic\omega_b\right] X e^{i\omega_b t} = \left(k + ic\omega_b\right) Y_b e^{i\omega_b t}$$

$$\boxed{\frac{X}{Y_b} = \frac{k + ic\omega_b}{k - m\omega_b^2 + ic\omega_b} = \frac{1 + i2\xi r}{1 - r^2 + i2\xi r}}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

# پاسخ

- ضریب انتقال

$$\frac{X}{Y_b} = \frac{|X|}{Y_b} e^{-i\phi} = \frac{|1 + i\,2\xi\, r|e^{i\gamma}}{|1 - r^2 + i\,2\xi\, r|e^{i\lambda}} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\, r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi\, r)^2}} e^{i(\gamma - \lambda)}$$

$$\gamma = \tan^{-1}(2\xi\, r) \qquad \lambda = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\, r}{1 - r^2}\right) \quad \Rightarrow \phi = \lambda - \gamma$$

$$\tan\phi = \frac{\dfrac{2\xi\, r}{1 - r^2} - 2\xi\, r}{1 + (2\xi\, r)\left(\dfrac{2\xi\, r}{1 - r^2}\right)} = \frac{\dfrac{2\xi\, r(1 - 1 + r^2)}{1 - r^2}}{\dfrac{1 - r^2 + (2\xi\, r)^2}{1 - r^2}} = \frac{2\xi\, r^3}{1 - r^2 + (2\xi\, r)^2}$$

# پاسخ

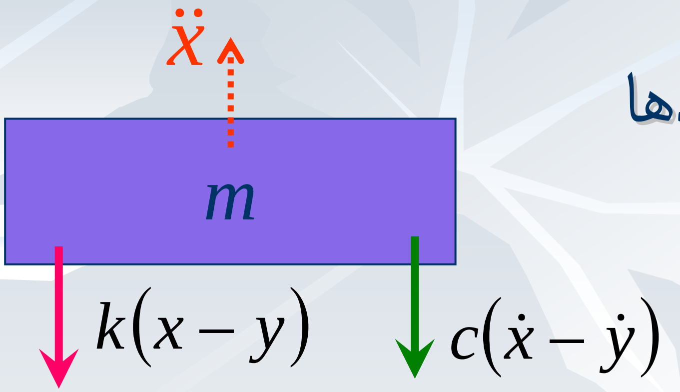
- در نتیجه، ضریب انتقال:

$$\frac{|X|}{Y_b} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\xi r)^2}}$$

- زاویه فاز:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r^3}{1-r^2+(2\xi r)^2}\right)$$

# نیروی انتقال یافته از پایه



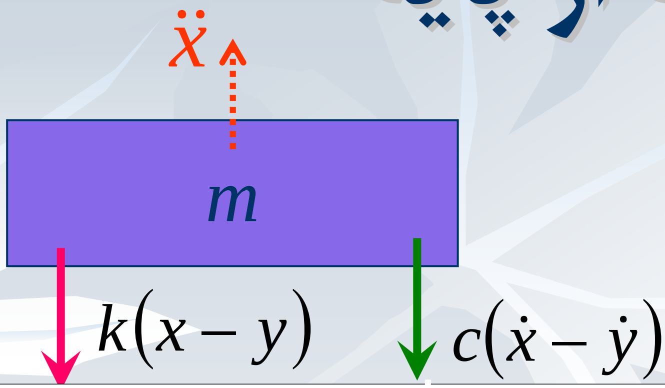

- نیروی انتقالی از پایه در بسیاری از کاربردها بخصوص عایق سازی پایه اهمیت دارد
- نیروی انتقالی از پایه ترکیب نیروی فنر و میراگر می باشد:

$$F_b(t) = k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = -m\ddot{x}$$

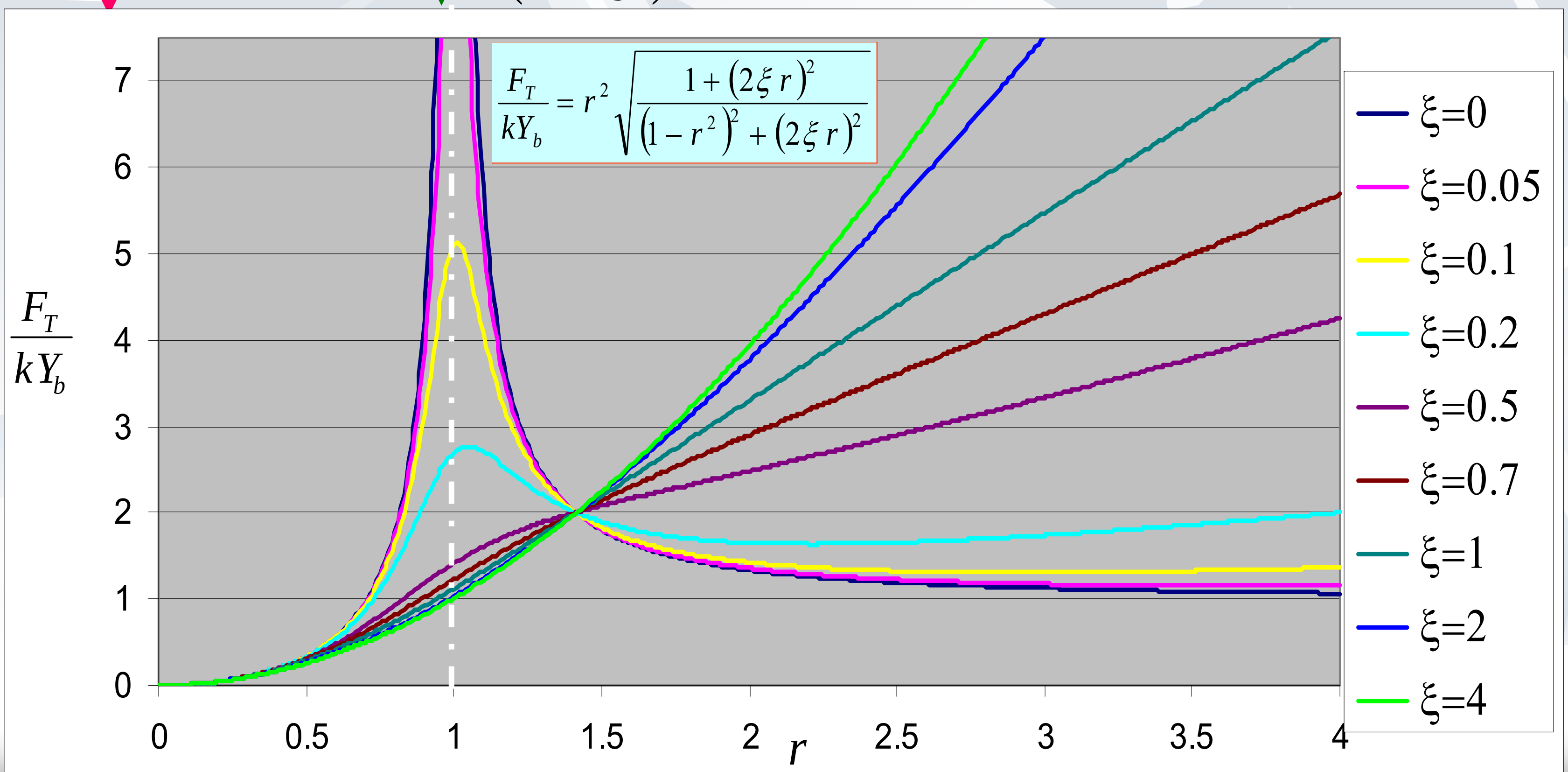
$$F_b(t) = m\omega_b^2 X \sin(\omega_b t - \phi) = F_T \sin(\omega_b t - \phi)$$

$$F_T = m\omega_b^2 X = \frac{m}{k}\omega_b^2 k Y_b \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

# نیروی انتقال یافته از پایه

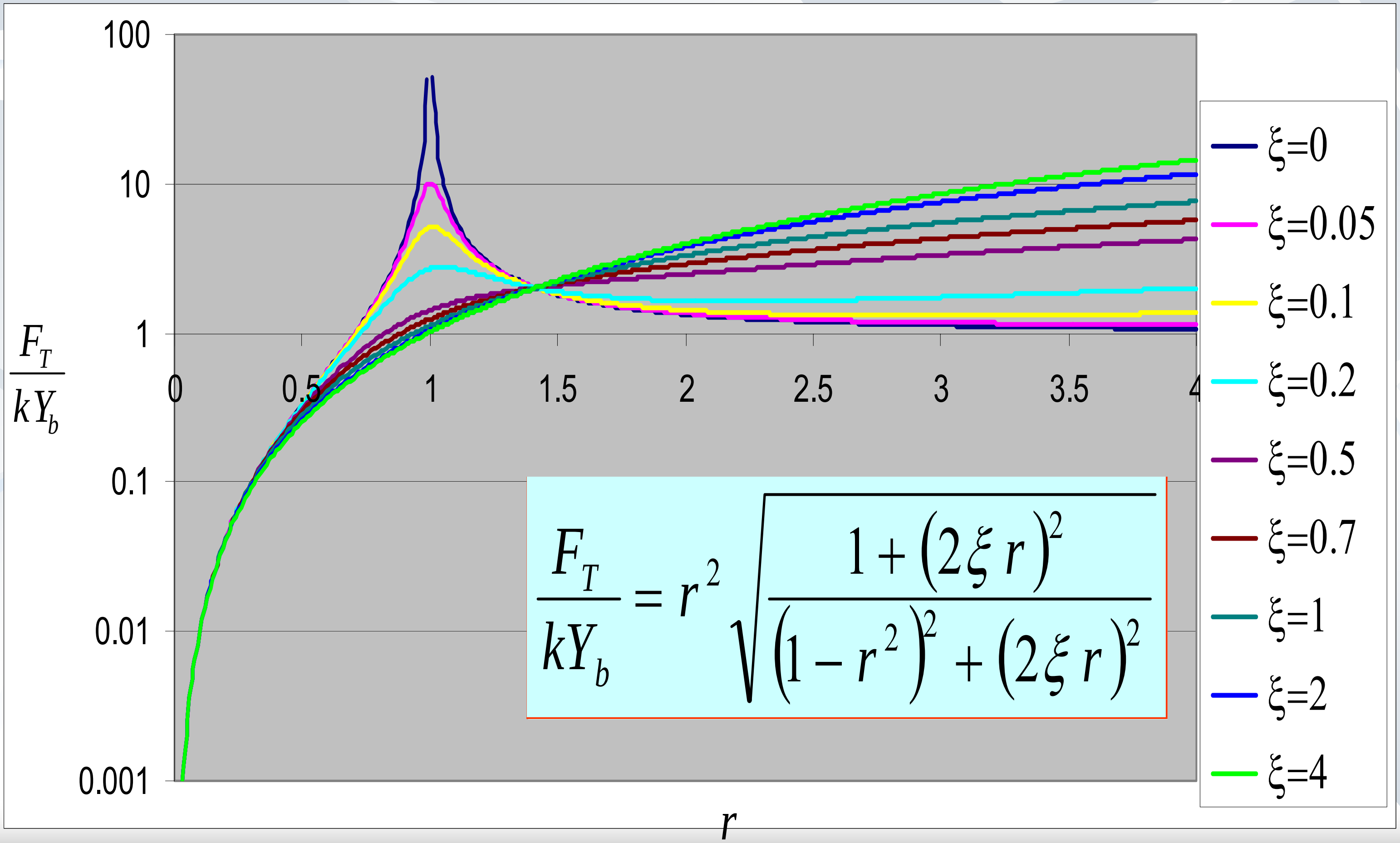



$$\frac{F_T}{kY_b} = r^2 \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



# نمایش لگاریتمی

- گاهی برای نمایش از ترسیمه لگاریتمی برای راحتی استفاده می شود



# حرکت نسبی جرم به پایه

- حال اگر جابجائی نسبی $x$-$y$ را $z$ بنامیم:

$$m(\ddot{x}-\ddot{y})+c(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=-m\ddot{y}$$

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=-m\ddot{y}$$

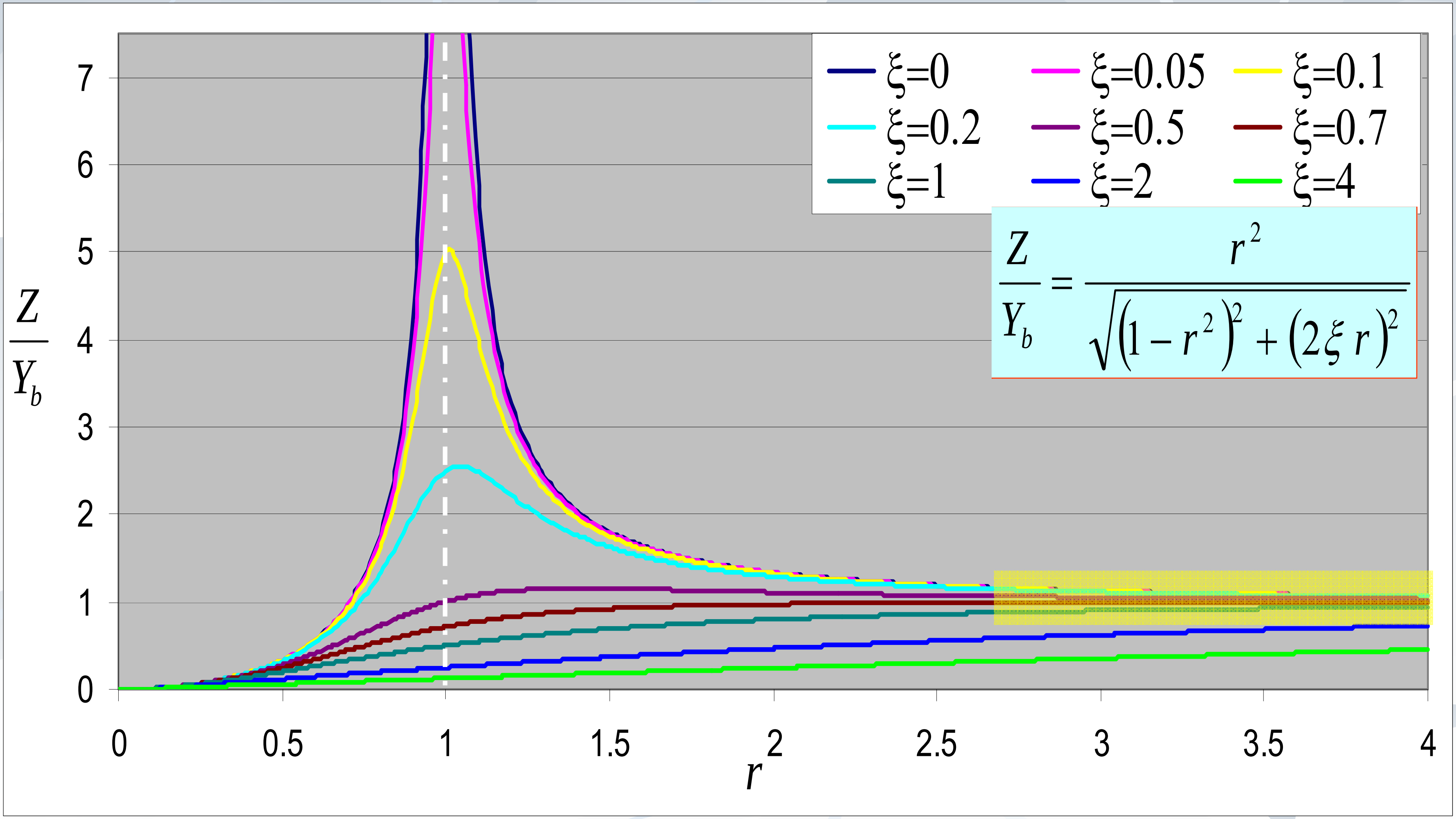
- $y(t)=Y_b\sin(\omega_b t)$

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=m\omega_b^2 Y_b\sin(\omega_b t)$$

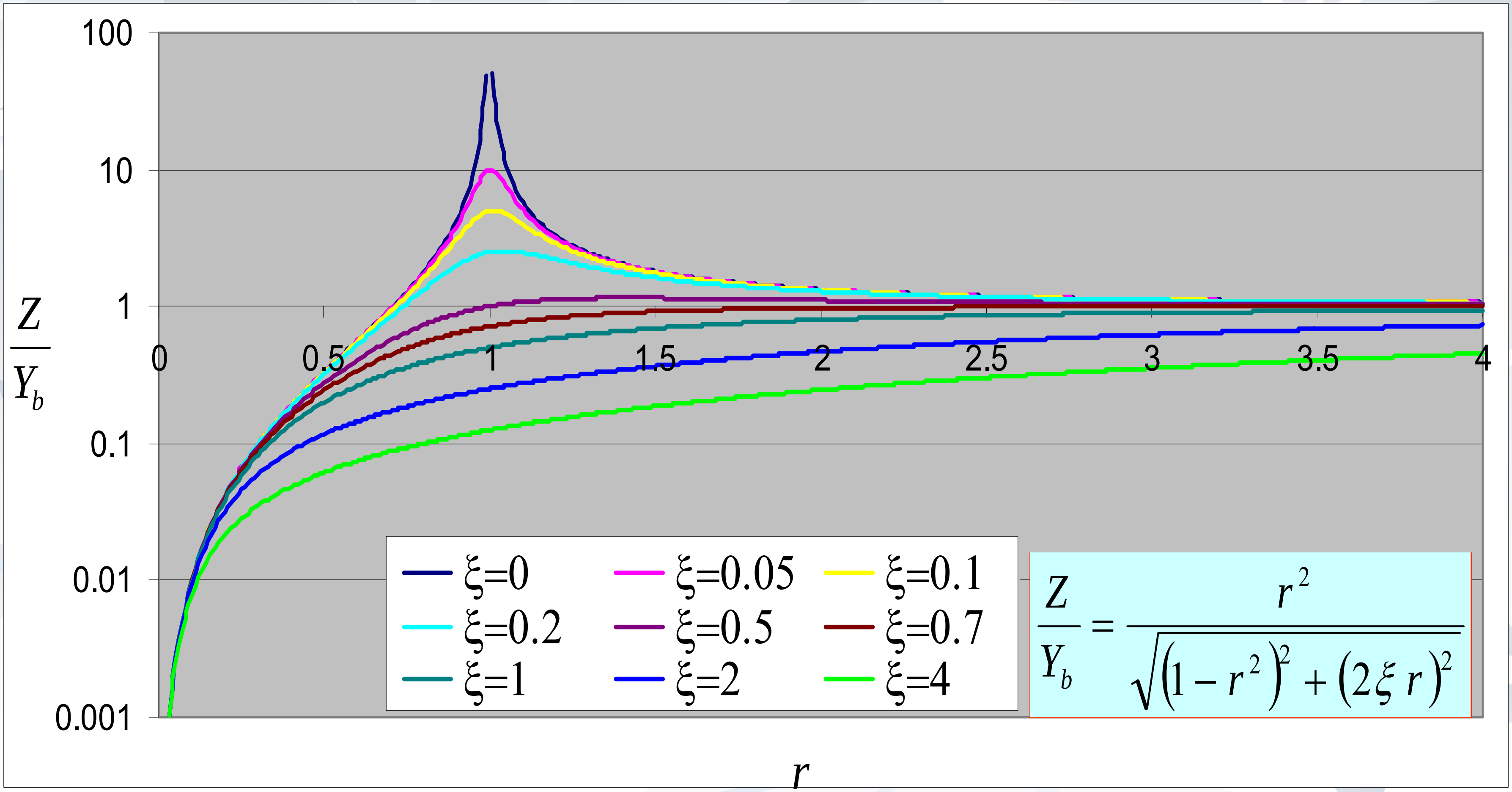
- جوابی به صورت $z(t)=Z\sin(\omega_b t-\psi)$ فرض می شود

$$\frac{Z}{Y_b}=\frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}} \qquad \psi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

# حرکت نسبی جرم به پایه



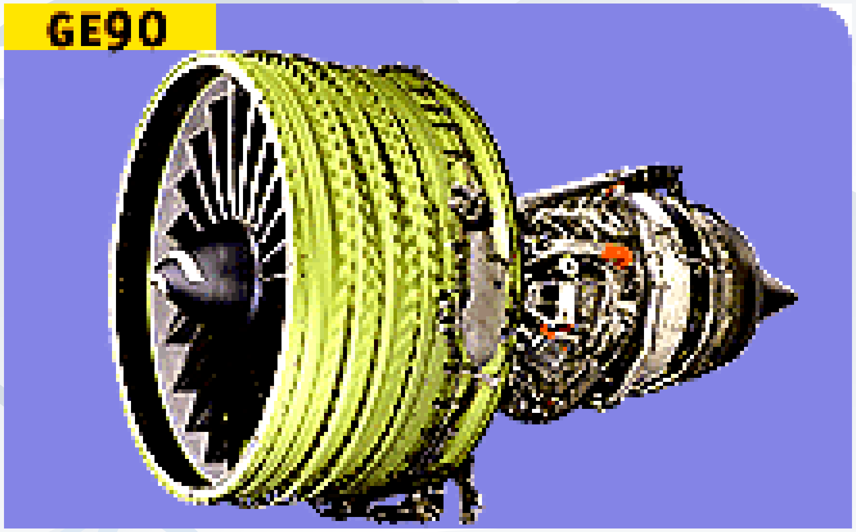
# نمایش لگاریتمی




$$\frac{Z}{Y_b}=\frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

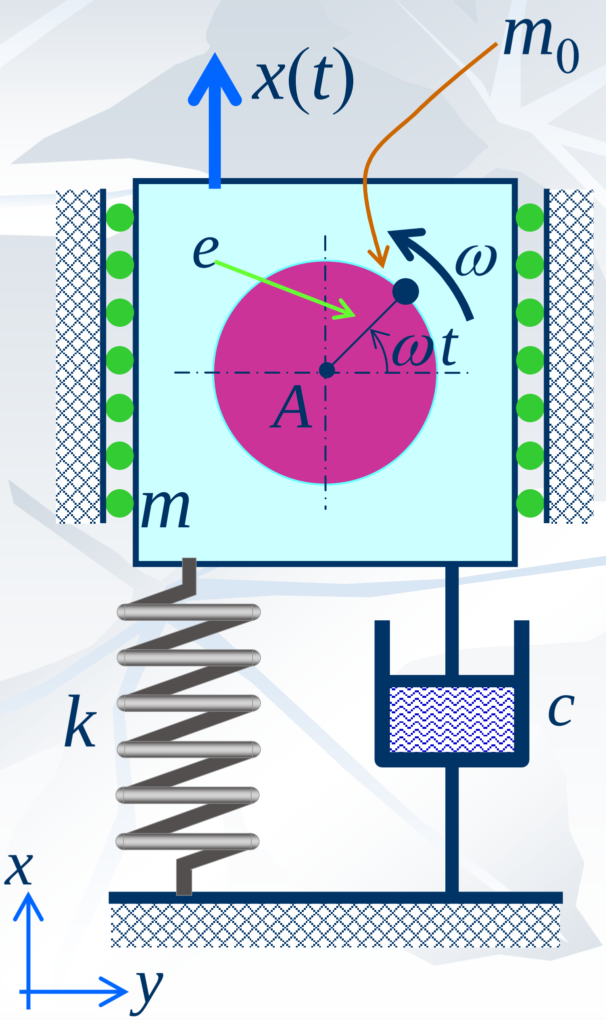
# تحریک توسط بار نامیزان درحال دوران

- بار نامیزان در بسیاری از ماشین آلات که دارای قسمت در حال دواران هستند وجود دارد.
  - ماشین لباس شوئی
  - چرخ اتومبیل
  - ماشین تراش
  - کولر، دمنده، Fan......



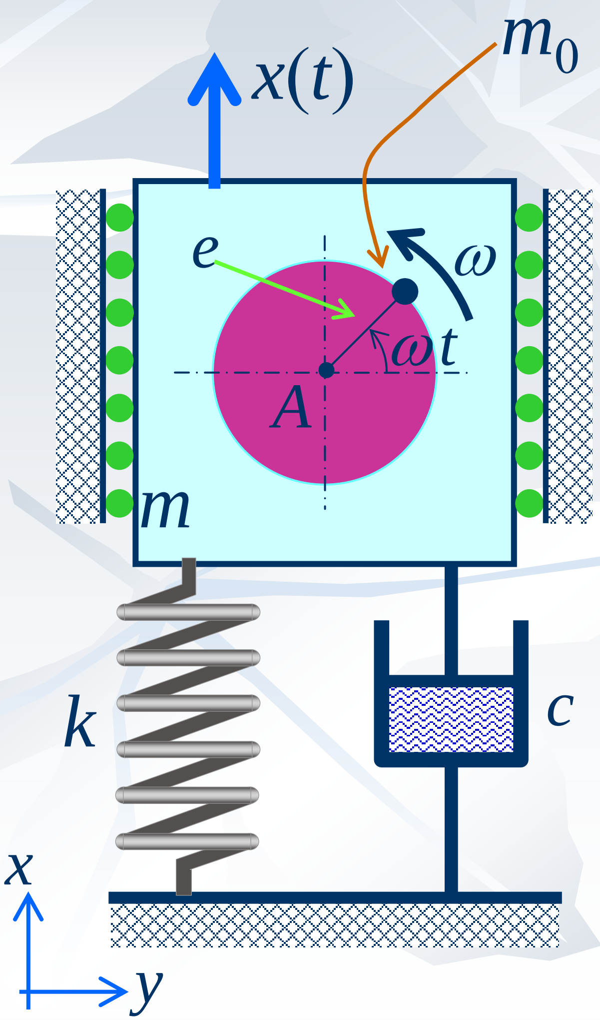

- **هدف:** شناخت ارتعاشات حاصل و اثرات آن و درصورت لزوم کم نمودن تاثیر آن

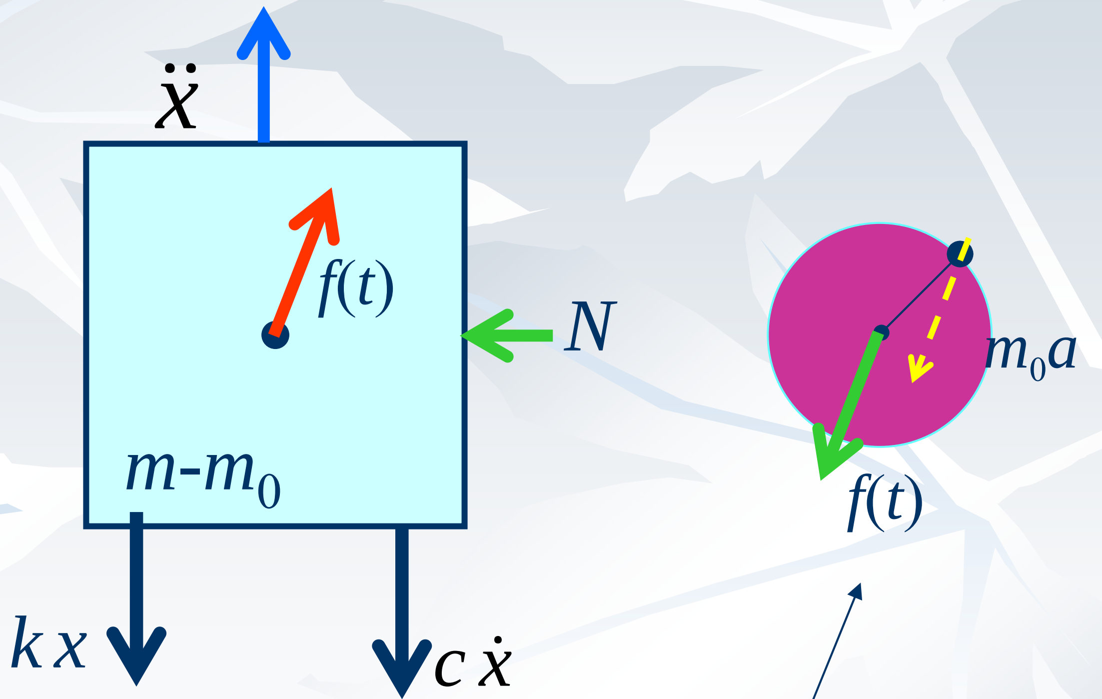
# تحریک توسط بار نامیزان درحال دوران




- ماشینی به جرم کل $m$ را در نظر بگیرید که دارای قسمت درحال دورانی باشد که دارای سرعت زاویه ای $\omega$ است.
- قسمت نامیزان دارای جرم نامیزان $m_0$ و خروج از مرکز $e$ است.
- $em_0$ را مقدار نامیزانی گویند.

# تحریک توسط بار نامیزان درحال دوران




$$\vec{f}(t) = m_0 \vec{a}$$

$$= m_0 \left( -e\omega^2 \left( \hat{j}\cos\omega t + \hat{i}\sin\omega t \right) + \ddot{x}\,\hat{i} \right)$$

# تحریک توسط بار نامیزان درحال دوران

- معادله حرکت در جهت $x$:

$$(m-m_0)\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+f_x(t)$$

$$(m-m_0)\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+m_0\left(e\omega^2(\sin\omega t)-\ddot{x}\right)$$

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=m_0e\omega^2\sin(\omega t)}$$

- پاسخ حالت پایدار:

$$x_p(t)=X\sin(\omega t-\phi)$$

$$X=\frac{m_0e\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}},\qquad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

# تحریک توسط بار نامیزان درحال دوران

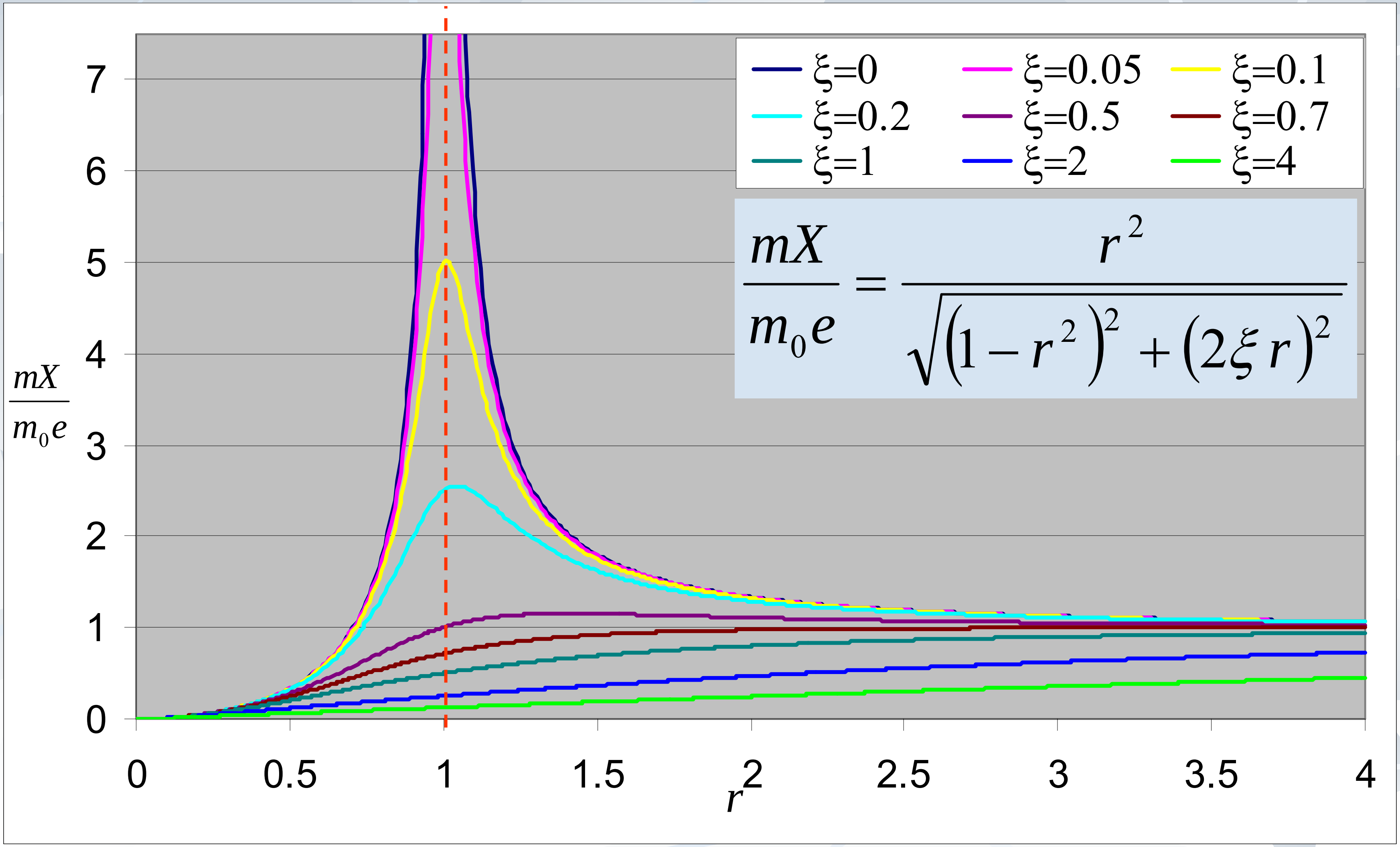
$$X = \frac{\frac{m_0 e}{m}\frac{m}{k}\omega^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}, \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}, \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

- که همان رابطه $Z/Y_b$ است.

| $r$ | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{mX}{m_0 e}$ | 0 | $1/2\xi$ | 1 |

# منحنی تغییرات X



# مقدار بیشینه دامنه

$$\frac{mX}{m_0e}=\frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{mX}{m_0e}\right)=\frac{2r\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}-r^2\,\dfrac{2(-2r)\left(1-r^2\right)+2\times 4\xi^2 r}{2\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{mX}{m_0e}\right)=\frac{2r\left[\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2\right]-r^2\left[(-2r)\left(1-r^2\right)+4\xi^2 r\right]}{\left(\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}\right)^3}=0$$

$$2r\left(1-r^2\right)^2+8\xi^2r^3+2r^3\left(1-r^2\right)-4\xi^2r^3=0,\qquad r=0$$

$$\left(1-r^2\right)+2\xi^2r^2=0\Rightarrow 1=r^2\left(1-2\xi^2\right)\Rightarrow \boxed{r=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}}\qquad \boxed{\left.\frac{mX}{m_0e}\right)_{Max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

# نیروی منتقل شده به پایه

- در این سیستم نیز نیروی منتقل شده به پایه از طریق فنر و میراگر می باشد لذا:

$$F(t)=F_S(t)+F_D(t)=kx+c\dot{x}$$

$$F_T^{\,2}=X^2\left(k^2+\left(c\omega_f\right)^2\right) \qquad X=\frac{m_0 e\omega^2}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(c\omega\right)^2}}$$

$$F_T=X\sqrt{k^2+\left(c\omega_f\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{F_T}{m_0 e\omega^2}=\sqrt{\frac{1+\left(2\xi r\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}$$

# مثال

- به ماشینی به جرم 1000kg نیروی خارجی 2450N در فرکانس 1500rpm اعمال می شود. برای کاهش اثرات ارتعاشات عایقی لاستیکی استفاده شده که تحت وزن خود ماشین دارای تغییرمکان 2mm است و نسبت میرائی تخمین زده شده 0.2 است.
- مطلوب است:
  - الف) نیروی منتقل شده به فونداسیون
  - ب) دامنه ارتعاش ماشین
  - ج) اختلاف فاز نیروی منتقل شده نسبت به نیروی خارجی

$m = 1000$ kg, $F = 2450$ N, $N = 1500$ rpm,

$\delta = 2$ mm $= 2 \times 10^{-3}$ m, $\xi = 0.2$

We use,

$TR= \sqrt{(1+(2\xi\omega/\omega_n)^2)/(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 +(2\xi\omega/\omega_n)^2}$

Also $TR = F_{tr} /F$

$\omega = 2\pi N/60 = 157.08$ rad/sec.

$\omega_n = \sqrt{(k/m)}=\sqrt{g/ \delta}=\sqrt{9.81/2x10^{-3}} =70$ rad/sec.

$m = 1000$ kg, $F = 2450$ N, $N = 1500$ rpm,

$\delta = 2$ mm $= 2 \times 10^{-3}$ m, $\xi = 0.2$

We use,

$TR = \sqrt{(1+(2\xi\omega/\omega_n)^2)/(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$

Also $TR = F_{tr}/F$

$\omega = 2\pi N/60 = 157.08$ rad/sec.

$\omega_n = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{9.81/2\times 10^{-3}} =$ 70 rad/sec.

Subs for $\xi$, $\omega$, $\omega_n$ into expr. for TR

TR = 0.325, as TR = $F_{tr}$ /F , $\mathbf{F_{tr} = 797\ N}$

The amplitude X is from the relation

$$X = (F/k) / \sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

As $k = mg/\delta = 1000 \times 9.81/2 \times 10^{-3}$

$= 4.905 \times 10^6$ N/m.

That gives $\mathbf{X = 1.21 \times 10^{-4}\ m}$

Subs for $\xi$, $\omega$, $\omega_n$ into expr. for TR

TR = 0.325, as TR = $F_{tr}$ /F , **$F_{tr}$ = 797 N**

The amplitude X is from the relation

$X = (F/k) /\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 +(2\xi\omega/\omega_n)^2}$

As $k = mg/\delta = 1000 \times 9.81/2 \times 10^{-3}$

$= 4.905 \times 10^6$ N/m.

That gives **$X = 1.21 \times 10^{-4}$ m**

The phase lag of transmitted force wrt F is

$(\Phi - \alpha) = \tan^{-1}((2\xi\omega/\omega_n)/(1-(\omega/\omega_n)^2))$

$- \tan^{-1}(2\xi\omega/\omega_n)$

$= \mathbf{125.55^o}$

The phase lag of transmitted force wrt F is

$$(\Phi - \alpha) = \tan^{-1}((2\xi\omega/\omega_n)/(1-(\omega/\omega_n)^2)) - \tan^{-1}(2\xi\omega/\omega_n)$$

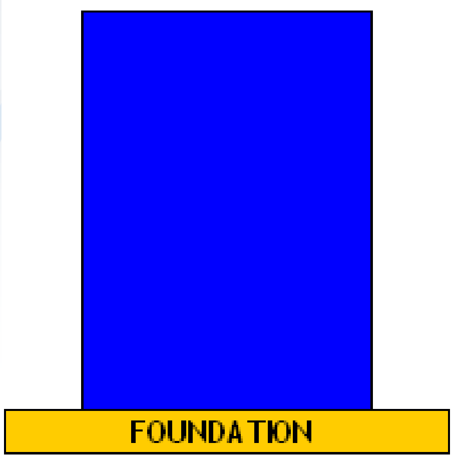
$$= \mathbf{125.55^o}$$

# ارتعاشات مکانیکی ۷
# اندازه گیری ارتعاشات

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

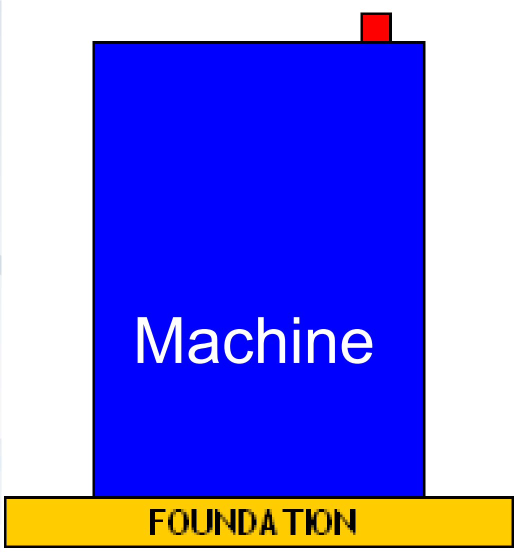
# اندازه گیری ارتعاشات

- اندازه گیری جابجائی (لرزه نگار – ارتعاش سنج Vibrometer)
- اندازه گیری سرعت (سرعت سنج Velometer)
- اندازه گیری شتاب (شتاب سنج Accelerometer)
- نیروهای دینامیکی در یک سیستم ارتعاشی بستگی دارد به:
  - جابجائی ← نیروی فنر
  - سرعت ← نیروی میراگر
  - شتاب ← نیروی اینرسی
- لذا لازم است این کمیات اندازه گیری شوند.



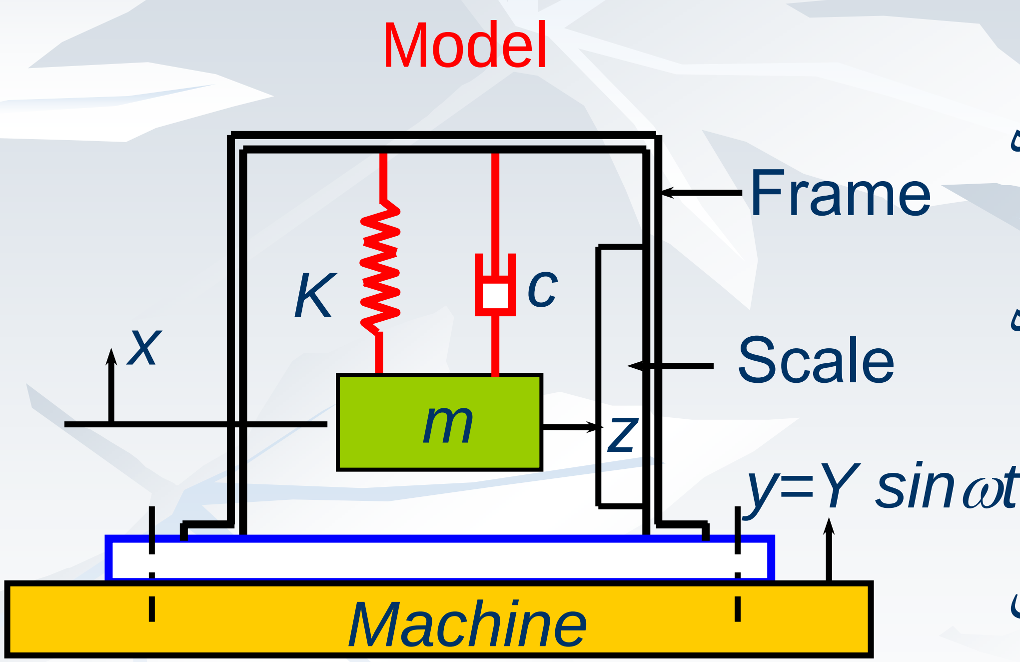
# اندازه گیری ارتعاشات

- وسیله اندازه گیری این کمیات به طور کلی ارتعاش سنج seismic instrument نام دارد.



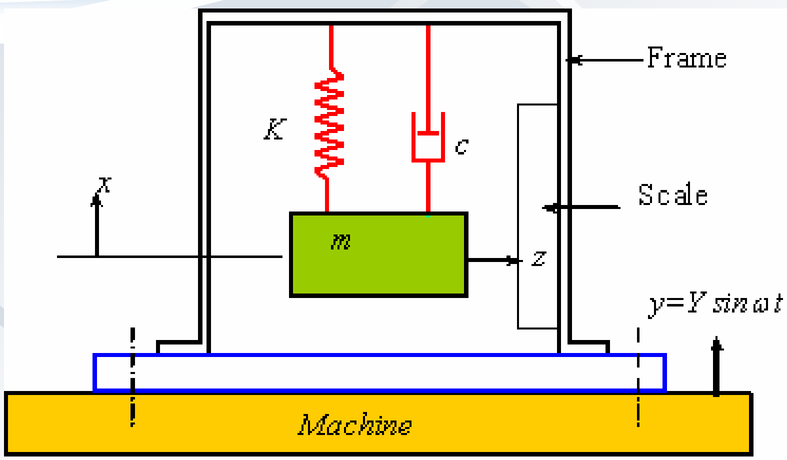

- لازمه مهم چنین دستگاهی نشان دادن یک خروجی است که نشان دهنده یک ورودی مانند دامنه جابجائی، سرعت یا شتاب سیستم ارتعاشی است.
- دقت این اندازه گیری تا حد ممکن باید خوب باشد.

# ارتعاش سنج

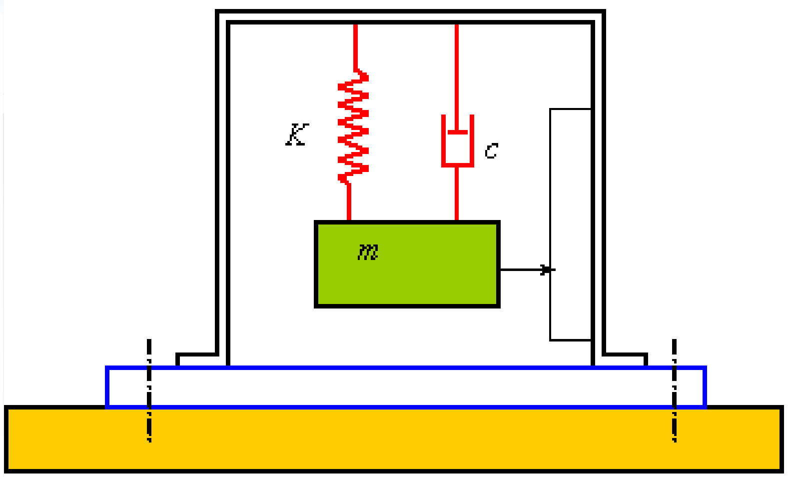



- $m$ – جرم مرتعش دستگاه اندازه گیری
- $c$ – ضریب میرائی دستگاه اندازه گیری
- $K$ – ضریب فنریت دستگاه اندازه گیری
- $X$ – جابجائی مطلق جرم مرتعش
- $y$ – تحریک پایه (ارتعاش ماشین اینجا هارمونیک)
- $z=(x-y)$ جابجائی نسبی جرم مرتعش نسبت به قاب

# ارتعاش سنج




Static



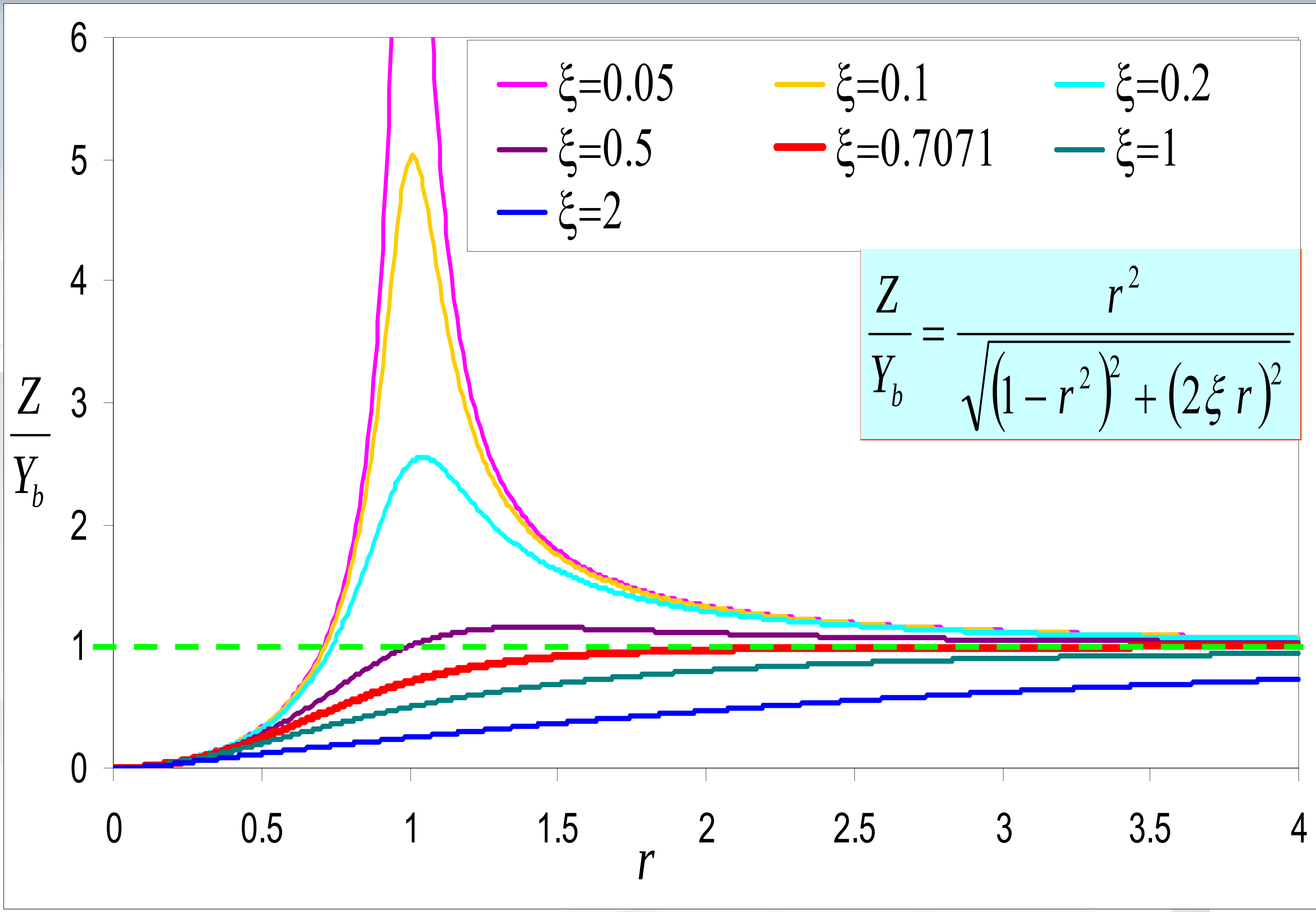

Dynamic

# ارتعاش سنج

- ارتعاش سنج وسیله ای است که از تحریک پایه استفاده نموده و جابجائی نسبی را اندازه می گیرد
- پس روابط حاکم همان روابط مربوط به تحریک پایه با حرکت نسبی است.

$$\boxed{\frac{Z}{Y_b}=\frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}}$$

- زمانی ارتعاش دقیقاً اندازه گیری می شود که $Z/Y_b \approx 1$ باشد.
- این زمانی است که نسبت فرکانسها $r=\omega_b/\omega_n>2.5$ باشد


ξ=0.05
ξ=0.1
ξ=0.2
ξ=0.5
ξ=0.7071
ξ=1
ξ=2
$\frac{Z}{Y_b} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$
$\frac{Z}{Y_b}$
$r$
0
1
2
3
4
5
6
0.5
1.5
2.5
3.5

# ارتعاش سنج

- هرچه $r$ بیشتر باشد، اندازه گیری دقیقتر است.
- $r$ بیشتر به معنی این است که ارتعاش سنج فرکانسهای بالا را بهتر اندازه می گیرد
- همچنین برای اینکه دامنه اندازه گیری بیشتر باشد $\omega_n$ دستگاه اندازه گیری باید کمتر باشد.
  - در نتیجه جرم مرتعش باید بیشتر باشد یا ضریب فنریت کمتر باشد.
  - این دستگاهها معمولاً دارای جرم بزرگی هستند و فضا زیادی لازم دارند
  - بدلیل جرم زیاد روی خواص ارتعاشی ماشین موثر می باشند
- بهترین نسبت میرائی دستگاه $\xi=1/\sqrt{2}$ است.

# سرعت سنجی

$$z(t)=\frac{r^2Y}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\sin(\omega_b t-\phi)$$

$$\dot{y}(t)=\omega_b Y\cos\left(\omega_b t\right)$$

$$\dot{z}(t)=\frac{r^2Y\omega_b}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\cos(\omega_b t-\phi)$$

- اگر $Z/Y_b \approx 1$ باشد:

$$\dot{z}(t)=Y\omega_b\cos(\omega_b t-\phi)$$

- که همان سرعت پایه است با یک اختلاف فاز و ارتباط آن با جابجائی نسبی نیز:

$$\dot{z}(t)=\omega.z(t)$$

- لذا با کالیبره کردن دستگاه می توان سرعت را نیز اندازه گرفت.

# شتاب سنجی

$$\ddot{z}(t) = -Z\omega_b^2 \sin(\omega_b t - \phi) \qquad \ddot{y}(t) = -\omega_b^2 Y \sin\left(\omega_b t\right)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega_b^2 z(t) = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}\left[-\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi)\right]$$

$$-\frac{\omega_b^2}{r^2} z(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}\left[-\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi)\right]$$

$$-\omega_n^2 z(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}\left[-\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi)\right]$$

# شتاب سنجی

- حال اگر

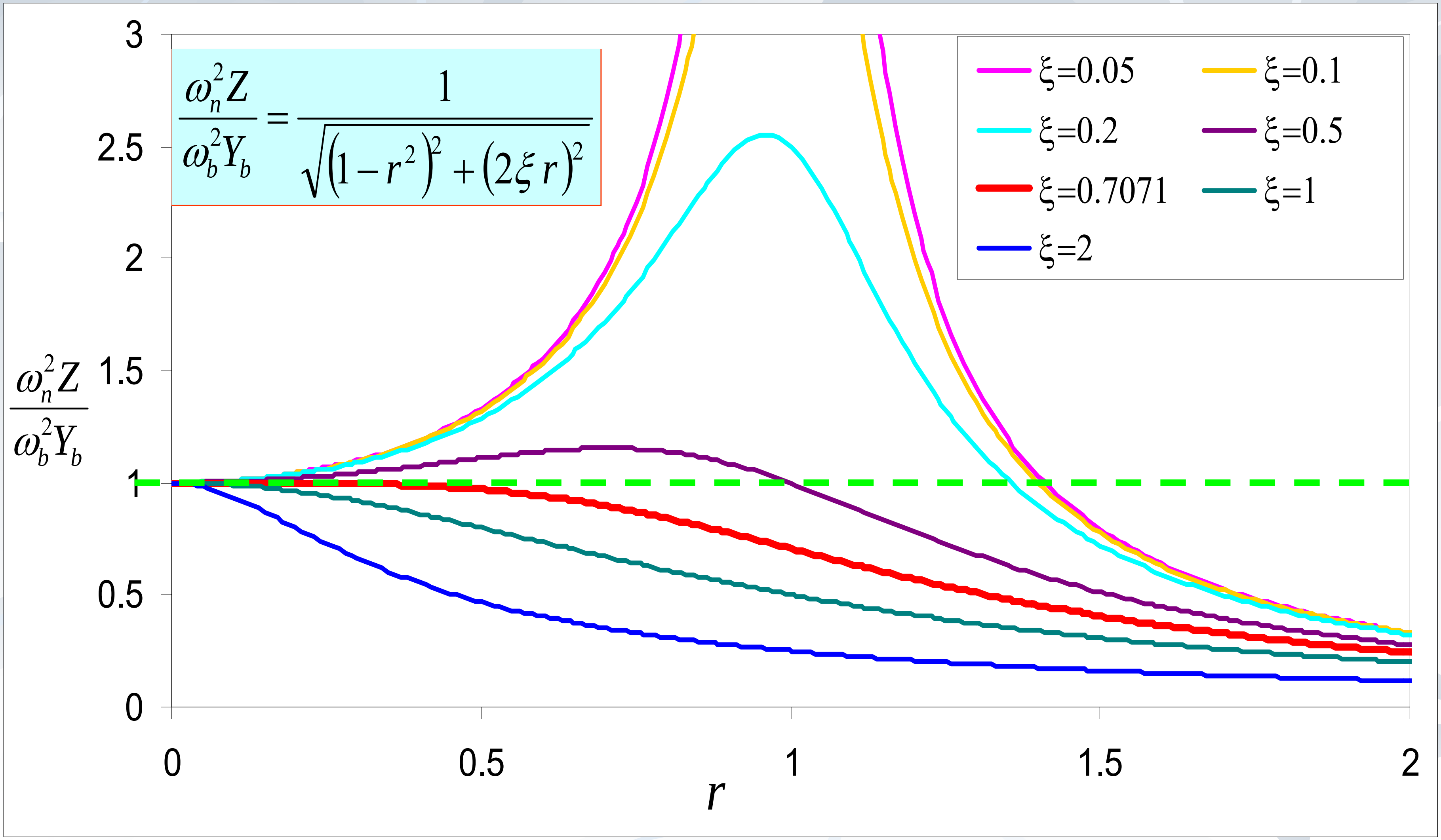
$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \cong 1$$

- درنتیجه

$$\ddot{y}(t) = \boxed{-\omega_b^2 Y} \sin\left(\omega_b t\right) \qquad -\omega_n^2 z(t) = \boxed{-\omega_b^2 Y} \sin(\omega_b t - \phi)$$

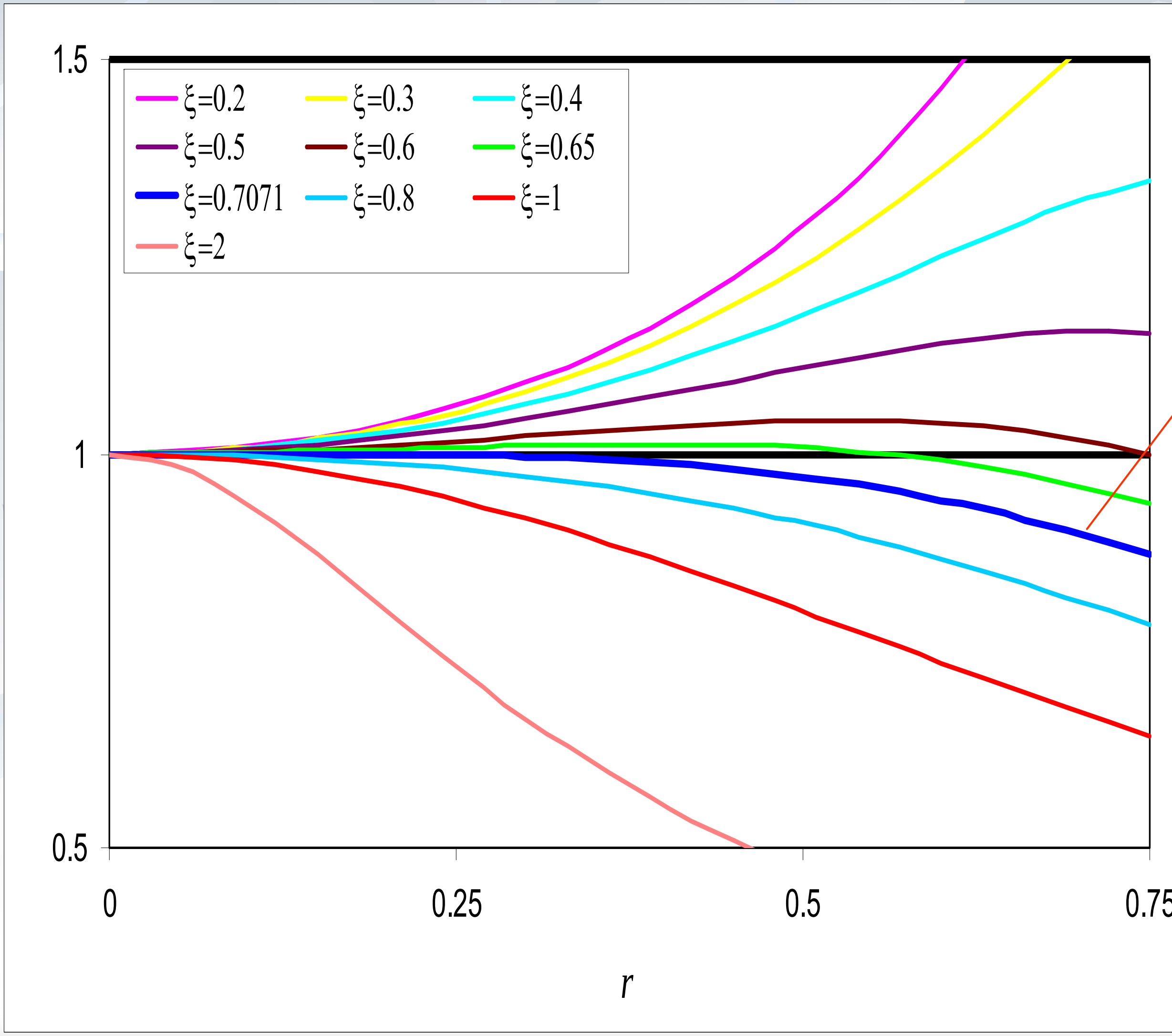
- و $-z(t)\omega_n{}^2$ نشان دهنده شتاب پایه با یک اختلاف فاز است.
- که با کالیبره کردن دستگاه می توان شتاب را اندازه گرفت
- اما در چه فرکانسی $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \cong 1$ است؟
- زمانی که $r \approx 0$ است.

# شتاب سنجی

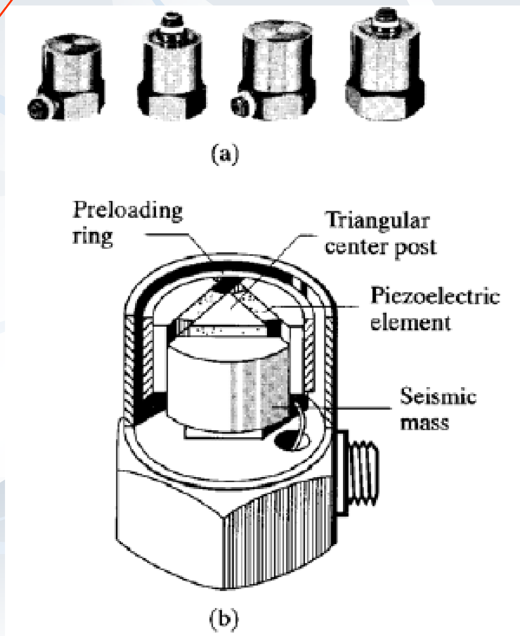


$$\frac{\omega_n^2 Z}{\omega_b^2 Y_b} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}}$$
ξ=0.05
ξ=0.1
ξ=0.2
ξ=0.5
ξ=0.7071
ξ=1
ξ=2
$\frac{\omega_n^2 Z}{\omega_b^2 Y_b}$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
r

# شتاب سنجی




$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$



# شتاب سنجی

- برای شتاب سنجی نسبت فرکانسها $r$ باید عدد کوچکی باشد:

$$0 < r < 0.6$$

- چون نسبت فرکانس پایه (فرکانس ارتعاشی که باید اندازه گرفته شود) به فرکانس طبیعی دستگاه اندازه گیری کوچک است لذا فرکانس طبیعی سیستم باید بزرگ باشد
- لذا باید جرم مرتعش کم و سختی فنر زیاد باشد درنتیجه اندازه دستگاه کوچک می باشد، تغییر زیادی در خواص دینامیک بوجود نمی آورد
- بهترین نسبت میرائی دستگاه $\xi = 1/\sqrt{2}$ است.

# مثال

- یک لرزه نگار برروی ماشینی سوار شده است که دارای سرعت دورانی 1000rpm است. فرکانس طبیعی این لرزه نگار 20rad/s است، لرزه نگار دامنه ارتعاش نسبی 0.5mm را ثبت نموده است. جابجائی، سرعت و شتاب ماشین را حساب کنید. از میرائی صرفنظر کنید.

$$\omega_n = 20\,\text{rad/s} \qquad ,\xi = 0$$

$$\omega = 1000\frac{2\pi}{60} = 104.7 \;\; \text{rad/s} \;\; \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{104.7}{20} = 5.24\, rad/s$$

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1}{1-r^2} = \frac{5.24^2}{\left|1-5.24^2\right|} = 1.038$$

# ادامه

- در نتیجه دامنه جابجائی:

$$Y=\frac{Z}{1.038}=\frac{0.5}{1.038}=0.482\,mm$$

- دامنه سرعت:

$$\omega Y=\frac{\omega Z}{1.038}=\frac{104.7\times 0.5}{1.038}=50.43\,mm/s$$

- دامنه شتاب:

$$\omega^2 Y=\frac{104.7^2\times 0.5}{1.038}=5280.4\,mm/s$$

# مثال

- یک لرزه نگار دارای فرکانس طبیعی 6Hz است. کمترین فرکانسی که می توان بعد از آن دامنه را با 2% خطا اندازه گرفت چیست؟ میرائی را نادیده بگیرید.

$$\frac{Z}{Y} = 1.02 = \frac{r^2}{\left|1 - r^2\right|} \Rightarrow 1.02r^2 - 1.02 = r^2$$

$$0.02r^2 = 1.02 \Rightarrow r^2 = \frac{1.02}{0.02} = 51$$

$$r = 7.141 \quad f = rf_n = 7.141 \times 6 = 42.85Hz$$

# مثال

- برای یک لرزه نگار مقدار خطای 2% مشاهده شده است. فرکانس طبیعی لرزه نگار 8Hz است. اگر کمترین فرکانس قابل اندازه گیری 40Hz باشد، مقدار نسبت میرائی را بدست آورید.

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n} = \frac{40}{8} = 5$$

$$\frac{Z-Y}{Y} \times 100 = 2 \Rightarrow \frac{Z}{Y} = 1 + 0.02 = 1.02$$

$$1.02 = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} = \frac{25}{\sqrt{\left(-24\right)^2 + 100\xi^2}}$$

$$24^2 + 100\xi^2 = \left(\frac{25}{1.02}\right)^2 \Rightarrow \xi = 0.497$$

# مثال

- لرزه نگاری دارای فرکانس طبیعی 6Hz و نسبت میرائی 0.25 است. کمترین فرکانسی که با 2% خطا می توان اندازه گرفت چیست؟

$$\xi = 0.25 \qquad f_n = 6Hz \quad f = ?$$

$$\frac{Z}{Y} = 1.02 = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}}$$

$$1.02^2\left[1 + r^4 - 2r^2 + 0.25r^2\right] = r^4$$

$$\left(1.02^2 - 1\right)r^4 - \left(1.75 \times 1.02^2\right)r^2 + 1.02^2 = 0$$

$$0.0404\,r^4 - 1.8207\,r^2 + 1.0404 = 0$$

$$r^2 = \frac{1.8207 \pm \sqrt{1.8207^2 - 4 \times 0.0404 \times 1.0404}}{2 \times 0.0404} = \begin{cases} r = 0.7608 \times \\ r = 6.67 * \end{cases}$$

$$f = rf_n = 6.67 \times 6 = 40.02\,Hz$$

# Numerical problems

## Problem-5

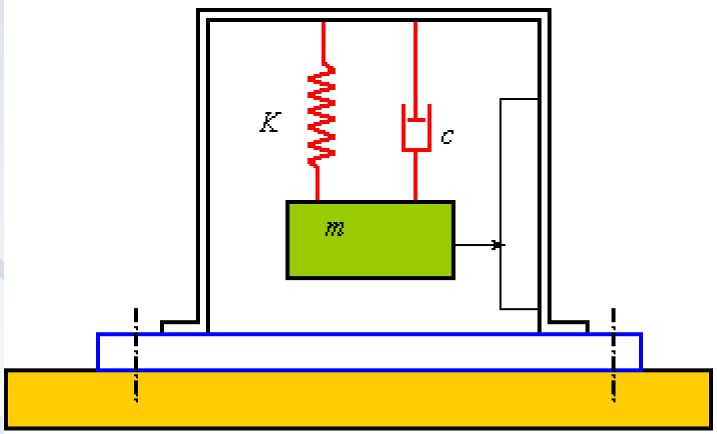
Design a vibrometer for the range of frequency 0-10 Hz.

## Given data

$\omega$ =10 Hz maximum frequency for which vibrometer should be designed

# Numerical problems

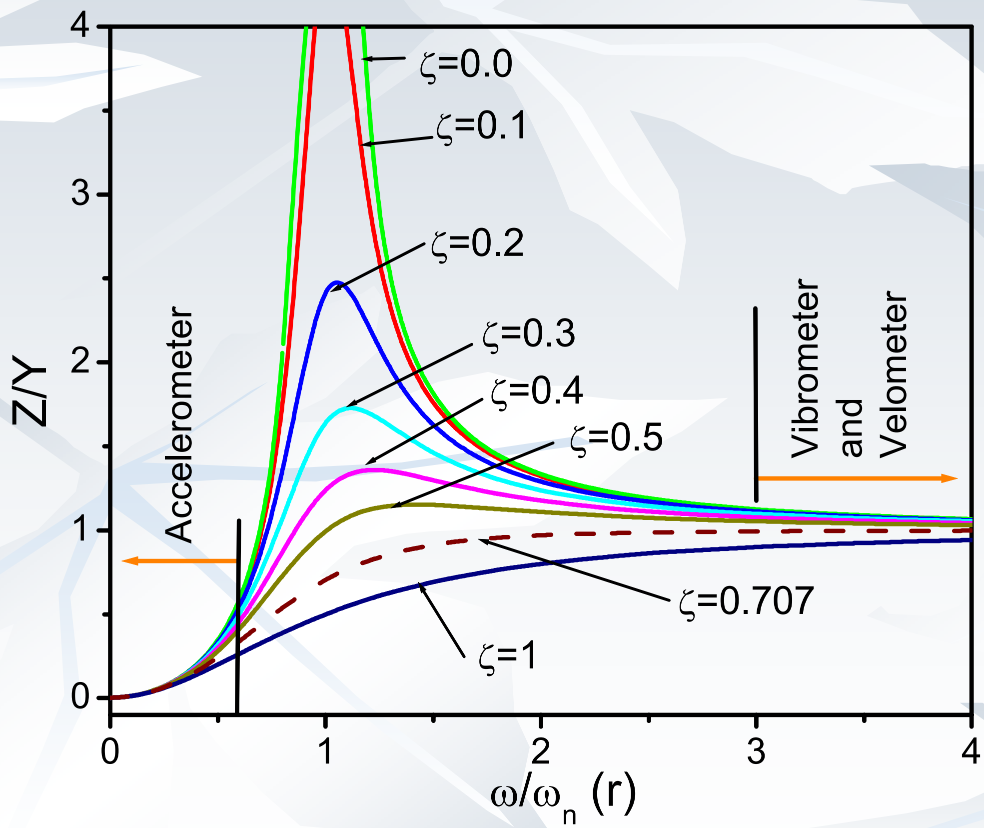
## Problem-5




It is required to design stiffness of spring ($K$), value of damping coefficient ($c$) and the magnitude of seismic mass ($m$) for the given requirements

# Numerical problems

## Problem-5




From theory, it is known that for vibrometer the frequency ratio should be more than 3

# Numerical problems

## Problem-5

Consider minimum $r = 3$ for the design

$$r = \omega / \omega_n$$

For the given frequency, natural frequency of the instrument should be

$$\omega_n = \omega / r$$

$$\omega_n = 10 / 3 = 3.33 \text{ Hz} = 20.92 \text{ rad/sec}$$

# Numerical problems

## Problem-5

$$\omega_n = \sqrt{K/m}$$

where, $K$= stiffness of spring and $m$ seismic mass

For the fixed value of $K$ magnitude of $m$ can be obtained

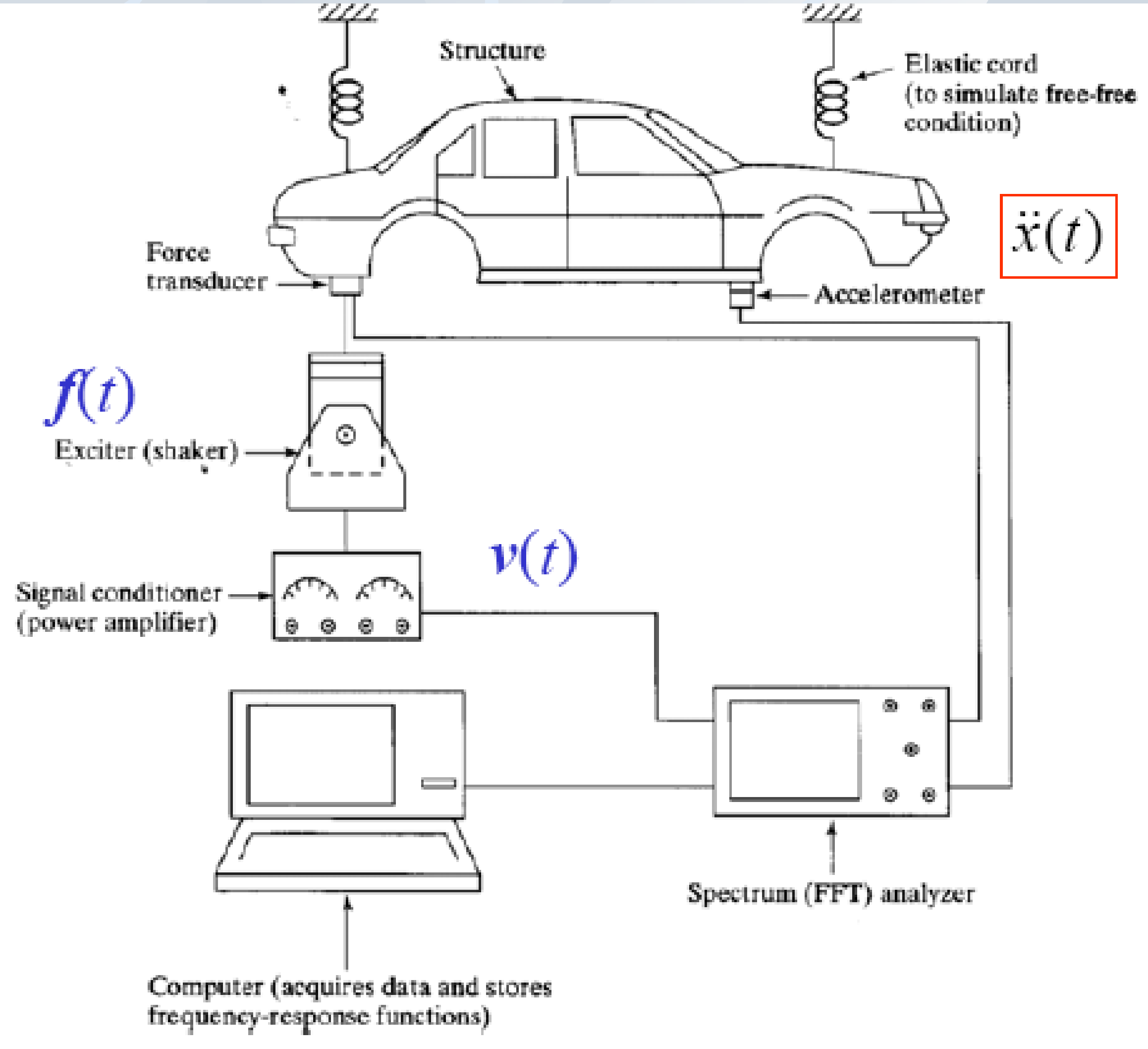
We know, $\xi = c/c_c$

and $c_c = 2\,m\,\omega_n$

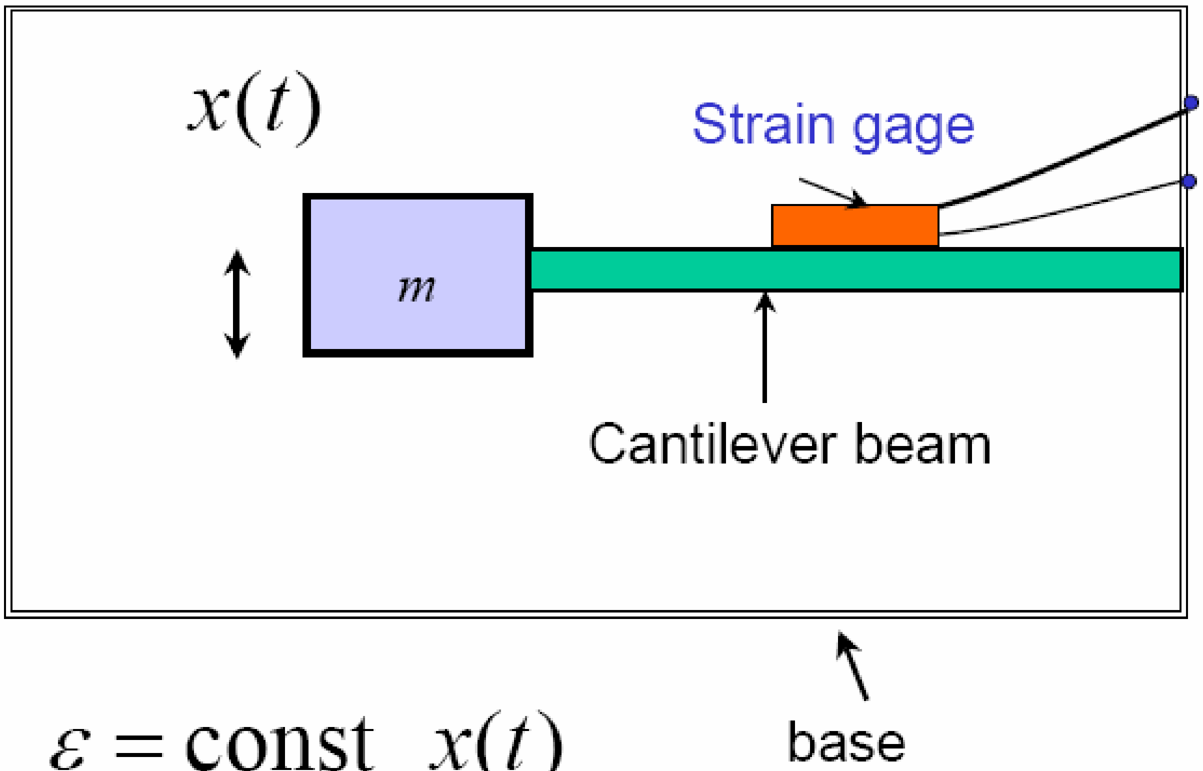
From above equations, for a particular value of $\xi$ one can estimate the magnitude of damping factor $c$

# دیگر وسایل اندازه گیری و تجربی

- آنالیز مدال
- لرزاننده

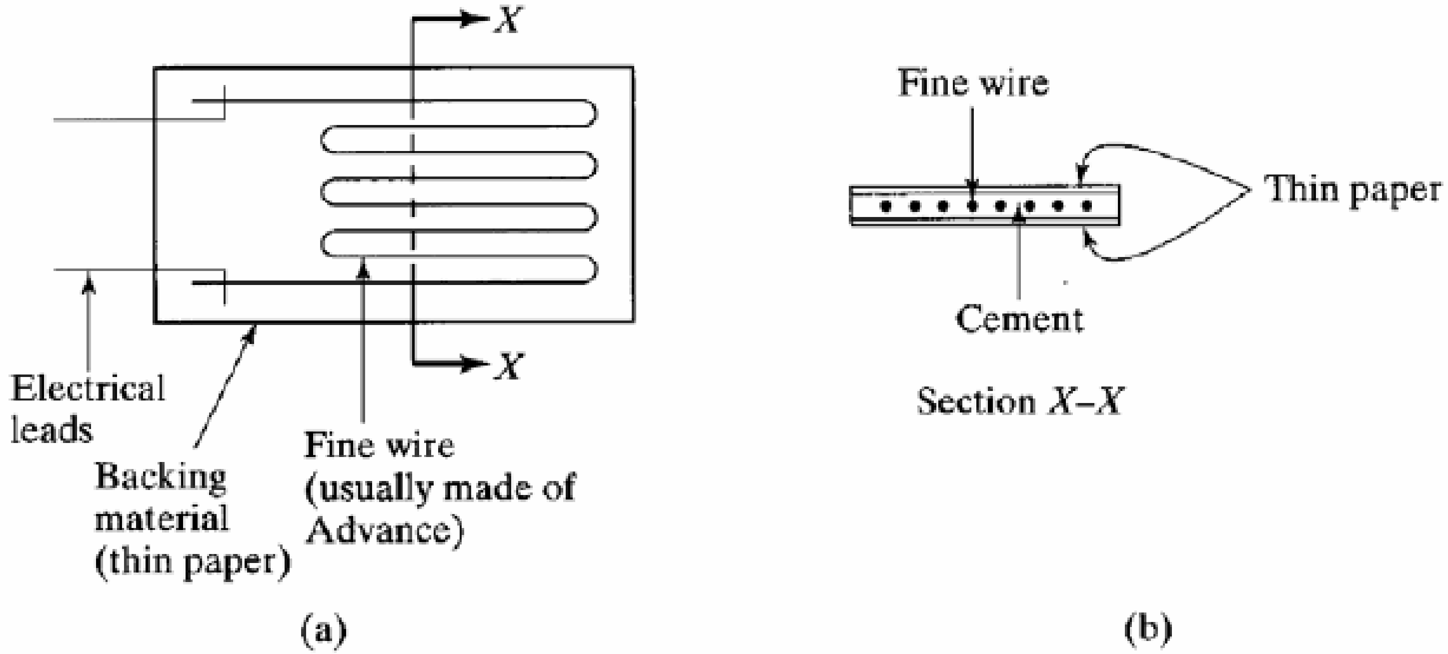



- ترنس دیوسر

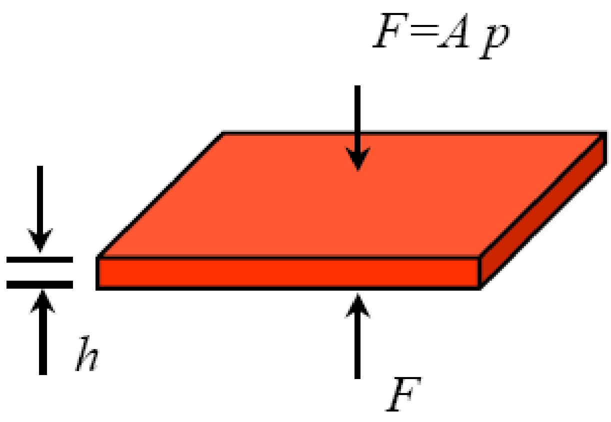



$$\varepsilon = \text{const} \;\; x(t)$$

- کرنش سنج

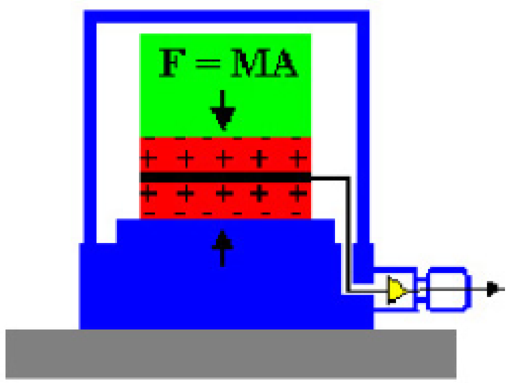

X
X
Electrical leads
Backing material (thin paper)
Fine wire (usually made of Advance)
(a)
Fine wire
Thin paper
Cement
Section X–X
(b)

# Piezoelectric transducer




$$Q_x = d\,F = d\,A\,p$$

$$\boxed{V_{out}(t) = v\,h\,p(t)}$$

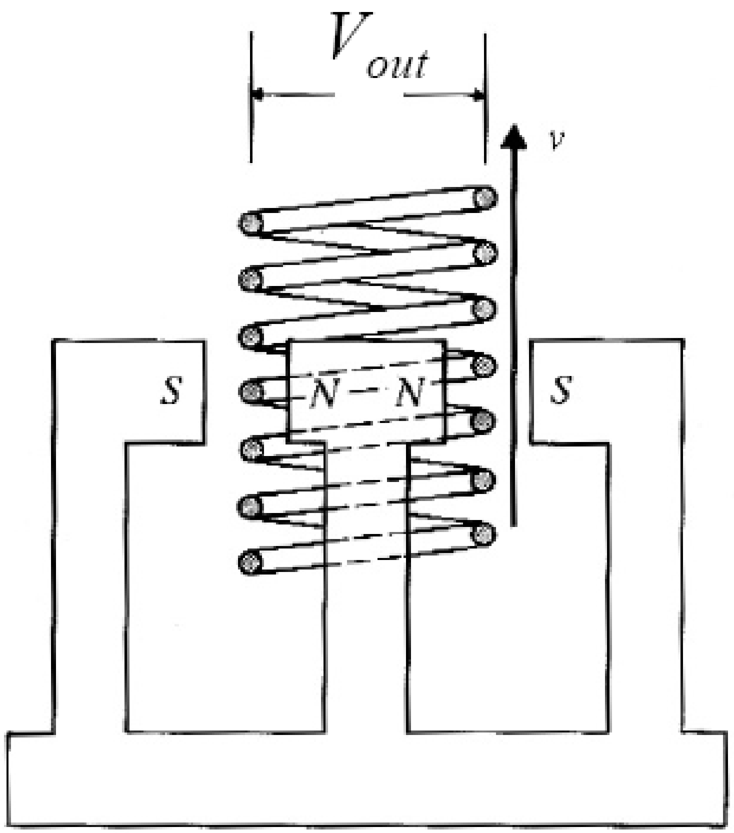



*d* = piezoelectric constant

v =voltage sensitivity coeff

h = thickness of transducer

http://www.bksv.com/




**Sensor: vel. → Volt**

$$\boxed{V_{out}(t) = B\,l\,v(t)}$$

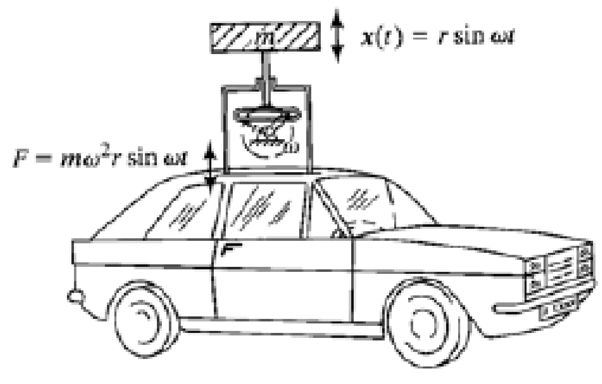
**Exciter: I → F**

$$B\,l = V/v = F/I$$

$$F = Bl\,I$$

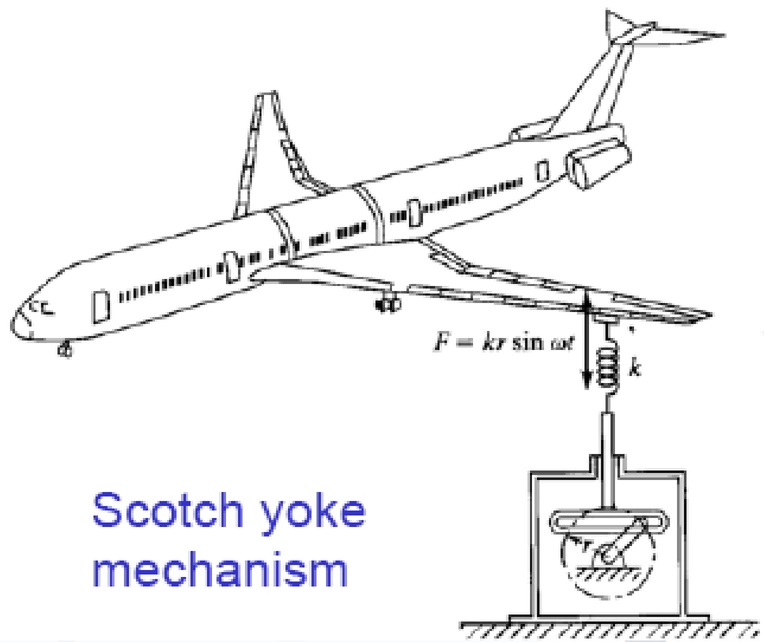
# Mechanical Exciters

- Force applied as an inertia force:



(a)

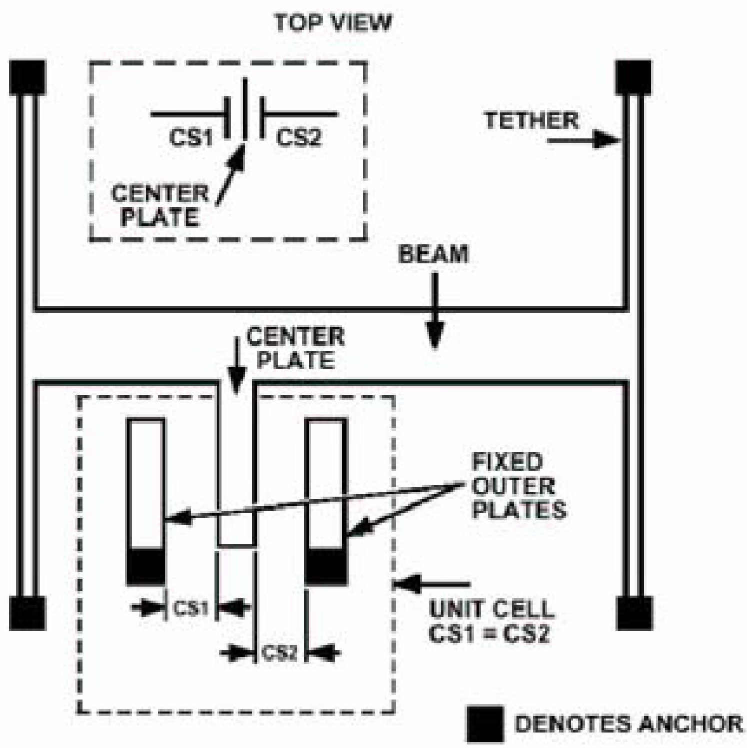
- Force applied as an elastic spring force:

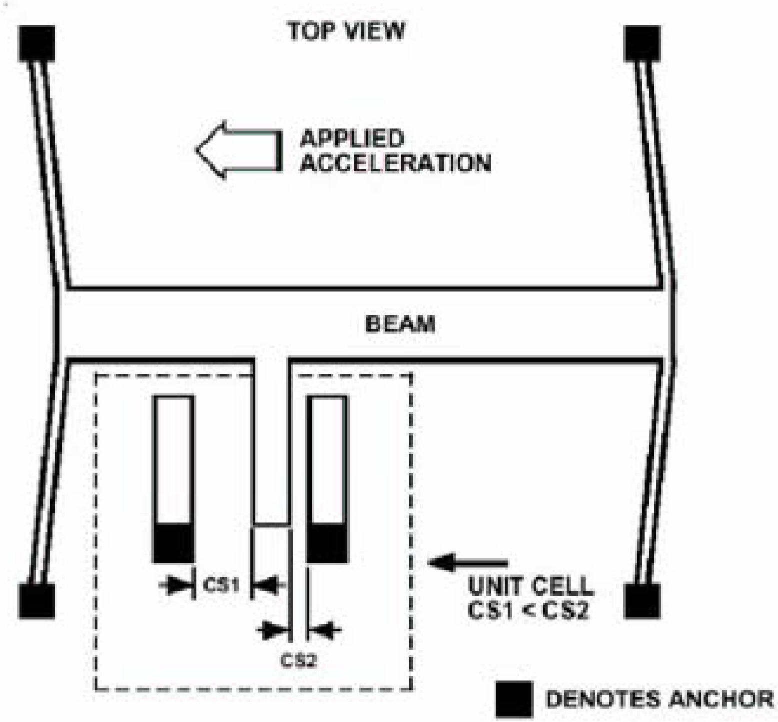



- Used for frequency <30 Hz and loads <700N

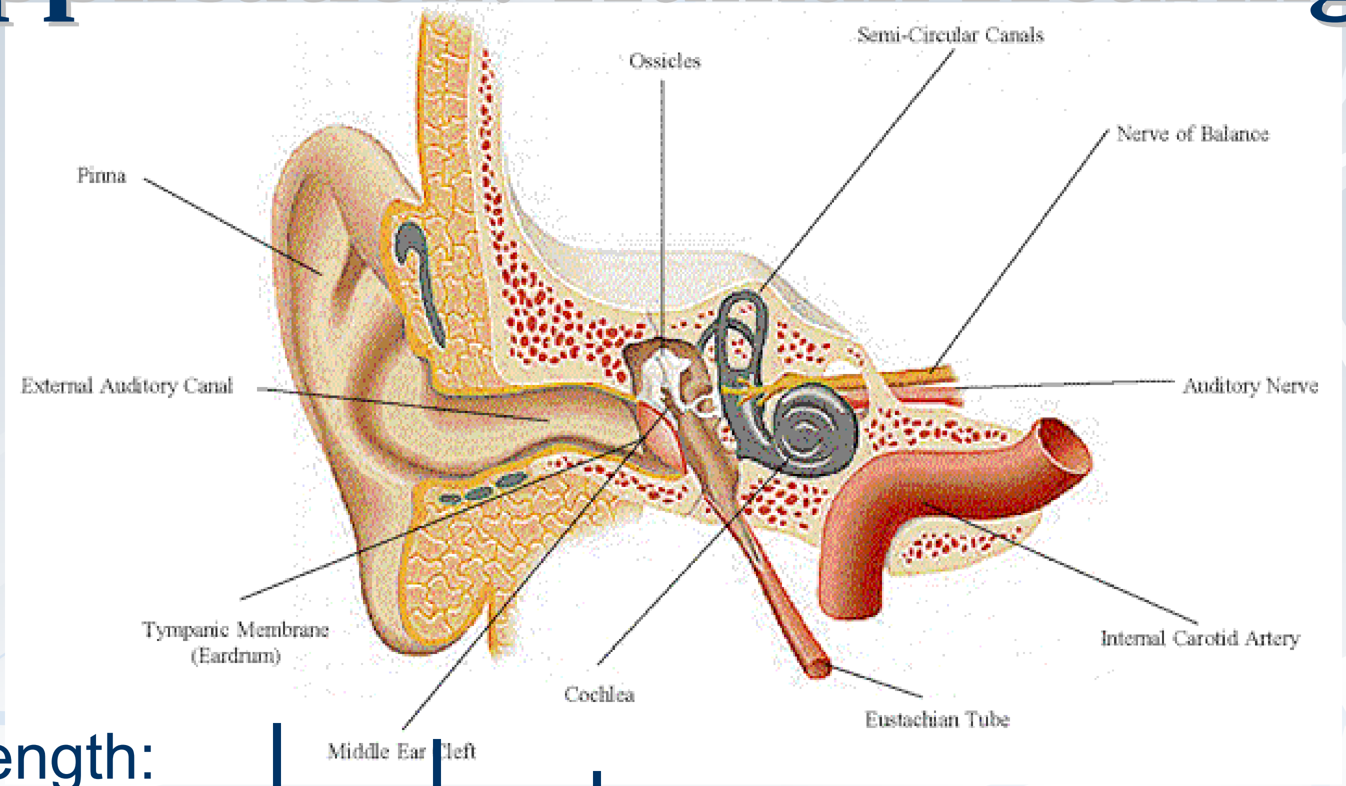
Scotch yoke mechanism

# ADXL Differential Capacitive Sensor

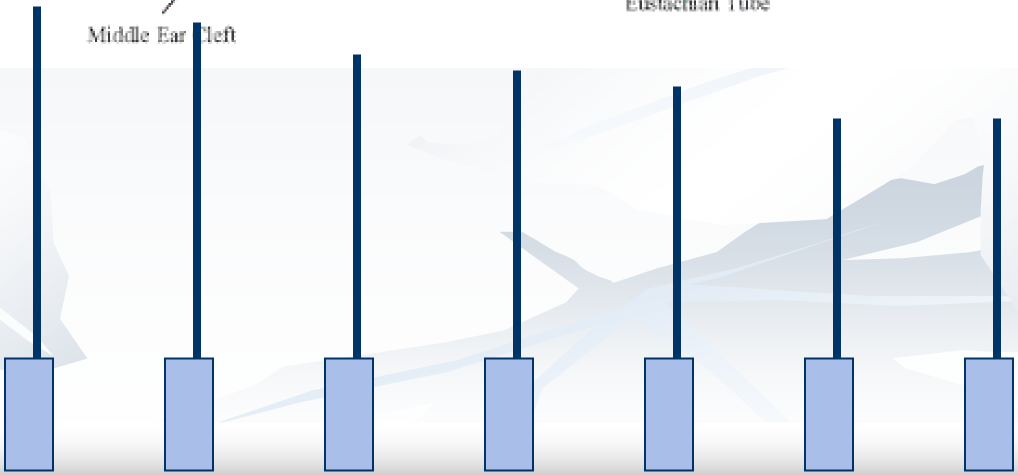


# Application: Human Hearing



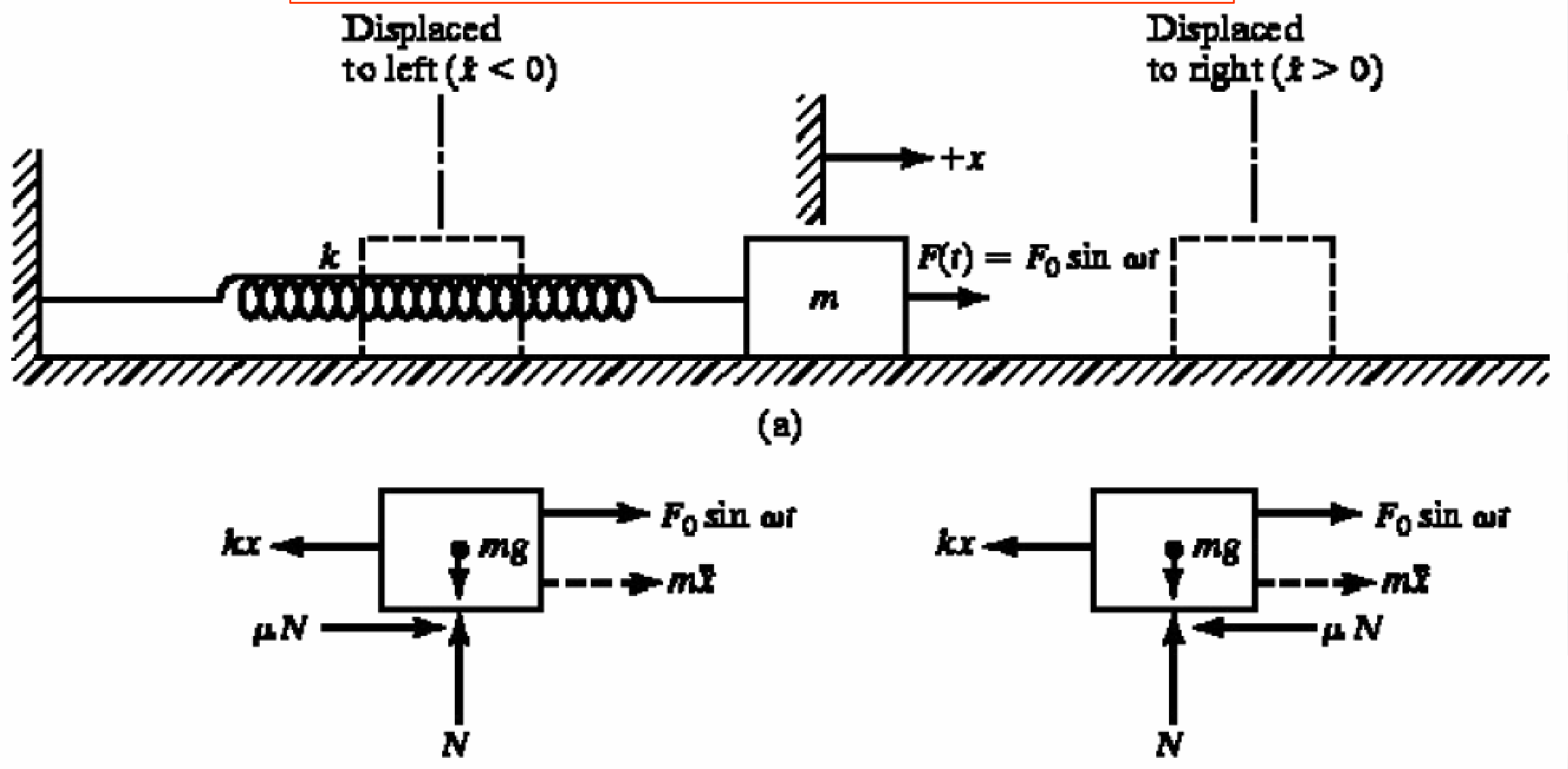

- Diff. Length:
- Resonance @ diff nat. freq.
- Nerves pick up amplitude only



# ارتعاش اجباری هارمونیک با میرائی کلمب

- معادله حرکت ارتعاش اجباری هارمونیک یک درجه آزادی با میرائی کلمب:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t}$$



# ارتعاش اجباری هارمونیک با میرائی کلمب

$$\boxed{m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t}$$

- حل تحلیلی این معادله دیفرانسیل مشکل می باشد.
- اگر نیروی اصطکاک در مقایسه با دامنه نیرو $F_0$ بزرگ باشد ممکن است که حرکت جرم ناپیوسته باشد.
- از طرفی اگر نیروی اصطکاک در مقایسه با دامنه نیرو $F_0$ کوچک باشد حرکت حالت پایدار جرم تقریباً هارمونیک است.
- برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله حرکت از میرائی معادل استفاده می شود.

# میرائی معادل برای میرائی کلمب

- برای این کار لازم است که انرژی تلف شده از میرائی کلمب با انرژی تلف شده میرائی ویسکوز مساوی قرار داده شود.
- از قبل

$$W_d = \pi c_{eq} X^2 = 2\pi \xi k X^2$$

- در میرائی کلمب

$$F_C = -sign(\dot{x})\mu N$$

$$W_C = 2\underbrace{\int_0^{\pi/\omega} \mu N \dot{x}\, dt}_{\text{کار در نیم سیکل}} = 2\int_0^{\pi/\omega} \mu N \omega X \cos(\omega t - \delta) dt$$

# میرائی معادل برای میرائی کلمب

- لذا:

$$W_C = 2\mu N\omega X\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t-\delta)\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= 2\mu NX\left[\sin(\pi-\delta)-\sin(-\delta)\right]$$

$$W_C = 4\mu N X \qquad W_d = \pi c_{eq}\omega X^2$$

$$W_C = W_d \Longrightarrow c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi\omega X}$$

# میرائی معادل برای میرائی کلمب

- از حل معادله حرکت معادل:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X}$$

$$m\ddot{x} + \left(\frac{4\mu N}{\pi\omega X}\right)\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$\underline{\underline{X}} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(c_{eq}\omega\right)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi \underline{\underline{X}}}\right)^2}}$$

# میرائی معادل برای میرائی کلمب

- برای بدست آوردن $X$:

$$F_0^{\,2} = \left(k - m\omega^2\right)^2 X^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad X^2 = \frac{F_0^{\,2}}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi X}\right)^2}$$

$$\boxed{X = \sqrt{\frac{F_0^{\,2} - \left(4\mu N/\pi\right)^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2}} = \frac{F_0}{k}\,\frac{\sqrt{1 - \left(4\mu N/\pi F_0\right)^2}}{1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2}}$$

- اگر شرط مقابل برقرار نباشد، این جواب برقرار نیست و نیاز به حل دیگری است

$$\boxed{4\mu N < \pi F_0}$$

# میرائی معادل برای میرائی کلمب

- اختلاف فاز:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_{eq}\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

$$X = \frac{F_0}{k}\frac{\sqrt{1 - \left(4\mu N/\pi F_0\right)^2}}{1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\pm\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{1 - \left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2\right\}^{1/2}}\right]$$

# نکاتی در مورد میرائی کلمب

- در میرائی کلمب برخلاف میرائی لزج تشدید در $\omega = \omega_n$ اتفاق می افتد
- در تشدید اختلاف فاز $\phi = 90^o$ و دامنه ارتعاش بینهایت می شود:
- انرژی ورودی به سیستم در هر سیکل:

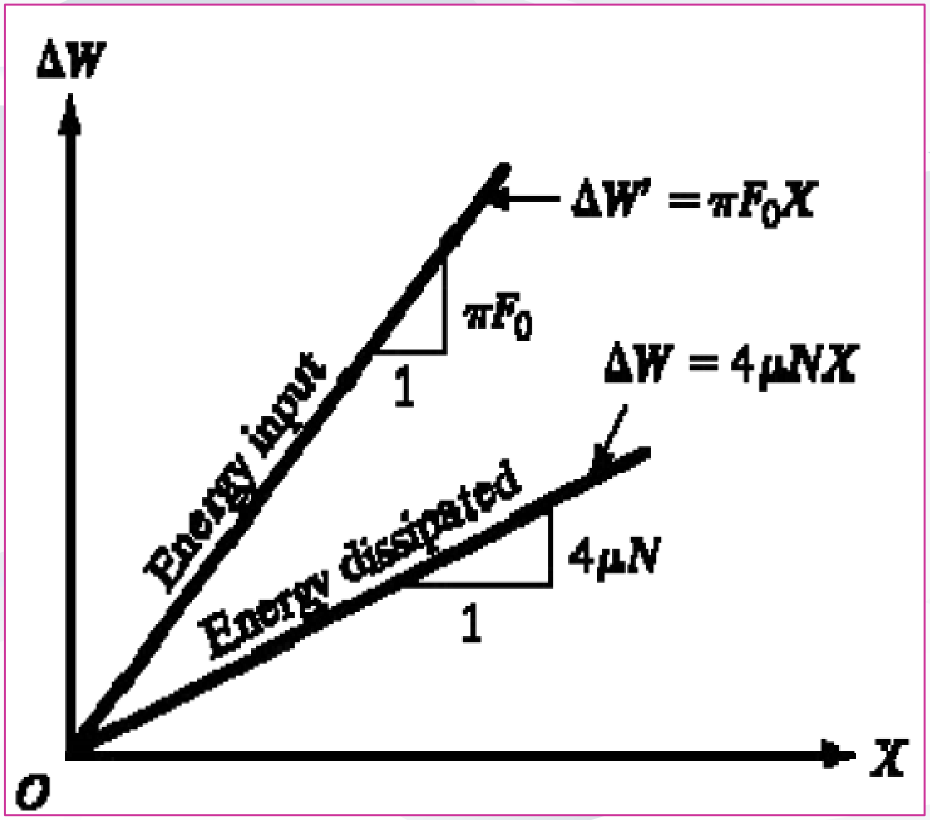
$$W' = \int_{Cycle} F.dx = \int_0^{\tau} F \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi/\omega} F_0 \sin \omega t [\omega X \cos(\omega t - \phi)] dt =$$

- در تشدید $\phi = 90^o$ است، لذا:

$$\boxed{W' = \int_0^{2\pi/\omega} \omega X F_0 \sin^2 \omega t \, dt = \pi F_0 X}$$

# نکاتی در مورد میرائی کلمب

$$\boxed{4\mu N < \pi F_0 \quad \Rightarrow \quad 4\mu NX < \pi F_0 X}$$




- یعنی انرژی که در هر سیکل تلف می شود از انرژی ورودی کمتر است لذا دامنه هر لحظه افزایش می یابد.
- در صورت غیر تشدید بودن حرکت:

$$W' = \omega X F_0 \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t)\cos(\omega t - \phi)\,dt$$

$$\boxed{W' = \omega X F_0 \sin\phi}$$

- در حقیقت در اینجا اختلاف فاز باعث کنترل دامنه می شود و دومنحنی برهم منطبق می شوند

# میرائی معادل لزجی

- اهمیت میرائی در سیستمهای مکانیکی محدود نمودن دامنه ارتعاش در تشدید می باشد.
- اثر میرائی بر دامنه ارتعاش در فرکانسهای بالاتر و پائین تر از فرکانس تشدید در مقایسه با فرکانس تشدید ناچیز است.
- در حالت تشدید دامنه ارتعاش

$$\left.\frac{Xk}{f_o}\right|_{r=1} = \frac{1}{2\xi}$$

- این رابطه به راحتی برای دیگر میرائی ها بدست نمی آید

# میرائی معادل لزجی

- لذا لازم است که میرائی معادل لزجی را برای انواع دیگر میرائی بدست آوریم
- این میرائی معادل در محدوده تشدید قابل قبول می باشد.
- برای بدست آوردن میرائی معادل کار انجام شده توسط نیروی میرا در یک سیکل را با کار معادل میرائی لزجی مساوی قرار می دهیم

$$W_d = \pi c_{eq} X^2 = 2\pi \xi k X^2$$

# مثال

- چنانچه جسمی در یک سیال دارای سرعت بالا باشد نیروی مقاوم با مجذور سرعت متناسب است لذا:

$$F_d = \pm \alpha \dot{x}^2$$

$$x = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = \omega X \cos(\omega t - \phi)$$

$$W_d = \int_{x_1}^{x_2} F_d dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha \dot{x}^2 dx = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \dot{x}^2 \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \alpha \dot{x}^3 dt = 2\int_{0}^{\pi/\omega} \alpha \omega^3 X^3 \cos^3(\omega t - \phi) dt$$

# مثال

$$W_d = 2\int_0^{\pi/\omega} \alpha\omega^3 X^3 \cos^3(\omega t - \phi)dt$$

$$u = \omega t - \phi, \qquad du = \omega dt$$

$$W_d = 2\alpha\omega^2 X^3 \int_{-\phi}^{(\pi-\phi)} \cos^3(u)du = 2\alpha\omega^2 X^3 \int_{-\phi}^{(\pi-\phi)} \cos(u)\left(1-\sin^2(u)\right)du$$

$$= 2\alpha\omega^2 X^3 \left[\sin(u) - \tfrac{1}{3}\sin^3(u)\Big|_{-\phi}^{\pi-\phi}\right]$$

$$= 2\alpha\omega^2 X^3 \left[\sin(\pi-\phi) - \tfrac{1}{3}\sin^3(\pi-\phi) - \sin(-\phi) + \tfrac{1}{3}\sin^3(-\phi)\right]$$

$$= 2\alpha\omega^2 X^3 \left[2 - \tfrac{2}{3}\right] = \frac{8}{3}\alpha\omega^2 X^3$$

# مثال

$$W_d = \frac{8}{3}\alpha\omega^2 X^3 = \pi c_{eq}\omega X^2$$

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi}\alpha\omega X \qquad \xi_{eq} = \frac{4}{3\pi}\frac{\alpha\omega X}{\sqrt{km}}$$

$$\ddot{x} + 2\frac{4}{3\pi}\frac{\alpha\omega X}{\sqrt{km}}\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)X + i\left(\frac{8}{3\pi}\frac{\alpha\omega^2}{m}\right)X^2 = \frac{F_0}{m}$$

# مثال

$$\left|\left(\omega_n^2-\omega^2\right)X+i\left(\frac{8}{3\pi}\frac{\alpha\omega^2}{m}\right)X^2\right|=\frac{F_0}{m}$$

- حل معادله برای X:

$$\left(\frac{8}{3\pi}\frac{\alpha r^2}{m}\right)^2X^4+\left(1-r^2\right)^2X^2-\left(\frac{F_0}{m\omega_n^2}\right)^2=0$$

$$X=\left(\frac{3\pi m}{8\alpha r^2}\right)\sqrt{-\frac{\left(1-r^2\right)^2}{2}+\sqrt{\frac{\left(1-r^2\right)^4}{4}+\left(\frac{8\alpha F_0 r^2}{3\pi mk}\right)^2}}$$

# مثال

- در تشدید $r=1$

$$X\Big|_{\omega=\omega_n} = \frac{F_0/k}{\dfrac{8}{3\pi}\dfrac{\alpha\omega X}{\sqrt{km}}} = \frac{3\pi F_0}{8\alpha\omega_n^2 X}$$

$$\left.\frac{Xk}{f_o}\right|_{r=1} = \frac{1}{2\xi}$$

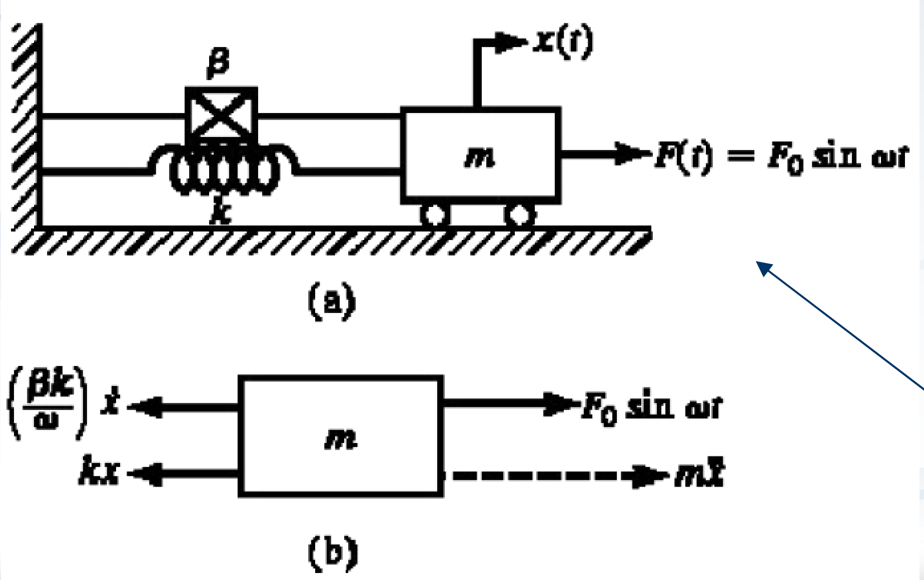
$$\boxed{X\Big|_{\omega=\omega_n} = \sqrt{\frac{3\pi F_0}{8\alpha\omega_n^2}}}$$

# میرائی هیسترزس

- در این نوع میرائی انرژی تلف شده متناسب با توان دوم دامنه حرکت می باشد.

$$W_d = \alpha X^2 \Rightarrow c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi\omega}$$

- شکل نشان دهنده سیستمی با میرائی هیسترزس می باشد.




$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi\omega}\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

# میرائی هیسترزس

- پاسخ حالت پایدار:

$$x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha}{\pi\,\omega}\omega\right)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha}{\pi\,k}\right)^2}}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{k\,\pi}$$

$$\boxed{X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \beta^2}}}$$

- همچنین

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha/\pi}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right)}$$

# سختی مختلط

$$W_d = \alpha X^2 \Rightarrow c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi\omega}$$

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi\omega}\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \left(k + i\frac{\alpha}{\pi}\right)x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + k\left(i + i\beta\right)x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\left(k - m\omega^2 + i\beta k\right)X = F_0$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + i\beta k}$$

$$\boxed{X = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + i\beta k}}$$

$$\left|X\right|_{res} = \frac{F_0}{\beta k}$$

$$\left|X\right|_{res} = \frac{F_0}{2\xi k}$$

- پاسخ

# پاسخ فرکانسی

- از پاسخ قبل:

$$H(r)=\frac{kX}{F_0}=\frac{1}{1-r^2+i\beta}=\frac{\left(1-r^2\right)-i\beta}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}=u+iv$$

$$u=\frac{\left(1-r^2\right)}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2},\quad v=-\frac{\gamma}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}$$

$$v+\frac{1}{2\gamma}=-\frac{\gamma}{\left(1-r^2\right)^2+\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}=\frac{-2\gamma^2+\left[\left(1-r^2\right)^2+\gamma^2\right]}{2\gamma\left[\left(1-r^2\right)^2+\gamma^2\right]}$$

$$=\frac{\left[\left(1-r^2\right)^2-\gamma^2\right]}{2\gamma\left[\left(1-r^2\right)^2+\gamma^2\right]}$$

# پاسخ فرکانسی

- از پاسخ قبل: $H(r)=\frac{kX}{F_0}=\frac{1}{1-r^2+i\beta}=\frac{\left(1-r^2\right)-i\beta}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}=u+iv$

$$u=\frac{\left(1-r^2\right)}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2},\qquad v=-\frac{\beta}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}$$

$$v+\frac{1}{2\beta}=-\frac{\beta}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}+\frac{1}{2\beta}=\frac{-2\beta^2+\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}{2\beta\left[\left(1-r^2\right)^2+\beta^2\right]}$$

$$=\frac{\left(1-r^2\right)^2-\beta^2}{2\beta\left[\left(1-r^2\right)^2+\beta^2\right]}$$

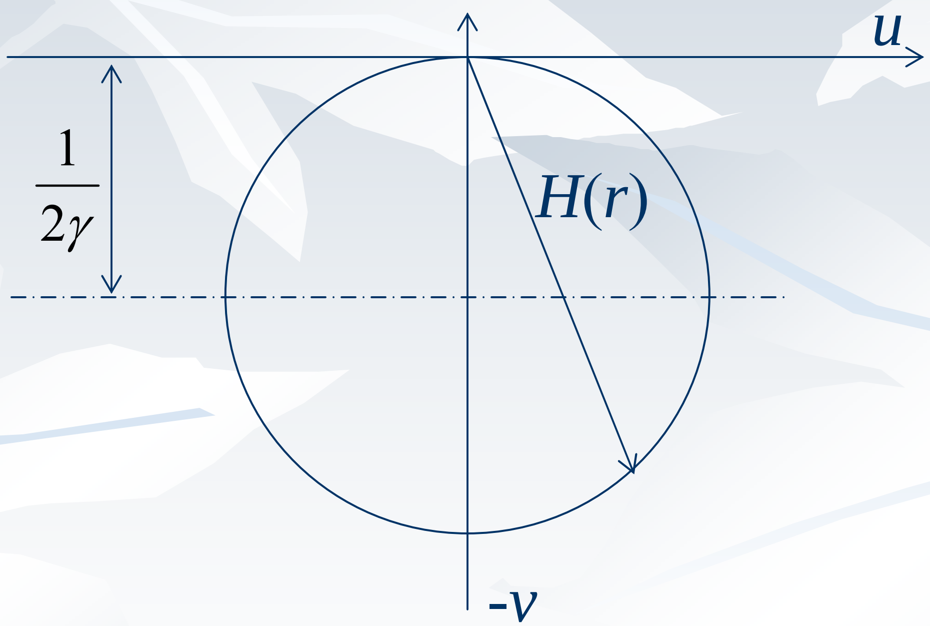
# پاسخ فرکانسی

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2\beta}\right)^2=\left[\frac{\left(1-r^2\right)}{\left(1-r^2\right)^2+\beta^2}\right]^2+\left[\frac{\left(1-r^2\right)^2-\beta^2}{2\beta\left[\left(1-r^2\right)^2+\beta^2\right]}\right]^2$$

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2\beta}\right)^2=\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2$$

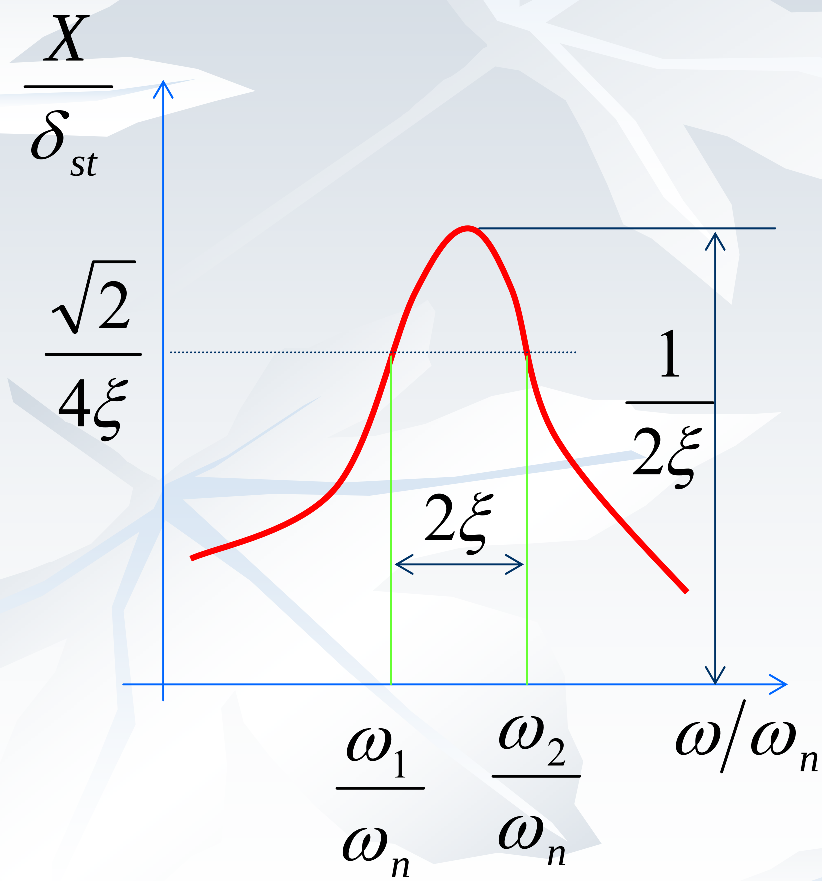
- که معادله دایره ای به شعاع $1/2\beta$ و خروج از مرکز $1/2\beta$

# پاسخ فرکانسی



# Resonance Quality کیفیت تشدید

- گاهی تیزی تشدید نیز گفته می شود
- کیفیت تشدید با میرائی مرتبط است
- با فرض اینکه نوع میرائی کم و لزج باشد
- در تشدید




$$X_{res} = \frac{F_0}{2\xi k} = \frac{\delta_{st}}{2\xi}$$

# Resonance Quality کیفیت تشدید

- دو نقطه در دو سمت تشدید پیدا می کنیم که در آن دامنه

$$X = \sqrt{2}/2\, X_{res} = \sqrt{2}\,\frac{\delta_{st}}{4\xi}$$

- این نقاط نصف توان نیز نامیده می شوند.
- اگر در معادله تشدید قرار داده و به توان دو برسانیم

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\xi}\right)^2 = \frac{1}{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}$$

# Resonance Quality کیفیت تشدید

- در نتیجه

$$1+r^4-2r^2+4\xi^2 r^2=8\xi^2$$

$$r^4+2\left(2\xi^2-1\right)r^2+\left(1-8\xi^2\right)=0$$

$$r^2=\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\left(1-2\xi^2\right)\pm\sqrt{4\xi^4+1-4\xi^2-1+8\xi^2}$$

$$=\left(1-2\xi^2\right)\pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

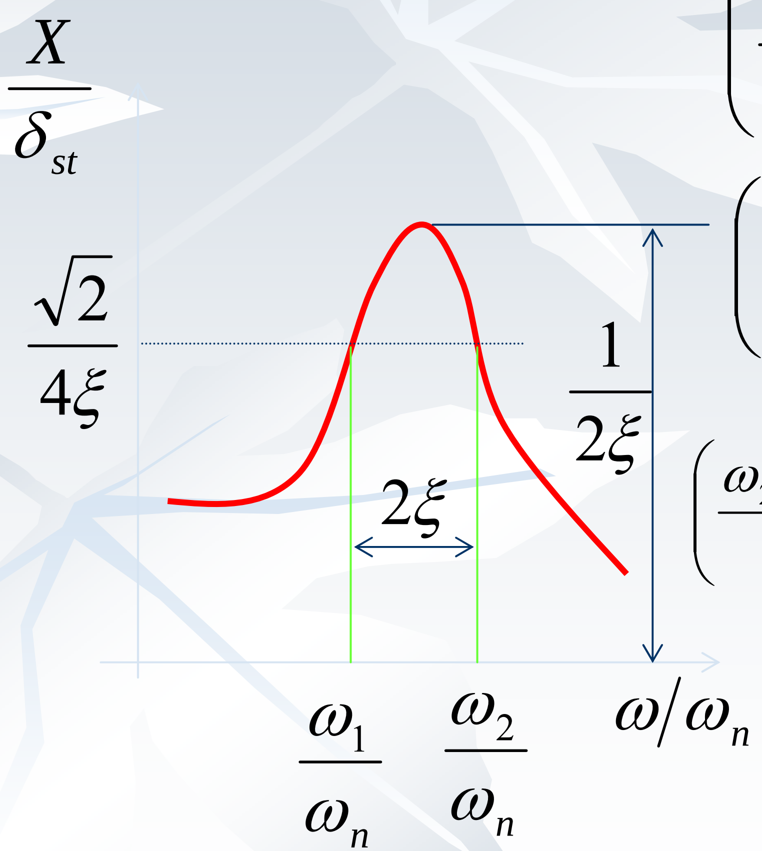
$\approx 0$

- برای

$\xi \ll 1$

$$r^2=1\pm 2\xi$$

# Resonance Quality کیفیت تشدید




$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 = 1-2\xi \qquad \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 = 1+2\xi$$

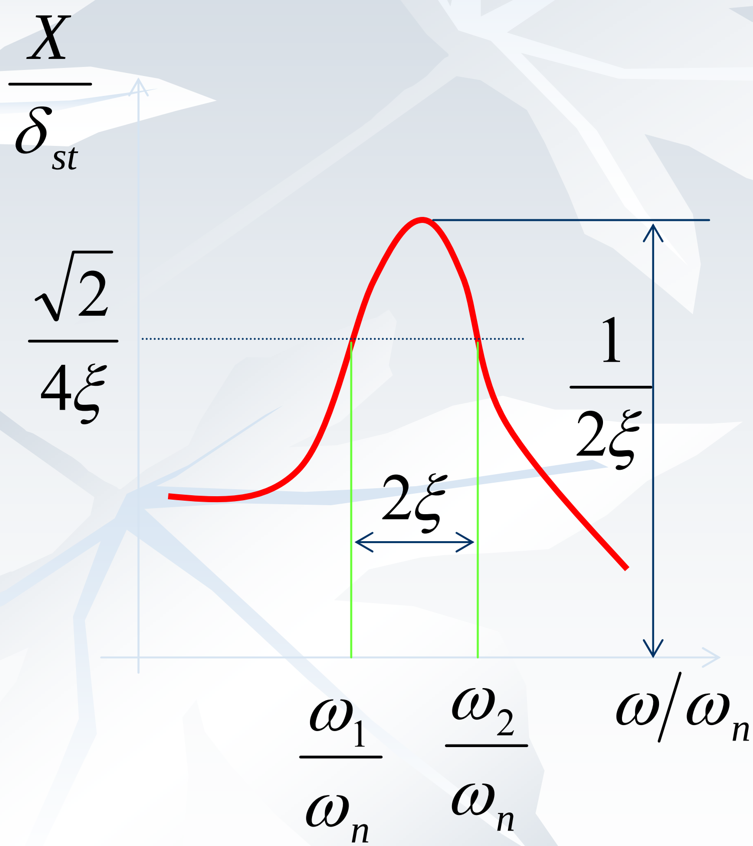
$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 = 4\xi$$

$$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_n}\right)\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_n}\right) = \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_n}\right)\left(\frac{2\omega_n}{\omega_n}\right) = 4\xi$$

$$\boxed{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_n}\right) = 2\xi}$$

# Resonance Quality کیفیت تشدید

- کیفیت تشدید را با Q نشان داده و




- عرض باند

$$\frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{f_n}{\Delta f} = \frac{1}{2\xi}$$

- فرمول بالا برای محاسبه میرائی مفید است

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

# Self-Excitation and Stability Analysis

- **Dynamic Stability Analysis**

Consider the equation of motion of a single degree of freedom system:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (3.107)$$

This leads to a characteristic equation

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \qquad (3.108)$$

The roots of the equation are:

Flutter of turbine blade, flow-induced vibration of pipe, automobile wheel shimmy

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2} \qquad (3.109)$$

Self-excited vibrating system = force is fun of motion variable (x,v,a)

# Self-Excitation and Stability Analysis

Let the roots be expressed as

$$s_1 = p + iq, \qquad s_2 = p - iq \tag{3.110}$$

where p and q are real numbers so that

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \tag{3.111}$$

Hence,

$$\frac{c}{m} = -(s_1 + s_2) = -2p, \qquad \frac{k}{m} = s_1 s_2 = p^2 + q^2 \tag{3.112}$$

If c & k are positive, then the system is dynamically stable

## Ex 3.8 Instability of Spring-Supported Mass on Moving Belt

Consider a spring-supported mass on a moving belt, in Fig (a). The kinetic coefficient of friction between the mass and the belt varies with the relative (rubbing) velocity, in Fig (b). As rubbing velocity increases, the coefficient of friction first decreases from its static value linearly and them starts to increase. Assuming that the rubbing velocity, $v$, is less than the transition value, $v_Q$, the coefficient of friction can be expressed as $\mu = \mu_0 - \frac{a}{W} v$ where $a$ is a constant and $W = mg$ is the weight of the mass. Determine the nature of free vibration about the equilibrium position of the mass.

# Ex 3.8 Solution

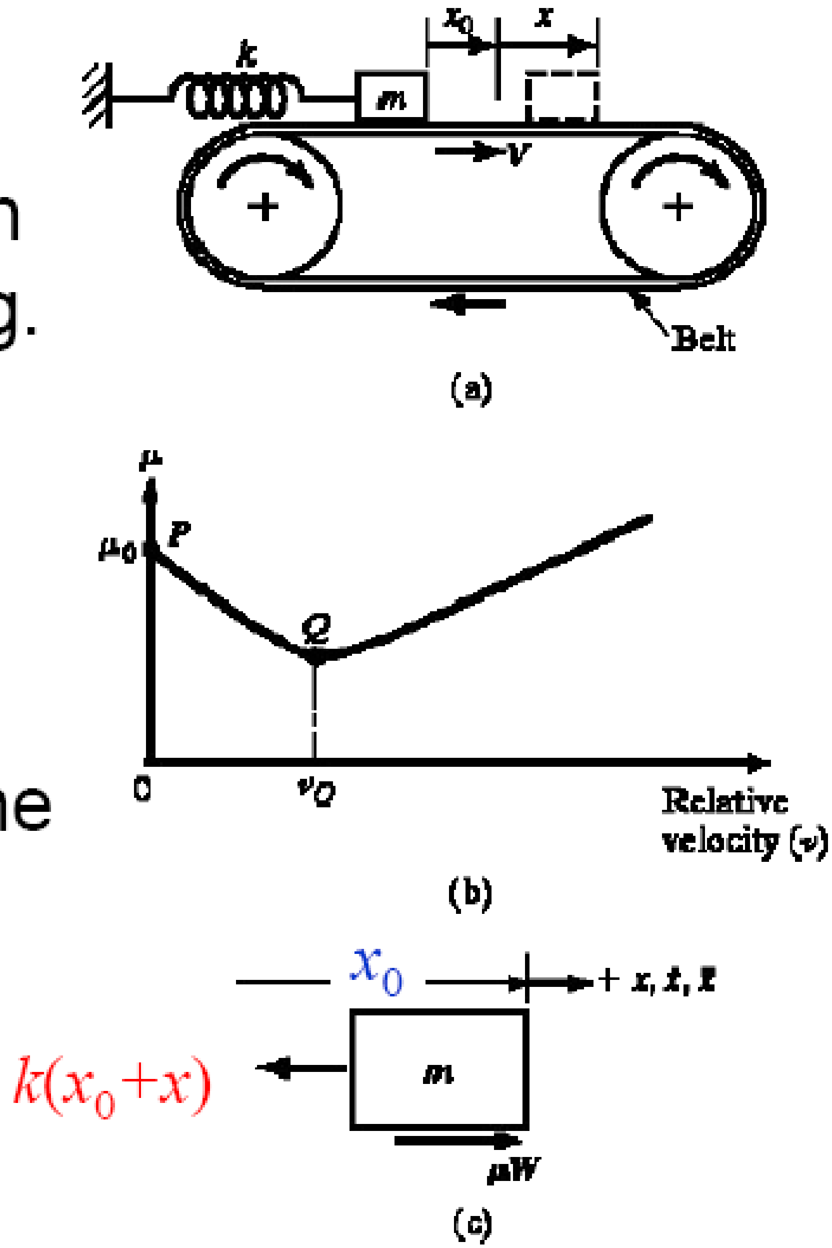
Let the equilibrium position of mass $m$ correspond to an extension of $x_0$ of the spring. Then,

$$\mu W = kx_0$$

$$x_0 = \frac{\mu W}{k} = \frac{\mu_0 W}{k} - \frac{aV}{k}$$

where $V$ is the velocity of the belt. Hence, the rubbing velocity $v$ is given by:

$$v = V - \dot{x}$$



# Ex 3.8 Solution

The equation of motion for free vibration is

$$m\ddot{x} = -k(x_0 + x) + \mu W = -k(x_0 + x) + W\left(\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x})\right)$$

i.e.,

$$m\ddot{x} - a\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{(E.1)}$$

The solution is given by

$$x(t) = e^{(a/2m)t}\left\{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\right\} \qquad \text{(E.2)}$$

where $C_1$ and $C_2$ are constants and,

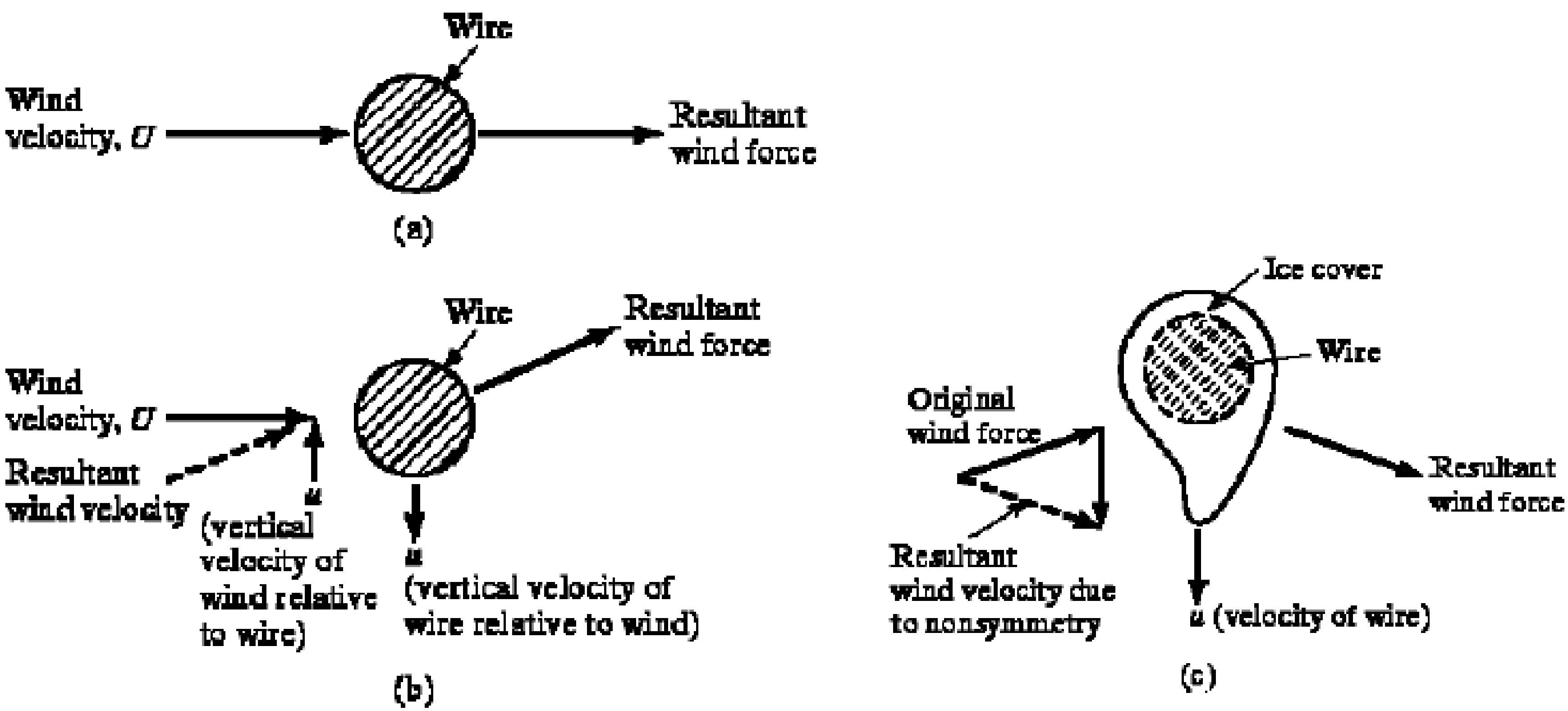
$$r_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2}$$

# Self-Excitation and Stability Analysis

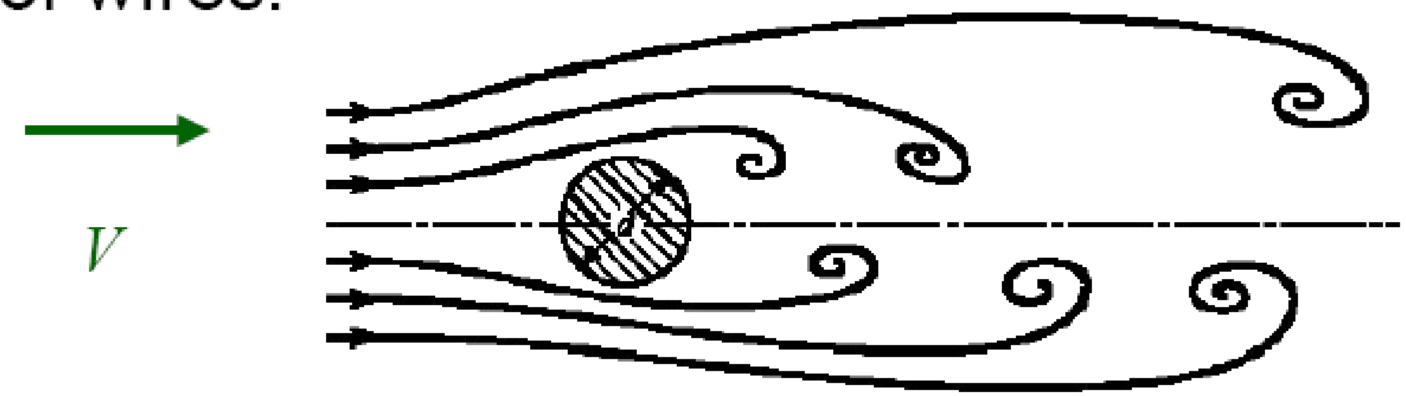
- **Dynamic Instability Caused by Fluid Flow**

The figure illustrates the phenomenon of galloping of wires:



# Self-Excitation and Stability Analysis

The figure illustrates the phenomenon of singing of wires:




Experimental data show that regular vortex shedding occurs strongly in the range of Reynolds number (Re) from about 60 to 5000. In this case,

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \tag{3.113}$$

http://mec424.group.shef.ac.uk/simulations_cylinder.php

http://public.lanl.gov/wdaniel/science/turbulence/vortexstreet/single.html

# Self-Excitation and Stability Analysis

For Re > 1000, the dimensionless frequency of vortex shedding, expressed as Strouhal number (St), is approximately equal to 0.21.

$$\mathrm{St} \equiv \frac{fd}{V} = 0.21 \tag{3.114}$$

where $f$ is the frequency of vortex shedding. The harmonically varying lift force *(F)* is given by

$$F(t) = \frac{1}{2} c\rho V^2 A \sin \omega t \tag{3.115}$$

where *c* is a constant (c = 1 for a cylinder), *A* is the projected area of the cylinder perpendicular to the direction of *V*, $\omega$ is circular frequency and *t* is time.

# Ex 3.10 Flow-Induced Vibration of a Chimney

A steel chimney has a height of 2m, an inner diameter 0.75m, and an outer diameter 0.80m. Find the velocity of the wind flowing around the chimney which will induce transverse vibration of the chimney in the direction of airflow.

# Ex 3.10 Solution

*Approach*: Model the chimney as a cantilever beam and equate the natural frequency of the transverse vibration of the chimnet to the frequency of vortex shedding.

The natural frequency of transverse vibration of a cantilever beam is

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \qquad \text{(E.1)}$$

where $\beta_1 l = 1.875104$ (E.2)

For the chimney, $E = 207 \text{X} 10^9$ Pa, $\rho g = 76.5 \text{X} 10^3$ N/m$^3$, $l$ = 20m, d = 0.75m, D = 0.80m,

# Ex 3.10 Solution

$$A=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)=\frac{\pi}{4}(0.80^2-0.75^2)=0.0608685\,\mathrm{m}^2$$

and

$$I=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{\pi}{64}(0.80^4-0.75^4)=0.004574648\,\mathrm{m}^4$$

Thus,

$$\omega_1=(1.875104)^2\left\{\frac{(207\times10^9)(0.004574648)}{\left(\frac{76.5\times10^3}{9.81}\right)(0.0608685)(20)^4}\right\}^{1/2}$$

$$=12.415417\ \mathrm{rad/s}=1.975970\ \mathrm{Hz}$$

# Ex 3.10 Solution

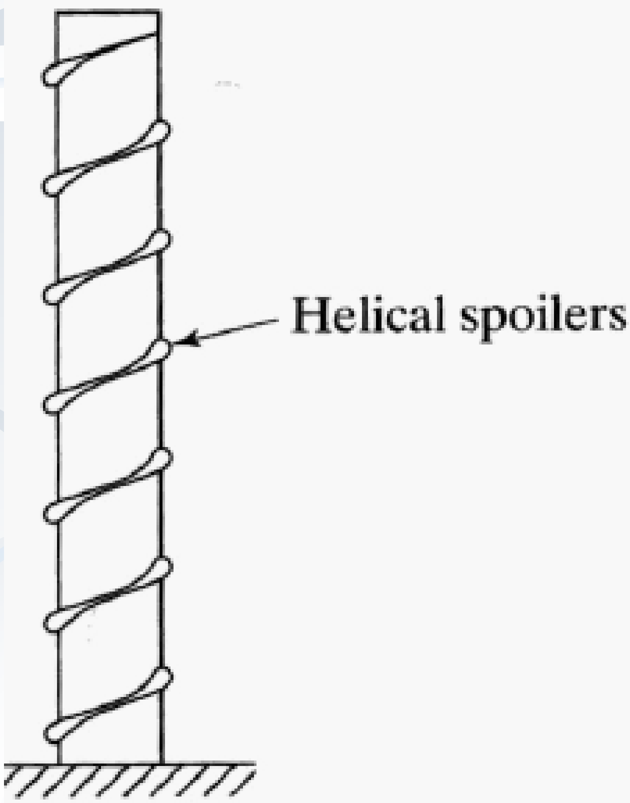
The frequency of vortex shedding is given by Strouhal number:

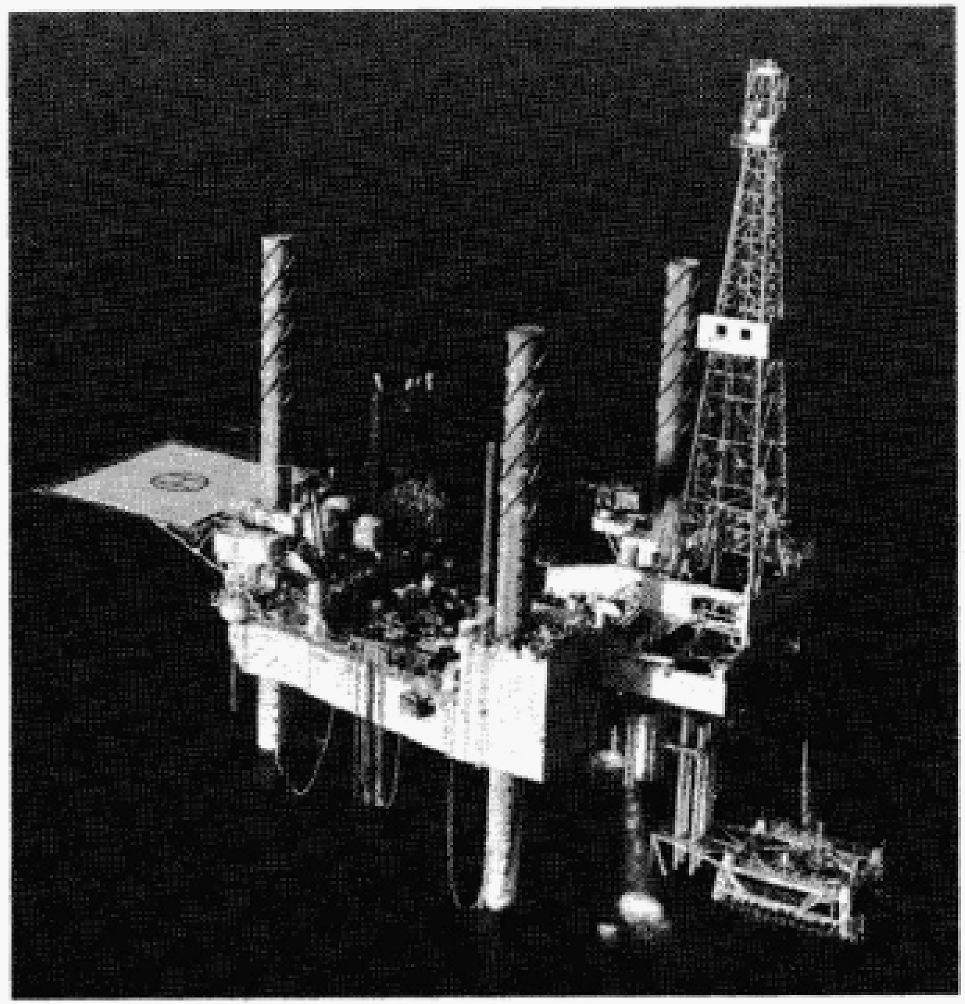
$$\mathrm{St} = \frac{fd}{V} = 0.21$$

The velocity wind *(V)* which causes resonance can be determined as

$$V = \frac{f_1 d}{0.21} = \frac{1.975970(0.80)}{0.21} = 7.527505\ \mathrm{m/s}$$

# Break the vortex pattern



# Spoiler in a high-speed racing car to improve the stability

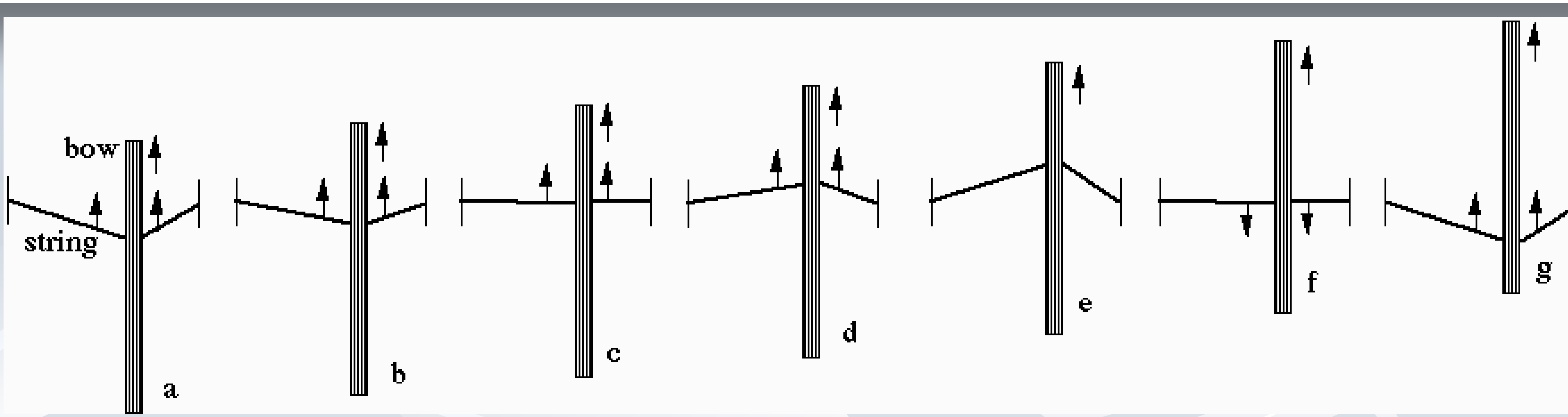
http://en.wikipedia.org/wiki/Spoiler_(automotive)

# Self-Excited Vibrations

- Actually, there is an additional type of forcing, called a *self-excited* vibration
- Self-excited vibrations always force the system at its natural frequency

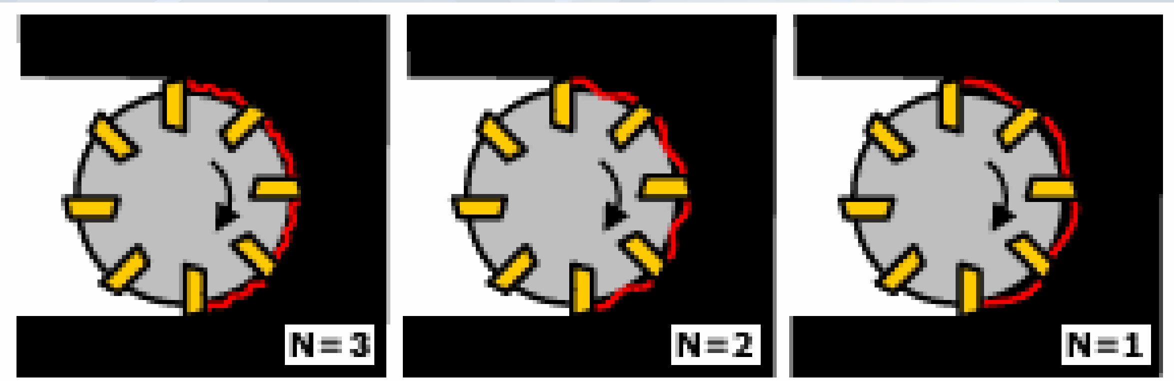
Examples:

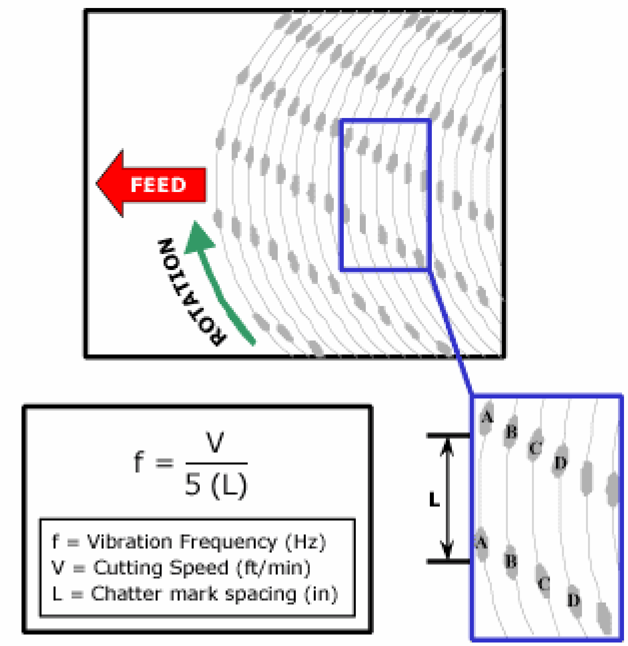
- Swingset
- Violin string / bow
- Washboard roads

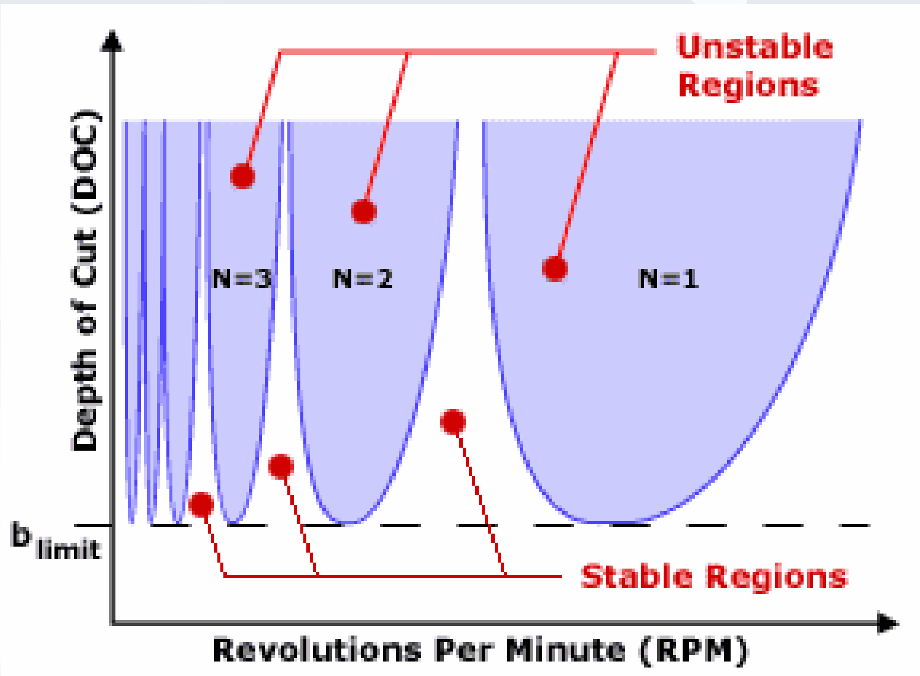



With high static friction, the bow tends to stick to the string (diagram a) and for a little while it drags the string along with it (b,c,d). When the string has been pulled sideways far enough (e), it breaks free of the bow and slides past it easily with very little friction, thanks to the rosin (f). The string doesn't stop when it gets to the straight position because its momentum carries it on until eventually it stops and reverses direction. When it is going at about the same speed and in the same direction as the bow it catches on the bow (g), static friction reigns, and the cycle begins again. Usually the vibration of the string governs the cycle of stick-slip: while the vibration is in the same direction as the bow travel, it sticks and moves with it, when it reverses it slips. Thus *the cycle of stick and slip on the bow has the same period as the vibration of the string.* This might be less than a thousandth of a second for a violin or several hundredths of a second on a double bass. Do not confuse this cycle with the forward and backward motion of the bow: while the player is moving the bow in one direction hundreds of stick-slip cycles may occur.

# Self-Excited Vibr
# Machining Cha




- Vibrations occur at the natural frequency of the cutting tool or the workpiece
- Indicates desirability of very stiff machine tools
- Difficult to machine very thin pieces

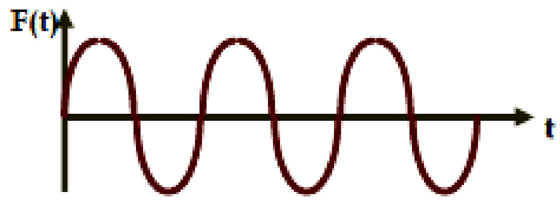
# ارتعاشات مکانیکی ۸
# بارگذاری عمومی

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

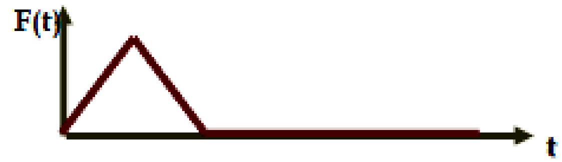
# پاسخ به بارهای متناوب

- معادله حاکم برای بار متناوب: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$
- که $F(t)$ بار متناوب است: $F(t)=F(t+T)$

1) Harmonic (sin, cos)

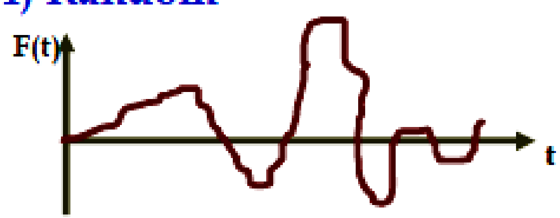



2) Transient



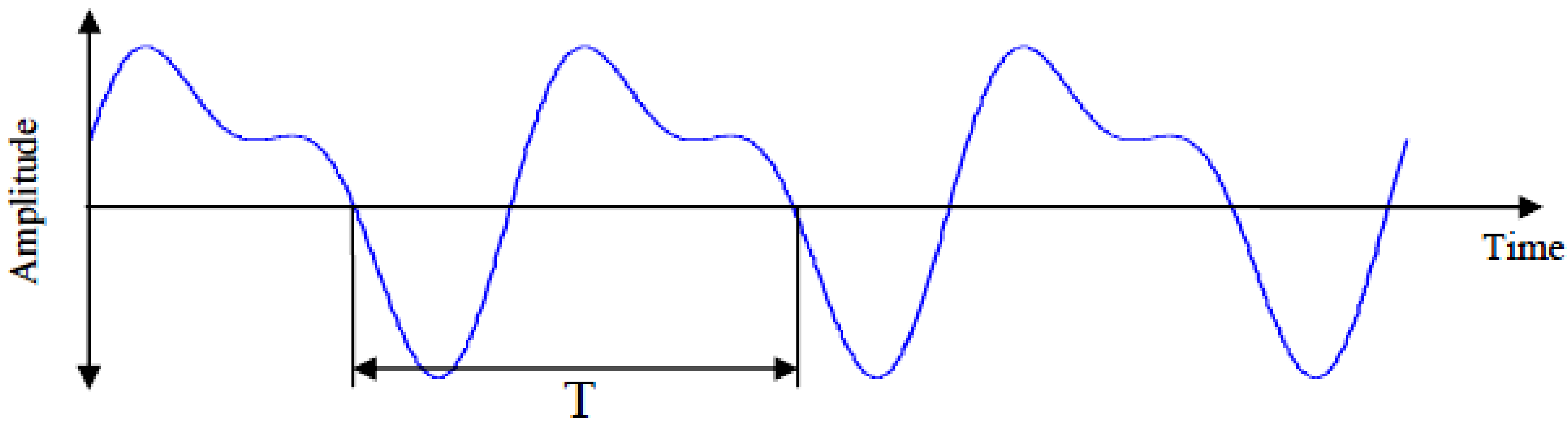

3) Periodic


4) Random




**This force can be expressed in terms of its Fourier Series Coefficients**

# انتقال از دامنه زمان به فرکانس




- نمایش سری مثلثاتی فوریه:

$$F(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t) + \cdots$$
$$+ b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + b_3\sin(3\omega t) + \cdots$$

$$\omega = 2\pi/T$$

# انتقال از دامنه زمان به فرکانس

- شرایط وجود سری فوریه یک تابع:
  - تابع متناوب باشد: $F(t)=F(t+T)$
  - در هر دوره تناوب درصورت وجود به تعداد متناهی ناپیوستگی وجود داشته باشد.
  - در ناپیوستگی ها تابع کراندار و تعریف شده باشد.
  - در هر دوره تناوب تابع انتگرال پذیر و مقدار انتگرال زیر متناهی باشد:

$$\int_0^T |f(t)|\,dt$$

# ضرایب فوریه

- سری فوریه تابع $F(t)$

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

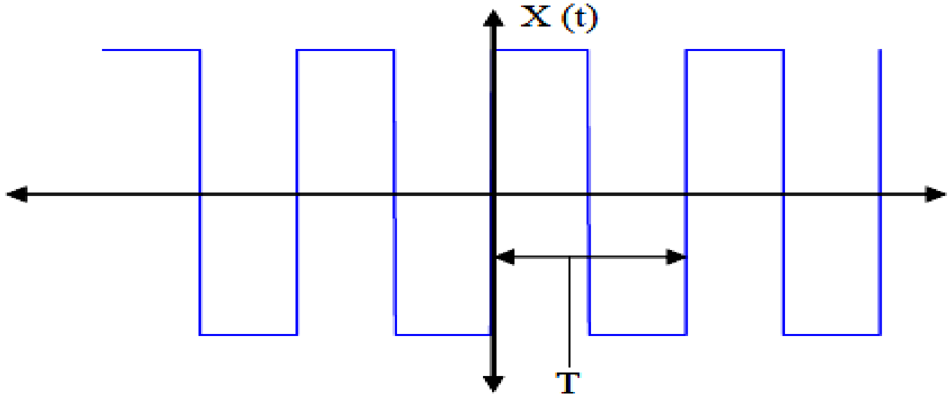
- که ضرایب فوریه عبارتند از:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)dt$$

# مثال

- مطلوب است سری فوریه تابع نشان داده شده:




$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le T/2\\ -1 & T/2<t<T\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=0,\qquad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)dt+\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)\sin(n\omega t)dt$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)dt=\frac{4}{T}\left[\frac{-1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

# ادامه

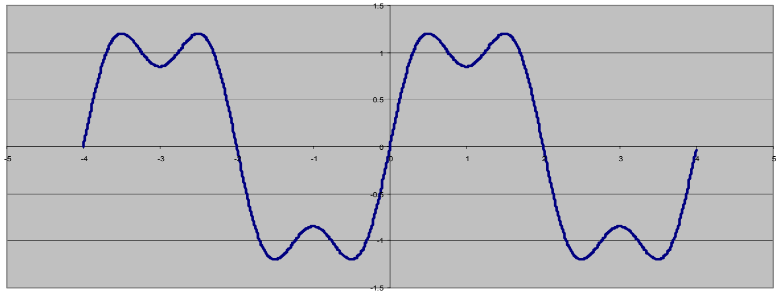
- در نتیجه

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \begin{cases} 4/n\pi & n \quad odd \\ 0 & n \quad even \end{cases}$$

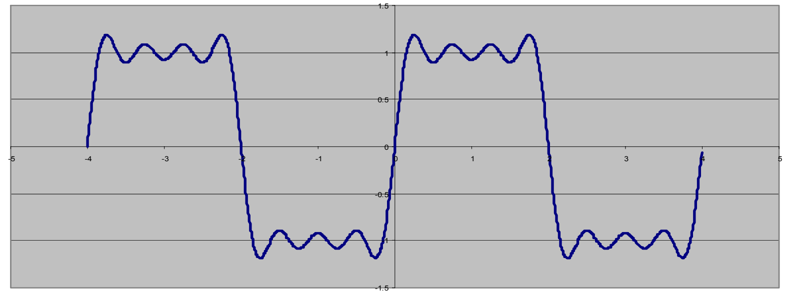
$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4}{5\pi}, \quad b_6 = 0,$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\omega t) + \cdots \end{aligned}}$$

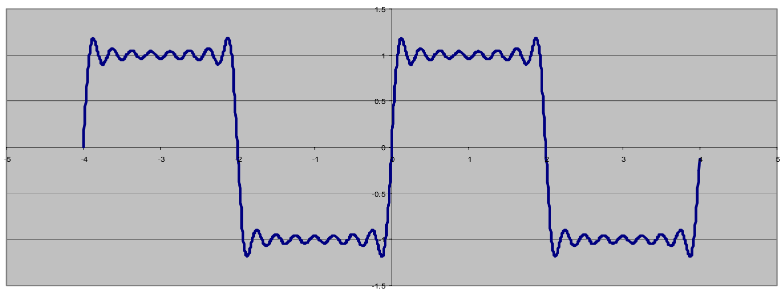
# نمایش سری



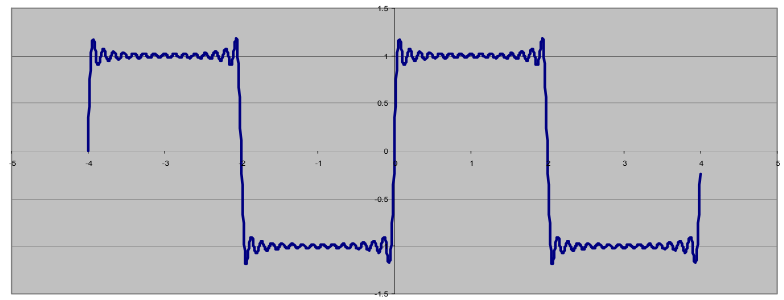
N=3



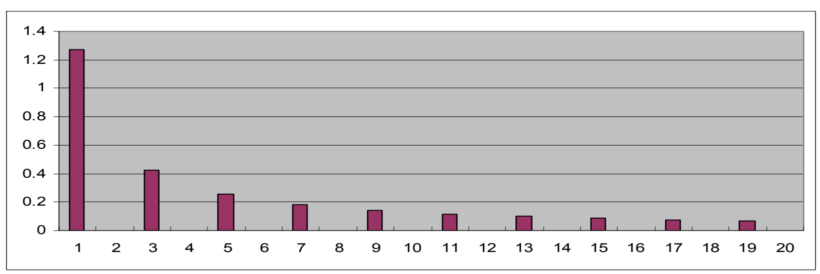
N=7



N=15



N=30



# حل معادله حرکت با تحریک متناوب

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t),\quad F(t)=F(t+T)$$

- اگر نمایش سری فوریه موجود باشد:

$$\omega=2\pi/T$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$$

- با فرض تغییرمکان $x$ بصورت سری فوریه:

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)$$

$$\dot{x}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\omega(-A_n\sin(n\omega t)+B_n\cos(n\omega t))$$

$$\ddot{x}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2\omega^2(A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t))$$

# ادامه

- با قراردادن در معادله حرکت:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{a_n\cos(n\omega t)}+\underline{b_n\sin(n\omega t)}=kA_0$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\left(\left(k-m(n\omega)^2\right)A_n+cn\omega B_n\right)\cos(n\omega t)}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\left(\left(k-m(n\omega)^2\right)B_n-cn\omega A_n\right)\sin(n\omega t)}$$

- درنتیجه:

$$\boxed{A_0=\frac{a_0}{k}}$$

$$a_n=\left(k-m(n\omega)^2\right)A_n+cn\omega B_n$$

$$b_n=\left(k-m(n\omega)^2\right)B_n-cn\omega A_n$$

$$\boxed{A_n=\frac{a_n\left(k-m(n\omega)^2\right)-b_ncn\omega}{\left(k-m(n\omega)^2\right)^2+(cn\omega)^2}},\qquad \boxed{B_n=\frac{b_n\left(k-m(n\omega)^2\right)+a_ncn\omega}{\left(k-m(n\omega)^2\right)^2+(cn\omega)^2}}$$

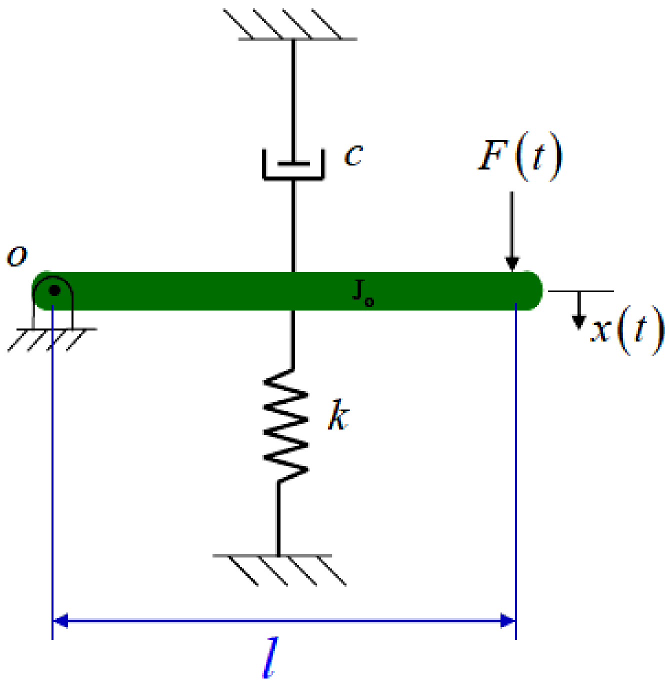
# ادامه

$$A_n = \frac{a_n\left(k - m(n\omega)^2\right) - b_n c n\omega}{\left(k - m(n\omega)^2\right)^2 + (cn\omega)^2}, \qquad B_n = \frac{b_n\left(k - m(n\omega)^2\right) + a_n c n\omega}{\left(k - m(n\omega)^2\right)^2 + (cn\omega)^2}$$

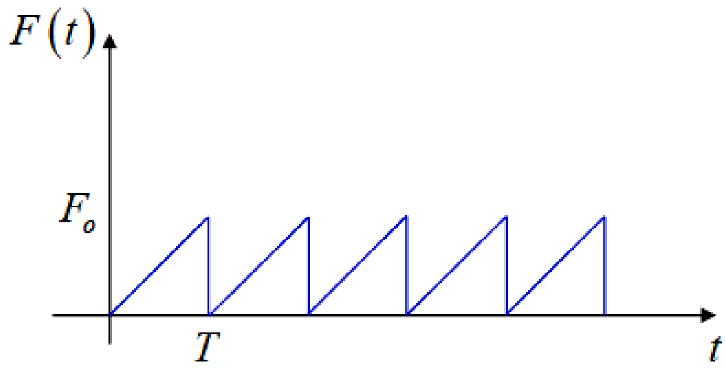
- توجه شود که دامنه در $n\omega = \omega_n$ بیشترین مقدار را دارد.
- افزایش $n$ در کاهش دامنهٔ هر جمله مؤثر است لذا چند هارمونیک اول (جملات اول) برای توصیف حرکت کافی است.

# مثال:

## Fourier Series Example




**Find x(t)**




**Given:**

$$J_o = 10\ kg \cdot m^2 \qquad l = 1\ m$$

$$c = 40\ \frac{N \cdot \sec}{m} \qquad k = 4000\ \frac{N}{m}$$

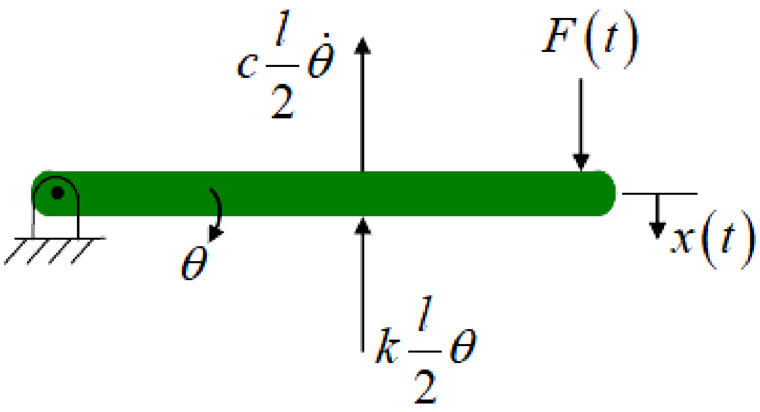
**Initial Conditions:**

$$F_o = 10\pi$$

$$T = 1\ \sec$$

# ادامه

## Fourier Series Example: FBD & EOM




$x = l\theta$ **for small angles**

$$\sum M_0 = J_0\ddot{\theta}$$

$$-\frac{kl^2}{4}\theta - \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + F(t)l = J_0\ddot{\theta}$$

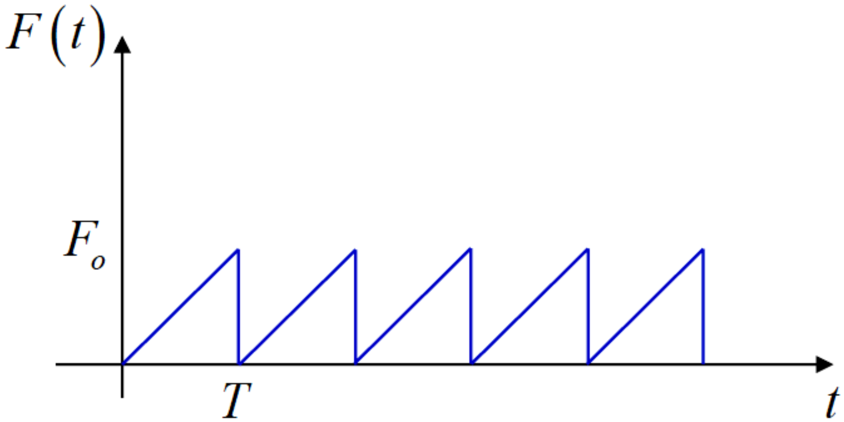
$$J_0\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{4}\theta = F(t)l \qquad \theta = \frac{x}{l}$$

$$\frac{J_0}{l}\ddot{x} + \frac{cl}{4}\dot{x} + \frac{kl}{4}x = F(t)l$$

$$\frac{J_0}{l^2}\ddot{x} + \frac{c}{4}\dot{x} + \frac{k}{4}x = F(t)$$

# سری فوریه بار

- بار متناوب است:




$$F(t)=\left(\frac{F_0}{T}\right)t \quad 0\le t<T$$

- ضرایب فوریه:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{F_0}{T}(t)dt=\frac{F_0}{T^2}\frac{t^2}{2}\Bigg]_0^T=\frac{F_0}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)dt=\frac{2F_0}{T^2}\int_0^T t\cos(n\omega t)dt=\frac{2F_0}{T^2}\left[\cancel{\frac{t\sin(n\omega t)}{n\omega}}+\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_0^T$$

$$=\frac{2F_0}{T^2}\left[\frac{\cos(2n\pi)-1}{(n\omega)^2}\right]=0$$

# ادامه

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2F_0}{T^2}\int_0^T t\sin(n\omega t)dt = \frac{2F_0}{T^2}\left[-\frac{t\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_0^T$$

$$= -\frac{2F_0}{T^2}\left[\frac{T^2\cos(2n\pi)}{(2n\pi)}\right] = -\frac{F_0}{n\pi}$$

- در نتیجه:

$$a_0 = \frac{F_0}{2}, \qquad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{F_0}{n\pi}$$

- برای مقادیر داده شده:

$$J_o = 10\ kg\cdot m^2 \qquad l = 1\ m \qquad F_o = 10\pi$$

$$c = 40\ \frac{N\cdot \sec}{m} \qquad k = 4000\ \frac{N}{m} \qquad T = 1\ \sec$$

$$\frac{J_O}{l^2}\ddot{x} + \frac{c}{4}\dot{x} + \frac{k}{4}x = F(t) \Rightarrow 10\ddot{x} + 10\dot{x} + 1000x = 5\pi - 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi t)}{n}$$

# ضرایب پاسخ

$$10\ddot{x}+10\dot{x}+1000x=5\pi-10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi t)}{n}$$

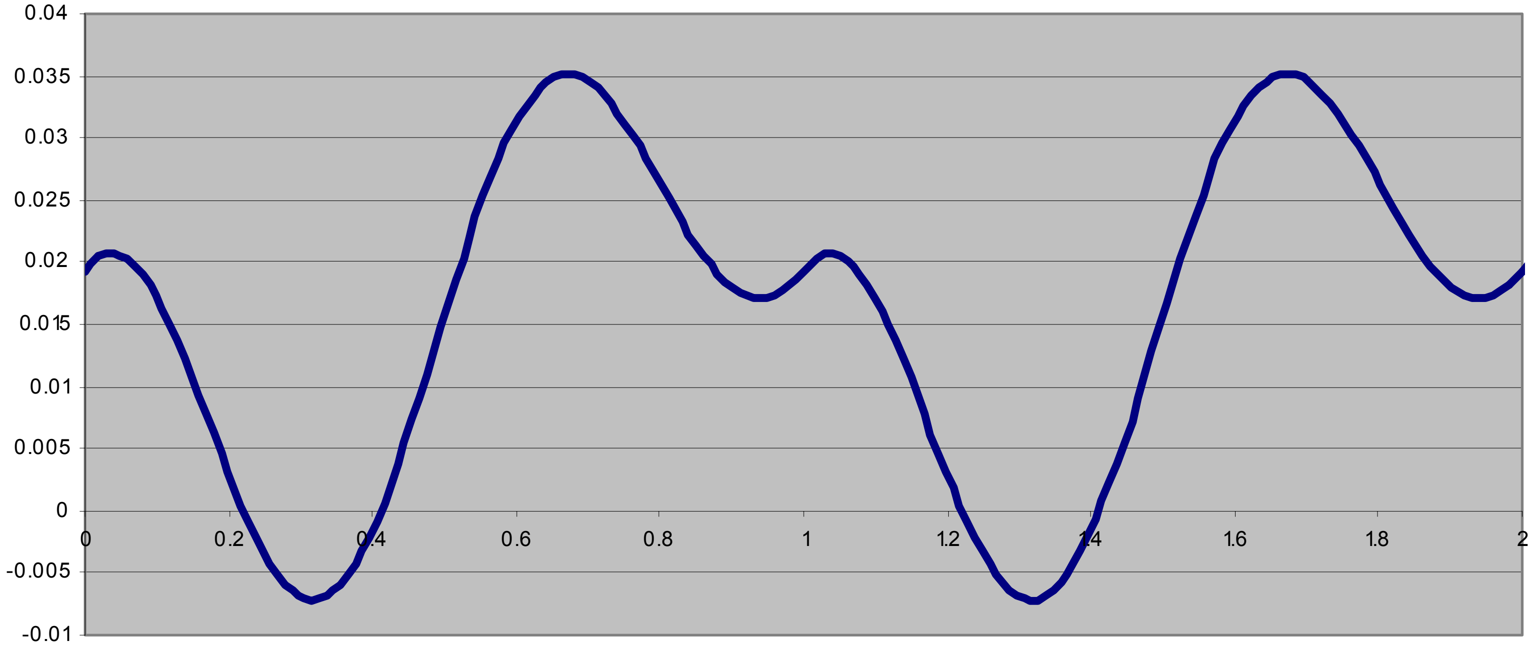
$$A_0=\frac{a_0}{k}=\frac{5\pi}{1000}$$

$$A_n=\frac{a_n\left(k-m(n\omega)^2\right)-b_n cn\omega}{\left(k-m(n\omega)^2\right)^2+(cn\omega)^2}=-\frac{200\pi}{\left(1000-10(2n\pi)^2\right)^2+(20n\pi)^2}$$

$$B_n=\frac{b_n\left(k-m(n\omega)^2\right)+a_n cn\omega}{\left(k-m(n\omega)^2\right)^2+(cn\omega)^2}=-\frac{10\left(1000-10(2n\pi)^2\right)}{n\left(1000-10(2n\pi)^2\right)^2+(20n\pi)^2}$$

پاسخ:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$$



# تحریک پایه با جابجائی متناوب

- درصورتی که تحریک پایه به صورت متناوب باشد، با داشتن شرایطی امکان حل معادله دیفرانسیل است:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y},\quad y(t)=y(t+T)$$

- با توجه به وجود مشتق $y$ سری فوریه $y$ باید مشتق پذیر باشد.
- در صورتی که تحریک پایه هارمونیک باشد نیز می توان سمت راست معادله را به صورت سری فوریه با دو جمله لحاظ نمود.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\underbrace{kY}_{b_1}\sin(\omega t)+\underbrace{c\omega Y}_{a_1}\cos(\omega t)$$

# بارگذاری عمومی
# General loading

# پاسخ به بارگذاری عمومی (برهمنهش) {یادآوری}

- اگر $x_1$ و $x_2$ هردو جواب یک معادله دیفرانسیل خطی باشند آنگاه:

$$x=ax_1+bx_2$$

نیز جواب است.

- اگر $x_1$ جواب خصوصی معادله

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x= f_1$$

و $x_2$ جواب خصوصی معادله

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x= f_2$$

است آنگاه $x=x_1+x_2$ جواب خصوصی معادله:

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x= f_1+f_2$$

# ضربه و اندازه حرکت (یادآوری)

- قانون بقاء اندازه حرکت خطی:

$$G_1 + \int_{t_1}^{t_2} F dt = G_2$$

- در اثر اعمال ضربه برروی سیستم جرم و فنر که ابتداً ساکن بوده و در اثر ضربه تحریک می شود

$$mv(t_0^-) + F\Delta t = mv(t_0^+)$$

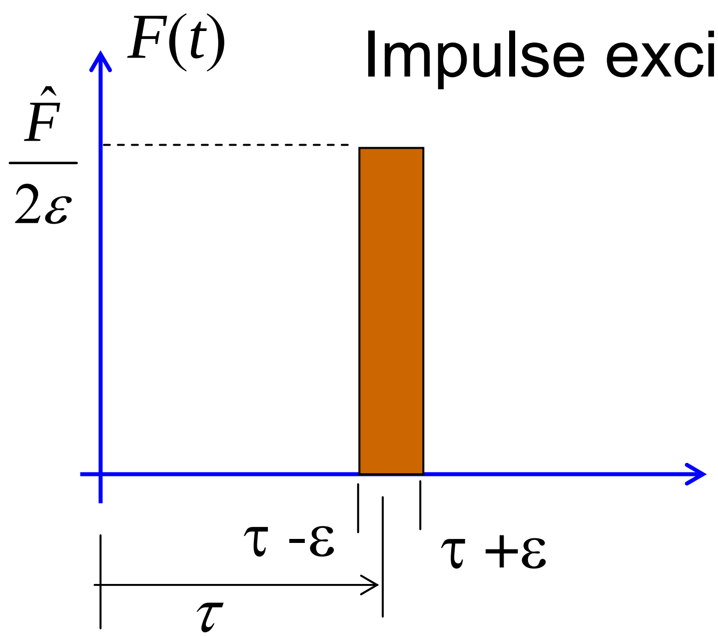
قبل از برخورد=۰

بعد از برخورد

- در نتیجه:

$$mv_0 = \hat{F} \quad \Rightarrow v_0 = \frac{\hat{F}}{m} = \frac{F\Delta t}{m}$$

# ضربه (یادآوری)




Impulse excitation

ε is a small positive number

- ضربه = سطح زیر منحنی

$$\text{impulse force} = \int F(t)dt = F\Delta t$$

$$I(\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

$$= \frac{\hat{F}}{2\varepsilon} 2\varepsilon = \hat{F}$$ ضربه

# تابع دلتای دیراک

- تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می شود:

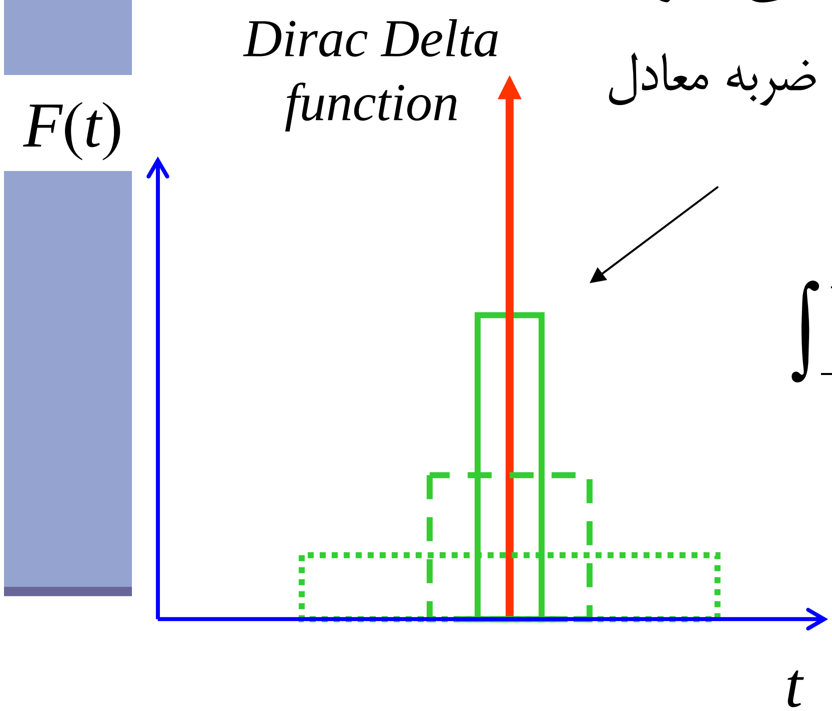
$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

- خواص:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

- تابع ضربه:

$$F(t-\tau)=0,\ t\neq\tau$$

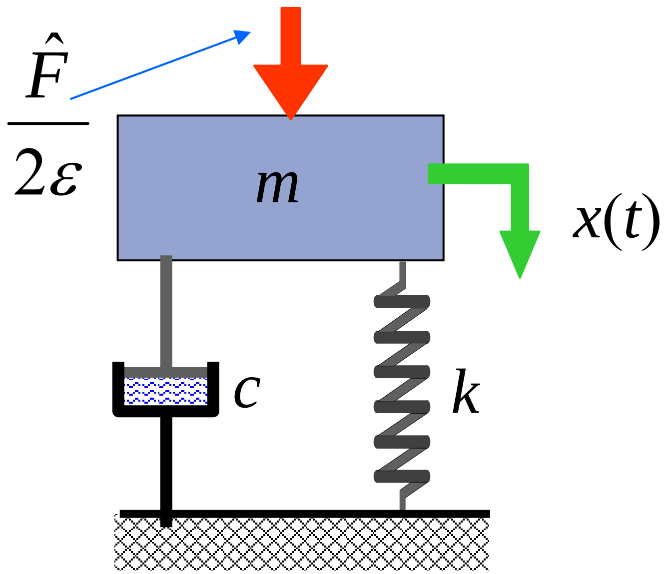



$$\int_{-\infty}^{\infty}F(t-\tau)dt=\hat{F}\qquad if\quad \hat{F}=1\ \Rightarrow\ F(t-\tau)=\delta(t-\tau)$$

# ضربه برروی یک سیستم زیر میرا

- می دانیم که پاسخ ارتعاش آزاد میرا با شرایط اولیه $x_0$ و $v_0$:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left( x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\xi \omega_n x_0 + v_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$



# ضربه برروی یک سیستم زیر میرا

- چنانچه ضربه بدون شرایط اولیه در $t=0$ اعمال گردد:

$$v_0 = \frac{\hat{F}}{m}, \qquad x_0 = 0$$

$$\boxed{x(t) = \hat{F}\,\frac{e^{-\xi\,\omega_n t}}{m\omega_d}\sin(\omega_d t) \qquad t \geq 0}$$

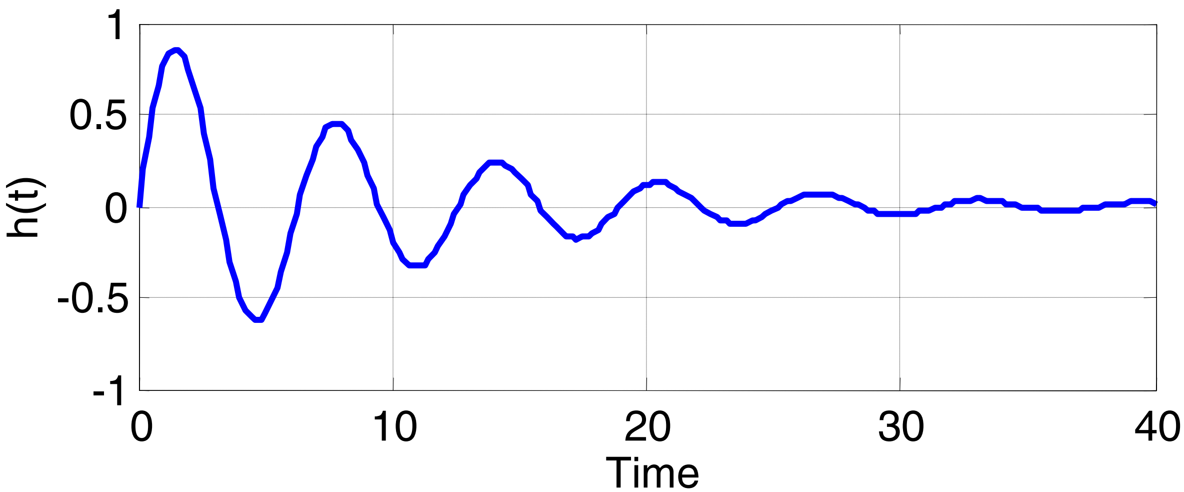
- پاسخ به ضربه واحد:

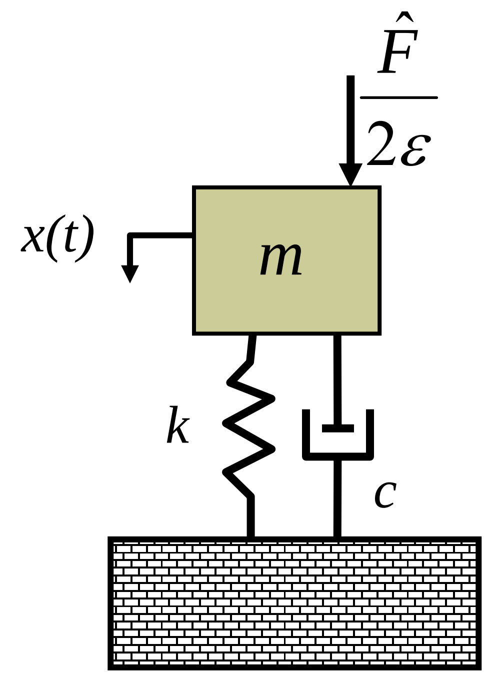
$$x(t) = \hat{F} g(t) \qquad g(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t$$

# ضربه برروی یک سیستم زیر میرا

$$x(t)=\frac{\hat{F}e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t \quad \text{(response with zero I.C.)}$$

$$x(t)=\hat{F}g(t),\ \text{where}\ \underbrace{g(t)=\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t}_{\text{impulse response function}}$$



# ضربه برروی یک سیستم زیر میرا

- اگر ضربه در زمان $t=\tau$ اعمال شده باشد:

$$x(t)=\begin{cases} 0 & t<\tau \\ \hat{F}\dfrac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau) & t\ge\tau \end{cases}$$

- با تعریف تابع هویساید:

$$H(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$x(t)=\hat{F}H(t-\tau)\frac{e^{-\xi\,\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau)$$

# ضربه برروی یک سیستم زیر میرا

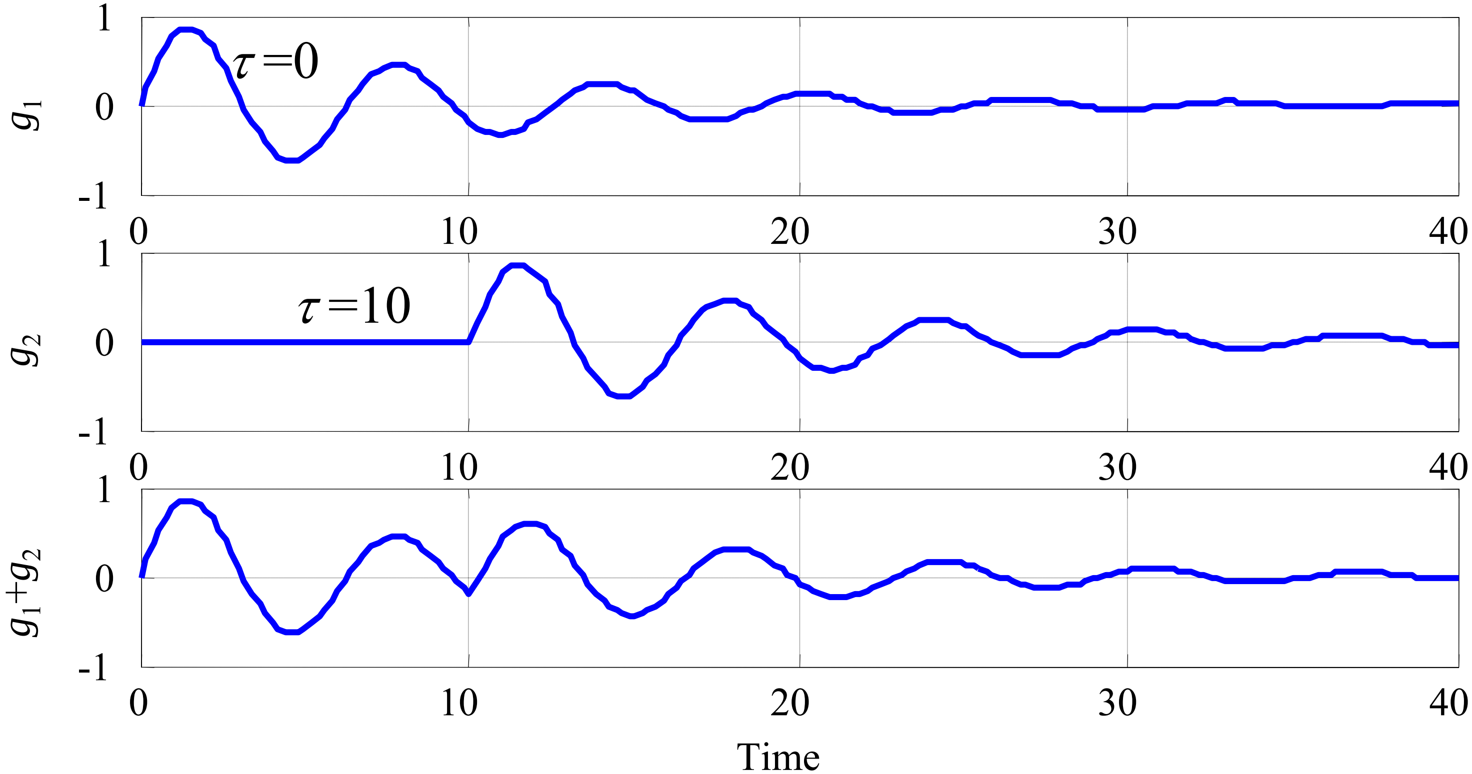
- که در نتیجه:

$$g(t-\tau)=\begin{cases} 0 & t<\tau \\ \dfrac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau) & t\geq\tau \end{cases}$$

$$g(t-\tau)=H\left(t-\tau\right)\frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau)$$

# ضربه برروی یک سیستم زیر میرا

- اگر دو ضربه در زمانهای متفاوتی اعمال گردد، پاسخ به ضربه واحدشان:



# پاسخ به ضربه واحد برای سیستم نامیرا

$$g(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)$$

# مثال: دوضربه متوالی با شرایط اولیه صفر

- به یک سیستم میرا با شرایط زیر در زمان t=0 ضربه ای به اندازه 2N.s اعمال می گردد. مطلوب است پاسخ سیستم:

$$m = 1\,\text{kg}, \quad c = 0.5\,\text{kg/s}, \quad k = 4\,\text{N/m}$$

$$\hat{F} = 2\,\text{N}\cdot\text{s}\ , \qquad \omega_n = 2, \qquad \xi = 0.125 \qquad \omega_d = 2\sqrt{1-0.125^2} = 1.984$$

$$x_1(t) = \frac{2e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t = 1.008e^{-0.25t}\sin(1.984t), t > 0$$

# ادامه

- اگر به همین سیستم ضربه ای واحد $\hat{F} = 1N.s$ در زمان $t=\tau$ اعمال گردد پاسخ عبارت است از:

$$x_2(t) = \begin{cases} 0.504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau)) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

# مثال: دوضربه متوالی با شرایط اولیه صفر

- حال اگر ضربه در دو زمان بصورت متوالی اعمال گردد:

$$F(t) = 2\delta(t) + \delta(t-\tau)$$

$$x_1(t) = \frac{2e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t = 1.008e^{-0.25t}\sin(1.984t), t>0$$

$$x_2(t) = 0.504e^{-0.25(t-\tau)}\sin(1.984(t-\tau)), t>\tau$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_1 + x_2 \\ &= \begin{cases} 1.008e^{-0.25t}\sin\left(1.984t\right) & 0<t<\tau \\ 1.016e^{-0.25t}\sin\left(1.984t\right) + 0.504e^{-0.25(t-\tau)}\sin\left(1.984(t-\tau)\right) & t>\tau \end{cases} \end{aligned}}$$

# مثال اعمال ضربه با شرایط اولیه:

- فرض کنید که شرایط اولیه برای سیستم اعمال شده است و جرم دارای شرایط اولیه $x_0 = 1\,\mathrm{mm}, \dot{x}_0 = -1\,\mathrm{mm/s}$ است.
- در این حالت باید جواب همگن را با اعمال شرایط اولیه بدست آورد و سپس پاسخ به ضربه را اضافه کرد

# دوضربه با شرایط اولیه

- معادله حاکم باشرایط مرزی

$$\ddot{x}+2\dot{x}+4x=\delta(t)-\delta(t-4), x_0=1\,\text{mm}, \dot{x}_0=-1\,\text{mm/s}$$

$$(\omega_n=2\text{rad/s}, \zeta=0.5, \omega_d=\sqrt{3}\text{ rad/s})$$

- جواب عمومی (همگن) که با اعمال شرایط اولیه

$$x_h(t)=e^{-\zeta\omega_n t}[\frac{v_0+x_0\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t+x_0\cos\omega_d t]$$

$$=e^{-t}[\frac{-1+1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t+\cos\sqrt{3}t]$$

$$=e^{-t}\cos\sqrt{3}t$$

# پاسخ به ضربه اول

$$\text{Treat } \delta(t) \text{ as } x_0 = 0 \text{ and } v_0 = 1,\, 0 < t < 4$$

$$x_I(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[\frac{v_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t}\sin\sqrt{3}t \qquad\qquad 0 < t < 4$$

# پاسخ کلی برای $0< t < 4$

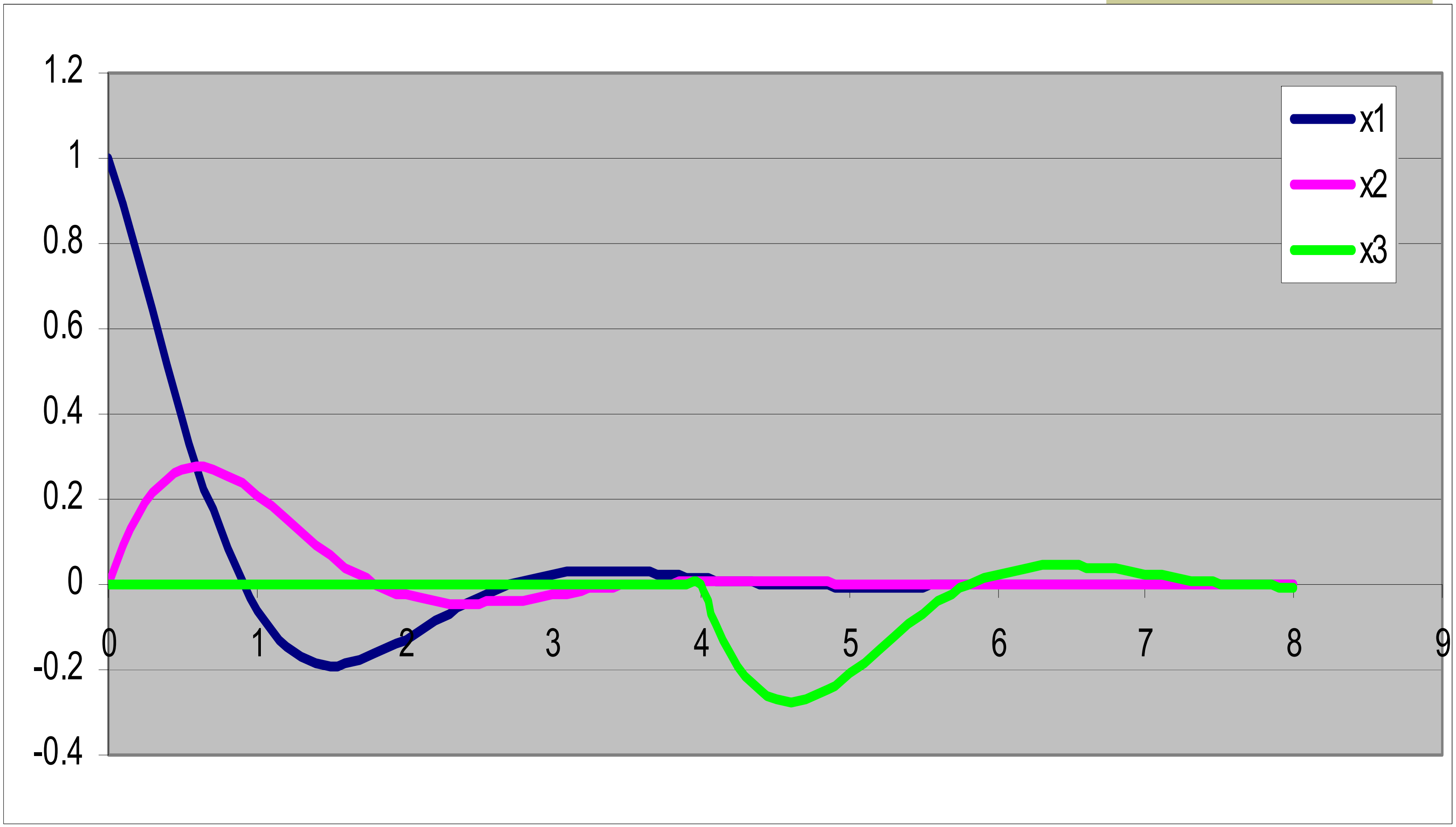
$$x_1(t) = x_h(t) + x_I(t)$$

$$= e^{-t}(\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t), 0 \le t < 4$$

# پاسخ به ضربه دوم

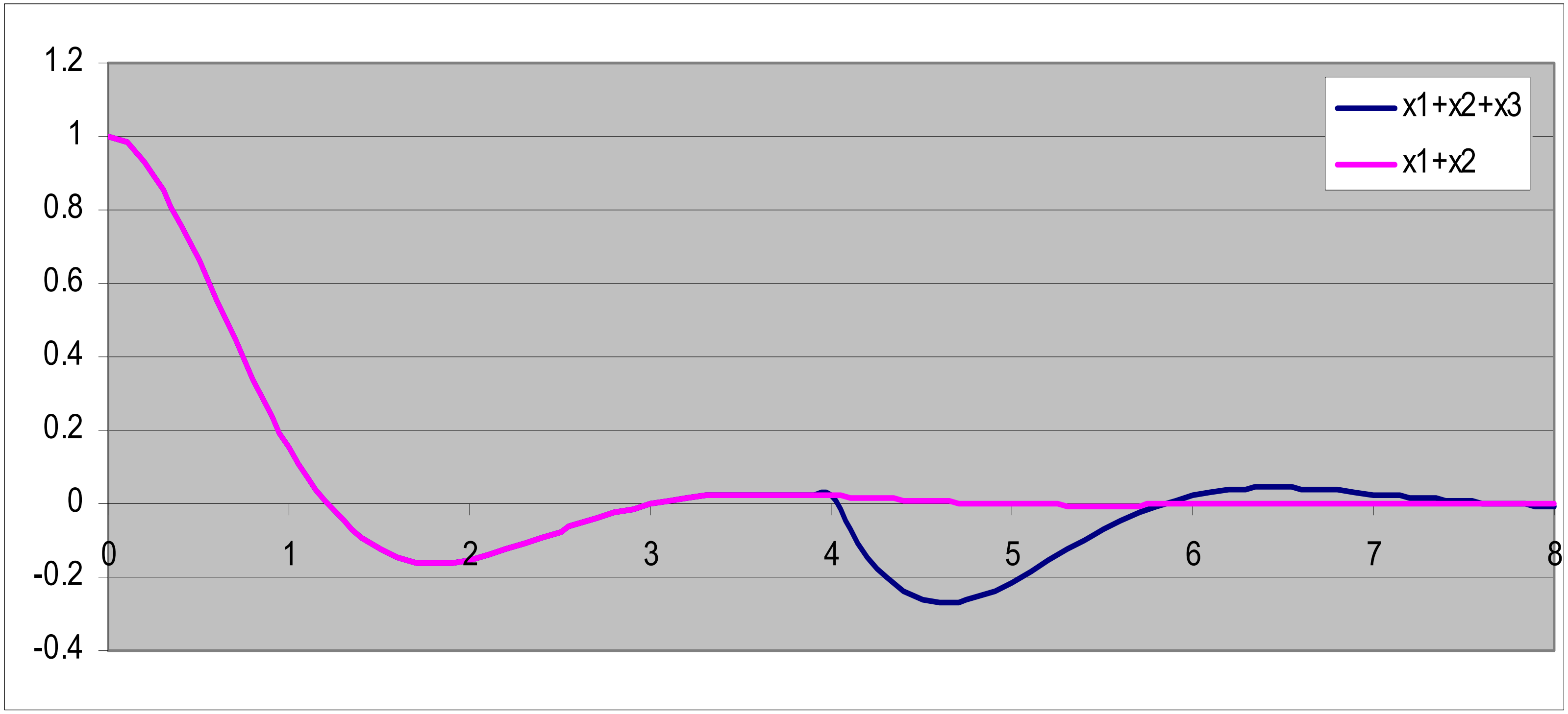
$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} e^{-t+4} \sin\sqrt{3}(t-4), \qquad t > 4$$

$$= -H(t-4)\frac{e^{-t+4}}{\sqrt{3}} \sin\sqrt{3}(t-4)$$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x1
x2
x3

# پاسخ کلی

$$x(t)=e^{-t}(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t}_{\text{frist impulse}}+\underbrace{\cos\sqrt{3}t}_{\text{initial condition}})\underbrace{-\frac{e^{-t+4}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-4)H(t-4)}_{\text{second impulse}}$$



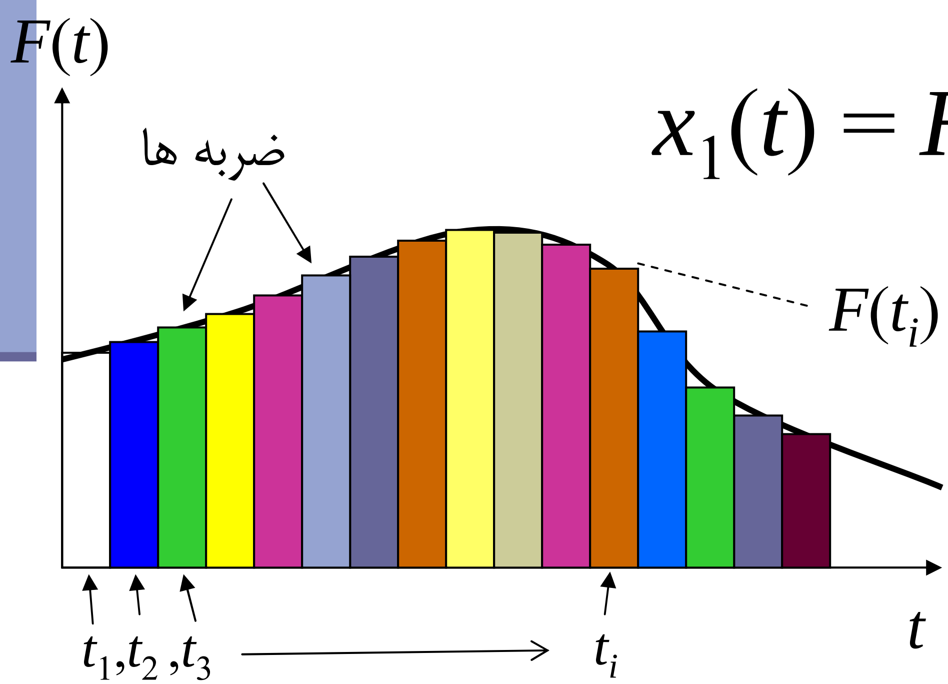
# پاسخ به نیروی ورودی اختیاری

- نیروی اعمالی به صورت یک سری ضربه ها در زمان $t_i$ با مقدار $F(t_i)\Delta t$ در نظر گرفته می شود:
- پاسخ در زمان $t$ بدلیل ضربه در $t_1$

$$x_1(t) = H(t\text{-}t_1)\, F(t_1)\Delta t\, g(t\text{-}t_1)$$

- پاسخ در زمان $t_2$

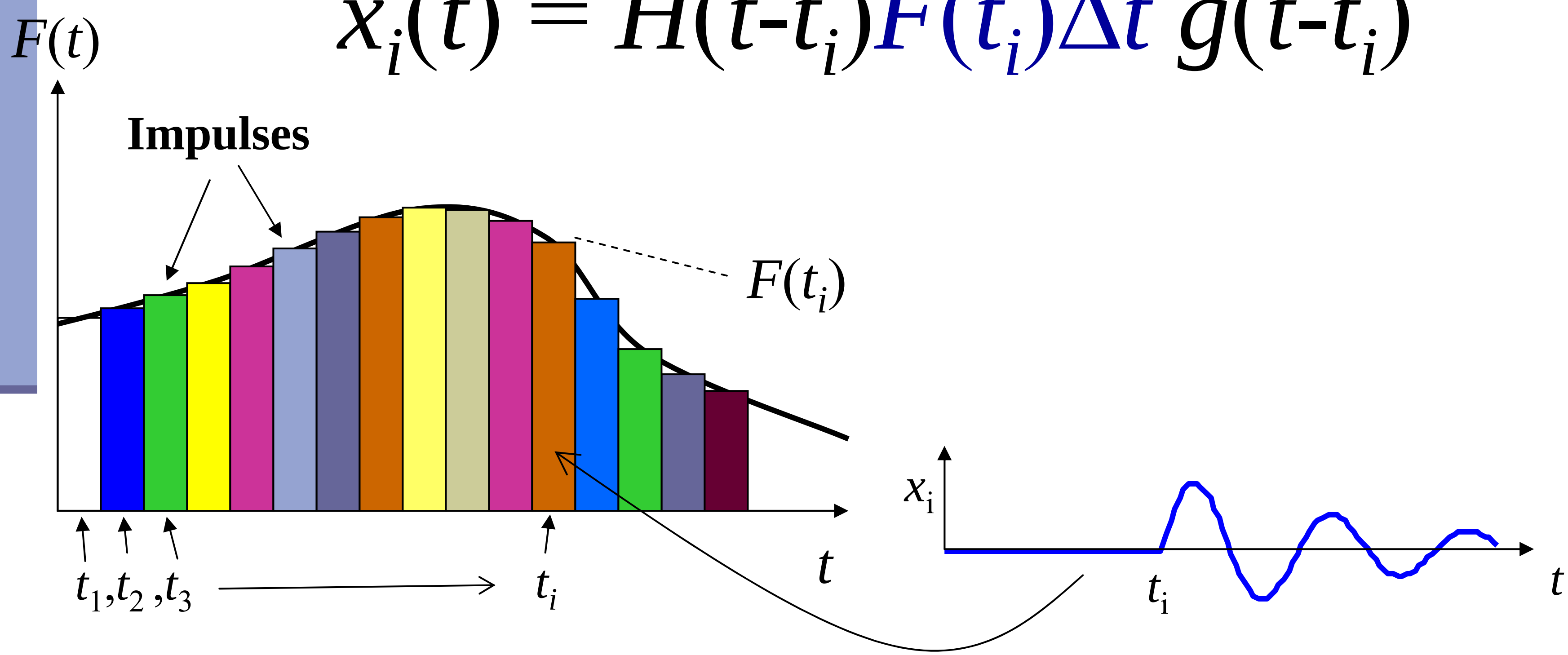
$$x_2(t) = H(t\text{-}t_2)\, F(t_2)\Delta t\, g(t\text{-}t_2)$$



# پاسخ به نیروی ورودی اختیاری

- پاسخ در زمان $t$ بدلیل ضربه در $t_i$

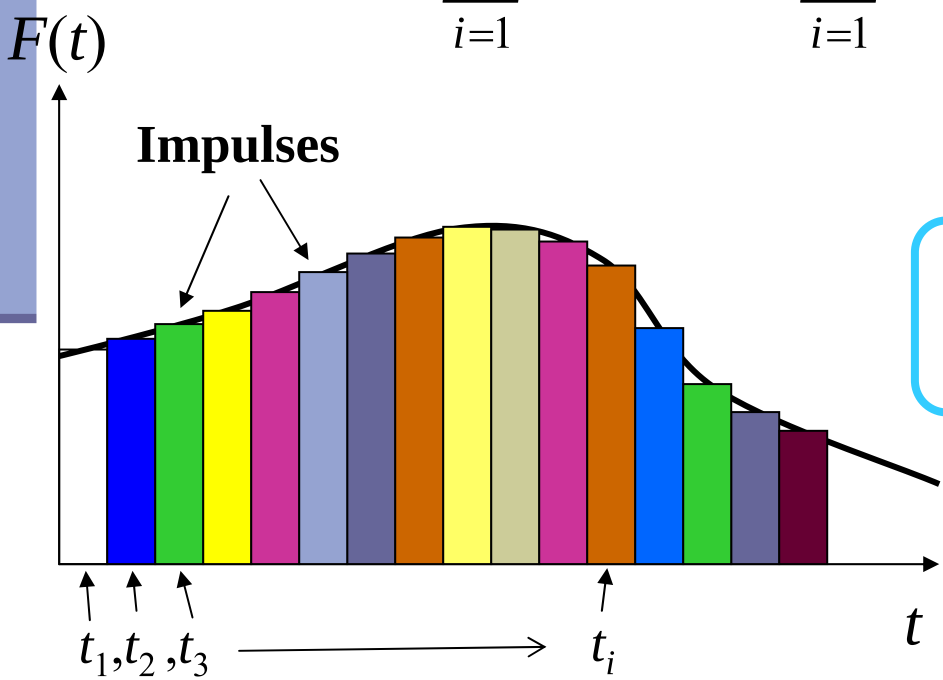
$$x_i(t) = H(t-t_i)F(t_i)\Delta t\, g(t-t_i)$$



# پاسخ به نیروی ورودی اختیاری

- پاسخ کلی به نیرو ها در زمان $t=t_k$ مجموع جوابهای مربوط به ضربه های قبل از آن است.

$$x(t_k)=\sum_{i=1}^{k} x_i(t_k)=\sum_{i=1}^{k} H(t-t_i)F(t_i)\Delta t g(t-t_i)$$




$$\Delta t \to 0, t_i \to \tau$$

$$\boxed{x(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

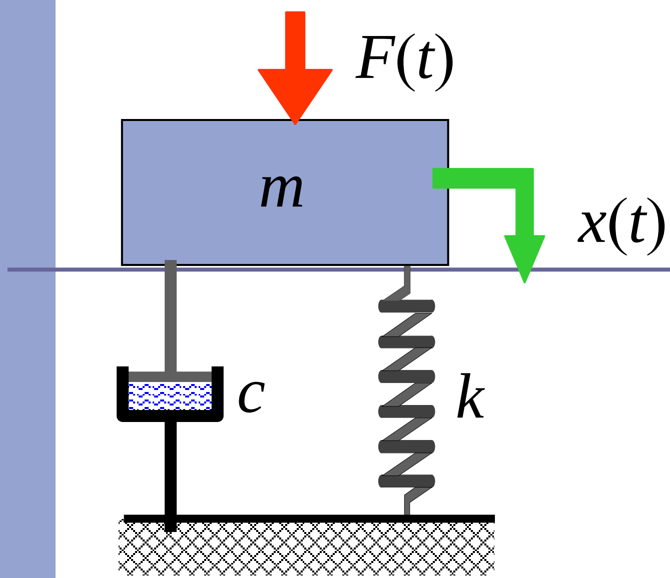
انتگرال کانولوشن

# خواص انتگرال کانولوشن

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t F(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

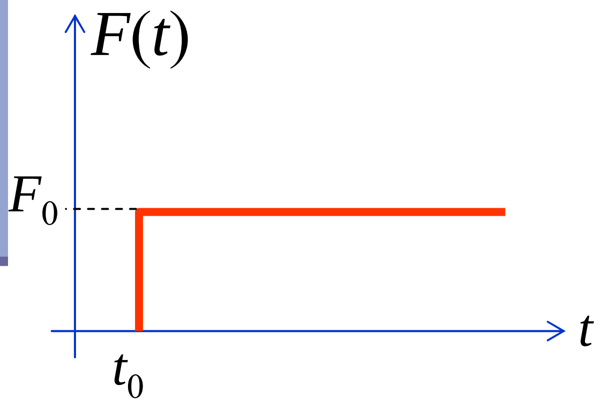
$$\alpha=t-\tau \Rightarrow \tau=t-\alpha,\ d\tau=-d\alpha$$

# مثال ۱: بار پله ای




- معادله حرکت:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ F_0 & t\geq t_0\end{cases}$$




$$x(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{t_0}^t F_0\frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^{t-t_0}e^{-\xi\omega_n u}\sin\omega_d u\,du$$

# مثال ۱: بار پله ای

- پاسخ: برای $t>t_0$

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^{t-t_0} e^{-\xi\omega_n u}\sin\omega_d u\,du$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_d}\left[\frac{e^{-\xi\omega_n u}\left(-\xi\omega_n\sin\omega_d u-\omega_d\cos\omega_d u\right)}{\left(\xi\omega_n\right)^2+\omega_d^2}\right]_0^{t-t_0}$$

$$=\frac{F_0}{k\omega_d}\left[e^{-\xi\omega_n\left(t-t_0\right)}\left(-\xi\omega_n\sin\omega_d\left(t-t_0\right)-\omega_d\cos\omega_d\left(t-t_0\right)\right)+\omega_d\right]$$

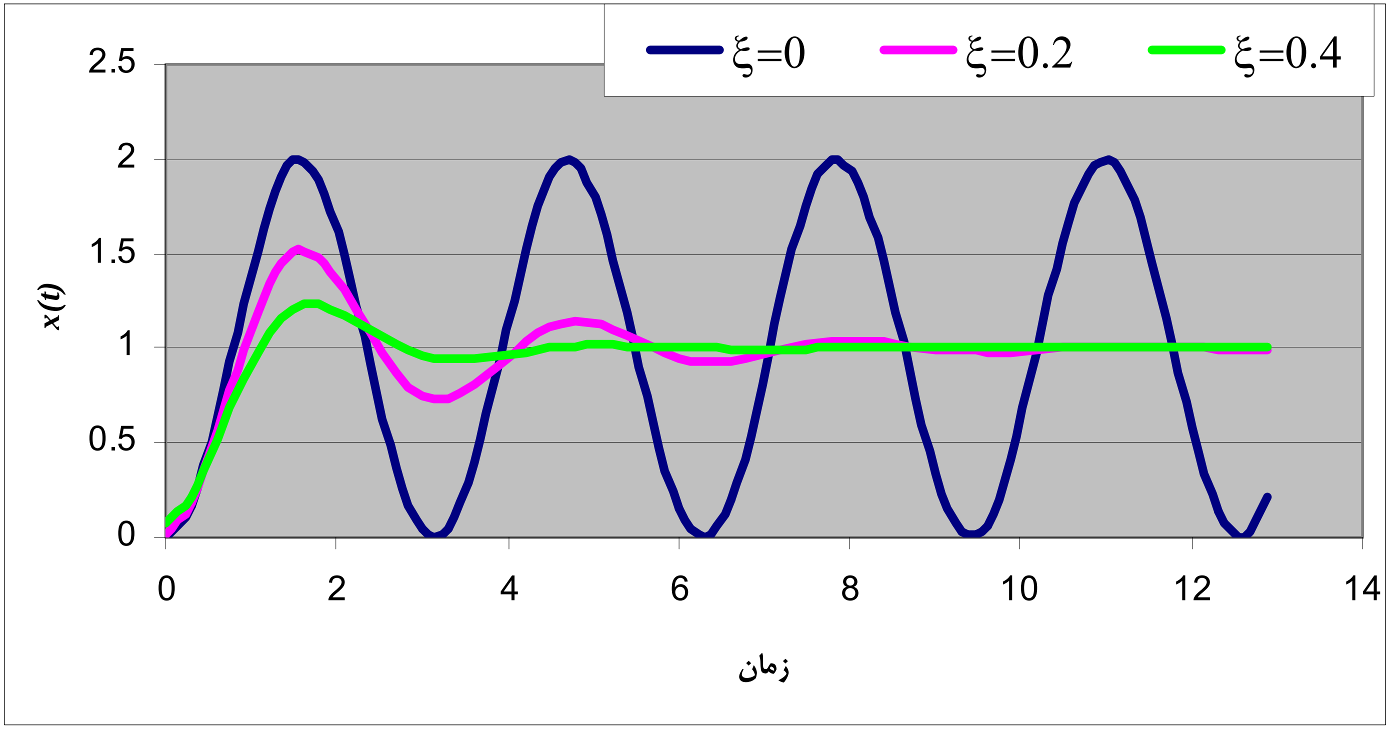
$$=\frac{F_0}{k}\left[1-e^{-\xi\omega_n\left(t-t_0\right)}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d\left(t-t_0\right)+\cos\omega_d\left(t-t_0\right)\right)\right]$$

$$=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n\left(t-t_0\right)}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d\left(t-t_0\right)-\phi\right)\right)\right]\qquad \phi=?$$

# مثال ۱: بار پله ای

- پاسخ: برای $t>t_0$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d t-\phi\right)\right)\right]\quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$



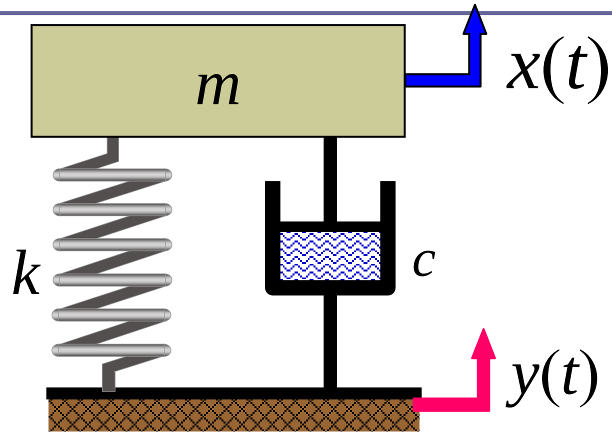

O.S.

# پاسخ سیستم بدون میرائی:

- پاسخ یک سیستم نامیرا به بار پله ای که از نقطه $t=t_0$ شروع شود:

$$x(t)=\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ \dfrac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_d\left(t-t_0\right)\right] & t\geq t_0 \end{cases}$$

# پاسخ به تحریک پایه




- در تحریک پایه معادله حرکت بصورت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky(t) + c\dot{y}(t)$$

- یا

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}(t)$$

- درنتیجه:

$$x(t) = \int_0^t [ky(\tau) + c\dot{y}(\tau)] \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d} \sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$z(t) = -\int_0^t \ddot{y}(\tau) \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_d} \sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

# مثال:

- فرض کنید سرعت پایه بصورت $\dot{y}(t)=v_0 H(t) e^{-t/t_0}$ داده شده باشد برای یک سیستم نامیرا مطلوب است پاسخ نسبی Z سیستم.
- حل: برای یک سیستم نامیرا

$$z(t)=\frac{-1}{\omega_n}\int_0^t \ddot{y}(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

$$\dot{y}(t)=v_0 H(t) e^{-t/t_0} \Rightarrow \ddot{y}(t)=v_0\left(\delta(t)e^{-t/t_0}-\frac{H(t)}{t_0}e^{-t/t_0}\right)$$

$$z(t)=\frac{v_0}{\omega_n}\int_0^t\left(\delta(\tau)e^{-\tau/t_0}-\frac{H(\tau)}{t_0}e^{-\tau/t_0}\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

# مثال:

- ادامه:

$$z(t) = -\frac{v_0}{\omega_n t_0}\left[t_0 \sin \omega_n t - \int_0^t e^{-\tau/t_0} \sin \omega_n (t-\tau) d\tau\right]$$

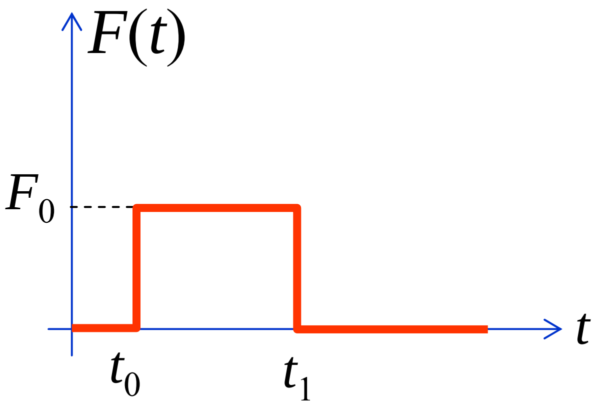
$$= -\frac{v_0}{\omega_n t_0}\left[t_0 \sin \omega_n t - e^{-t/t_0} \int_0^t e^{u/t_0} \sin \omega_n u \, du\right]$$

$$= -\frac{v_0}{\omega_n t_0}\left[t_0 \sin \omega_n t - e^{-t/t_0}\left[\frac{e^{u/t_0}\left(1/t_0 \sin \omega_n u - \omega_n \cos \omega_n u\right)}{1/t_0^2 + \omega_n^2}\right]_0^t\right]$$

$$= -\frac{v_0}{\omega_n t_0}\left[t_0 \sin \omega_n t - e^{-t/t_0} \frac{e^{t/t_0}\left(1/t_0 \sin \omega_n t - \omega_n \cos \omega_n t\right) + \omega_n}{1/t_0^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$= \frac{v_0 t_0}{1 + t_0^2 \omega_n^2}\left[e^{-t/t_0} - \omega_n t_0 \sin \omega_n t - \cos \omega_n t\right]$$

# پاسخ یک سیستم نامیرا به یک ضربه مستطیلی




- الف) روش انتگرالی:

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

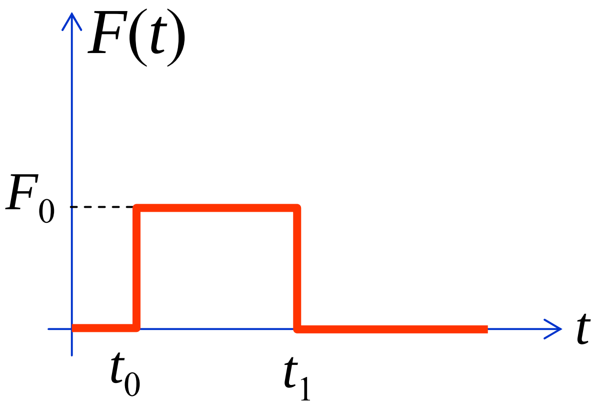
$$=\int_0^t F(\tau)\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

- برای $0<t<t_0$ نیرو صفر است و $x(t)=0$
- برای $t_0<t<t_1$ نیرو ثابت است و

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^{t-t_0}\sin\omega_n u\,du$$

$$=-\frac{F_0}{m\omega_n^2}\cos\omega_n u\Big]_0^{t-t_0}=\frac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_n(t-t_0)\right]$$

# پاسخ یک سیستم نامیرا به یک ضربه مستطیلی




- برای $t_1<t$ نیرو مجدداً صفر است

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t_1}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=-\frac{F_0}{m\omega_n}\int_{t-t_0}^{t-t_1}\sin\omega_n u du$$

$$=\frac{F_0}{k}\left[\cos\omega_n\left(t-t_1\right)-\cos\omega_n\left(t-t_0\right)\right]$$

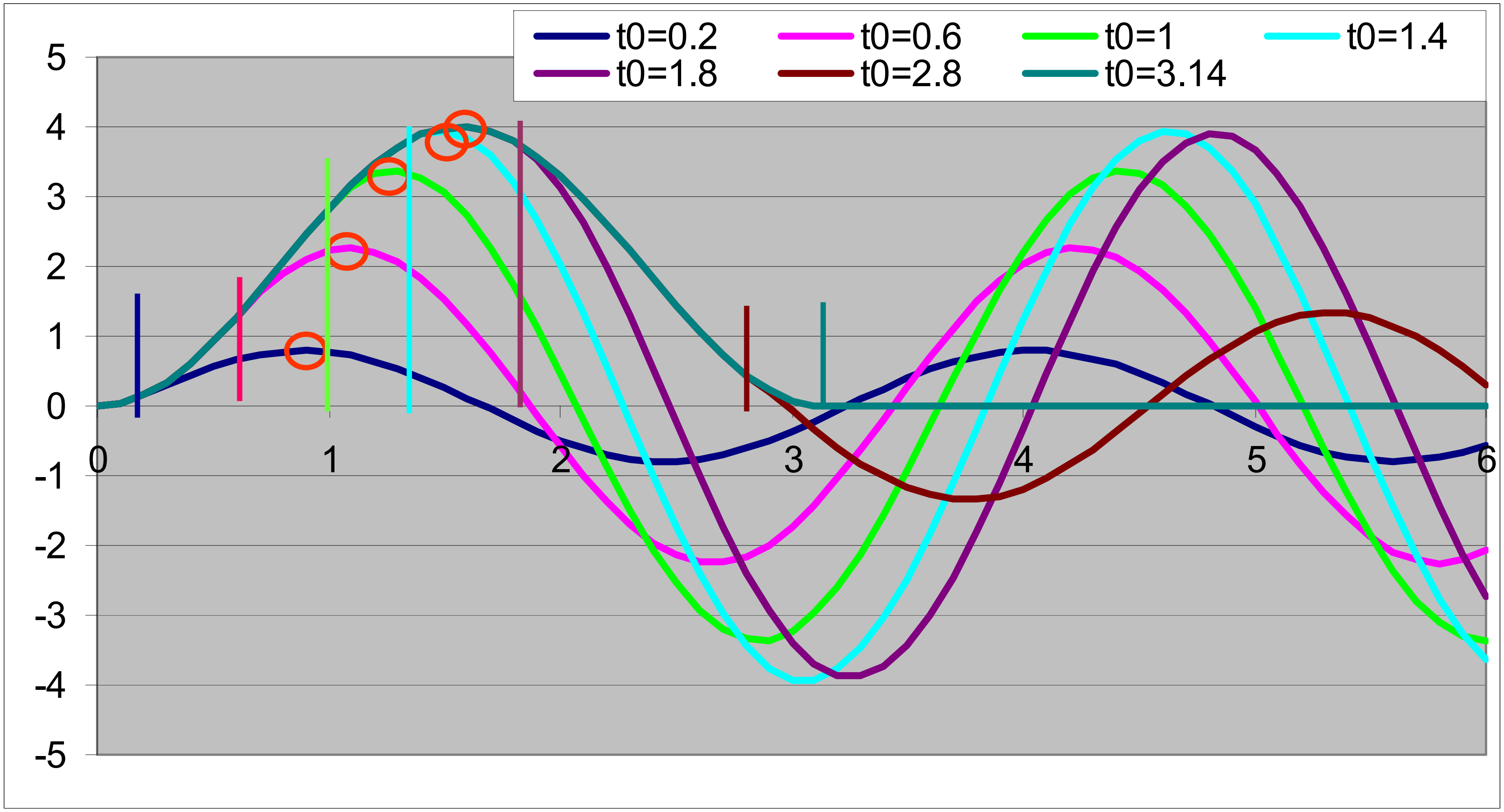
# حل کلی (با در نظر گرفتن شرایط اولیه)

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t & t<t_0\\ \dfrac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-t_0)] & t_0<t<t_1\\ \dfrac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n(t-t_0)\right] & t>t_1\end{cases}$$

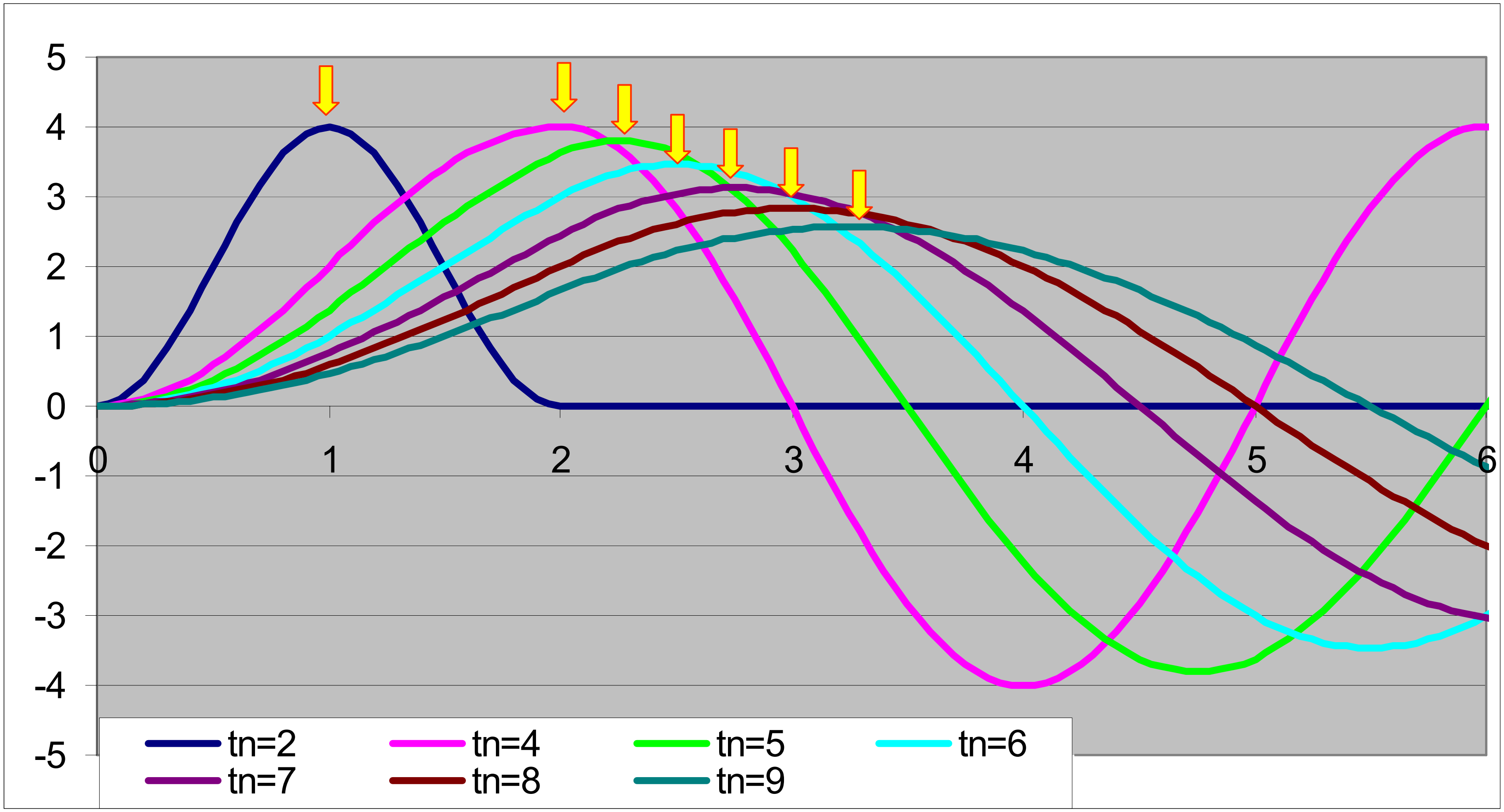
- با صفر بودن شرایط اولیه و $t_0=0$

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k}[1-\cos(\omega_n t)] & t<t_1\\ \dfrac{F_0}{k}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos(\omega_n t)\right] & t>t_1\end{cases}$$

# شکل پاسخ

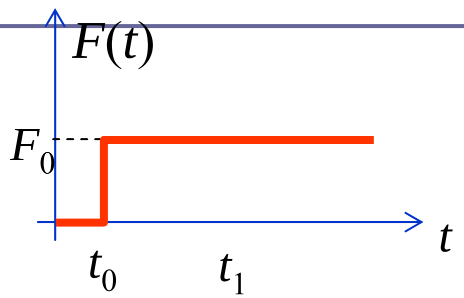


# شکل پاسخ

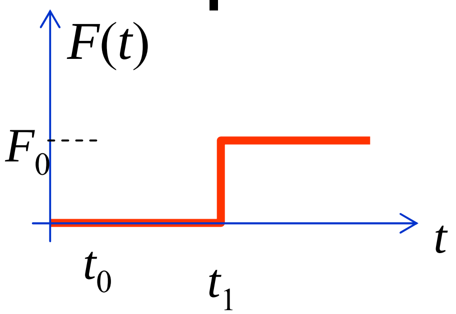


# پاسخ یک سیستم نامیرا به یک ضربه مستطیلی

- ب) روش ترکیب جوابها:

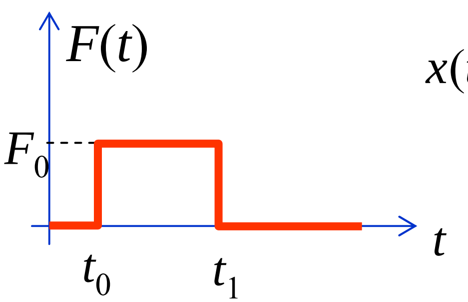



$$x_1(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ \dfrac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_d\left(t-t_0\right)\right] & t\ge t_0\end{cases}$$




$$x_2(t)=\begin{cases}0 & t<t_1\\ \dfrac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_d\left(t-t_1\right)\right] & t\ge t_1\end{cases}$$

III




$$x(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ x_1=\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos\omega_n(t-t_0)\right] & t_0<t<t_1\\ x_1-x_2=\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n(t-t_0)\right] & t>t_1\end{cases}$$

# استفاده از پاسخ به تابع پله ای

- یادآوری پاسخ به تابع پله ای:

$$x(t)=F_0 h\left(t-t_0\right)$$

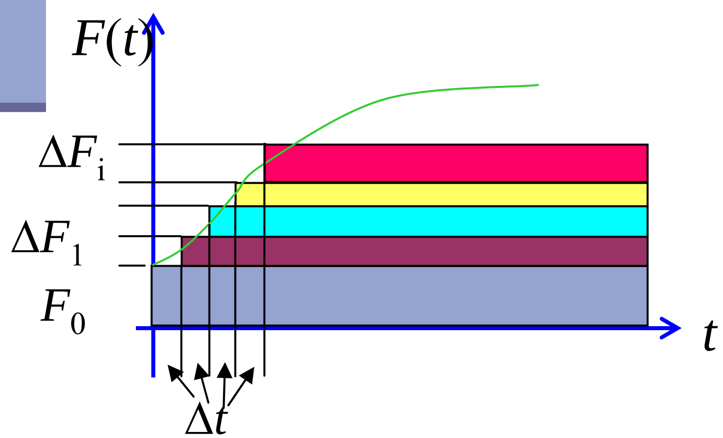
$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n\left(t-t_0\right)}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d\left(t-t_0\right)-\phi\right)\right)\right]$$

$$h(t)=\frac{1}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d t-\phi\right)\right)\right]$$

- پاسخ به $i$ امین تابع پله ای:

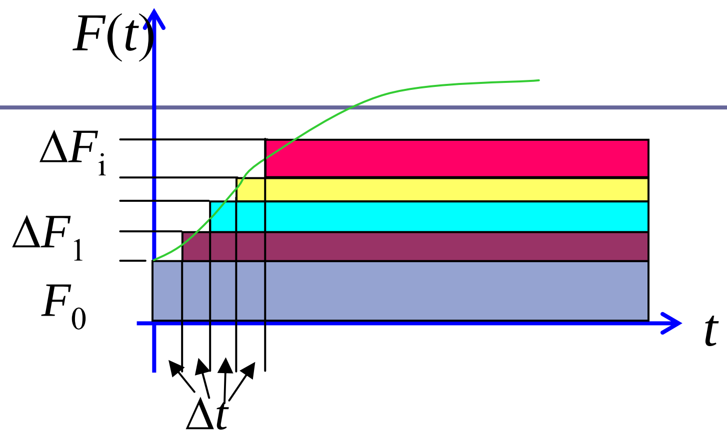
$$x_i(t)=H\left(t-t_i\right)\Delta F_i h\left(t-t_i\right)$$

- پاسخ کلی برای t>tk




$$x(t)=F_0 h(t)+\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta F_i}{\Delta t}h\left(t-t_i\right)\Delta t$$

# انتگرال دوهامل




- اگر $\Delta t \to 0$ آنگاه:

$$x(t) = F_0 h(t) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta F_i}{\Delta t} h(t - t_i)\Delta t$$

$$\boxed{x(t) = F_0 h(t) + \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau}$$

$$h(t) = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos(\omega_d t - \phi)\right)\right]$$

# انتگرال دوهامل (روشی دیگر: انتگرال جزء به جزء )

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau=-F(\tau)h(t-\tau)\Big]_0^t+\int_0^t F'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$u=F(\tau)\quad dv=g(t-\tau)d\tau\qquad du=\frac{dF(\tau)}{d\tau}d\tau\quad v=-\int g(u)du=-h(t-\tau)$$

$$h(0)=\frac{1}{k}\left[1-\frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]=0$$

$$\boxed{x(t)=F(0)h(t)+\int_0^t F'(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

# مثال: پاسخ تابع پله ای

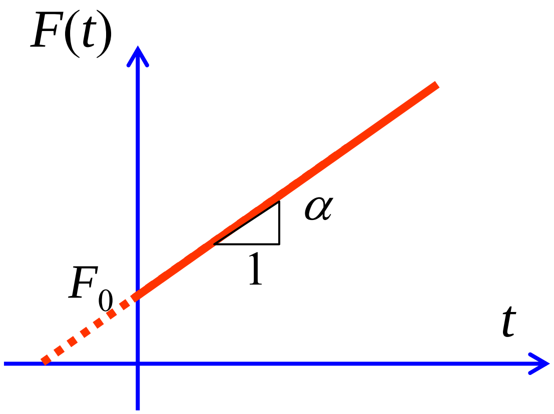
- تابع پله ای:

$$F(t)=F_0H(t-t_0)\Rightarrow F'=F_0\delta(t-t_0)$$

$$\boxed{x(t)=F_0h(t)+\int_0^t\frac{dF(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)d\tau=0+F_0\int_0^t\delta(\tau-t_0)h(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<t_0\\ F_0h(t-t_0) & t\geq t_0\end{cases}}$$

$$x(t)=H(t-t_0)\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d(t-t_0)-\phi\right)\right)\right]$$

# مثال: پاسخ به نیروی خطی




- فرض کنید نیرو به صورت خطی تغییر کند:

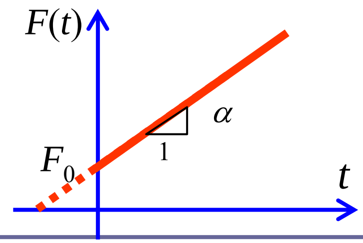
$$F(t)=\alpha t+F_0=\alpha(t+F_0/\alpha)\quad t\geq 0$$

- مشتق نیرو

$$F'(t)=\alpha\quad t\geq 0$$

$$\boxed{x(t)=F_0h(t)+\int_0^t\frac{dF(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)d\tau=F_0h(t)+\alpha\int_0^t h(t-\tau)d\tau}$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}(\cos(\omega_d t-\phi))\right]+\frac{\alpha}{k}\int_0^t\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}(\cos(\omega_d t-\phi))\right]d\tau$$




# مثال: پاسخ به نیروی خطی

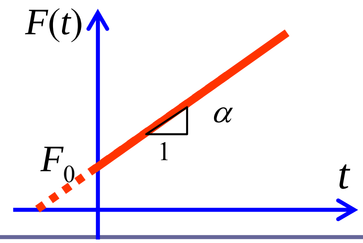
$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d t-\phi\right)\right)\right]+\frac{\alpha}{k}\int_0^t\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d\left(t-\tau\right)-\phi\right)\right)\right]d\tau$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d t-\phi\right)\right)\right]+\frac{\alpha}{k}\left[\tau-\frac{e^{-\xi\omega_n u}\left(-\xi\omega_n\cos\left(\omega_d u-\phi\right)+\omega_d\sin\left(\omega_d u-\phi\right)\right)}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\omega_n\right)^2}\right]_0^t$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d t-\phi\right)\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha}{k}\left[t-\frac{e^{-\xi\omega_n t}\left(-\xi\omega_n\cos\left(\omega_d t-\phi\right)+\omega_d\sin\left(\omega_d t-\phi\right)\right)+\left(\xi\omega_n\cos\left(\phi\right)+\omega_d\sin\left(\phi\right)\right)}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\omega_n\right)^2}\right]_0^t$$

$$\tan\phi=\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\Rightarrow\sin\phi=\xi,\quad\cos\phi=\sqrt{1-\xi^2}$$




# مثال: پاسخ به نیروی خطی

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_d t-\phi\right)\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha}{k\omega_n}\left[\omega_n t-\frac{e^{-\xi\omega_n t}\left(-\xi\omega_n\cos\left(\omega_d t-\phi\right)+\omega_d\sin\left(\omega_d t-\phi\right)\right)}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\omega_n\right)}-2\xi\right]$$

- برای سیستم نامیرا:

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\cos\left(\omega_d t\right)\right]+\frac{\alpha}{k\omega_n}\left[\omega_n t-\sin\left(\omega_n t\right)\right]$$

- اگر $F_0=0$

$$x(t)=\frac{\alpha}{k\omega_n}\left[\omega_n t-\sin\left(\omega_n t\right)\right] \qquad t>0$$

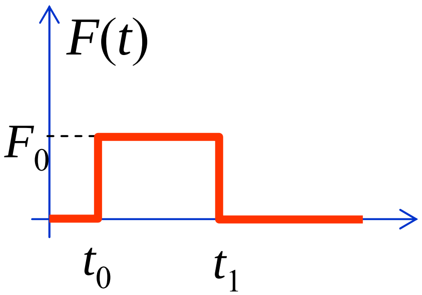
- اگر بار گذاری از زمان $t=t_0$ شروع شده باشد

$$x(t)=H\left(t-t_0\right)\frac{\alpha}{k\omega_n}\left[\omega_n\left(t-t_0\right)-\sin\left(\omega_n\left(t-t_0\right)\right)\right]$$

# طیف پاسخ

- تعریف: نموداری که نشان دهنده تغییرات پاسخ بیشینه (بیشترین جابجائی، سرعت، شتاب، تنش یا هر کمیت دیگری) با فرکانس طبیعی $\omega_n$ (یا زمان تناوب طبیعی $\tau_n$) سیستم یک درجه آزادی در اثر تابع نیروی معلوم را ***طیف پاسخ*** گویند.
- چون پاسخ بیشینه در مقابل فرکانس طبیعی ترسیم می شود، لذا طیف پاسخ همه پاسخهای بیشینه سیستمهای یک درجه آزادی به نیروی معلوم است.
- طیف پاسخ بطور وسیعی برای طراحی مهندسیهای زلزله استفاده می شود
- با دانستن فرکانس طبیعی یک سیستم می توان پاسخ بیشینه را به نیروی معلوم پیدا کرد.
- معمولاً از سیستم نامیرا در طیف پاسخ استفاده می شود.

# مثال:طیف پاسخ ضربه مستطیلی




$$x(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ x_1=\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-t_0)] & t_0<t<t_1\\ x_1-x_2=\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n(t-t_0)\right] & t>t_1\end{cases}$$

- برای $t_0=0$

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k}[1-\cos\omega_n t] & 0<t<t_1\\ \dfrac{F_0}{k}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n t\right] & t>t_1\end{cases}$$

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k}[\omega_n \sin\omega_n t] & 0<t<t_1\\[2ex] \dfrac{F_0}{k}\,\omega_n\left[-\sin\omega_n(t-t_1)+\sin\omega_n t\right] & t>t_1\end{cases}$$

- اگر $t_0>\pi/\omega_n$

$$\sin\omega_n t_p=0 \qquad \omega_n t_p=\pi \qquad x(t_p)=\frac{F_0}{k}[1-\cos\omega_n t_p]=2\frac{F_0}{k}$$

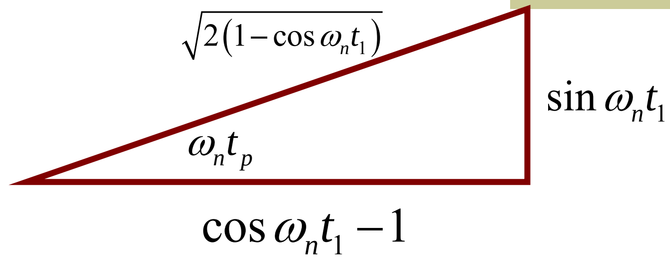
- در غیر اینصورت

$$-\sin\omega_n(t-t_1)+\sin\omega_n t=0$$

$$\sin\omega_n t_p\cos\omega_n t_1-\cos\omega_n t_p\sin\omega_n t_1-\sin\omega_n t_p=0$$

$$\sin\omega_n t_p\left(\cos\omega_n t_1-1\right)=\cos\omega_n t_p\sin\omega_n t_1\Rightarrow\tan\omega_n t_p=\frac{\sin\omega_n t_1}{\cos\omega_n t_1-1}$$

$$\tan \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\cos \omega_n t_1 - 1}$$




$$\sin \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}}$$

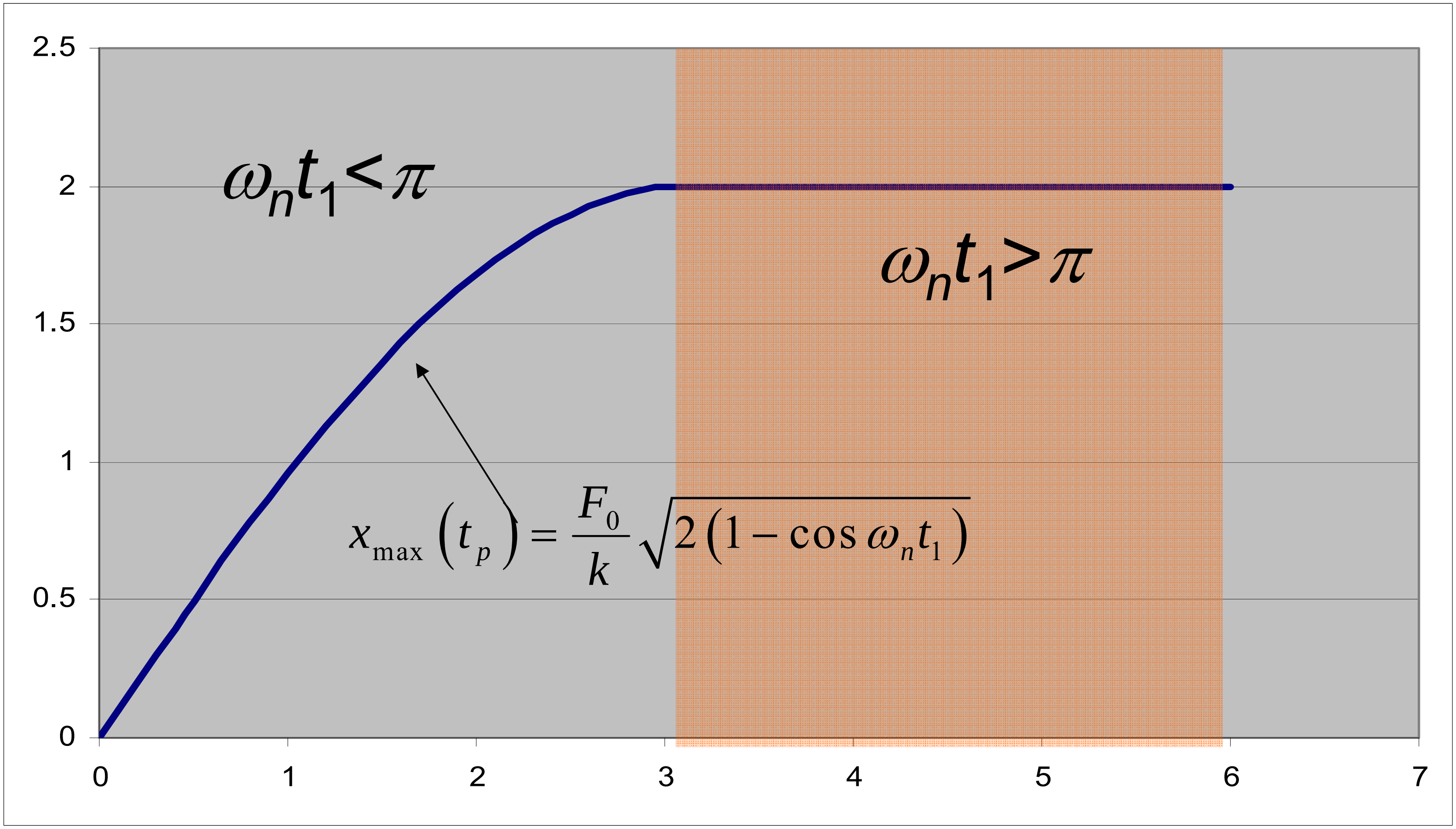
$$\sqrt{\sin^2 \omega_n t_1 + 1 + \cos^2 \omega_n t_1 - 2\cos \omega_n t_1} = \sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}$$

$$\cos \omega_n t_p = \frac{\cos \omega_n t_1 - 1}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}}$$

$$x_{\max}\left(t_p\right) = \frac{F_0}{k}\left[\cos \omega_n (t_p - t_1) - \cos \omega_n t_p\right] = \frac{F_0}{k}\left[\cos \omega_n t_p \cos \omega_n t_1 + \sin \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 - \cos \omega_n t_p\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[\frac{\left(\cos \omega_n t_1 - 1\right)^2}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}} + \frac{\sin^2 \omega_n t_1}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}}\right]$$

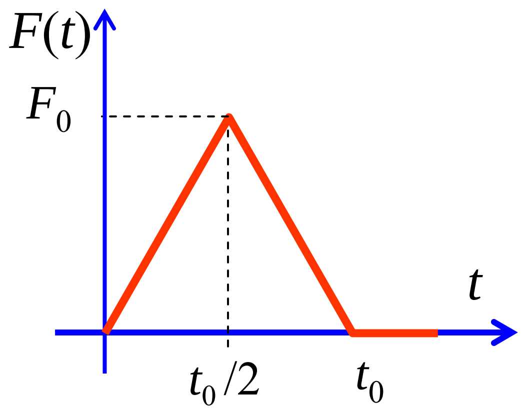
$$= \frac{F_0}{k}\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}$$



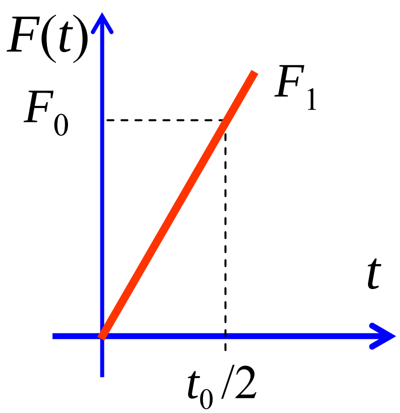
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
$\omega_n t_1 < \pi$
$\omega_n t_1 > \pi$
$x_{\max}\left(t_p\right) = \frac{F_0}{k}\sqrt{2\left(1-\cos\omega_n t_1\right)}$

# پاسخ و طیف پاسخ به یک بار مثلثی

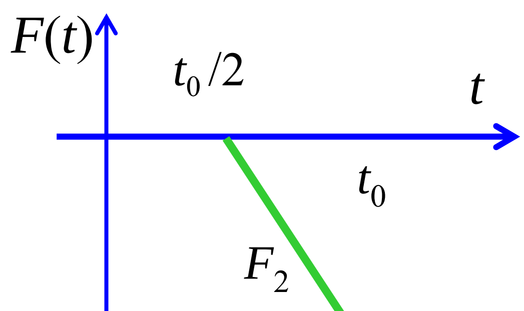
- بارگذاری مقابل به یک سیستم یک درجه آزادی نامیرا اعمال شده، مطلوب است:
- الف)پاسخ به بارگذاری
- ب) طیف پاسخ




$$F(t)=F_1+F_2+F_3$$



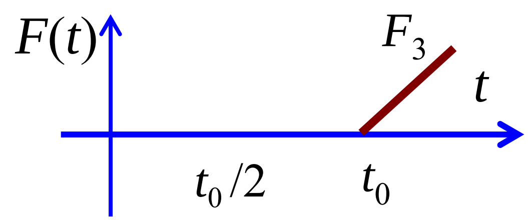

$$F_1(t)=\frac{2F_0}{t_0}t$$




$$F_2(t)=\alpha(t-t_0/2)$$

$$F_2(t_0)+F_1(t_0)=0 \Rightarrow \alpha\ t_0/2+2F_0=0$$

$$\alpha=\frac{-4F_0}{t_0} \qquad F_2(t)=\frac{-2F_0}{t_0}(2t-t_0)$$




$$F_3(t)=-(F_1+F_2)=\frac{2F_0}{t_0}(t-t_0)$$

# پاسخ برای 0<t<t$_0$/2

- نیروی اعمالی $F_1$:

$$F_1(t) = \frac{2F_0}{t_0}t$$

$$x_1(t) = H(t)\frac{\alpha}{k\omega_n}\left[\omega_n t - \sin\omega_n t\right]$$

$$= H(t)\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}\left[\omega_n t - \sin\omega_n t\right] \qquad 0 \le t \le t_0/2$$

# پاسخ برای $t_0/2<t<t_0$

- نیروی اعمالی $F_2$:

$$F_2(t)=\frac{-2F_0}{t_0}(2t-t_0)$$

$$x_2(t)=H(t-t_0/2)\frac{\alpha}{k\omega_n}[\omega_n(t-t_0/2)-\sin\omega_n(t-t_0/2)]$$

$$=-H(t-t_0/2)\frac{4F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n(t-t_0/2)-\sin\omega_n(t-t_0/2)] \qquad t_0/2\le t\le t_0$$

- در این بازه مجموع $F_1$ و $F_2$ بر روی سیستم عمل می کنند.

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t) \qquad t_0/2\le t\le t_0$$

# پاسخ برای $t_0<t$

- نیروی اعمالی $F_3$:

$$F_3(t)=\frac{2F_0}{t_0}(t-t_0)$$

$$x_3(t)=H(t-t_0)\frac{\alpha}{k\omega_n}[\omega_n(t-t_0)-\sin\omega_n(t-t_0)]$$

$$=H(t-t_0)\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n(t-t_0)-\sin\omega_n(t-t_0)] \qquad t_0\le t$$

- در این بازه مجموع $F_1$، $F_2$ و $F_3$ بر روی سیستم عمل می کنند.

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t) \qquad t_0\le t$$

# پاسخ کلی

$$x_1(t) = H(t)\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}\left[\omega_n t - \sin\omega_n t\right] \qquad 0 \le t \le t_0/2$$

$$x_2(t) = -H(t - t_0/2)\frac{4F_0}{kt_0\omega_n}\left[\omega_n(t - t_0/2) - \sin\omega_n(t - t_0/2)\right] \qquad t_0/2 \le t \le t_0$$

$$x_3(t) = H(t - t_0)\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}\left[\omega_n(t - t_0) - \sin\omega_n(t - t_0)\right] \qquad t_0 \le t$$

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & 0 \le t \le t_0/2 \\ x_1(t) + x_2(t) & t_0/2 \le t \le t_0 \\ x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) & t_0 \le t \end{cases}$$

# پاسخ کلی

$$x_1(t) = H(t)\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n t - \sin\omega_n t]$$

$$x_1(t)+x_2(t) = \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n t - \sin\omega_n t] - \frac{4F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n(t-t_0/2) - \sin\omega_n(t-t_0/2)]$$

$$= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[2\sin\omega_n(t-t_0/2) - \sin\omega_n t - \omega_n(t-t_0)]$$

$$x_1(t)+x_2(t)+x_3(t) = \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[2\sin\omega_n(t-t_0/2) - \sin\omega_n t - \omega_n(t-t_0)] + \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n(t-t_0) - \sin\omega_n(t-t_0)]$$

$$= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[2\sin\omega_n(t-t_0/2) - \sin\omega_n t - \sin\omega_n(t-t_0)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= H(t)\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[\omega_n t - \sin\omega_n t] \\ x_1(t)+x_2(t) &= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[2\sin\omega_n(t-t_0/2) - \sin\omega_n t - \omega_n(t-t_0)] \\ x_1(t)+x_2(t)+x_3(t) &= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n}[2\sin\omega_n(t-t_0/2) - \sin\omega_n t - \sin\omega_n(t-t_0)] \end{aligned}}$$

# طیف پاسخ

- لازم است که از معادلات $x(t)$ نسبت به زمان مشتق گرفته و معادل صفر قرار دهیم تا بیشترین دامنه بدست آید.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}\left[2\sin\omega_n\left(t-t_0/2\right)-\sin\omega_n t-\omega_n\left(t-t_0\right)\right]\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2F_0}{kt_0\omega_n}\left[2\sin\omega_n\left(t-t_0/2\right)-\sin\omega_n t-\sin\omega_n\left(t-t_0\right)\right]\right)=0$$

$$2\omega_n\cos\omega_n\left(t-t_0/2\right)-\omega_n\cos\omega_n t-\omega_n=0\Rightarrow 2\cos\omega_n\left(t-t_0/2\right)=\cos\omega_n t+1$$

$$2\cos\omega_n\left(t-t_0/2\right)-\cos\omega_n t-\cos\omega_n\left(t-t_0\right)=0$$

# ارتعاشات مکانیکی ۹
# بارگذاری عمومی-تبدیلات-عددی

سیدیوسف احمدی بروغنی
استادیار گروه مکانیک
دانشگاه بیرجند

# روشهای مبنی بر تبدیلات

روشهای دیگری برای حل معادلات ارتعاشی

# تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه یک تبدیل انتگرالی برمبنای انتگرال فوریه می باشد
- خواص آن شبیه تبدیل لاپلاس است.
- تبدیل فوریه تابع $x(t)$:

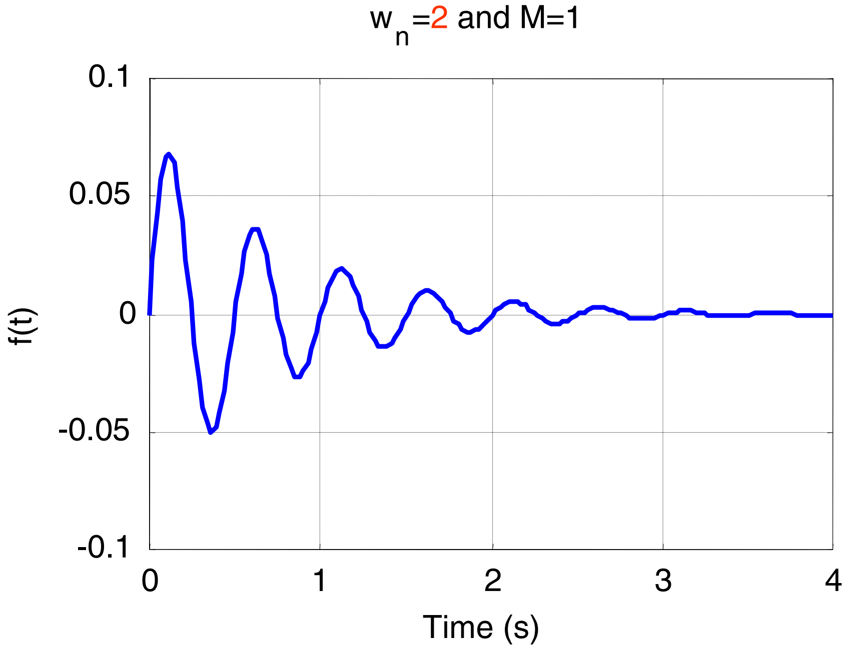
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

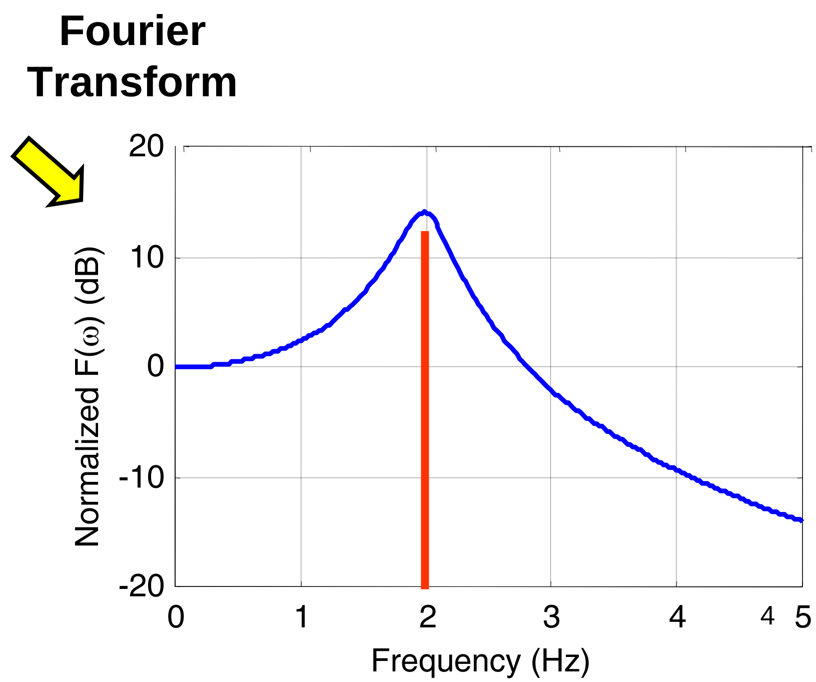
- تبدیل معکوس فوریه:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

# طیف دامنه

- **طیف دامنه** $f(t)$ نموداری از $|F(\omega)|$ (اندازه تبدیل فوریه تابع) می‌باشد.



# خواص

- اگر $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ باشد، آنگاه:
- انتقال زمانی:

$$\mathscr{F}\left\{f\left(t-t_0\right)\right\} = e^{-i\omega t_0} F\left(\omega\right)$$

- انتقال فرکانسی:

$$\mathscr{F}\left\{e^{i\omega_0 t} f\left(t\right)\right\} = F\left(\omega-\omega_0\right)$$

- مودولاسیون:

$$\mathscr{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}\{f(t)\sin(\omega_0 t)\} = \frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

# خواص

- اگر $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ باشد، آنگاه:
- تبدیل فوریه مشتق $n$ام یک تابع:

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(t)\}=(i\omega)^n F(\omega)$$

درنتیجه

$$\mathscr{F}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$$

$$\mathscr{F}\left\{f''(t)\right\} = -\omega^2 F(\omega)$$

# مثال

- معادله دیفرانسیل: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f(t)$

- تبدیل معادله دیفرانسیل: $\mathscr{F}[m\ddot{x}+c\dot{x}+kx]=\mathscr{F}[f(t)]$

$$\left[-m\omega^2+ic\omega+k\right]X(\omega)=F(\omega)$$

$$X(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ic\omega}F(\omega) \quad \rightarrow \quad x(t)=\mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

# مثال: $f(t)=\delta(t-t_0)$

$$\ddot{x}+\dot{x}+4x=\delta\left(t-t_0\right)$$

$$Z(i\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ic\omega}=\frac{1}{4-\omega^2+i\omega}$$

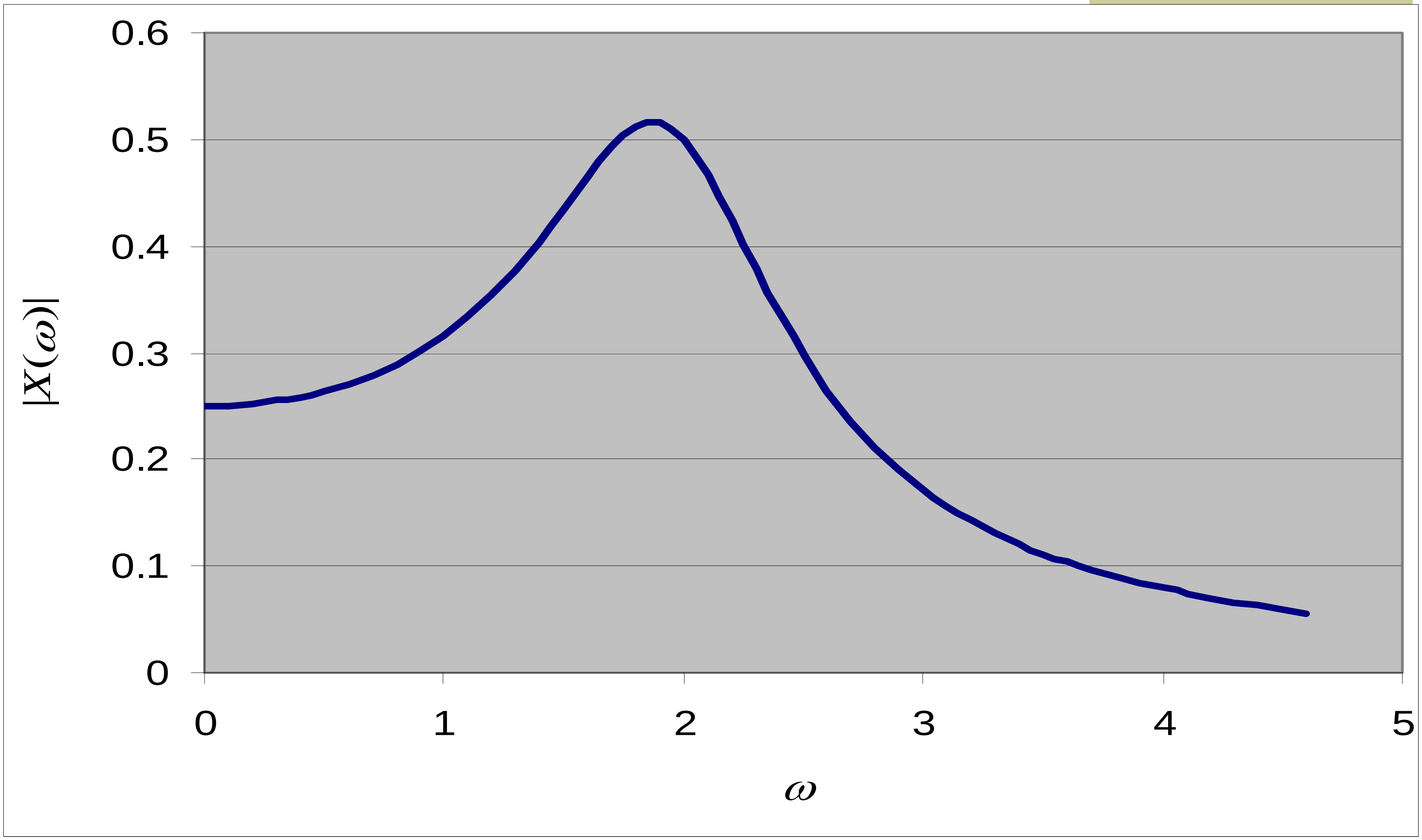
$$\mathscr{F}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-t_0\right)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega t_0}$$

$$X(\omega)=\frac{e^{-i\omega t_0}}{4-\omega^2+i\omega}$$

$$\left|X(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(4-\omega^2\right)^2+\omega^2}}$$

$$x(t)=F^{-1}\left\{X(\omega)\right\}$$

# طیف دامنه $X(\omega)$



# تبدیل لاپلاس

- تبدیل لاپلاس نیز یک تبدیل انتگرالی با کاربردهای بسیار وسیع در کاربردهای مهندسی و علوم است.
- در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی با شرایط اولیه کاربرد دارد.
- تبدیل لاپلاس:

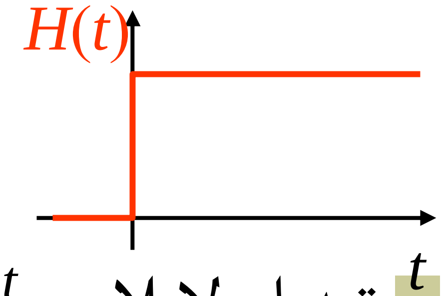
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

- تبدیل معکوس:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

# مثال

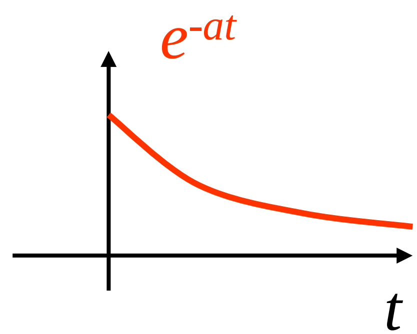
- تبدیل لاپلاس تابع هویساید (پله ای واحد)




$$\mathscr{L}\{H(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

- تبدیل لاپلاس $e^{-at}$

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$




$$\mathscr{L}\{e^{-at}\} = \left[\frac{-e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{(s+a)}$$

# جدول تبدیلات لاپلاس

| $x(t)$ | $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $H(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ | $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ |
| $\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$ | $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $1-\cos(at)$ | $\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$ |
| $at-\sin(at)$ | $\frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)}$ |

| $x(t)$ | $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ |
|---|---|
| $\sin(at)-at\cos(at)$ | $\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $e^{at}\sin(bt)$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $e^{at}\cos(bt)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ |

# جدول تبدیلات لاپلاس

| $x(t)$ | $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ |
|---|---|
| $\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t}{\omega_d}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta \le 1$ | $\dfrac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ |
| $\dfrac{1}{\omega_n^2} - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)}{\omega_n\omega_d}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta \le 1, \phi = \cos^{-1}\zeta$ | $\dfrac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ |
| $\dfrac{\sqrt{\alpha^2 - 2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2}\ e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)}{\omega_d}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta \le 1,$ $\phi = \tan^{-1}(\omega_d/(\alpha - \zeta\,\omega_n))$ | $\dfrac{s+\alpha}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ |
| $\dot{x}$ | $sX(s) - x(0)$ |
| $\ddot{x}$ | $s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$ |

# مثال

Example 1:
Given the initial value problem

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}, \; y(0) = -1, \; y'(0) = 1$$

Step 1 transforms the problem from $t$-domain to $s$-domain using tables of functions:

$$(s^2 + 2s + 1)Y - sy(0) - y'(0) - 2y(0) = \frac{1}{s+1}$$

The problem can now be solved using algebraic operation instead of calculus operation.
Step 2 solves the problem to find

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1}$$

Step 3 takes the solution from $s$-domain back to the original $t$-domain using lookup table.

$$y(t) = \tfrac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t}$$

# خواص تبدیل لاپلاس

- خطی بودن

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

- انتقال در حوزه $s$

$$e^{at}f(t)\xrightarrow{L}F(s-a)$$

- انتقال در زمان

$$f(t-a)H(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as}F(s)$$

- تبدیل تابع دلتا

$$\delta(t)\xrightarrow{L}1\Rightarrow\delta(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as}$$

# مثال خطی بودن

Example 4:

Let $f(t) = \cosh \text{at} = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ when $t \geq 0$ where $\cosh at$ is called the **hyperbolic cosine function.** Find $F(s)$.

Solution:
From (1) and Theorem 1 we have

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

From Example 2(b) we know that $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$. It also implies that $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$.

So we have

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Similarly we can obtain the transform of the **hyperbolic sine** as

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

# مثال

Example 9:

Find the Laplace transforms of $e^{at}\cos\omega t$ and $e^{at}\sin\omega t$.

Solution:

From $\mathcal{L}\{\cos\omega t\}=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ and $\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$. By Theorem 5 we obtain immediately

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos\omega t\right\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\left\{e^{at}\sin\omega t\right\}=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

## Example 10: Transform of $f(t)$

Find the Laplace transform of the function

$$f(t)=\begin{cases} 2 & \text{if} \quad 0<t<\pi \\ 0 & \text{if} \quad \pi<t<2\pi \\ \sin t & \text{if} \quad t>2\pi \end{cases}$$

Solution:

In the first step we write $f(t)$ in terms of unit step functions.

$$f(t)=2u(t)-2u(t-\pi)+u(t-2\pi)\sin t$$

The last term equals $u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$ because of the periodicity.

Thus the Laplace transform is

$$L\{f(t)\}=\frac{2}{s}-\frac{2e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Example 11: Inverse Transform of $F(s)$

Find the inverse Laplace transform *f (t)* of

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Solution:

Without exponential functions the four terms would have inverse $2t$ , $-2t$ , $-4$ , $\cos t$ . Hence

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-2) + \cos(t-\pi)u(t-\pi) \\ &= 2t - 2tu(t-2) - 4u(t-2) + 4u(t-2) - \cos t\, u(t-\pi) \\ &= 2t - 2tu(t-2) - \cos t\, u(t-\pi) \\ &= \begin{cases} 2 & \text{if} \quad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{if} \quad 2 < t < 2\pi \\ \cos t & \text{if} \quad t > \pi \end{cases} \end{aligned}$$

## Unit Step Function

Unit step function (also called **Heaviside function**) is denoted by

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & \text{if } t<a\\ 1 & \text{if } t>a\end{cases}$$

Note that it is discontinuous at $t=a$ which is undefined.

The Laplace transform can be found directly from the definition:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}u(t-a)dt=\int_0^{a}e^{-st}\cdot 0dt+\int_a^{\infty}e^{-st}\cdot 1dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{\infty}=\frac{e^{-as}}{s}$$

transform of a delta function can be found as

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}=\lim_{k\to 0}e^{-as}\frac{1-e^{-ks}}{ks}=e^{-as}$$

The indeterminate limit is obtained by applying the l' Hôpital' s rule.

# کسر جزئی

- معمولاً تبدیلات به شکل $Y(s)=\dfrac{F(s)}{G(s)}$ در می آیند و لازم است به شکلی آشنا تبدیل شوند

$$Y(s)=\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{A_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{s-a_k}$$

where $A_1, A_2, \cdots A_k$ can be found using **Heaviside formula:**

$$\boxed{A_p=\lim_{s\to a_p}(s-a_p)\frac{F(s)}{G(s)}} \qquad for\ \ p=1,2,\cdots,k$$

# مثال

Example 6:

Find the inverse transform of $Y(s)$:

$$Y = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s-3}$$

According to formula (1):

$$A_1 = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{-1}{6}$$

$$A_2 = \lim_{s\to 2} (s-2) \cdot \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{3}{10}$$

$$A_3 = \lim_{s\to -3} (s+3) \cdot \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = -\frac{2}{15}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}}$$

Hence,

$$Y(s) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{s+3}$$

Find the inverse transform by table lookup

# کسر جزئی ریشه تکراری

Case 2: Repeated factor $(s-a_p)^m$

Suppose that *G(s)* has a repeated factor $s-a_p$ of order $m$, for $m \geq 2$, then the fraction should contain terms

$$\frac{A_{p,1}}{s-a_p}, \frac{A_{p,2}}{(s-a_p)^2}, \cdots, \frac{A_{p,m}}{(s-a_p)^m}$$

where

$$A_{p,u} = \frac{1}{(m-u)!} \lim_{s \to a_p} \left\{ \frac{d^{m-u}}{ds^{m-u}} \left[ (s-a_p)^m \frac{F(s)}{G(s)} \right] \right\} \qquad (2)$$

for $p = 1, 2, \cdots, k$ and $u = 1, 2, \cdots, m$

Example 7:
Find the inverse transform of $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-1)(s-2)}=\frac{A_{1,1}}{s}+\frac{A_{1,2}}{s^2}+\frac{A_2}{s-1}+\frac{A_3}{s-2}$$

According to the formula (2),

$$A_{1,1}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}s^2\cdot\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-1)(s-2)}=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\cdot\frac{s^3-4s^2+4}{(s-1)(s-2)}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(3s^3-8s)(s-1)(s-2)-(2s-3)(s^3-4s^2+4)}{[(s-1)(s-2)]^2}=\frac{12}{4}=3$$

$$A_{1,2}=\lim_{s\to 0}s^2\cdot\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-1)(s-2)}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3-4s^2+4}{(s-1)(s-2)}=\frac{4}{2}=2$$

According to the formula (1),

$$A_2 = \lim_{s\to 1}(s-1)\cdot\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-1)(s-2)} = \lim_{s\to 1}\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$A_3 = \lim_{s\to 2}(s-2)\cdot\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-1)(s-2)} = \lim_{s\to 2}\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

Hence,

$$Y(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

Find the inverse transform by table lookup

$$y(t) = 3t + 2 - e^t - e^{2t}$$

# تبدیل مشتقات

## Transforms of Derivatives

Theorem 1: Laplace transform of the derivative of $f(t)$

Suppose that $f(t)$ is continuous for all $t \geq 0$ and satisfies $|f(t)| \leq Me^{kt}$ for all $t \geq 0$ and some constants $k$ and $M$, and has a derivative $f'(t)$ that **is piecewise continuous** on every finite interval in the range $t \geq 0$. Then the Laplace transform of the derivative $f'(t)$ exists when $s > k$ and

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)} \qquad (1)$$

It is easy to show that

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)}$$

# مسائل مقدار اولیه

To solve an initial value problem

$$y'' + ay' + by = r(t)\,, \quad y(0) = K_0\,, \quad y'(0) = K_1$$

- گام ۱: تبدیل معادله

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + a\left[sY(s) - y(0)\right] + bY(s) = R(s)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \text{and } R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

$$(s^2 + as + b)Y(s) = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s)$$

## گام ۲

Step 2. We solve the subsidiary equation algebraically for $Y(s)$. Divide the equation by $s^2 + as + b$ and let

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Then we have

$$Y(s) = [(s+a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s) \qquad (3)$$

This corresponds directly to the homogeneous solution and heterogeneous solution in $t$-domain, i.e.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

## گام ۳ تبدیل معکوس

Step 3. We obtain $y(t)$ from $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. This often involves reducing (10) using partial fractions to a sum of terms whose inverses can be found from the table.

*t*-domain

*s*-domain

Given problem

$$y'' - y = t$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

Subsidiary equation

$$(s^2 - 1)Y = s + 1/s^2$$

Solution of subsidiary equation

$$Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}$$

Solution of given problem

$$y(t) = e^t + \sinh t - t$$

Example 1:

Solve

$$y'' - y = t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

Solution:

Step 1: We transform the differential equation and get the subsidiary equation

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad (s^2 - a)Y = s + 1 + \frac{1}{s^2}$$

Step 2: We solve for $Y$ and find

$$Y = \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2}$$

Step 3: By table lookup we have

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - t$$

# مثال

Example 2: Response of a damped vibrating system to piecewise continuous function

Determine the response of the damped mass-spring system governed by

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

where $r(t)$ is

(a) the square wave: $r(t) = u(t-1) - u(t-2)$

(b) the unit impulse at $t = 1$: $r(t) = \delta(t-1)$

Solution:

The Laplace transform of the problem using **Error! Reference source not found.** is

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3sY - 3y(0) + 2Y = R$$

Substituting the initial conditions, we found the subsidiary equation as

$$(s^2 + 3s + 2)Y = R \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{R}{(s+1)(s+2)}$$

(a) with square wave input $r(t)$:

$$R = \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s})$$

Solving for $Y$, we have

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}(e^{-s} - e^{-2s}) = F(s)(e^{-s} - e^{-2s})$$

where

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

By using partial fractions we get

$$F(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

Hence by using lookup table, we found $f(t)$ as

$$f(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

By using $t$-shifting theorem (Theorem 1 Lecture 9) we have

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-s} - F(s)e^{-2s}\right\}$$

$$= f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1) - \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right)u(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } \ 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & \text{if } \ 1 < t < 2 \\ -e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} & \text{if } \ t > 2 \end{cases}$$

(b) with unit impulse input $r(t)$ :

$$R = e^{-s}$$

Solving for $Y$, we have

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} e^{-s} = F(s)e^{-s}$$

where

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Hence by using lookup table, we found $f(t)$ as

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

By $t$-shifting theorem (Theorem 1 Lecture 9) we have

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-s}\right\} \\ &= f(t-1)u(t-1) \\ &= \left(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} & \text{if } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Example 3:

Solve

$$y' + 0.2y = 0.01t, \qquad y(5) = 0$$

Solution:

We have $t_0 = 5$ and we set $t = \tilde{t} + 5$. Then the problem is changed to

$$\tilde{y}' + 0.2\tilde{y} = 0.01(\tilde{t} + 5), \qquad \tilde{y}(0) = 0$$

where $\tilde{y}(\tilde{t}) = y(t)$.

Taking Laplace transform we obtain

$$s\tilde{Y} - \tilde{y}(0) + 0.2\tilde{Y} = \frac{0.01}{s^2} + \frac{0.05}{s}$$

Solving algebraically we have

$$\tilde{Y} = \frac{0.01}{s^2(s+0.2)} + \frac{0.05}{s(s+0.2)} = \frac{0.05s + 0.01}{s^2(s+0.2)} = \frac{0.05(s+0.2)}{s^2(s+0.2)} = \frac{0.05}{s^2}$$

Taking the inverse transform using lookup table, we found

$$\tilde{y} = 0.05\tilde{t}$$

Substituting $\tilde{t} = t - 5$ we obtain the solution

$$y = 0.05(t-5) = 0.05t - 0.25$$

# مثال: ارتعاش اجباری

- مطلوب است پاسخ سیستم

$$\ddot{x}+2\dot{x}+4x=\delta(t)-\delta(t-4), x_0=1\,\text{mm}, \dot{x}_0=-1\,\text{mm/s}$$

$$(\omega_n=2\text{rad/s}, \zeta=0.5, \omega_d=\sqrt{3}\text{ rad/s})$$

- گام اول: تبدیل معادله

$$\mathscr{L}\{\ddot{x}+2\dot{x}+4x\}=\mathscr{L}\{\delta(t)\}-\mathscr{L}\{\delta(t-4)\}$$

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+2sX(s)-x(0)+4X(s)=1-e^{-4s}$$

- گام دوم: حل برای X(s)

$$X(s)=\frac{1-e^{-4s}+(2+s)x_0+v_0}{(s^2+2s+4)}$$

# ادامه

بدلیل ضربه اول

بدلیل ضربه دوم

بدلیل شرایط مرزی

- ادامه:

$$X(s)=\frac{1-e^{-4s}+(2+s)x_0+v_0}{s^2+2s+4}=\frac{1}{s^2+2s+4}-\frac{e^{-4s}}{s^2+2s+4}+\frac{1+s}{s^2+2s+4}$$

- گام ۳: تبدیل معکوس از جدول صفحه بعد:

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{e^{-t}\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}-\frac{H(t-4)e^{-t+4}\sin\sqrt{3}\,(t-4)}{\sqrt{3}}$$

$$+\frac{\sqrt{1-2+4}\;e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\,t+\psi\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\psi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1-0.5\times 2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

# ادامه

- در نتیجه:

$$\boxed{x(t)=\frac{e^{-t}\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}-\frac{H(t-4)e^{-t+4}\sin\sqrt{3}\,(t-4)}{\sqrt{3}}+e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)}$$

بدلیل ضربه اول

بدلیل ضربه دوم

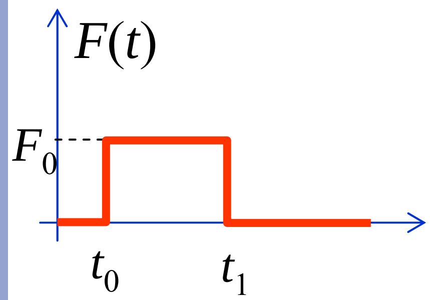
بدلیل شرایط مرزی

| $x(t)$ | $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ |
|---|---|
| $\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t}{\omega_d}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta \le 1$ | $\dfrac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ |
| $\dfrac{1}{\omega_n^2} - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)}{\omega_n\omega_d}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta \le 1, \phi = \cos^{-1}\zeta$ | $\dfrac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ |
| $\dfrac{\sqrt{\alpha^2 - 2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2}\ e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)}{\omega_d}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta \le 1,$ $\phi = \tan^{-1}(\omega_d/(\alpha - \zeta\omega_n))$ | $\dfrac{s+\alpha}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ |
| $\dot{x}$ | $sX(s) - x(0)$ |
| $\ddot{x}$ | $s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$ |

# طیف پاسخ

- **تعریف:** نموداری که نشان دهنده تغییرات پاسخ بیشینه (بیشترین جابجائی، سرعت، شتاب، تنش یا هر کمیت دیگری) با فرکانس طبیعی $\omega_n$ (یا زمان تناوب طبیعی $\tau_n$) سیستم یک درجه آزادی در اثر تابع نیروی معلوم را ***طیف پاسخ*** گویند.
- چون پاسخ بیشینه در مقابل فرکانس طبیعی ترسیم می شود، لذا طیف پاسخ همه پاسخهای بیشینه سیستمهای یک درجه آزادی به نیروی معلوم است.
- طیف پاسخ بطور وسیعی برای طراحی مهندسیهای زلزله استفاده می شود
- با دانستن فرکانس طبیعی یک سیستم می توان پاسخ بیشینه را به نیروی معلوم پیدا کرد.
- معمولاً از سیستم نامیرا در طیف پاسخ استفاده می شود.

# مثال:طیف پاسخ ضربه مستطیلی




$$x(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ x_1=\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-t_0)] & t_0<t<t_1\\ x_1-x_2=\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n(t-t_0)\right] & t>t_1\end{cases}$$

- برای $t_0=0$

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k}[1-\cos\omega_n t] & 0<t<t_1\\ \dfrac{F_0}{k}\left[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n t\right] & t>t_1\end{cases}$$

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k}[\omega_n \sin\omega_n t] & 0<t<t_1\\[2ex] \dfrac{F_0}{k}\omega_n\left[-\sin\omega_n(t-t_1)+\sin\omega_n t\right] & t>t_1\end{cases}$$

- اگر $t_0>\pi/\omega_n$

$$\sin\omega_n t_p=0 \qquad \omega_n t_p=\pi \qquad x(t_p)=\frac{F_0}{k}[1-\cos\omega_n t_p]=2\frac{F_0}{k}$$

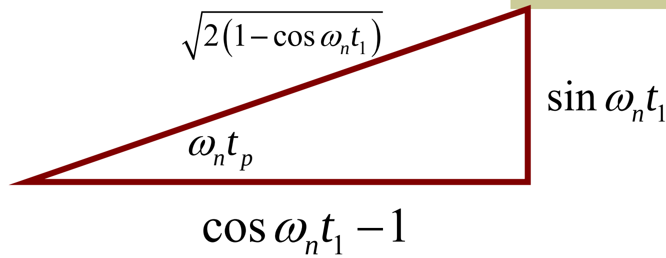
- در غیر اینصورت

$$-\sin\omega_n(t-t_1)+\sin\omega_n t=0$$

$$\sin\omega_n t_p\cos\omega_n t_1-\cos\omega_n t_p\sin\omega_n t_1-\sin\omega_n t=0$$

$$\sin\omega_n t_p\left(1-\cos\omega_n t_1\right)=\cos\omega_n t_p\sin\omega_n t_1 \Rightarrow \tan\omega_n t_p=\frac{\sin\omega_n t_1}{1-\cos\omega_n t_1}$$

$$\tan \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\cos \omega_n t_1 - 1}$$




$$\sin \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}}$$

$$\sqrt{\sin^2 \omega_n t_1 + 1 + \cos^2 \omega_n t_1 - 2\cos \omega_n t_1} = \sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}$$

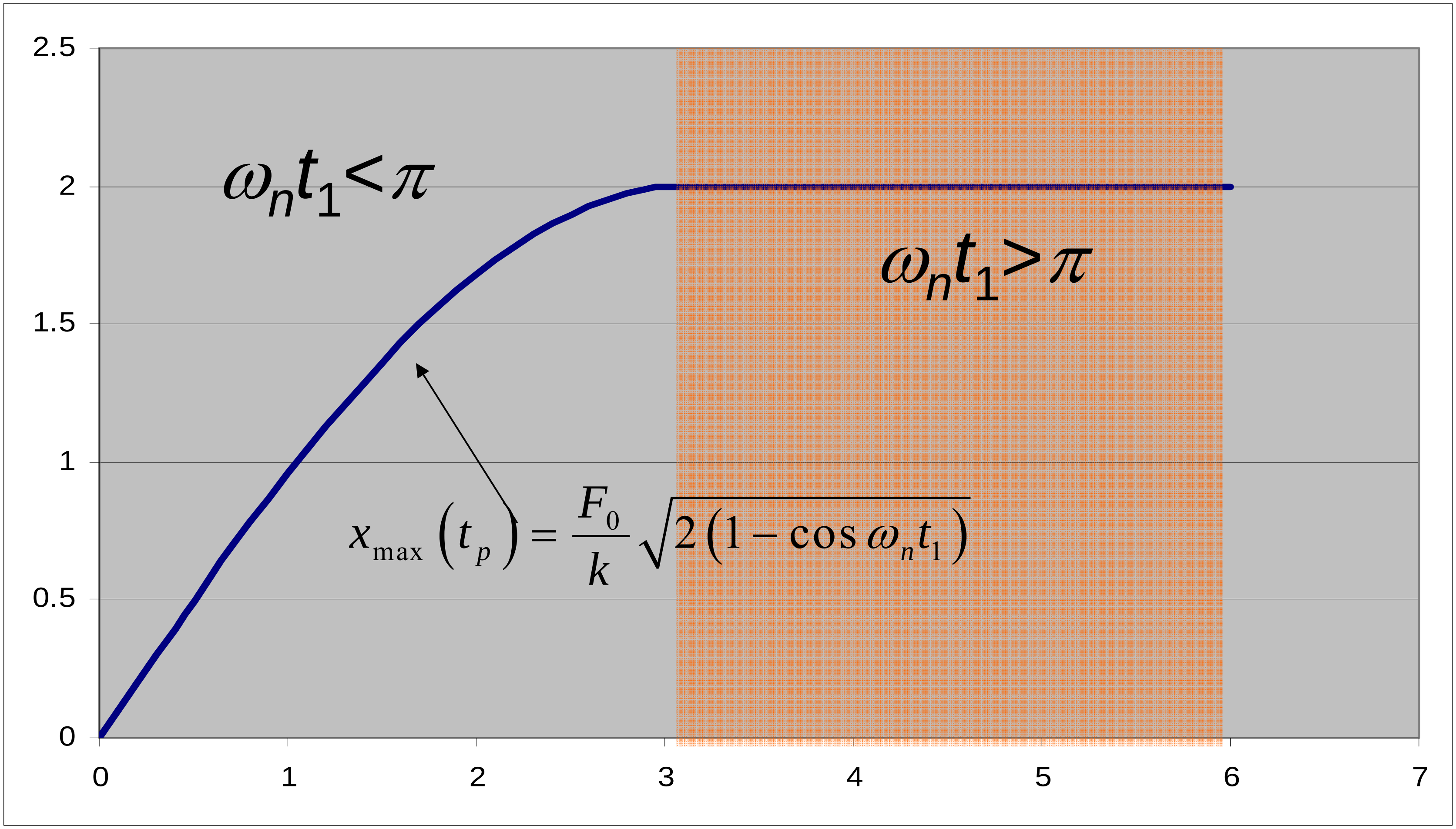
$$\cos \omega_n t_p = \frac{\cos \omega_n t_1 - 1}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}}$$

$$x_{\max}\left(t_p\right) = \frac{F_0}{k}\left[\cos \omega_n (t_p - t_1) - \cos \omega_n t_p\right] = \frac{F_0}{k}\left[\cos \omega_n t_p \cos \omega_n t_1 + \sin \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 - \cos \omega_n t_p\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[\frac{\left(\cos \omega_n t_1 - 1\right)^2}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}} + \frac{\sin^2 \omega_n t_1}{\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}}\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\sqrt{2\left(1-\cos \omega_n t_1\right)}$$

# نمودار طیف پاسخ



# مثال:

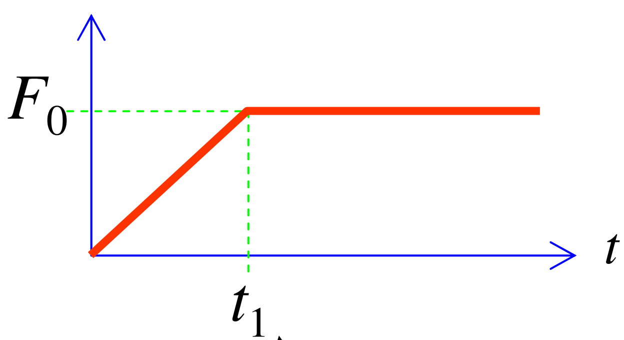
- طیف پاسخ را برای:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

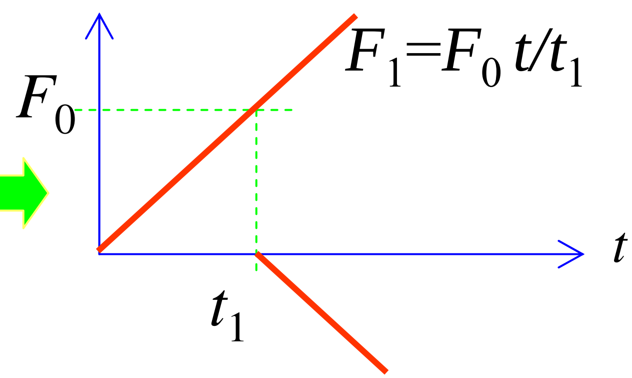
که

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \dfrac{t}{t_1} & 0 \le t < t_1 \\ F_0 & t \ge t_1 \end{cases}$$

$F(t)$




زمان مشخصه ورودی




$F_1 = F_0\, t/t_1 \quad 0 \le t < t_1$

$F_2 = H(t-t_1)F_0(1 - t/t_1) \quad t > t_1$

# ادامه

- پاسخ به بارهای $F_1$ و $F_2$:

$$x_1(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t \frac{F_0\tau}{t_1}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=\frac{F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)\qquad 0<t<t_1$$

$$x_2(t)=-\frac{F_0}{k}\left(\frac{t-t_1}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1}\right)\qquad t\ge t_1$$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\frac{F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)$$

$$-\frac{F_0}{k}\left(\frac{t-t_1}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1}\right)H(t-t_1)$$

# پیداکردن مقدار بیشینه پاسخ

- برای پیدا کردن پاسخ بیشینه لازم است مشتق پاسخ را معادل صفر قرار داد.
- برای هردو مورد بررسی انجام می شود:
  - $t<t_1$

$$\dot{x}_1(t)=\frac{F_0}{kt_1}\left(1-\cos\omega_n t\right)=0\Rightarrow\cos\omega_n t=1\quad t=\frac{2n\pi}{\omega_n}$$

  - در صورتی که $t_1=n\tau_n$ باشد،

?

$$x_{1_{\max}}(t_p)=\frac{F_0}{k}$$

  - $t>t_1$

$$\dot{x}(t)=\frac{F_0}{t_1 k}\left(-\cos\omega_n t+\cos\omega_n(t-t_1)\right)=0$$

# پیداکردن مقدار بیشینه پاسخ

- در نتیجه

$$-\cos(\omega_n t_p)+\cos(\omega_n t_p)\cos(\omega_n t_1)+\sin(\omega_n t_p)\sin(\omega_n t_1)=0$$

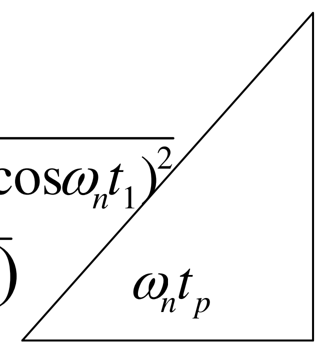
$$\cos(\omega_n t_p)[1-\cos(\omega_n t_1)]=\sin(\omega_n t_p)\sin(\omega_n t_1)$$

$$\tan(\omega_n t_p)=\frac{[1-\cos(\omega_n t_1)]}{\sin(\omega_n t_1)}$$

- چون $\omega_n t_p > \pi$

$$\sin(\omega_n t_p)=-\frac{1-\cos(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_1))}}$$

$$\cos(\omega_n t_p)=-\frac{\sin(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_1))}}$$



# پیداکردن مقدار بیشینه پاسخ

$$\sin(\omega_n t_p) = -\frac{1-\cos(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_1))}}$$

- با قرار دادن این مقادیر در پاسخ:

$$\cos(\omega_n t_p) = -\frac{\sin(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_1))}}$$

$$x_{\max} = x(t_p) = \frac{F_0}{k\omega_n t_1}\left(\omega_n t_1 - \sin\omega_n t_p + \sin\omega_n(t_p - t_1)\right)$$

$$= \frac{F_0}{k\omega_n t_1}\left(\omega_n t_1 - \sin\omega_n t_p(1-\cos\omega_n t_1) - \sin\omega_n t_1 \cos\omega_n t_p\right)$$

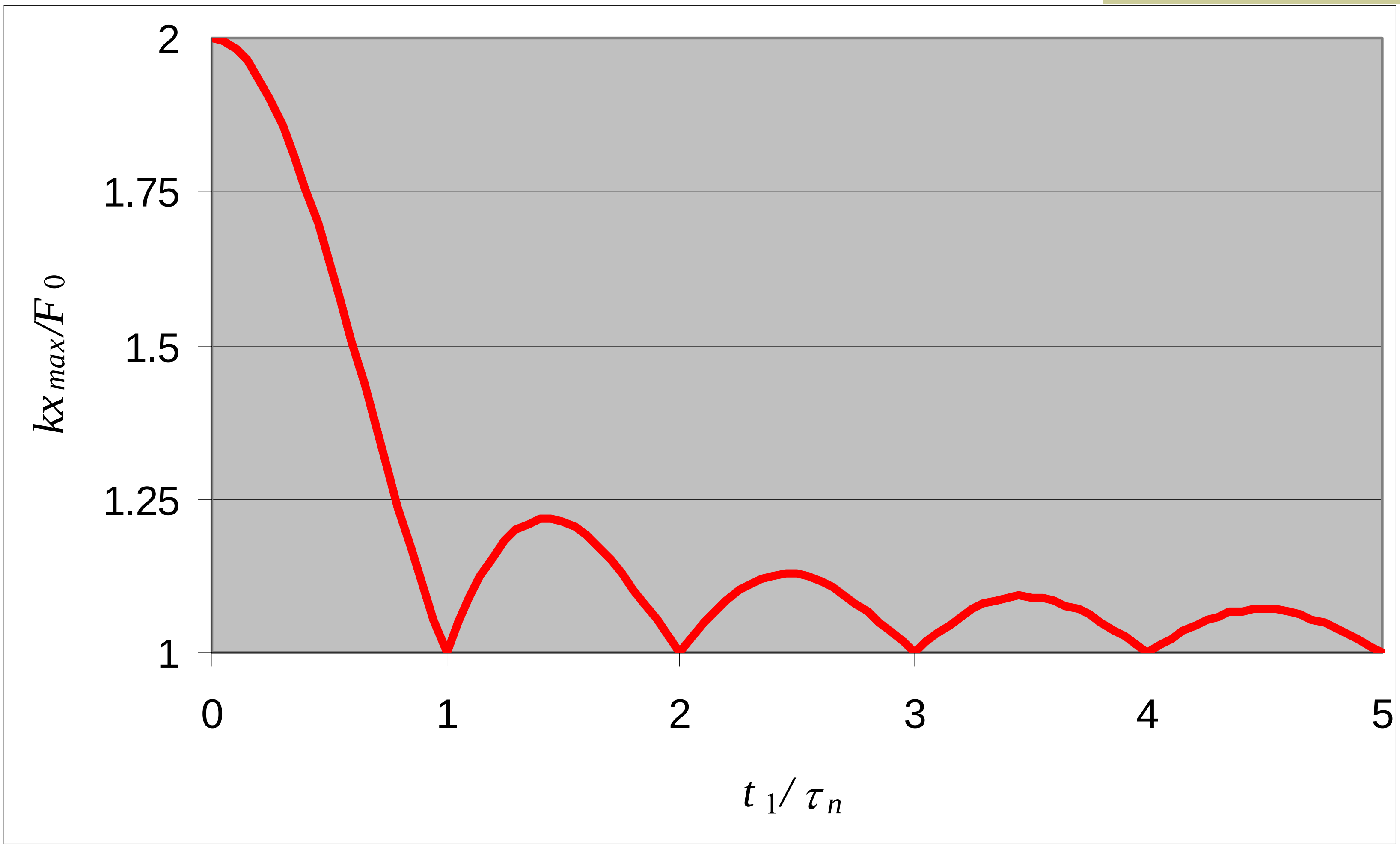
$$= \frac{F_0}{k\omega_n t_1}\left(\omega_n t_1 - \left(-\frac{1-\cos(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_1))}}\right)(1-\cos\omega_n t_1) - \sin\omega_n t_1\left(-\frac{\sin(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_1))}}\right)\right)$$

$$x_{\max} = \frac{F_0}{k\omega_n t_1}\left(\omega_n t_1 + \sqrt{2(1-\cos\omega_n t_1)}\right)$$

$$\boxed{\frac{k\,x_{\max}}{F_0} = 1 + \frac{1}{\omega_n t_1}\sqrt{2(1-\cos\omega_n t_1)}}$$

ترسیم این مقدار در مقابل $\omega_n t_1 = 2\pi t_1/\tau_n$

# طیف پاسخ

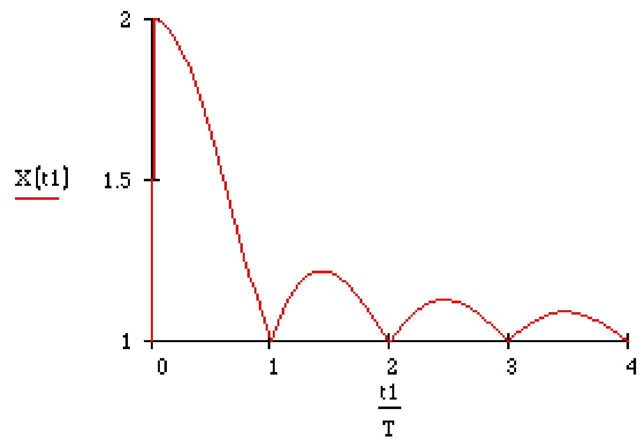


# Comparison between impulse and harmonic inputs

Impulse Input
Max amplitude versus normalized pulse "frequency"

$\omega n := 2\cdot\pi \qquad T := \dfrac{\omega n}{2\cdot\pi}$

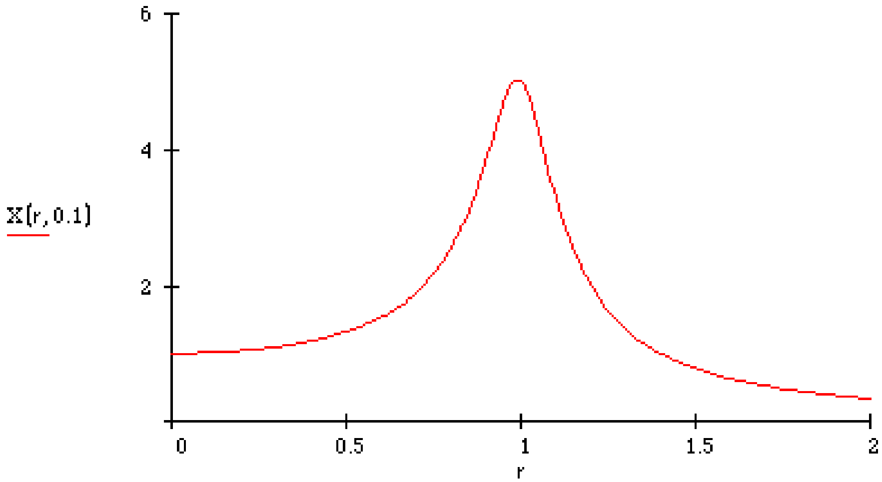
$$X(t1) := 1 + \frac{1}{\omega n\cdot t1}\cdot\sqrt{2\cdot(1-\cos(\omega n\cdot t1))}$$




Harmonic Input
Max amplitude versus normalized driving frequency

$$X(r,\zeta) := \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\cdot\zeta\cdot r)^2}}$$

$r := 0, 0.01 .. 2$



# روشهای عددی

- گاهی نیروی اعمالی یا معادله دیفرانسیل بگونه ای است که روشهای تحلیلی گفته شده قادر به حل معادله نیستند.
- در این حال از روشهای عددی استفاده می شود.
- حل عددی معادلات دیفرانسیلی
  - روش اویلر
  - روش هیون
  - روشهای رانج کوتا
- روش مناسب تر برای معادلات مرتبه ۲ در ارتعاشات استفاده از روش رانج کوتا مرتبه ۴ است

# روش اویلر

- در این روش مشتق اول در زمان $t_i$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_i = \dot{x}_i = g(x_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + h\, g(x_i)}$$

- بنابراین اگر $x_0$ (شرط اولیه) وجود داشته باشد، $x_1$ و... محاسبه می شود.
- این روش برای معادلات مرتبه اول با $h$ کوچک مناسب است:

# مثال

- معادله مرتبه اول:

$$\dot{x} + x^2 = 0 \quad x_0 = 1$$

$$\dot{x} = -x^2 \qquad g(x) = -x^2 \qquad x_0 = 1$$

$$x_{i+1} = x_i - hx_i^2$$

- با انتخاب h=0.1:

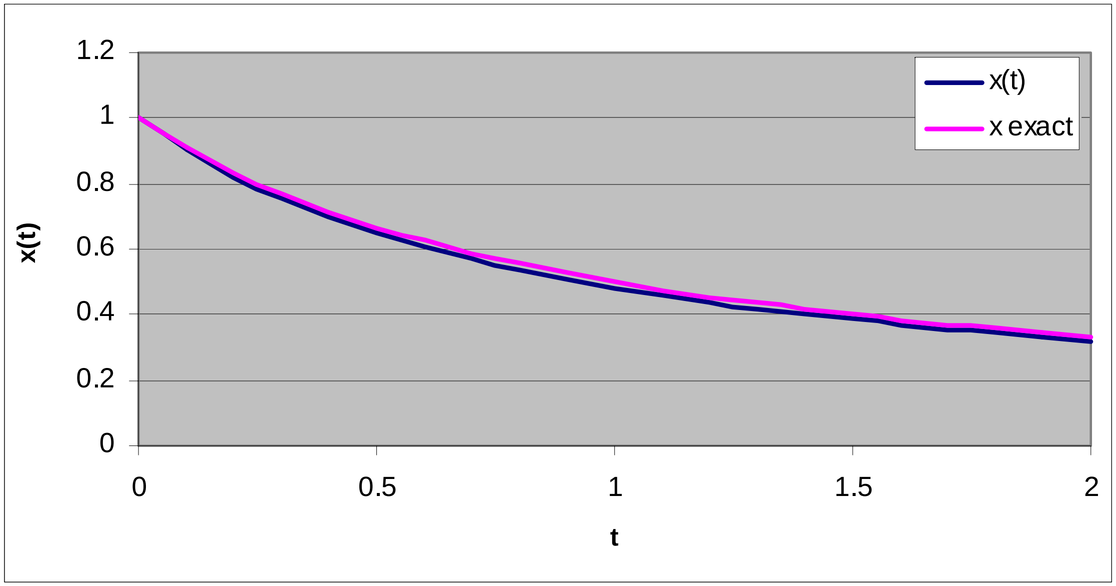
$$x_{i+1} = x_i - 0.1x_i^2$$

$$x_1 = x_0 - 0.1x_0^2 = 1 - 0.1 = 0.9 \quad t_1 = 0.1$$

$$x_2 = x_1 - 0.1x_1^2 = 0.9 - 0.1 \times 0.81 = 0.819 \quad t_2 = 0.2$$

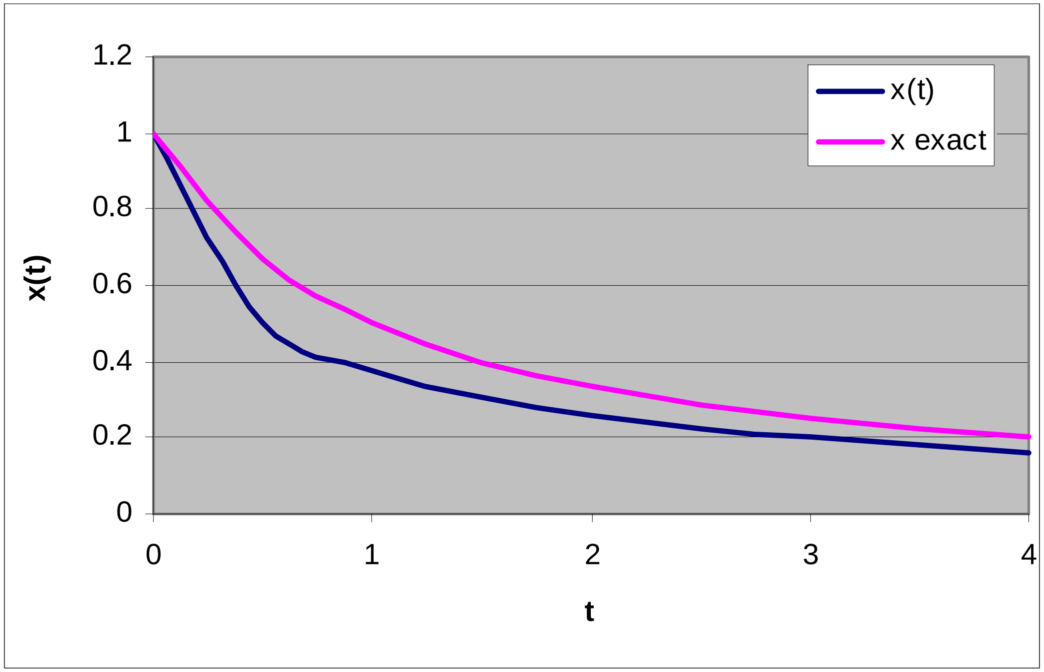
# حل

| t | x(t) | x exact |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 0.1 | 0.9 | 0.909091 |
| 0.2 | 0.819 | 0.833333 |
| 0.3 | 0.751924 | 0.769231 |
| 0.4 | 0.695385 | 0.714286 |
| 0.5 | 0.647029 | 0.666667 |
| 0.6 | 0.605164 | 0.625 |
| 0.7 | 0.568542 | 0.588235 |
| 0.8 | 0.536218 | 0.555556 |
| 0.9 | 0.507465 | 0.526316 |
| 1 | 0.481713 | 0.5 |
| 1.1 | 0.458508 | 0.47619 |
| 1.2 | 0.437485 | 0.454545 |
| 1.3 | 0.418346 | 0.434783 |
| 1.4 | 0.400845 | 0.416667 |
| 1.5 | 0.384777 | 0.4 |
| 1.6 | 0.369972 | 0.384615 |
| 1.7 | 0.356284 | 0.37037 |
| 1.8 | 0.34359 | 0.357143 |
| 1.9 | 0.331784 | 0.344828 |
| 2 | 0.320776 | 0.333333 |



# حل h=0.5

| t | x(t) | x exact |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 0.5 | 0.5 | 0.666667 |
| 1 | 0.375 | 0.5 |
| 1.5 | 0.304688 | 0.4 |
| 2 | 0.25827 | 0.333333 |
| 2.5 | 0.224918 | 0.285714 |
| 3 | 0.199624 | 0.25 |
| 3.5 | 0.179699 | 0.222222 |
| 4 | 0.163553 | 0.2 |



# روش اولر برای معادلات مرتبه ۲

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

- فرض کنید $y(t) = \dot{x}(t)$

$$\dot{y} = \frac{-cy - kx + f(t)}{m} = g(t) \qquad y(0) = v_0$$

$$\dot{x} = y \qquad x(0) = x_0$$

- حل عددی:

$$y_{i+1} = y_i + hg(t_i) \qquad y(0) = v_0$$

$$x_{i+1} = x_i + hy_{i+1} \qquad x(0) = x_0$$

# مثال حل عددی معادله غیر خطی آونگ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad \theta(0) = \theta_0 \qquad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad \theta(0) = \theta_0 \qquad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

$$\dot{y} = --\frac{g}{l}\sin\theta \qquad y_0 = \omega_0$$

$$\dot{\theta} = y \qquad \theta_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i - h\,g\sin\theta_i / l \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + h y_{i+1} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \omega_0 = 0}$$

# مثال حل عددی معادله غیر خطی آونگ

$$y_{i+1} = y_i - h\,g\sin\theta_i / l$$
$$\theta_{i+1} = \theta_i + hy_i$$

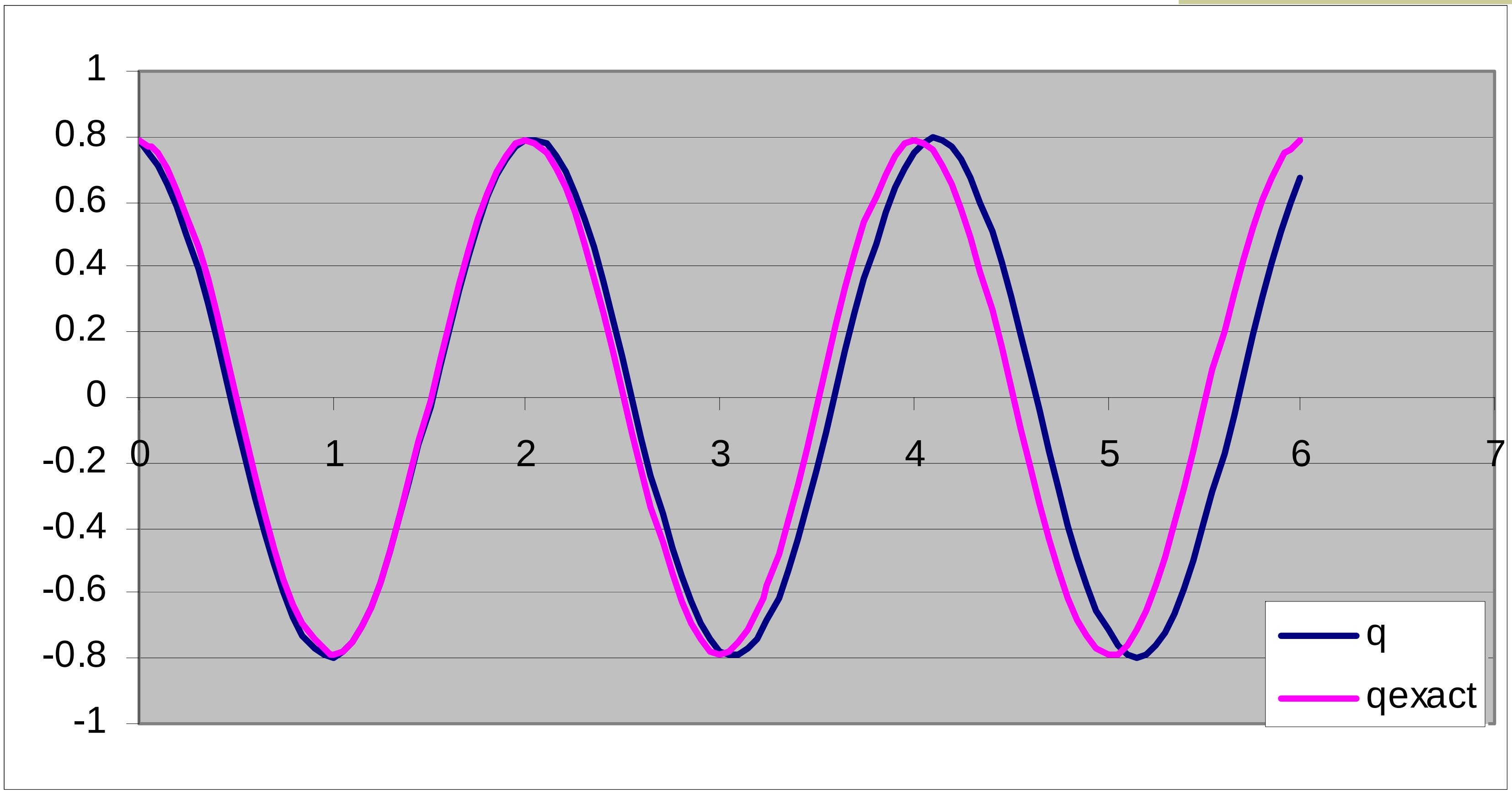
$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \omega_0 = 0$$

- g=9.81 ، l=1 ،h=0.1

$$y_1 = y_0 - h\,g\sin\theta_0 / l = 0 - 0.1\times 9.81\sin(\pi/4) = -0.981\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta_1 = \theta_0 + hy_0 = (\pi/4) - 0.1\times 0.981\frac{\sqrt{2}}{2}$$

# نتایج



# روش رانج کوتا

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

$$k_1 = \Delta h^2 \left[ f(t, x, \dot{x}) \right]$$

$$k_2 = \left( \frac{\Delta h^2}{2} \right) \left[ f\left( t + \frac{1}{2}\Delta h, x + \frac{\Delta h}{2}\dot{x} + \frac{1}{4}k_1, \dot{x} + \frac{1}{\Delta h}k_1 \right) \right]$$

$$k_3 = \left( \frac{\Delta h^2}{2} \right) \left[ f\left( t + \frac{1}{2}\Delta h, x + \frac{\Delta h}{2}\dot{x} + \frac{1}{4}k_2, \dot{x} + \frac{1}{\Delta h}k_2 \right) \right]$$

$$k_4 = \left( \frac{\Delta h^2}{2} \right) \left[ f\left( t + \Delta h, x + \Delta h\dot{x} + k_3, \dot{x} + \frac{2}{\Delta h}k_3 \right) \right]$$

$$x(t + \Delta h) = x(t) + \Delta h \, \dot{x}(t) + \frac{1}{3}\left[ k_1 + k_2 + k_3 \right]$$

$$\dot{x}(t + \Delta h) = \dot{x}(t) + \frac{1}{3\Delta h}\left[ k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right]$$

- برنامه excel

# پایان

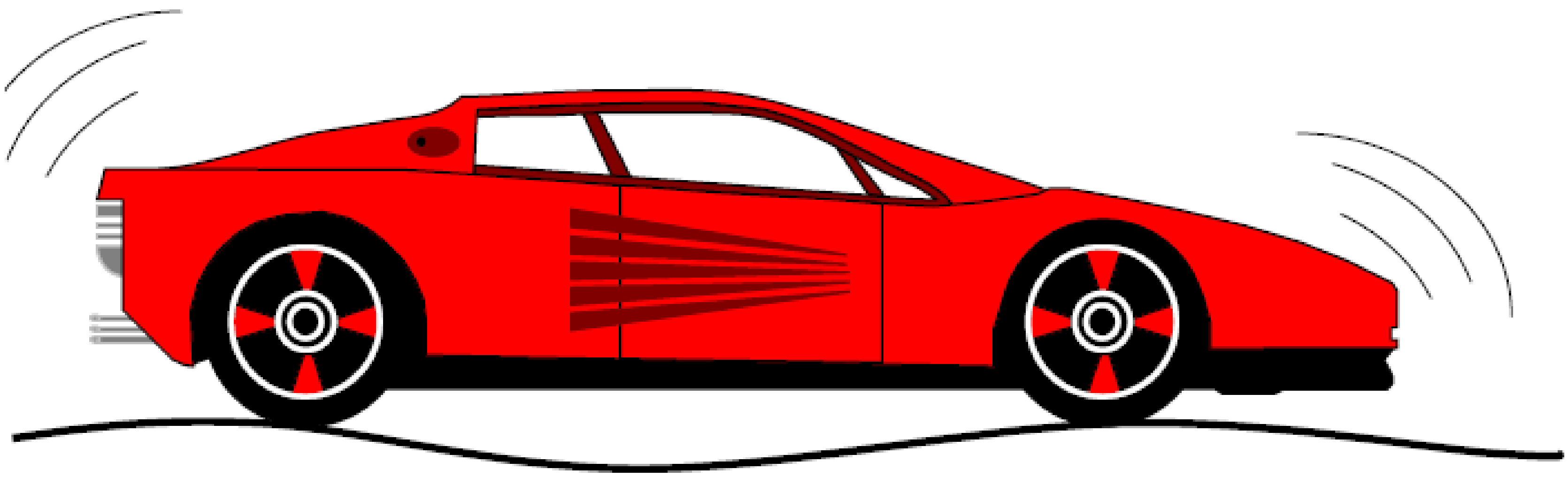
# ارتعاشات مکانیکی ۱۰
# ارتعاشات دو درجه آزادی

سیدیوسف احمدی بروغنی

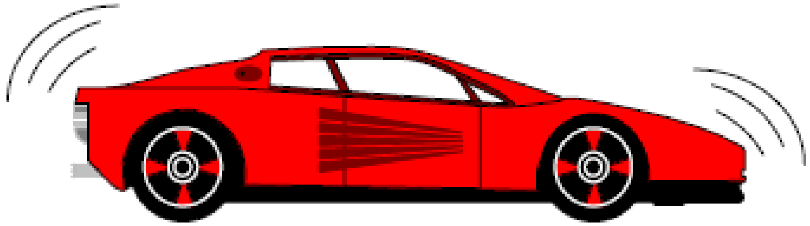
استادیار گروه مکانیک

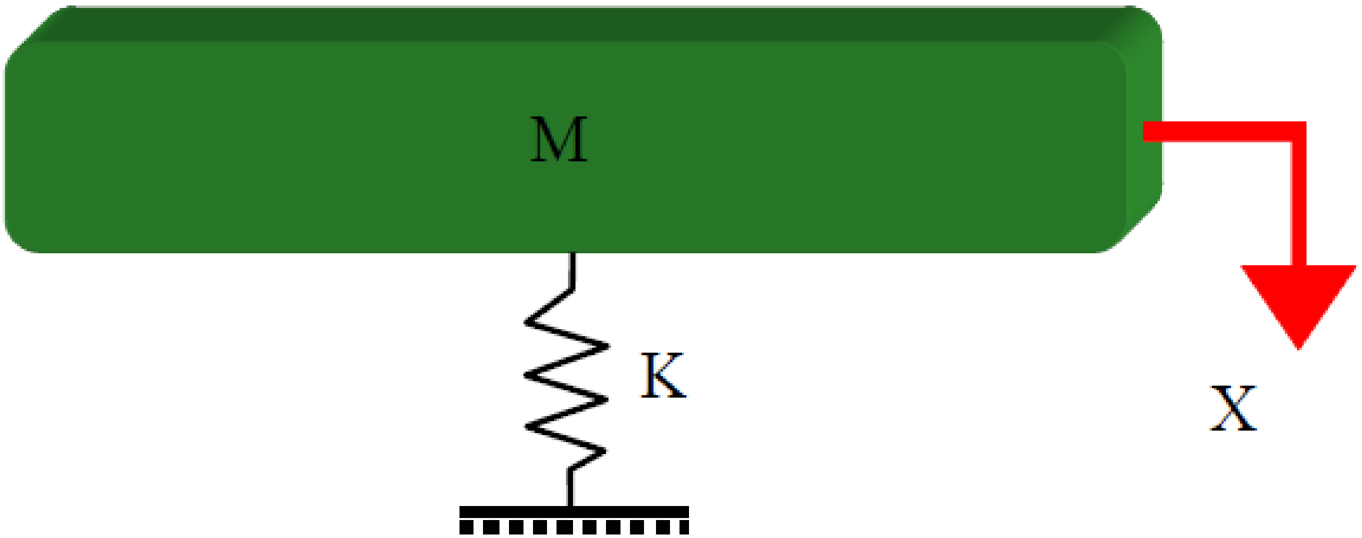
دانشگاه بیرجند

# Multiple Degree of Freedom Systems

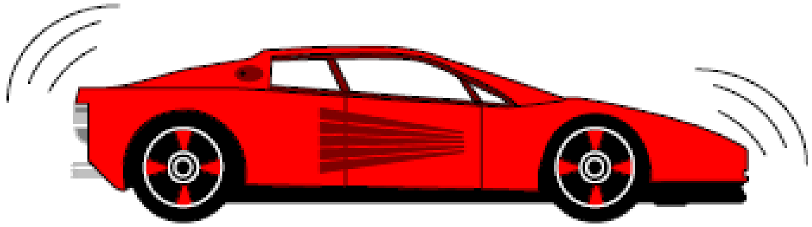


# Vibrating Systems: Single Degree of Freedom (SDOF)

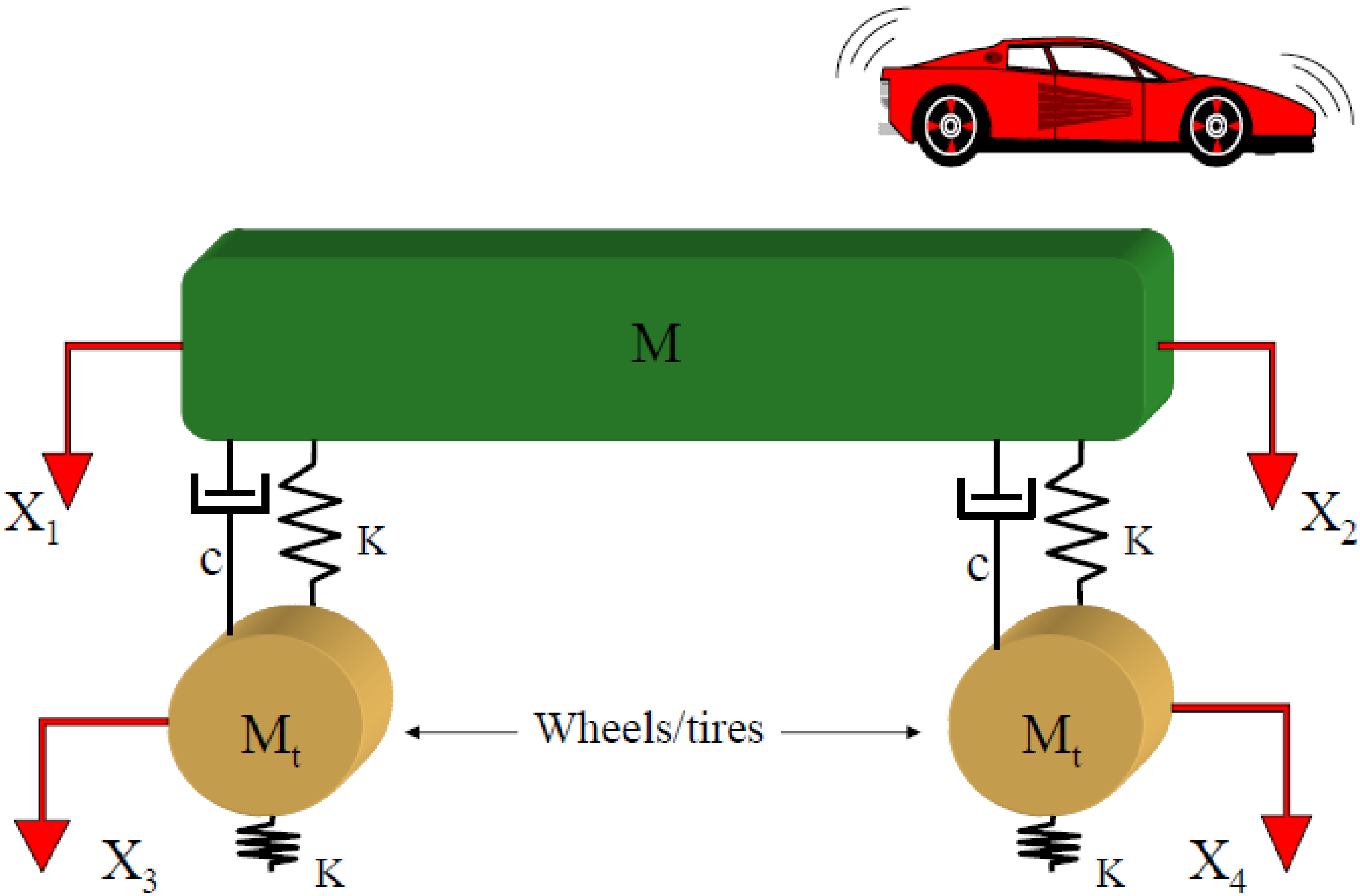




# Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)

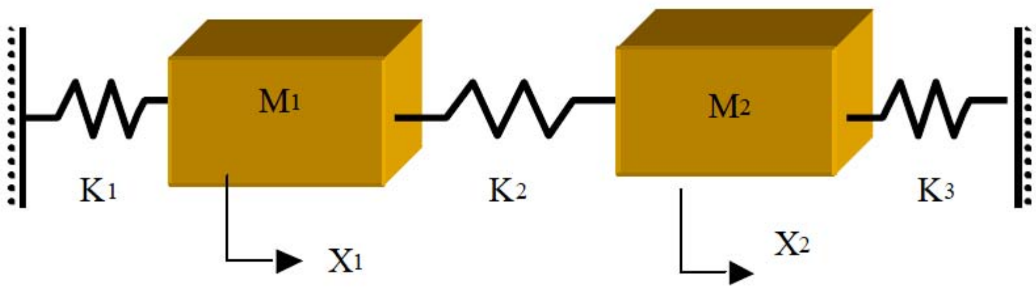


# Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)



# سیستمهای چند درجه آزادی MDOF

- یک سیستم چند درجه آزادی، سیستمی است که نیاز به بیش از یک مختصات مستقل برای توصیف حرکت دارد.
- وقتی مختصات مستقل از یکدیگر باشند، آنها را مختصات تعمیم یافته *generalized coordinates* گویند.
- تعداد مختصات تعمیم یافته معادل تعداد درجات آزادی سیستم است.

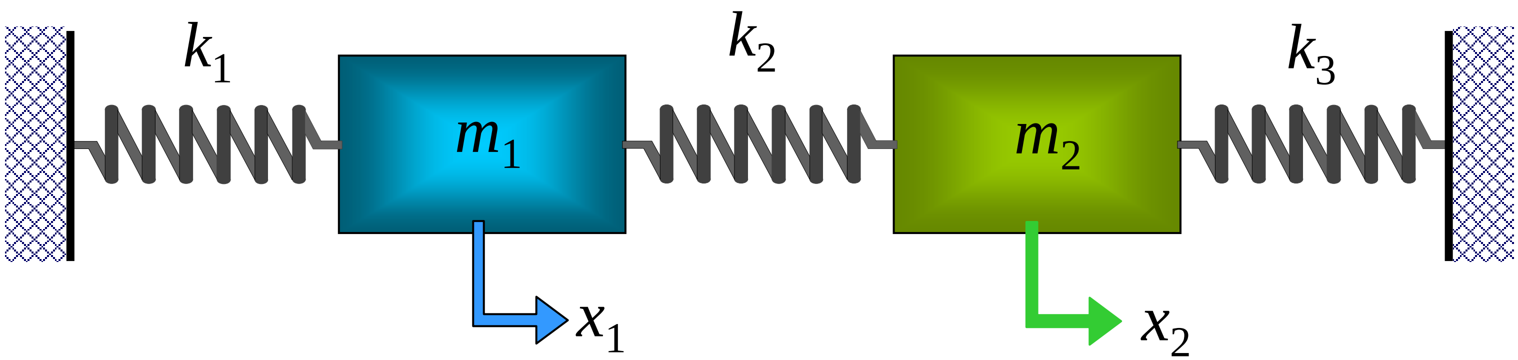


# سیستمهای چند درجه آزادی MDOF

- یک سیستم چند درجه آزادی که دارای N درجه آزادی است، دارای N فرکانس طبیعی است.
- برای هر فرکانس طبیعی یک حالت طبیعی ارتعاش *Natural state of vibration* با یک ترکیبی از تغییرمکان که نرمال مد نامیده می شود، وجود دارد.
- اصطلاحات ریاضی متناظر با این کمیتها عبارتند از:
  - مقدارهای ویژه *Eigenvalues*(فرکانسهای طبیعی)
  - بردارهای ویژه *Eigenvectors* (شکل مد یا نرمال مد)

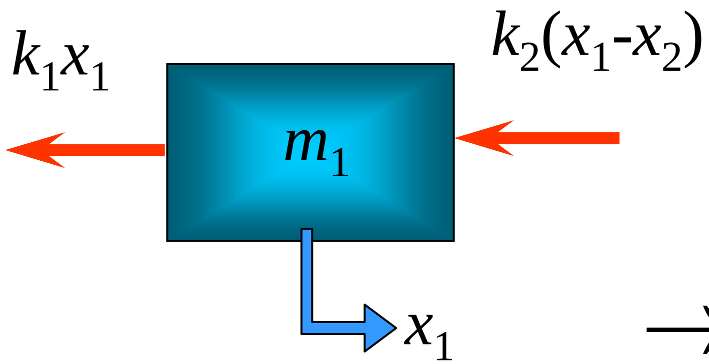
# ار تعاش آزاد سیستم دو درجه آزادی

- سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید:
  - الف) مطلوب است معادله حرکت:
  - ب) پاسخ سیستم به شرایط اولیه:



# معادله حرکت برای جرم ۱

- برای جرم اول با در نظر گرفتن نامیرائی



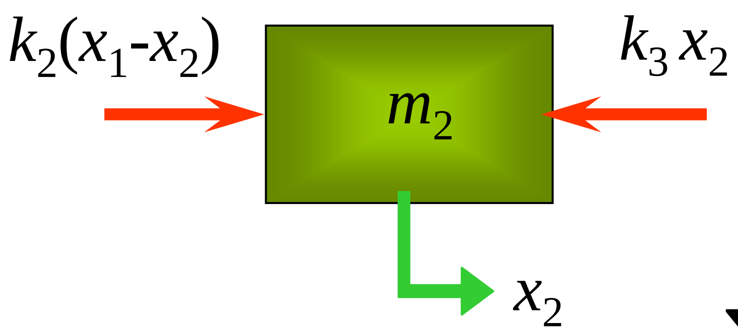

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = m_1\ddot{x}_1$$

$$-k_1x_1 - k_2\left(x_1 - x_2\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - k_2x_2 = 0}$$

# معادله حرکت برای جرم ۲

- برای جرم اول با در نظر گرفتن نامیرائی




$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = m_2\ddot{x}_2$$

$$-k_3x_2 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + \left(k_2 + k_3\right)x_2 = 0}$$

# معادلات حرکت

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0}$$

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0}$$

- دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی:
  - مرتبه دوم
  - همگن
  - ضرایب ثابت
  - وابسته به هم

# معادله حرکت

- شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس جرم

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

بردار نیرو

بردار شتاب

ماتریس سختی

بردار جابجائی

# پاسخ سیستم

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- حلی به شکل زیر فرض می شود:

$$\{x(t)\}=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sin(\omega t+\phi)$$

- در نتیجه

$$\{\ddot{x}\}=\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}=-\omega^2\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sin(\omega t+\phi)$$

# پاسخ سیستم

- جایگزینی در معادله حرکت:

$$\left\{-\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sin(\omega t+\phi)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- در نتیجه دستگاه معادلات خطی همگن زیر باید حل شود:

$$\left\{-\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- حل این دستگاه درصورتی جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان ضرایب صفر باشد

# معادله مشخصه دستگاه معادلات

- با مساوی صفر قراردادن ماتریس ضرایب، معادله مشخصه دستگاه معادله دیفرانسیل که یک چندجمله ای مرتبه ۴ برای $\omega$ است.

$$\det\left\{-\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\right\}=\det\begin{pmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega^2 m_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\left(k_1+k_2-\omega^2 m_1\right)\left(k_2+k_3-\omega^2 m_2\right)-k_2^2=0$$

$$\boxed{m_1 m_2 \omega^4-\left[m_1\left(k_2+k_3\right)+m_2\left(k_1+k_2\right)\right]\omega^2-k_2^2+\left(k_1+k_2\right)\left(k_2+k_3\right)=0}$$

- حل این معادله برای $\omega^2$ فرکانسهای طبیعی را حاصل می کند.

# فرکانسهای طبیعی

$$\boxed{m_1 m_2 \omega^4 - \left[m_1\left(k_2 + k_3\right) + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right]\omega^2 - k_2^2 + \left(k_1 + k_2\right)\left(k_2 + k_3\right) = 0}$$

- در نتیجه:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{\left[m_1\left(k_2 + k_3\right) + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right] \pm \sqrt{\left[m_1\left(k_2 + k_3\right) + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right]^2 - 4m_1 m_2\left[\left(k_1 + k_2\right)\left(k_2 + k_3\right) - k_2^2\right]}}{2m_1 m_2}$$

- که $\omega_1$ و $\omega_2$ فرکانسهای طبیعی هستند.

# شکل مدها

- با قرار دادن در دستگاه معادلات منطبق بر هر فرکانس طبیعی یک بردار دامنه بدست می آید شکل مد نام دارد.

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2-\underline{\omega_1^2} m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\underline{\omega_1^2} m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

شکل مدها

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2-\underline{\omega_2^2} m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\underline{\omega_2^2} m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# شکل کلی پاسخ

- ترکیب خطی حاصلضرب شکل مدها در تابع سینوسی فرضی پاسخ سیستم می باشد.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X_1^{\,1} \\ X_2^{\,1} \end{pmatrix}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\begin{pmatrix} X_1^{\,2} \\ X_2^{\,2} \end{pmatrix}\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

- از شرایط اولیه می توان ثابتهای A، B، $\phi_1$ و $\phi_2$ را بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix}$$

# اعمال شرایط اولیه

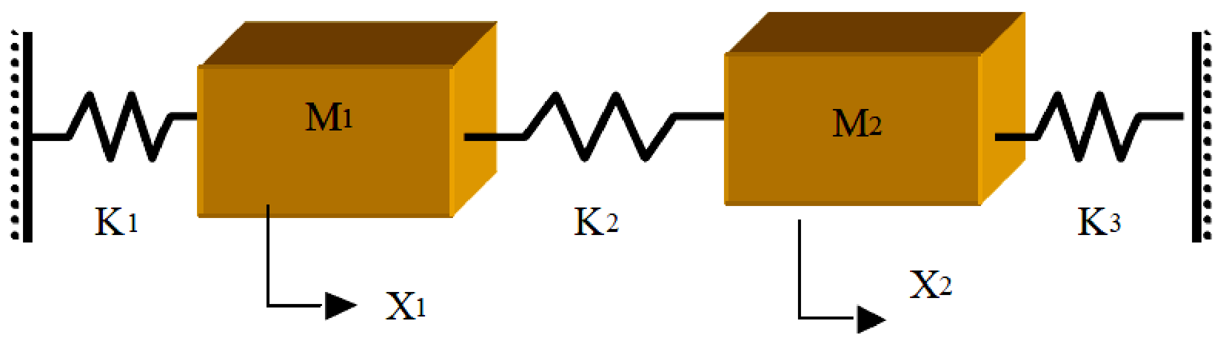
$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X_1^{\,1} \\ X_2^{\,1} \end{pmatrix}\sin(\phi_1) + B\begin{pmatrix} X_1^{\,2} \\ X_2^{\,2} \end{pmatrix}\sin(\phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} = A\omega_1\begin{pmatrix} X_1^{\,1} \\ X_2^{\,1} \end{pmatrix}\cos(\phi_1) + B\omega_2\begin{pmatrix} X_1^{\,2} \\ X_2^{\,2} \end{pmatrix}\cos(\phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{\,1} & X_1^{\,2} & 0 & 0 \\ X_2^{\,1} & X_2^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 X_1^{\,1} & \omega_2 X_1^{\,2} \\ 0 & 0 & \omega_1 X_2^{\,1} & \omega_2 X_2^{\,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\sin\phi_1 \\ B\sin\phi_2 \\ A\cos\phi_1 \\ B\cos\phi_2 \end{pmatrix}$$

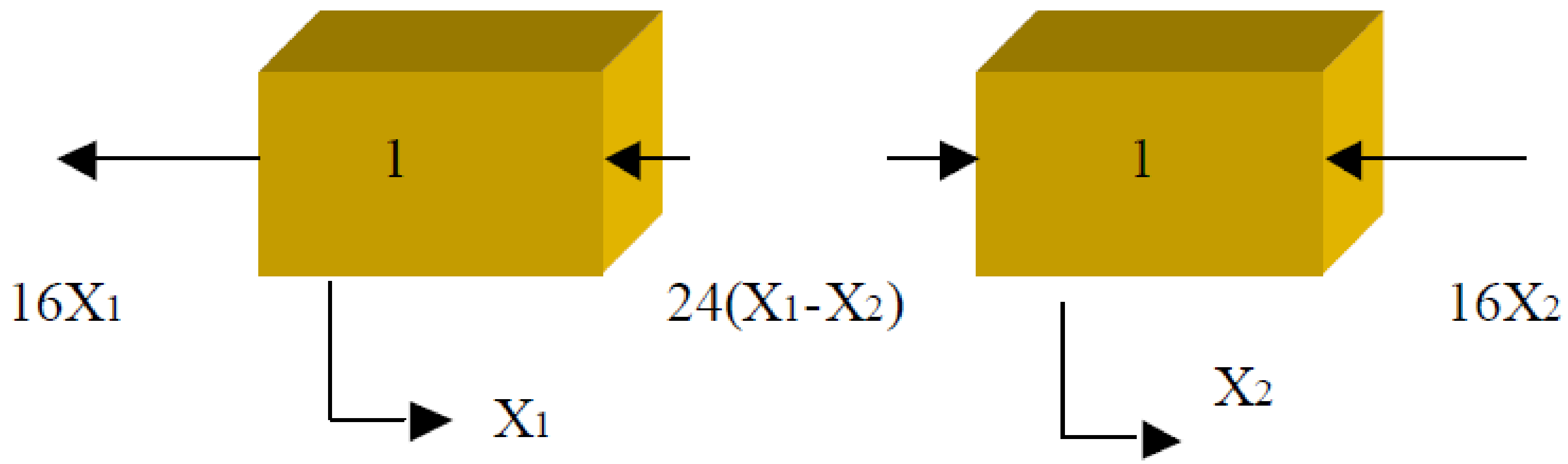
# مثال: سیستم دو درجه آزادی (ارتعاش آزاد-نامیرا)

- فرکانسهای طبیعی و شکل مدهای سیستم دو درجه آزادی زیر را بدست آورید




$$k_1 = 16 \text{ N/m} \quad k_2 = 24 \text{ N/m} \quad k_3 = 16 \text{ N/m} \quad m_1 = 1 \text{ kg} \quad \mathrm{m}_2 = 1 \text{ kg}$$

# حل: دیاگرام آزاد جسم و معادله حرکت




- برای جسم ۱:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_2\left(x_1 - x_2\right) - k_1 x_1 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 + 40x_1 - 24x_2 = 0}$$

- برای جسم ۲:

$$m_2\ddot{x}_2 = k_2\left(x_1 - x_2\right) - k_3 x_2 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2 - 24x_1 + 40x_2 = 0}$$

# حل: معادله حرکت و حل معادله

- این دو معادله حرکت به هم وابسته هستند و در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & -24 \\ -24 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- حلی بصورت زیر فرض می شود:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\left(-\omega^2 \sin(\omega t + \phi)\right)$$

# حل: حل معادله

- با قرار دادن در معادله حرکت

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\left(-\omega^2\right)+\begin{pmatrix}40 & -24\\-24 & 40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right\}\sin(\omega t+\phi)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

- جواب بدیهی؟ $\sin\omega t=0$ لذا:

$$\left\{-\omega^2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}40 & -24\\-24 & 40\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

- مسئله مقدار ویژه:

$$\boxed{\left([A]-\lambda[I]\right)\{X\}=\{0\}}$$

# حل:مسئله مقدار ویژه

- در نتیجه

$$\begin{pmatrix} 40-\omega^2 & -24 \\ -24 & 40-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- حل دستگاه همگن: جواب غیر بدیهی اگر det([A]-λ[I])=0

$$\begin{vmatrix} 40-\omega^2 & -24 \\ -24 & 40-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\left(40-\omega^2\right)^2-24^2=\left(40-\omega^2+24\right)\left(40-\omega^2-24\right)=0$$

# حل: بدست آوردن مقدارهای ویژه

- لذا مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\left(64-\omega^2\right)\left(16-\omega^2\right)=0 \Rightarrow \boxed{\omega_1^2=16, \quad \omega_2^2=64}$$

$$\omega_1=\pm 4, \quad \omega_2=\pm 8$$

مقادیر ویژه

- در نتیجه فرکانسهای طبیعی سیستم:

$$\boxed{\omega_1=4\,\mathrm{rad/s}, \quad \omega_2=8\,\mathrm{rad/s}}$$

- برای بدست آوردن بردار $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 40-\omega^2 & -24 \\ -24 & 40-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

# حل: محاسبه بردارهای ویژه (شکل مد)

- حال دو مقدار ویژه را در دستگاه قرار داده و منطبق بر هر کدام یک بردار ویژه محاسبه می شود:

$$\begin{pmatrix} 40-\omega^2 & -24 \\ -24 & 40-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- الف) $\omega_1^2 = 16$

$$\begin{pmatrix} 40-16 & -24 \\ -24 & 40-16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = X_2 = \alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha \xrightarrow{\text{نرمالیزه}} \boxed{\begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

# حل: محاسبه بردارهای ویژه (شکل مد)

- ب) $\omega_2^2 = 64$

$$\begin{pmatrix} 40-64 & -24 \\ -24 & 40-64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -24 & -24 \\ -24 & -24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 = -X_2 = \beta \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1^{\,2} \\ X_2^{\,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\beta$$

$$\xrightarrow{\text{نرمالیزه}} \boxed{\begin{pmatrix} X_1^{\,2} \\ X_2^{\,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

# حل: پاسخ

- در نتیجه پاسخ سیستم

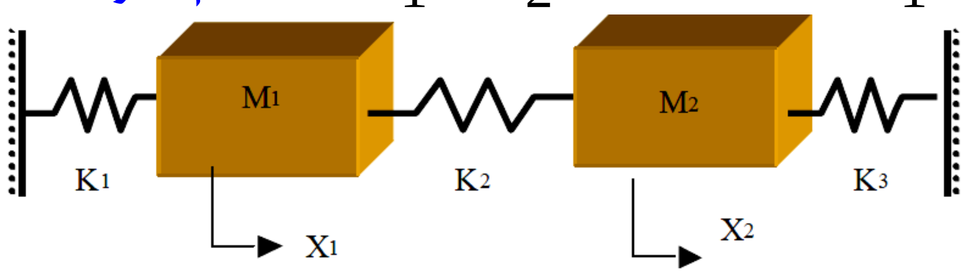
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix}\sin(\omega_1 t+\phi_1)+B\begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix}\sin(\omega_2 t+\phi_2)$$

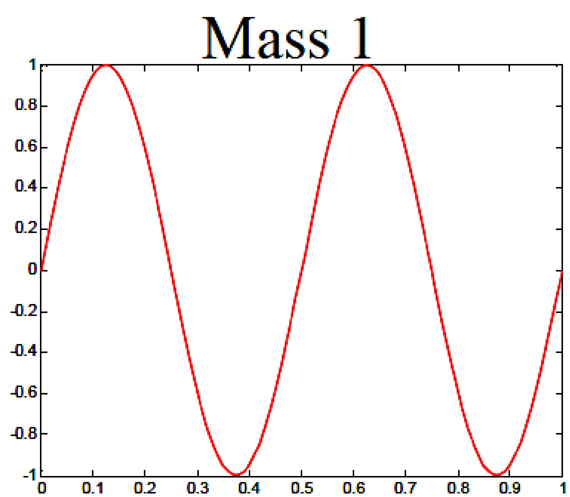
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(4t+\phi_1)+B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(8t+\phi_2)$$

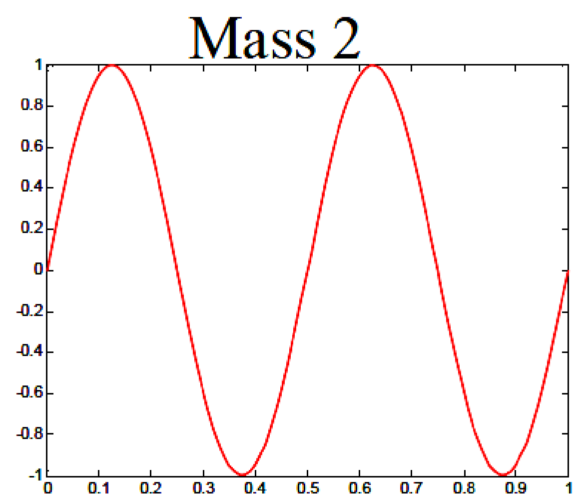
- که با داشتن شرایط اولیه می توان پاسخ را بدست آورد؟؟؟

# حل: تعبیر فیزیکی بردارهای ویژه

- برای $\omega=\omega_1=4$ rad/s $\quad X_1=X_2 \quad$ هم فاز



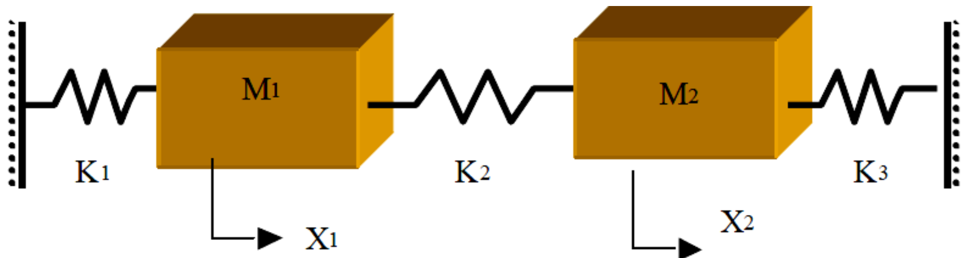



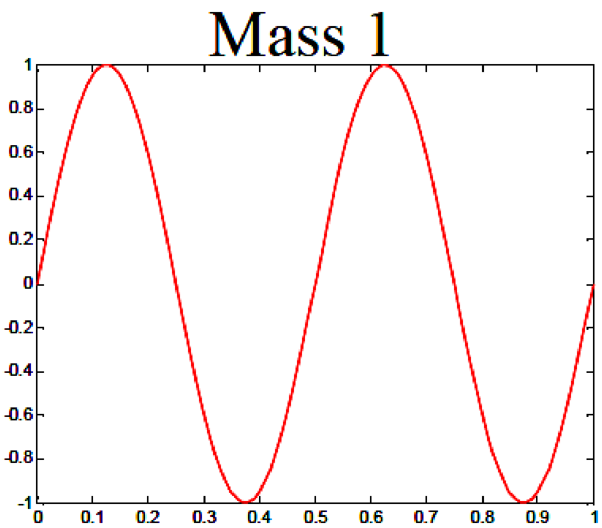



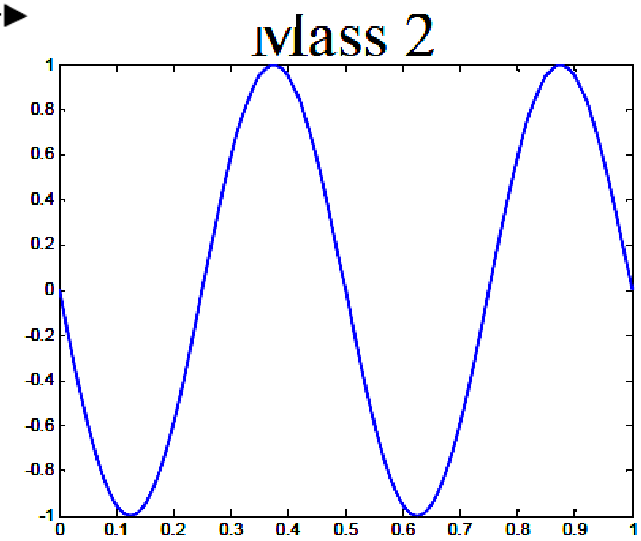
# حل: تعبیر فیزیکی بردارهای ویژه

- برای $\omega=\omega_2=8$ rad/s

$X_1=-X_2$ غیرهم فاز



# حل: اعمال شرایط اولیه

- شرایط اولیه

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(4t+\phi_1) + B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(8t+\phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\sin\phi_1 \\ B\sin\phi_2 \\ A\cos\phi_1 \\ B\cos\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\sin\phi_1 \\ B\sin\phi_2 \\ A\cos\phi_1 \\ B\cos\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\sin\phi_1 = 1.5, \quad B\sin\phi_2 = 0.5$$
$$A\cos\phi_1 = 0 \quad B\cos\phi_2 = 0$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A = 1.5, \quad B = 0.5$$

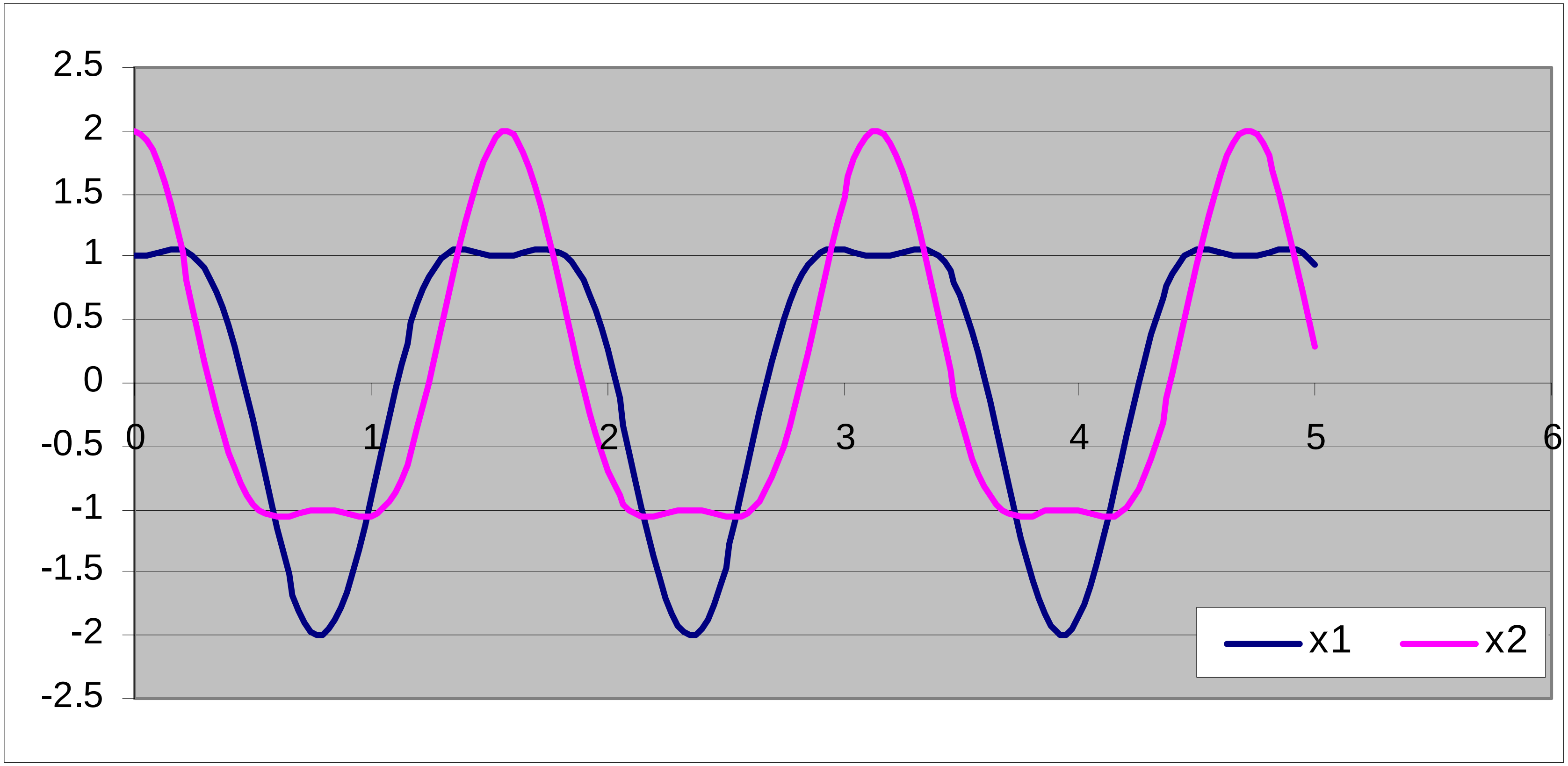
# پاسخ

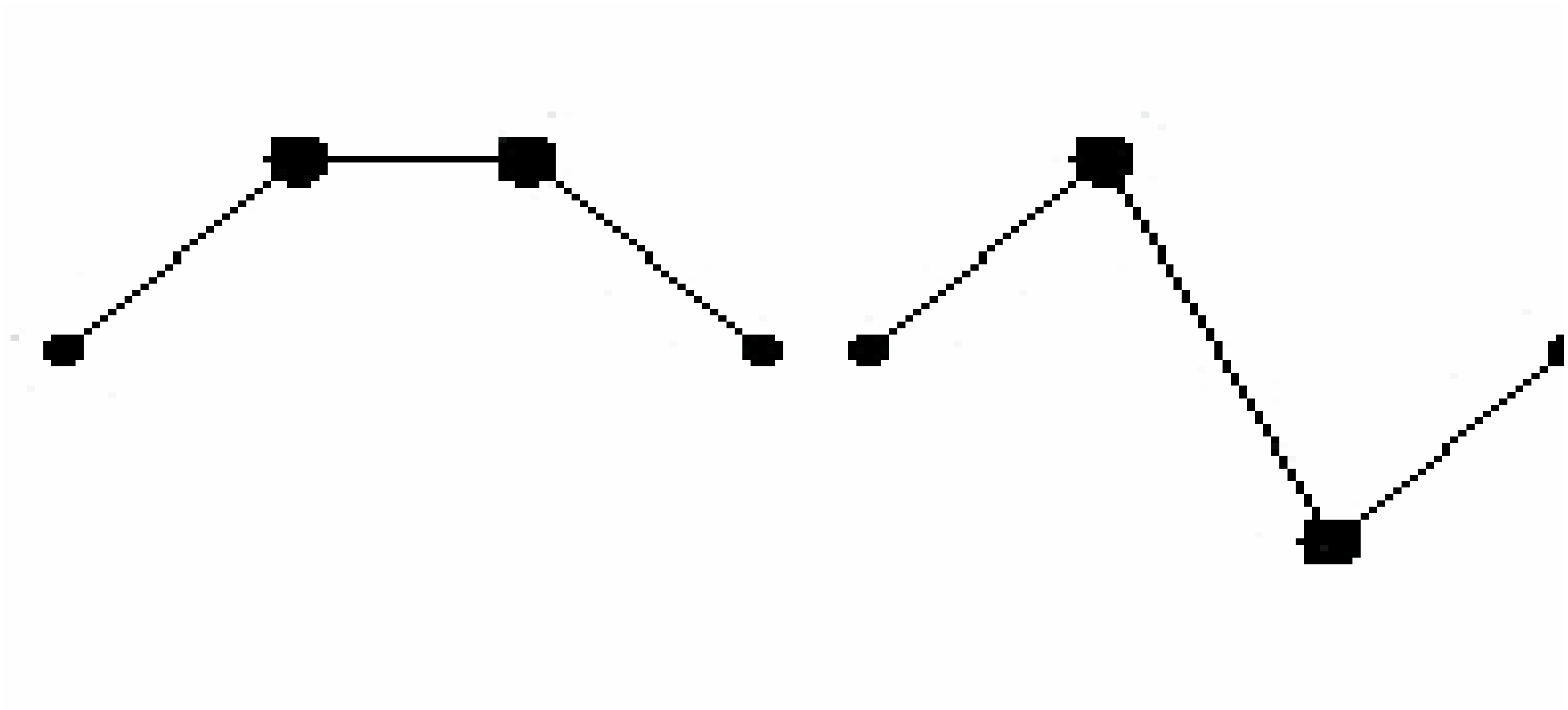
- با قرار دادن مقادیر ثابت:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1.5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(4t+\pi/2) + 0.5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(8t+\pi/2)$$

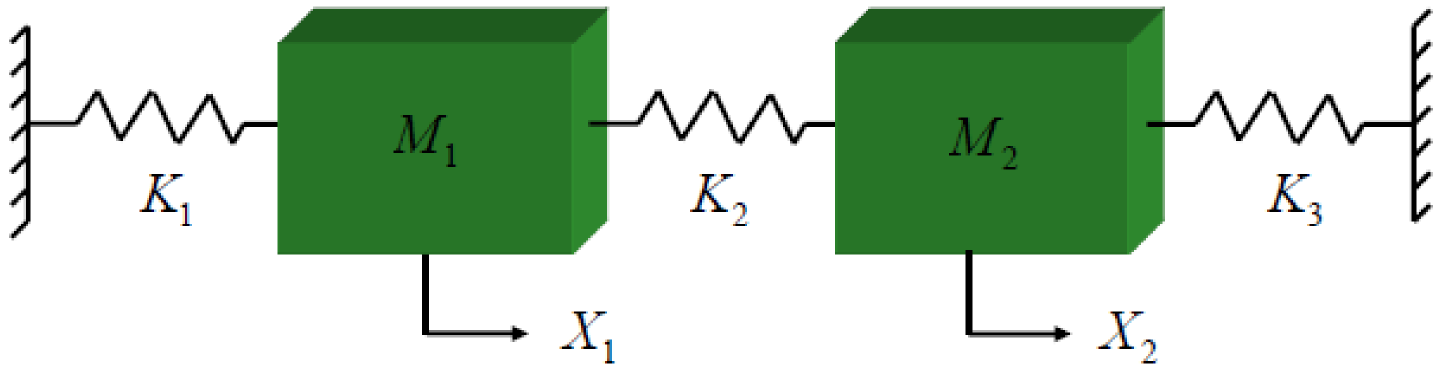
$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}\cos(4t) + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}\cos(8t)}$$

# نمودار پاسخ





# 2 DOF Free Vibration




**Given:**

$$x_1(0) = 1 \qquad \dot{x}_1 = 0$$

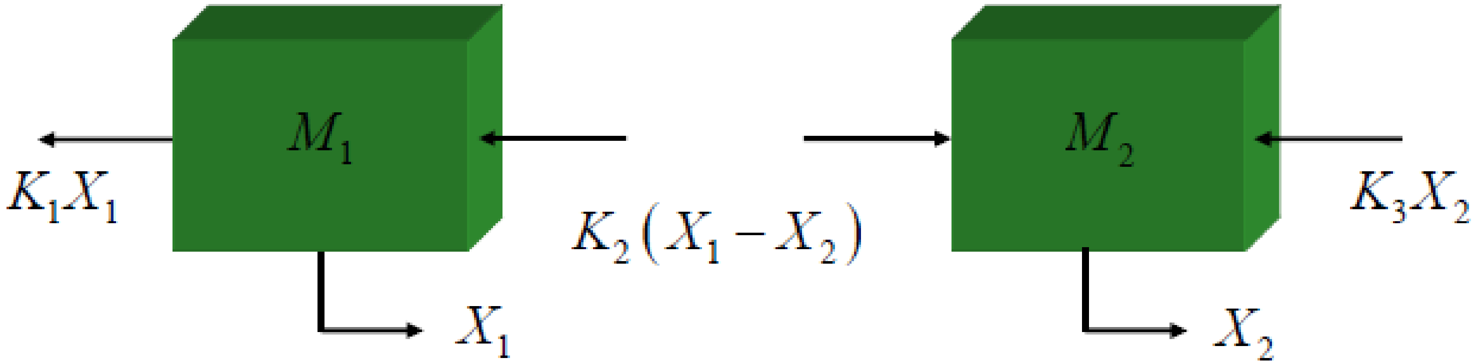
$$x_2(0) = 2 \qquad \dot{x}_2 = 0$$

Determine:

$$x_1(t) = ?$$

$$x_2(t) = ?$$

# 2 DOF Free Vibration: FBDs & EOM




**Dynamic Equilibrium:**

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = 0$$

**Matrix Form:**

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# 2 DOF Free Vibration: Solution

**Assume a Solution:**

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi)$$

**Substitution:**

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Rearranging:**

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# 2 DOF Free Vibration: Solution

Let $\lambda = \omega^2$ and divide by $\sin(\omega t + \phi)$ :

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\lambda & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - m_2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**For a non-trivial solution:** $\det \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\lambda & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - m_2\lambda \end{bmatrix} = 0$

**Using numerical values:** $k_1 = 10 \quad k_2 = 40 \quad k_3 = 5 \quad m_1 = 2 \quad m_2 = 5$

$$\det \begin{bmatrix} 50 - 2\lambda & -40 \\ -40 & 45 - 5\lambda \end{bmatrix} = 0$$

# 2 DOF Free Vibration: Eigen Solution

The solution becomes:

$$(50-2\lambda)(45-5\lambda)-1600=0 \Longrightarrow 10\lambda^2-340\lambda+650=0$$

where: $\lambda_1 = 2.03$ and $\lambda_2 = 31.96$

Therefore: $\omega_1 = 1.43$ and $\omega_2 = 5.65 \; \dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$

This means that there are two solutions and the total solution is the superposition of each solution.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

# 2 DOF Free Vibration: Mode Shapes

**Using** $\lambda_1 = 2.03$ ➡ $$\begin{bmatrix} 50-2(2.03) & -40 \\ -40 & 45-2(2.03) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(50-2(2.03)\right)X_1 - 40X_2 = 0$$

$$X_1 = 0.87X_2$$

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix}$$ **mode shape for 1st natural frequency**

# 2 DOF Free Vibration: Mode Shapes

**Using** $\lambda_2 = 31.97 \rightarrow \begin{bmatrix} 50-2(31.97) & -40 \\ -40 & 45-2(31.97) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\left(50-2(31.97)\right)X_1 - 40X_2 = 0$$

$$X_1 = -2.87X_2$$

$$\{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.35 \end{Bmatrix}$$ **mode shape for 2nd natural frequency**

# 2 DOF Free Vibration: Free Vibration Solution

– Therefore the free vibration solution becomes:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} A\{X\}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\{X\}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} A\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.35 \end{Bmatrix}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$A,\ \phi_1,\ B,\ \phi_2$ **are determined from the initial conditions.**

## 2 DOF Free Vibration: Initial Conditions

$$x_1(t) = AX_{11}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + BX_{12}\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = AX_{21}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + BX_{22}\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\dot{x}_1(t) = A\omega_1 X_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\omega_2 X_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\dot{x}_2(t) = A\omega_1 X_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\omega_2 X_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

**Using**

$$x_1(0) = 1 \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 2 \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$A = 1.566 \qquad B = -0.566$$

# 2 DOF Free Vibration: Initial Conditions

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

**Therefore:**

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 1.566 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix} \sin\left(1.43t + \frac{\pi}{2}\right) - 0.566 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.35 \end{Bmatrix} \sin\left(5.65t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.566 \\ 1.801 \end{Bmatrix} \cos(1.43t) + \begin{Bmatrix} -0.566 \\ 0.1981 \end{Bmatrix} \cos(5.65t)$$

# 2 DOF Free Vibration: Initial Conditions

**Eigen-solution method**

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 50 & -40 \\ -40 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

eigenvalues $\lambda_1 = 2.033 \qquad \lambda_2 = 31.96$

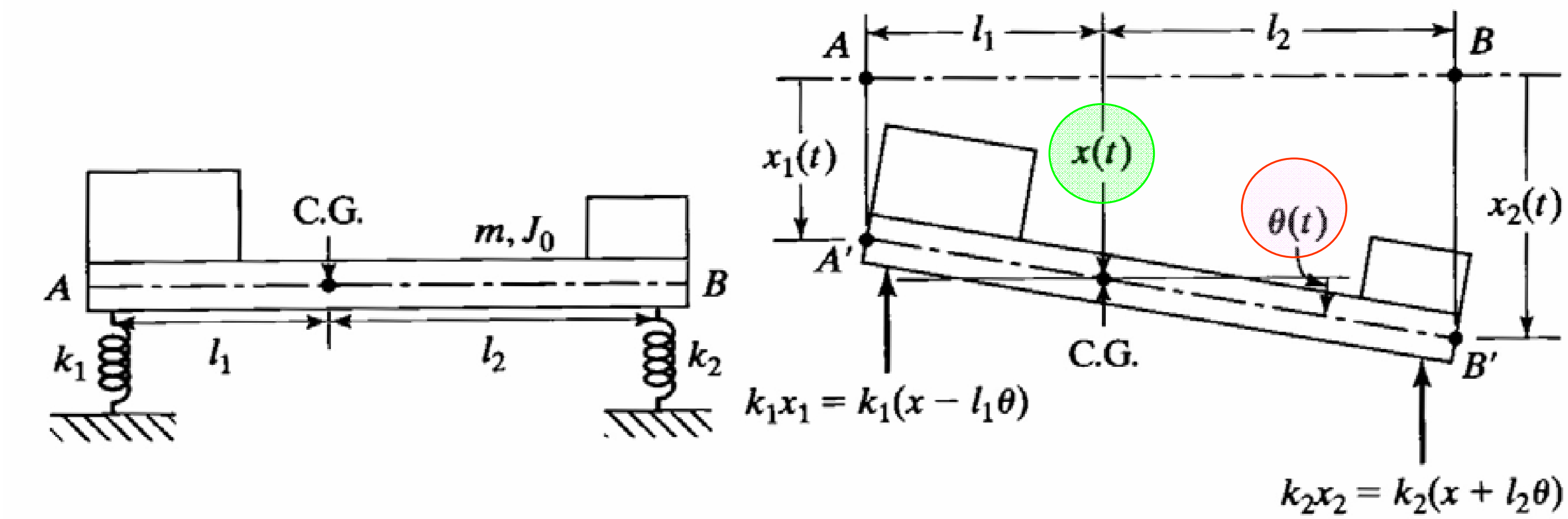
natural frequencies $\omega_1 = 1.426$ rad/sec $\omega_2 = 5.654$ rad/sec

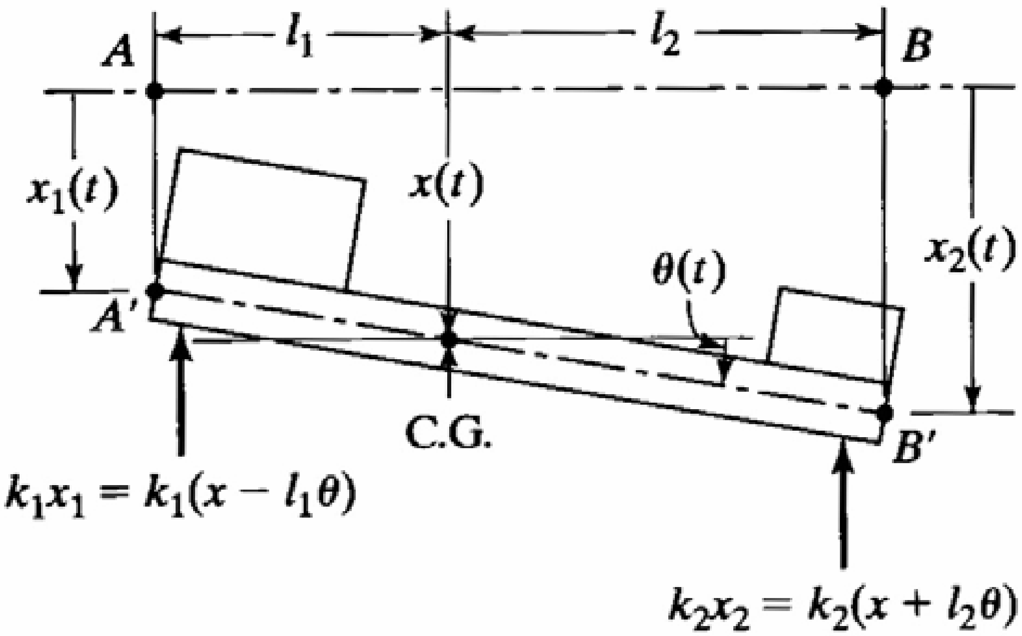
**Eigenvectors (mode shapes)**

$$\begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .3411 \\ .3917 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .6194 \\ -.216 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -.348 \end{Bmatrix}$$

# وابستگی مختصات و مختصات اصلی
# *Coordinate coupling and principal coordinates*

- مختصات تعمیم یافته مجموعه $n$ مختصات استفاده شده برای توصیف حرکت یک سیستم می باشند.
- معادله حرکت یک ماشین تراش با استفاده از مختصات $x(t)$ و $\theta(t)$






# معادله حرکت:

$$+\downarrow \sum F = ma_G \;\Rightarrow\; -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) = m\ddot{x}$$

$$+\sum M_G = J_G\ddot{\theta} \;\Rightarrow\; k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 = J_G\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)\,x + (k_2l_2 - k_1l_1)\,\theta &= 0 \\ J_G\ddot{\theta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta &= 0 \end{aligned}}$$

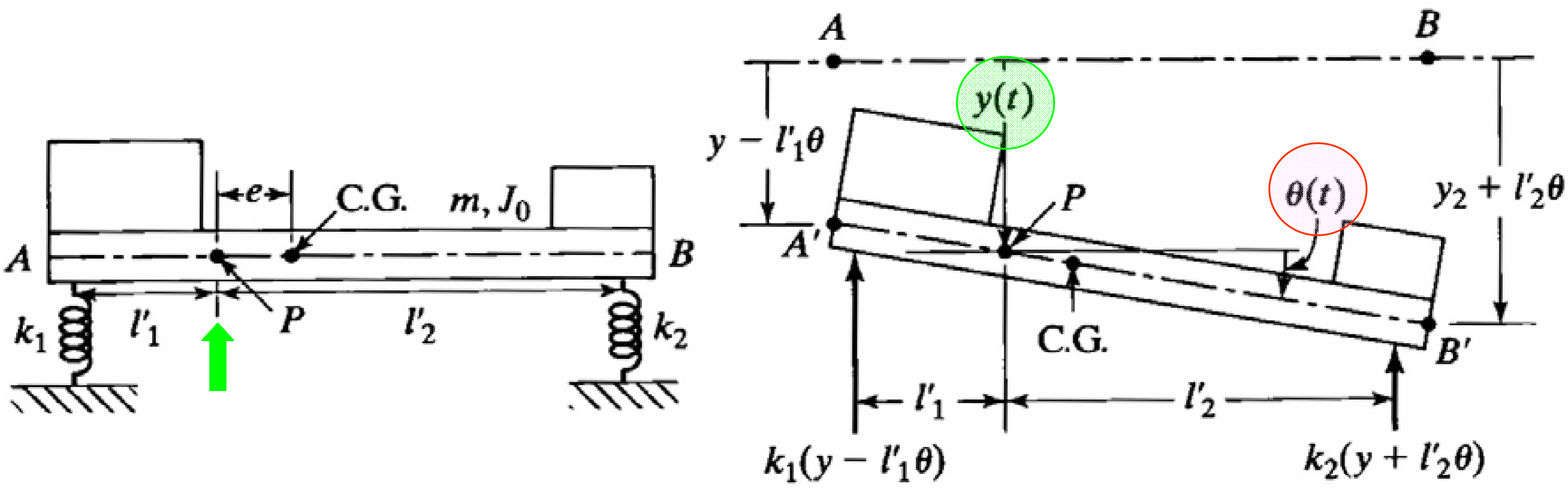
# شکل ماتریسی و وابستگی مختصات

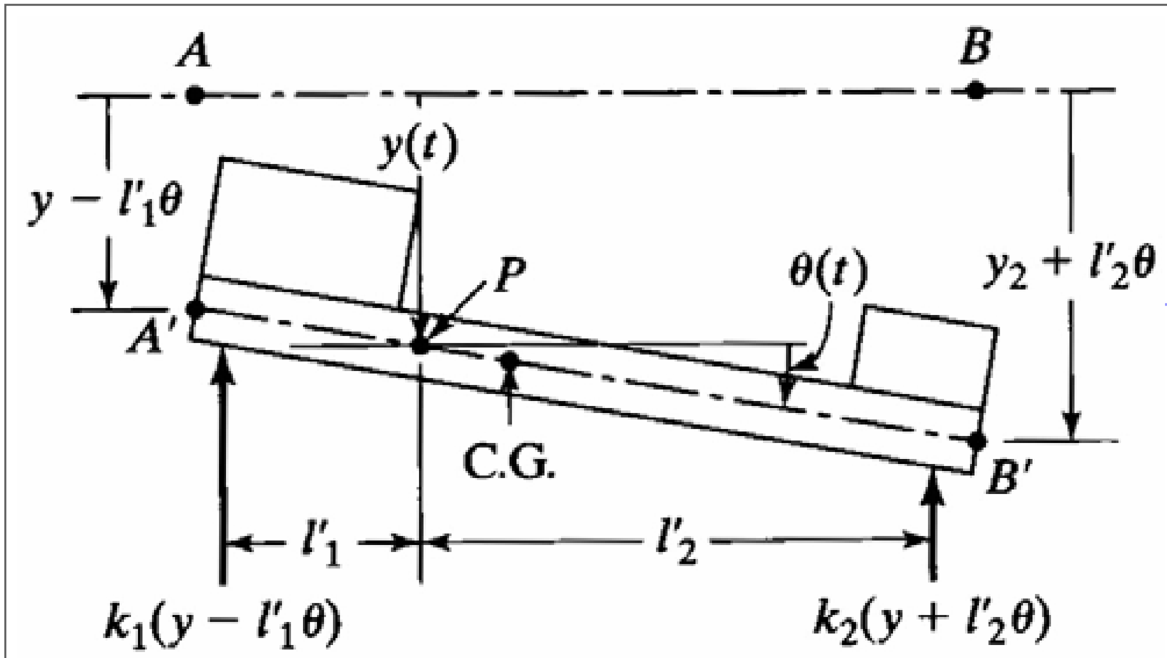
$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & k_2l_2-k_1l_1 \\ k_2l_2-k_1l_1 & k_1l_1^2+k_2l_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ماشین تراش دارای ارتعاش دورانی و جابجائی قائم مرکز جرم بطور همزمان است. مگر اینکه اعضاء قطری ماتریس سختی صفر باشند.
- این وابستگی دو مختصه از طریق نیروی فنر یا نیروهای استاتیکی است لذا وابستگی را استاتیکی گویند.
- اگر ماتریس سختی غیر قطری باشد وابستگی استاتیکی است.

# معادله حرکتی دیگر

- حال معادله حرکت برای جابجائی و دوران حول نقطه ای مانند $P$ نوشته می شود.
- مختصات تعمیم یافته $y(t)$ و $\theta(t)$ است.






## دیاگرام آزاد

$$+\downarrow \sum F = ma_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_P + \vec{a}_{G/P}$$

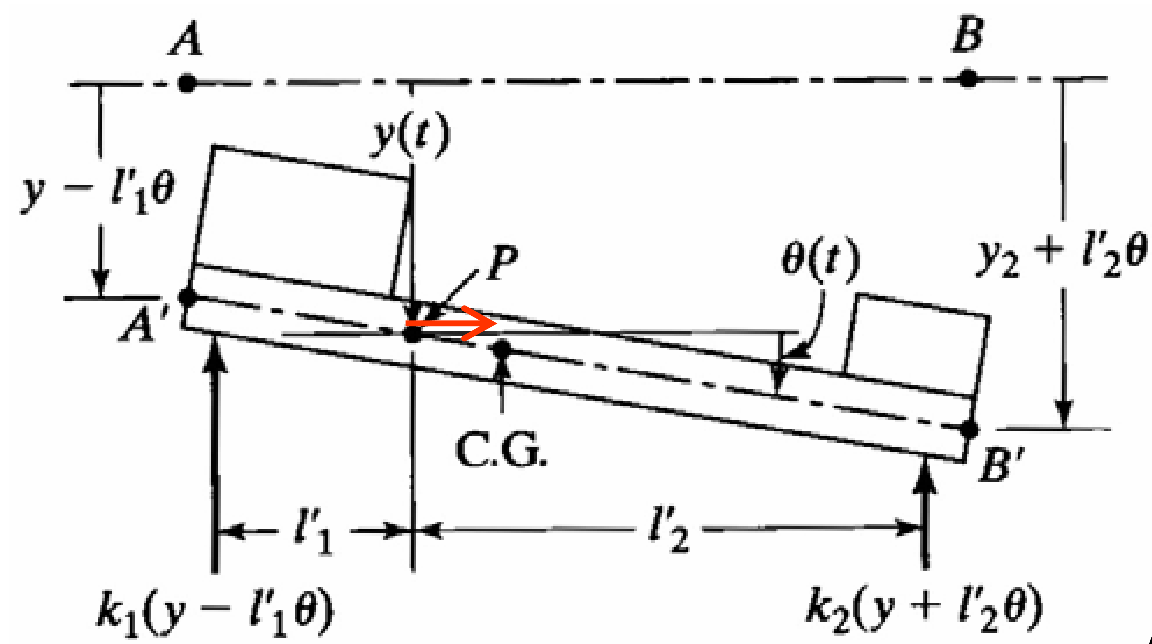
- مؤلفه های شتاب در راستای $y$:

$$\left.\vec{a}_G\right)_y = \ddot{y} + e\ddot{\theta}$$

$$+\downarrow \sum F = \left.ma_G\right)_y$$

$$-k_1\left(y - l_1'\theta\right) - k_2\left(y + l_2'\theta\right) = m\ddot{y} + me\ddot{\theta}$$

$$\boxed{m\ddot{y} + me\ddot{\theta} + \left(k_1 + k_2\right)y + \left(k_2 l_2' - k_1 l_1'\right)\theta = 0}$$




# دیاگرام آزاد

$\vec{\rho}_G$

$\vec{a}_P = \ddot{y}$

$$\vec{\rho}_G \times m\vec{a}_P = me\ddot{y}$$

$$+\sum M_P = J_P\ddot{\theta} + \vec{\rho}_G \times m\vec{a}_P$$

$$k_1(y - l_1'\theta)l_1' - k_2(y + l_2'\theta)l_2' = J_P\ddot{\theta} + me\ddot{y}$$

$$\boxed{me\ddot{y} + J_P\ddot{\theta} + (k_2\, l_2' - k_1\, l_1')y + (k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2)\theta = 0}$$

# شکل ماتریسی معادله حرکت

$$m\ddot{y} + me\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)\,y + (k_2 l_2' - k_1 l_1')\,\theta = 0$$

$$me\ddot{y} + J_P\ddot{\theta} + (k_2 l_2' - k_1 l_1')\,y + (k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2)\,\theta = 0$$

$$\begin{pmatrix} m & me \\ me & J_P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2' - k_1 l_1' \\ k_2 l_2' - k_1 l_1' & k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- در حالت کلی این معادله دارای وابستگی مختلط (هم استاتیکی و هم دینامیکی) است.
- اگر اعضاء قطری ماتریس سختی صفر باشد، وابستگی استاتیکی حذف می شود.

# ادامه

- از طرفی:

$$l_1' = l_1 - e \qquad l_2' = l_2 + e$$

$$k_2 l_2' - k_1 l_1' = 0 \Rightarrow k_2 l_2 - k_1 l_1 + e(k_1 + k_2) = 0 \Rightarrow e = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 + k_2}$$

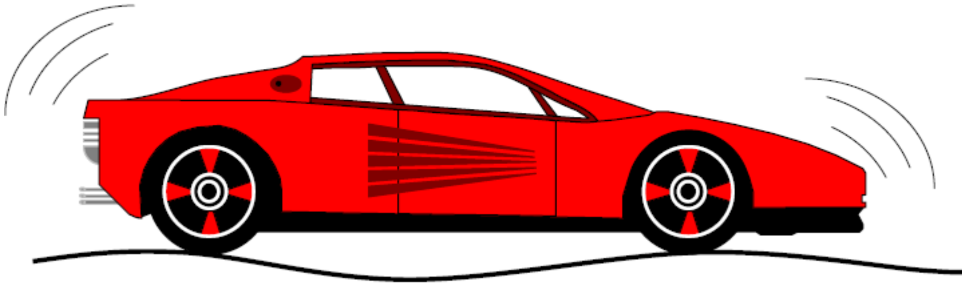
- در نتیجه:

$$\boxed{\begin{pmatrix} m & me \\ me & J_P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

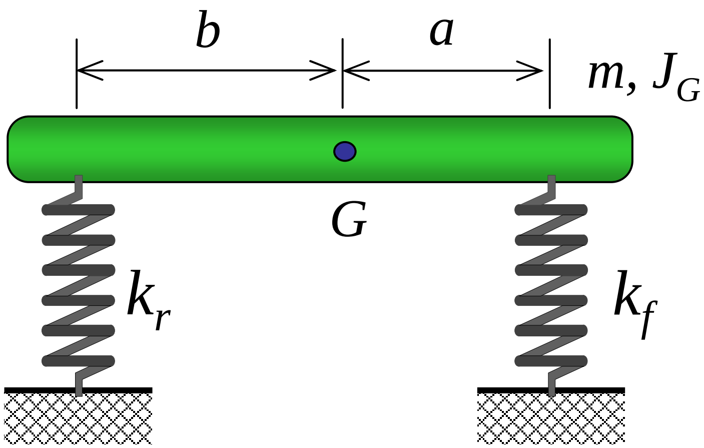
- این سیستم فقط دارای وابستگی دینامیکی است چون ماتریس جرم غیرقطری است

# مختصات اصلی یا طبیعی

- مختصاتی که در آن معادلات مستقل از هم باشند یا کوپلینگ نداشته باشند، مختصات اصلی یا طبیعی است.



# مثال:




- مدل اتومبیلی دارای مشخصات زیر است:
- $m$=1000kg
- شعاع ژیراسیون $k_G$=0.9
- $a$=1.0 m
- $b$=1.5 m
- $k_f$=18 kN/m
- $k_r$=22 kN/m
- ممان اینرسی حول مرکز جرم: $J_G=mk_G^2=1000(0.9)^2=810\ \mathrm{kgm^2}$

# معادله حرکت:

- باتوجه به قبل و استفاده از مختصات $x(t)$ و $\theta(t)$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_f+k_r & k_r b-k_f a \\ k_r b-k_f a & k_f a^2+k_r b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 810 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 40000 & 15000 \\ 15000 & 67500 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- با فرض جوابی:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sin(\omega t+\phi) \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\left(-\omega^2 \sin(\omega t+\phi)\right)$$

# حل:

- در نتیجه:

$$\begin{pmatrix} 40000-1000\omega^2 & 15000 \\ 15000 & 67500-810\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 40000-1000\omega^2 & 15000 \\ 15000 & 67500-810\omega^2 \end{vmatrix}=\left(40000-1000\omega^2\right)\left(67500-810\omega^2\right)-15000^2=0$$

$$8.1\times10^5\,\omega^4-999\times10^5\,\omega^2+24750\times10^5=0$$

$$8.1\omega^4-999\omega^2+24750=0$$

$$\omega_{1,2}^2=\frac{999\pm\sqrt{999^2-4\times8.1\times24750}}{2\times8.1}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1^2=34.331\Rightarrow\omega_1=5.859\,\text{rad/s}\\ \omega_2^2=89.002\Rightarrow\omega_2=9.434\,\text{rad/s}\end{cases}$$

# حل:

- برای $\omega_1^2=34.331$:

$$\begin{pmatrix} 40000-1000\times 34.331 & 15000 \\ 15000 & 67500-810\times 34.331 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5669 & 15000 \\ 15000 & 39692 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1^1=-\frac{15000}{5669}X_2^1=-\frac{39692}{15000}X_2^1=-2.646X_2^1$$

$$\begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2.646 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha \qquad \Rightarrow \frac{X_1^1}{X_2^1}=-2.646$$

# حل:

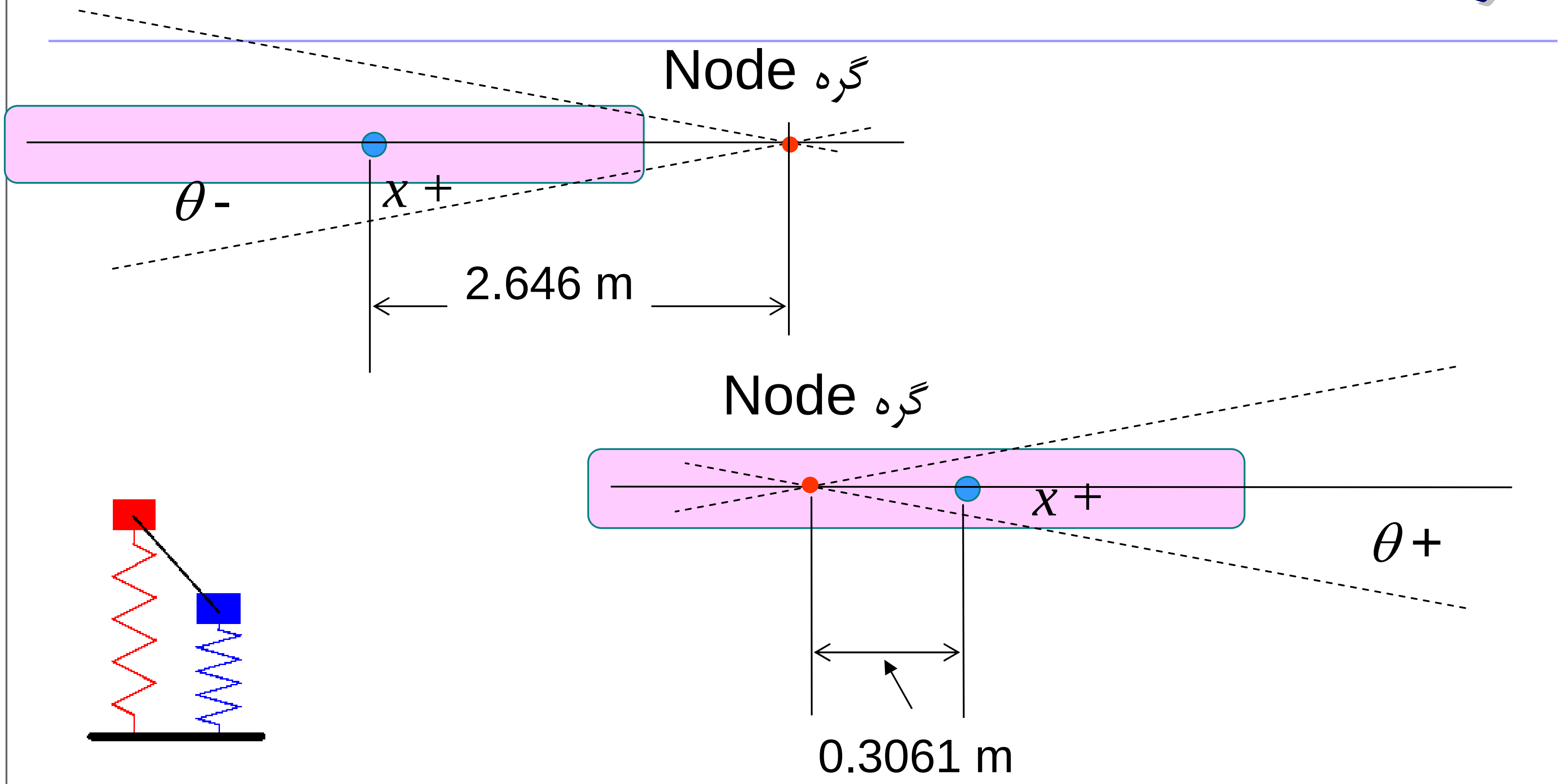
- برای $\omega_2^2=89.001$:

$$\begin{pmatrix} 40000-1000\times 89.002 & 15000 \\ 15000 & 67500-810\times 89.002 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -49002 & 15000 \\ 15000 & -4591.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow X_1^2=\frac{15000}{49002}X_2^2=\frac{4591.6}{15000}X_2^2=0.3061X_2^2$$

$$\begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.3061 \\ 1 \end{pmatrix}\beta \qquad \Rightarrow \frac{X_1^2}{X_2^2}=0.3061$$

# گره



# ارتعاشات مکانیکی ۱۱
# ارتعاشات اجباری دو درجه آزادی

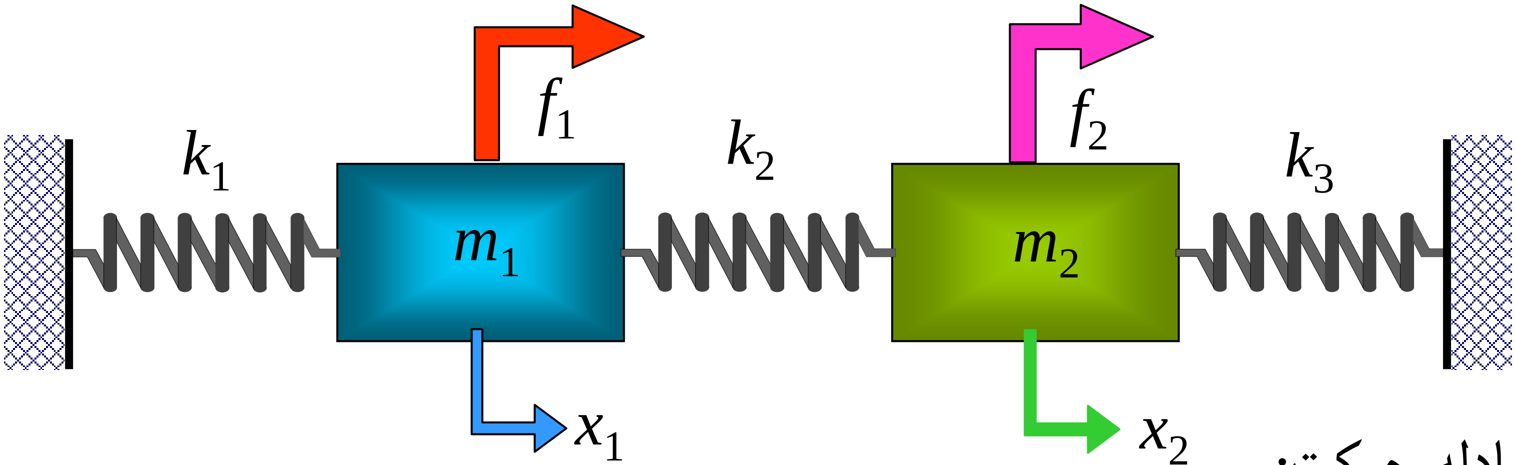
سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

# نیروی اجباری

- چنانچه برروی سیستم ارتعاشی دودرجه آزادی نیروهای $F_1$ و $F_2$ اعمال گردد:




- معادله حرکت:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

# نیروی اجباری هارمونیک

- در حالت کلی حل این معادله کار مشکلی است.
- درصورتی که نیروهای وارده هارمونیک و با یک فرکانس ولی دامنه های مختلف باشند راحت حل می شوند.
- درغیر اینصورت لازم است از برهمنهش جوابها استفاده کرد
- لذا نیرو و پاسخ آن عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

# حل

- با جایگزینی در معادله حرکت:

$$\left\{-\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}e^{i\omega t}=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}e^{i\omega t}$$

- با ساده کردن معادله:

$$\left\{-\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

# حل

- با تعریف ماتریس امپدانس یا سیستم:

$$[Z(\omega)] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix}$$

- که $[Z(\omega)]$ را ماتریس امپدانس گویند:

$$\boxed{[Z(\omega)] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}}$$

- که برای بدست آوردن دامنه پاسخ:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = [Z(\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{\text{adjoint}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

# بدست آوردن معکوس ماتریس

$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{\text{adjoint}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} = \frac{\begin{pmatrix} k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 \end{pmatrix}}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

- در نتیجه

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = [Z(\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

# ادامه

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) F_1 + k_2 F_2 \\ k_2 F_1 + \left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right) F_2 \end{pmatrix}}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

# روشهای دیگر بدست آوردن دامنه

- الف) روش کرامر

$$[Z(\omega)]=\begin{pmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega^2 m_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix} F_1 & -k_2 \\ F_2 & k_2+k_3-\omega^2 m_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]}=\frac{F_1\left(k_2+k_3-\omega^2 m_2\right)+k_2F_2}{\left(k_1+k_2-\omega^2 m_1\right)\left(k_2+k_3-\omega^2 m_2\right)-k_2^2}$$

$$X_2=\frac{\begin{vmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & F_1 \\ -k_2 & F_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]}=\frac{F_2\left(k_1+k_2-\omega^2 m_1\right)+k_2F_1}{\left(k_1+k_2-\omega^2 m_1\right)\left(k_2+k_3-\omega^2 m_2\right)-k_2^2}$$

# روش کرامر

$$[Z(\omega)] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -k_2 \\ F_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]} = \frac{F_1\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) + k_2 F_2}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & F_1 \\ -k_2 & F_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]} = \frac{F_2\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right) + k_2 F_1}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

# ماتریس تابع پاسخ فرکانسی FRF

- اگر ماتریس $H(\omega)$ بصورت معکوس ماتریس امپدانس تعریف شود:

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = [H(\omega)]\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}F_1 + h_{12}F_2 \\ h_{21}F_1 + h_{22}F_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = h_{11}F_1 + h_{12}F_2$$
$$X_2 = h_{21}F_1 + h_{22}F_2$$

# تابع پاسخ فرکانسی FRF

- تابع پاسخ فرکانسی FRF جداگانه:

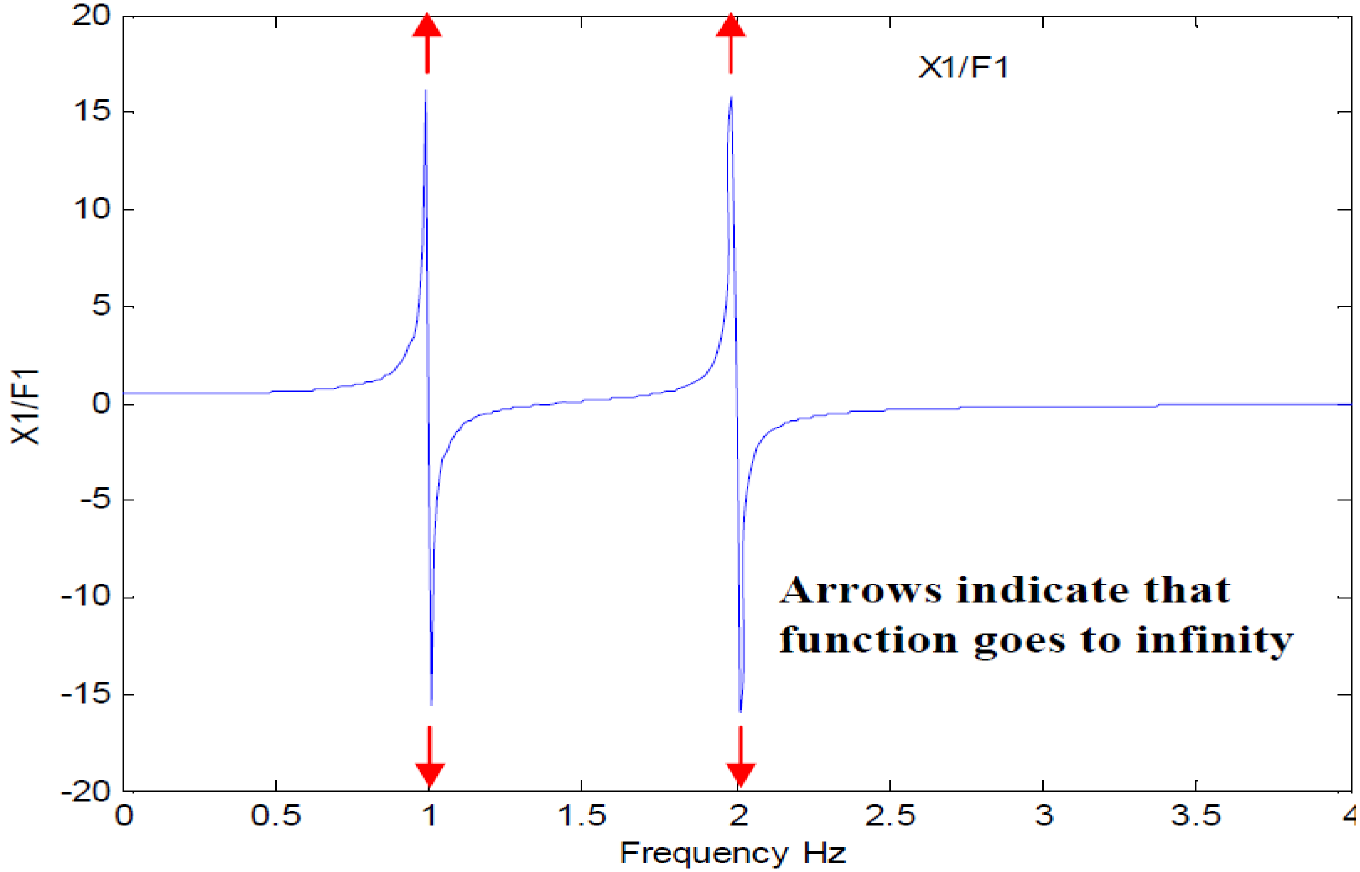
$$\frac{X_1}{F_1} = h_{11} = \frac{k_2 + k_3 - \omega^2 m_2}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

$$\frac{X_1}{F_2} = h_{12} = \frac{k_2}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

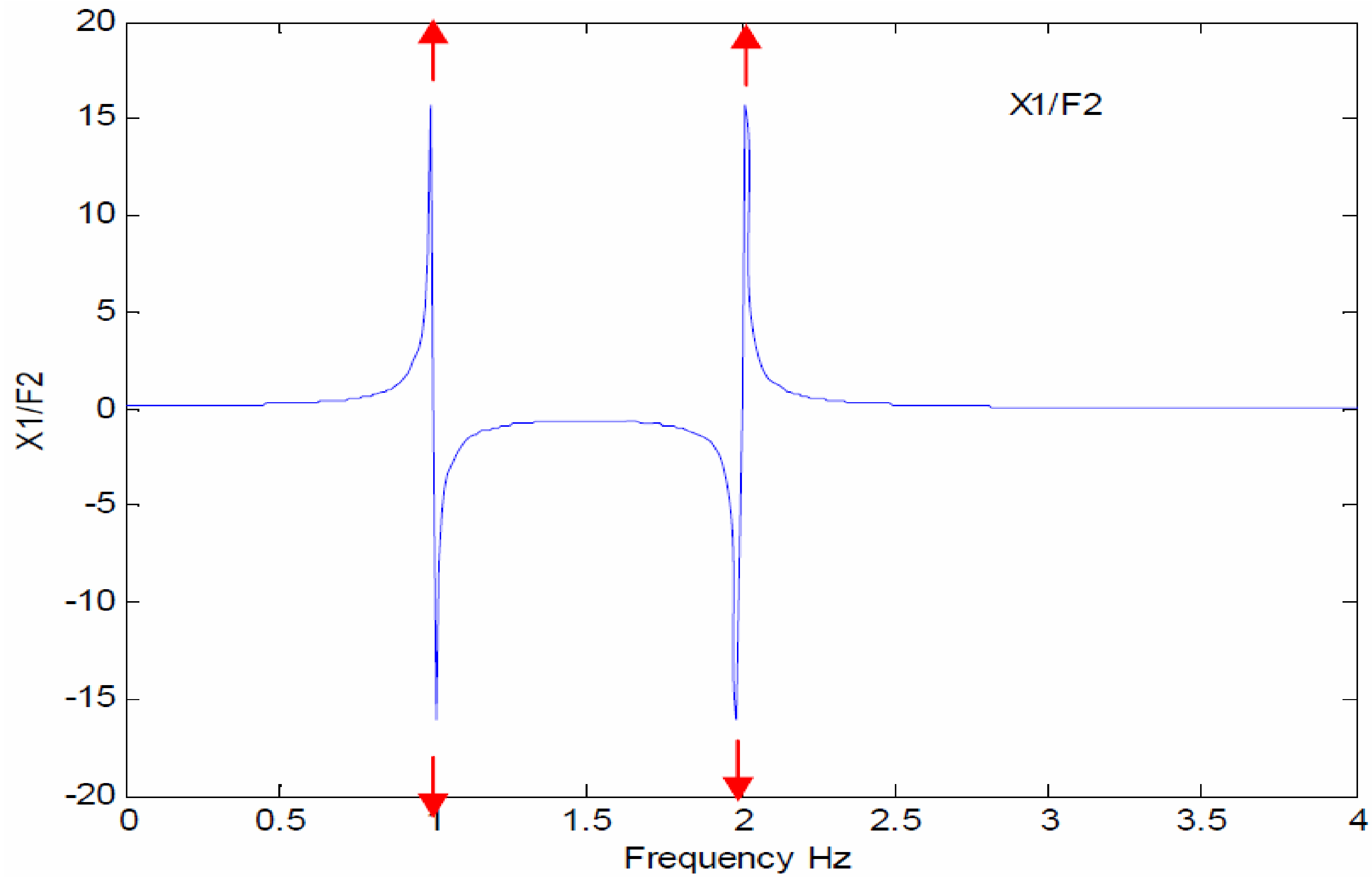
$$\frac{X_2}{F_1} = h_{21} = \frac{k_2}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

$$\frac{X_2}{F_2} = h_{22} = \frac{k_1 + k_2 - \omega^2 m_1}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2}$$

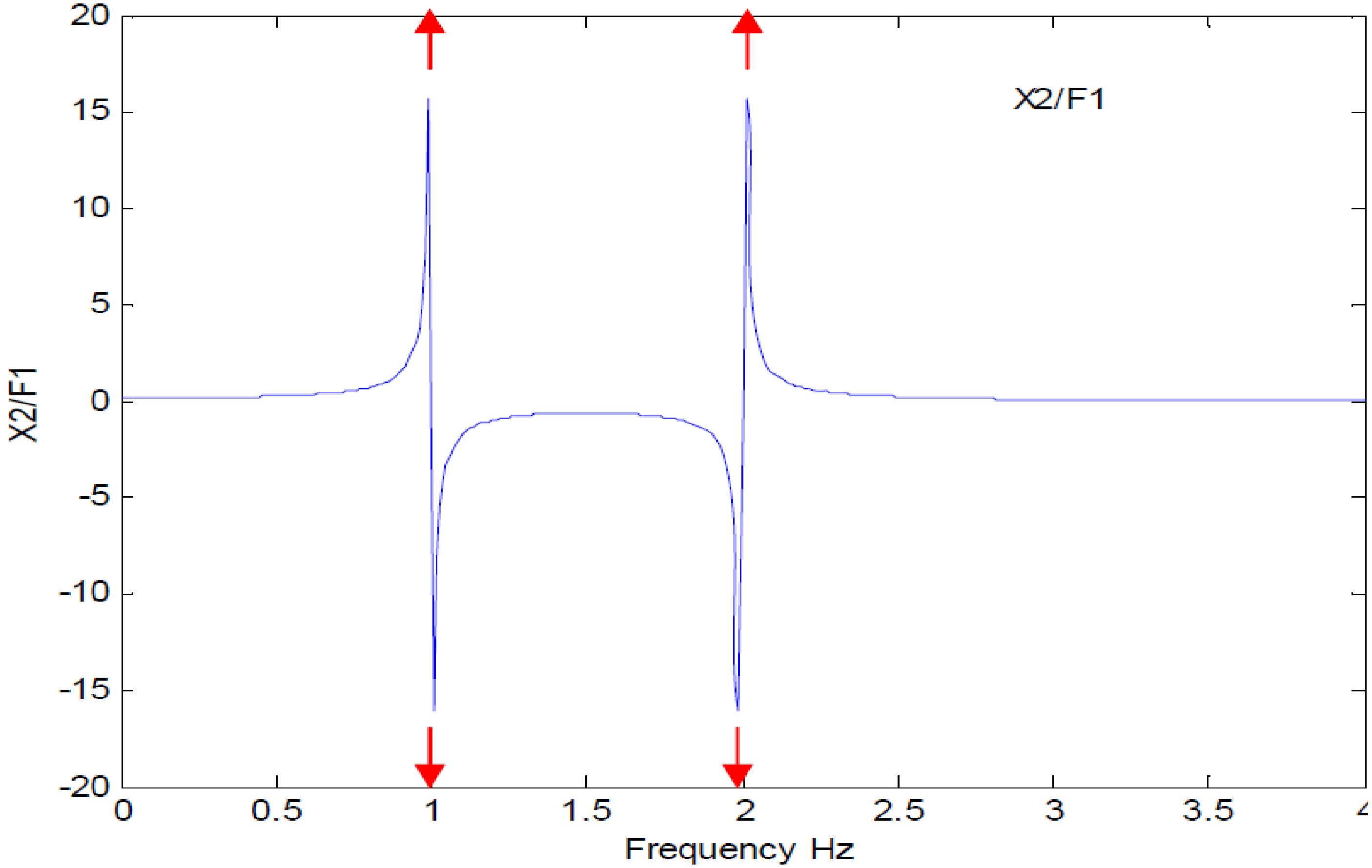
# تابع پاسخ فرکانسی FRF ($h_{11}$)



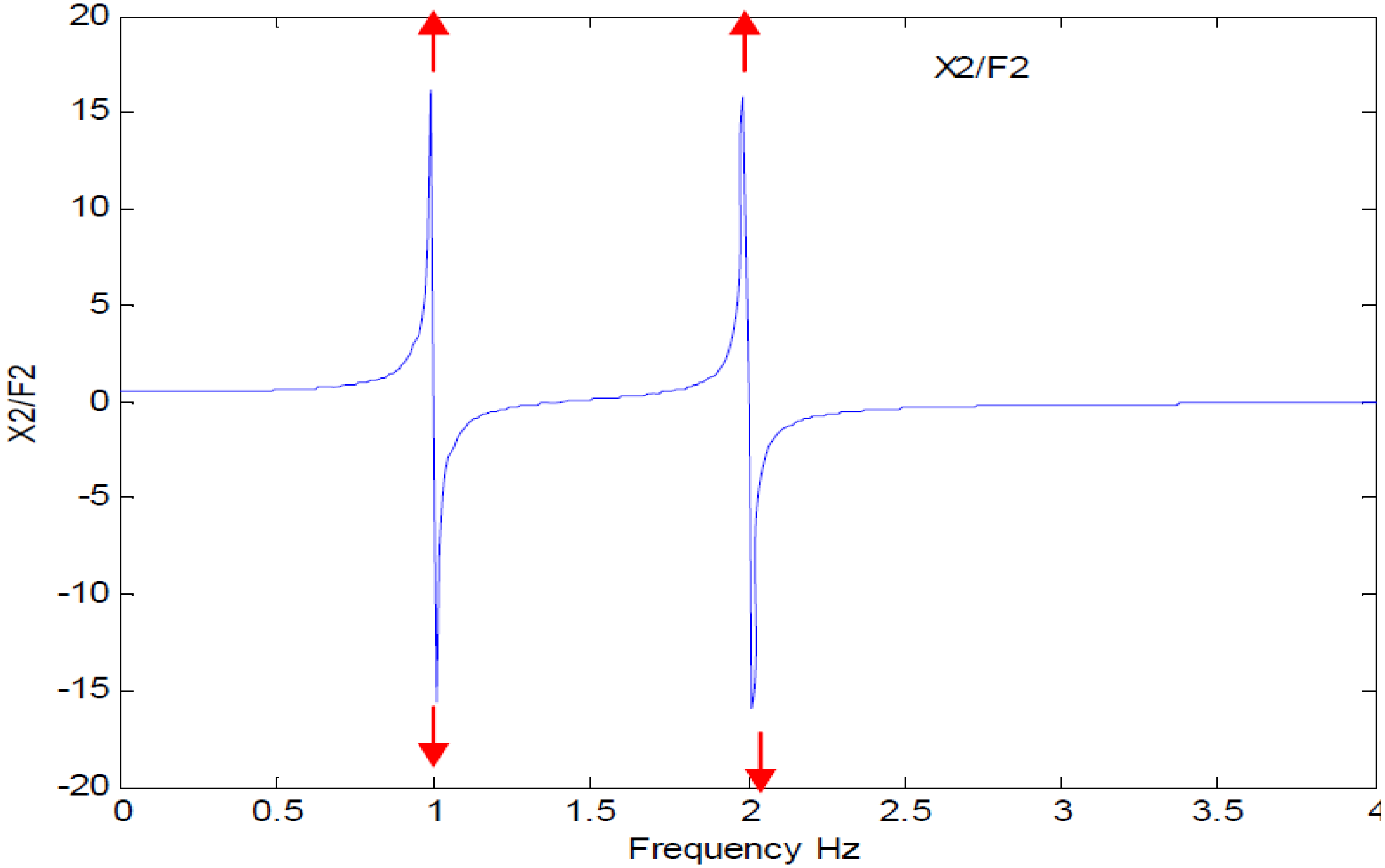
# تابع پاسخ فرکانسی FRF $(h_{12})$



# تابع پاسخ فرکانسی FRF ($h_{21}$)



# تابع پاسخ فرکانسی FRF $(h_{22})$



# 2 DOF Forced Vibration: Damping

**If damping is considered the equations of motion become:**

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

**And if the forcing functions are harmonic functions (as before) the solution is:**

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

# 2 DOF Forced Vibration: FRF w/ Damping

**Define:** $$\left[Z(\omega)\right]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}+j\omega\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

**Where** $\left[Z(\omega)\right]$ **is called the** ***system*** **or** ***impedance*** **matrix.**

**Then the response** $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$ **can be solved for as:**

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\left[Z(\omega)\right]^{-1}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

**Where** $\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\left[H(\omega)\right]$ **is the Frequency Response Function Matrix**

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\left[H(\omega)\right]\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

# 2 DOF Forced Vibration: FRF w/ Damping

**The FRF matrix can be written as:**

$$\left[H(\omega)\right]=\frac{adj\left[Z(\omega)\right]}{\det\left[Z(\omega)\right]}$$

**This is expanded to:**

$$\left[H(\omega)\right]=\frac{\begin{bmatrix} k_{22}-\omega^2 m_{22}+j\omega c_{22} & -(j\omega c_{12}+k_{12}) \\ -(j\omega c_{21}+k_{21}) & k_{11}-\omega^2 m_{11}+j\omega c_{11} \end{bmatrix}}{\left(k_{11}-\omega^2 m_{11}+j\omega c_{11}\right)\left(k_{22}-\omega m_{22}+j\omega c_{22}\right)-\left(j\omega c_{12}+k_{12}\right)\left(j\omega c_{21}+k_{21}\right)}$$

**Therefore each response can be written as:**

$$X_1 = h_{11}F_1 + h_{12}F_2$$

$$X_2 = h_{21}F_1 + h_{22}F_2$$

# 2 DOF Forced Vibration: FRF w/ Damping

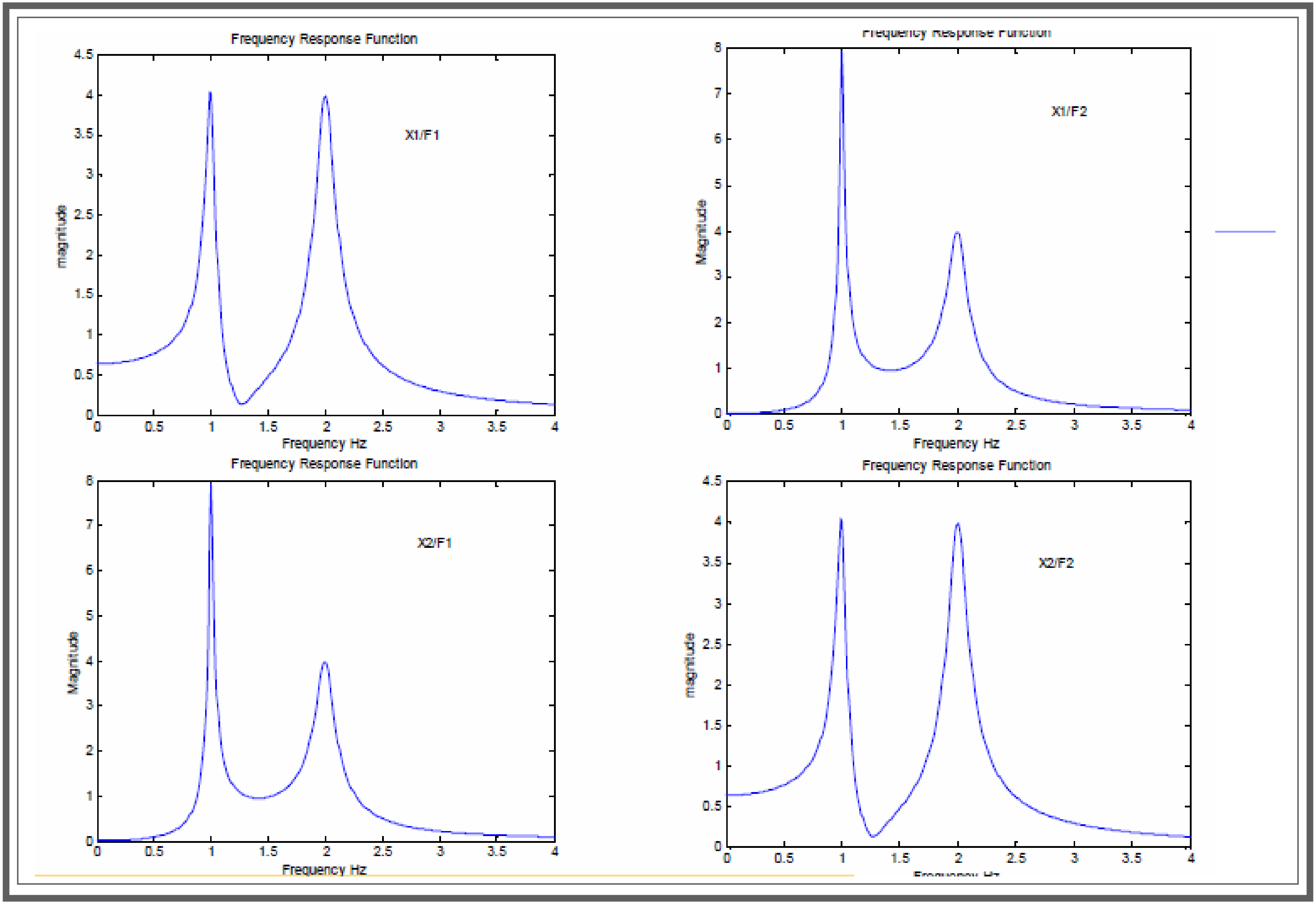
**The individual FRF's are defined as:**

$$\frac{X_1}{F_1} = h_{11} = \frac{\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) + j\omega c_{22}}{\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) - \left(j\omega c_{12} + k_{12}\right)\left(j\omega c_{21} + k_{21}\right)}$$

$$\frac{X_1}{F_2} = h_{12} = \frac{-\left(k_{12} + j\omega c_{12}\right)}{\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) - \left(j\omega c_{12} + k_{12}\right)\left(j\omega c_{21} + k_{21}\right)}$$

$$\frac{X_2}{F_1} = h_{21} = \frac{-\left(k_{21} + j\omega c_{21}\right)}{\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) - \left(j\omega c_{12} + k_{12}\right)\left(j\omega c_{21} + k_{21}\right)}$$

$$\frac{X_2}{F_2} = h_{22} = \frac{\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right) + j\omega c_{11}}{\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) - \left(j\omega c_{12} + k_{12}\right)\left(j\omega c_{21} + k_{21}\right)}$$

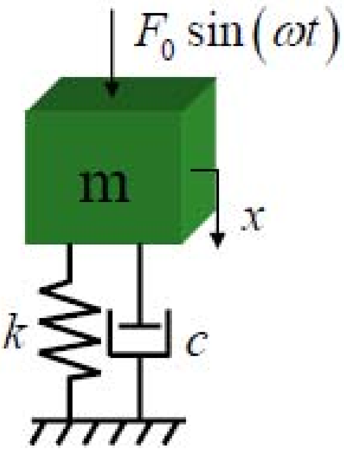

Frequency Response Function
X1/F1
magnitude
Frequency Hz
Frequency Response Function
X1/F2
Magnitude
Frequency Hz
Frequency Response Function
X2/F1
Magnitude
Frequency Hz
Frequency Response Function
X2/F2
magnitude

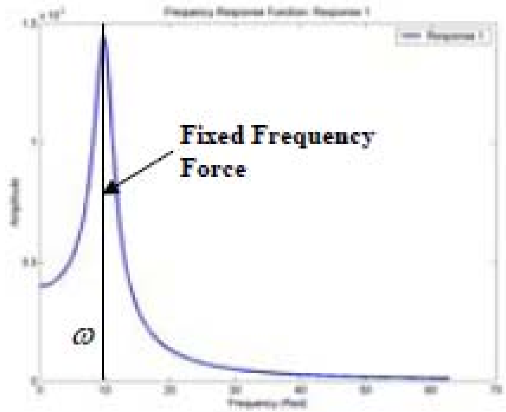
# جاذب ارتعاشی (لرزه گیر)
# *Vibration Absorbers*

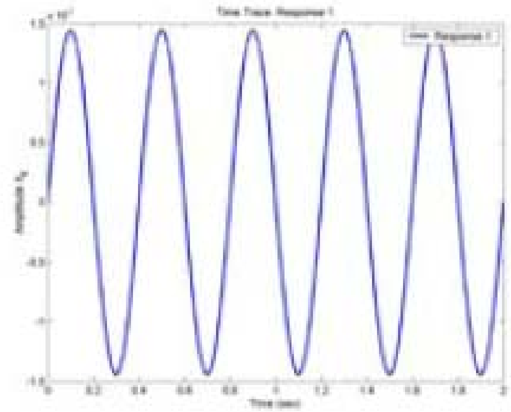
- ارتعاش زیاد را می توان:
  - از محیط اطراف **عایق** کرد
  - **کنترل** کرد

- راه حل:
  - کاهش تابع نیرو (میزان کردن)
  - قرار دادن عایق
  - جابجاکردن فرکانس تشدید (تغییر فرکانس تشدید)
  - افزایش ضریب میرائی
  - جاذب ارتعاشی

# Example: Fixed Frequency Force

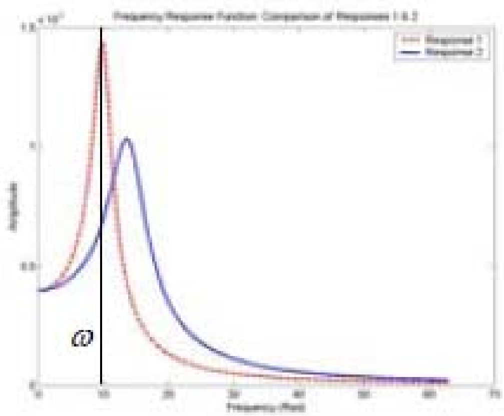


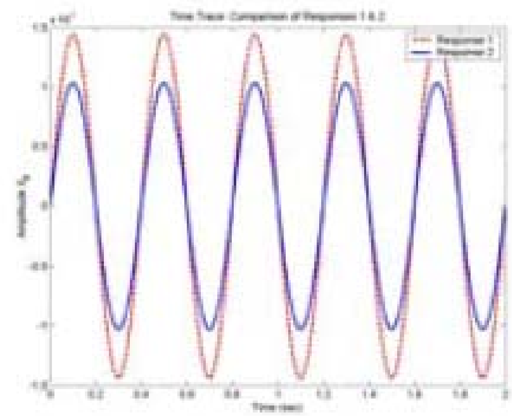



$X_m \sin(\omega t)$ $X_0$ = Amplitude (original)

Move Resonance

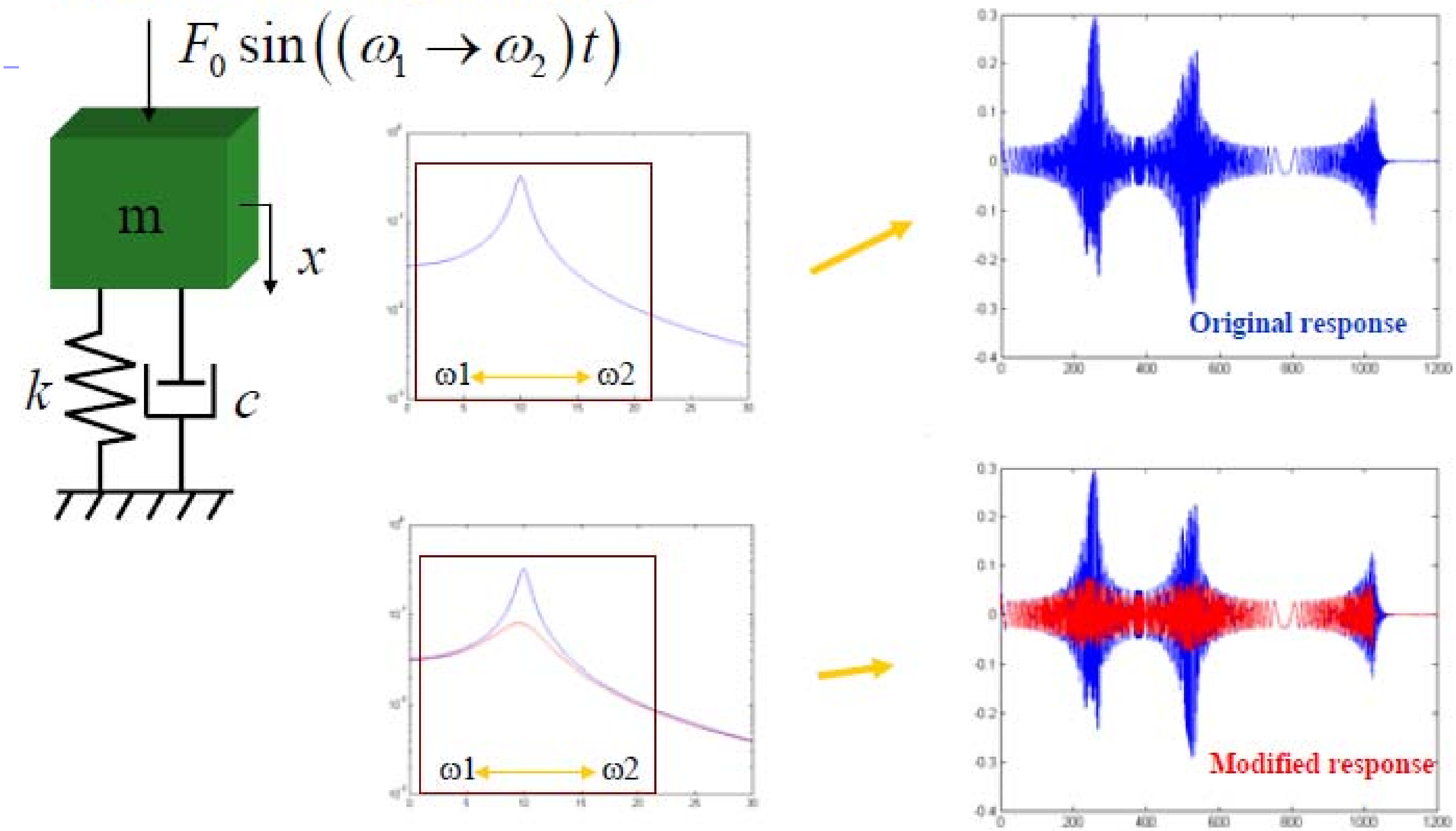



Amplitude Reduction



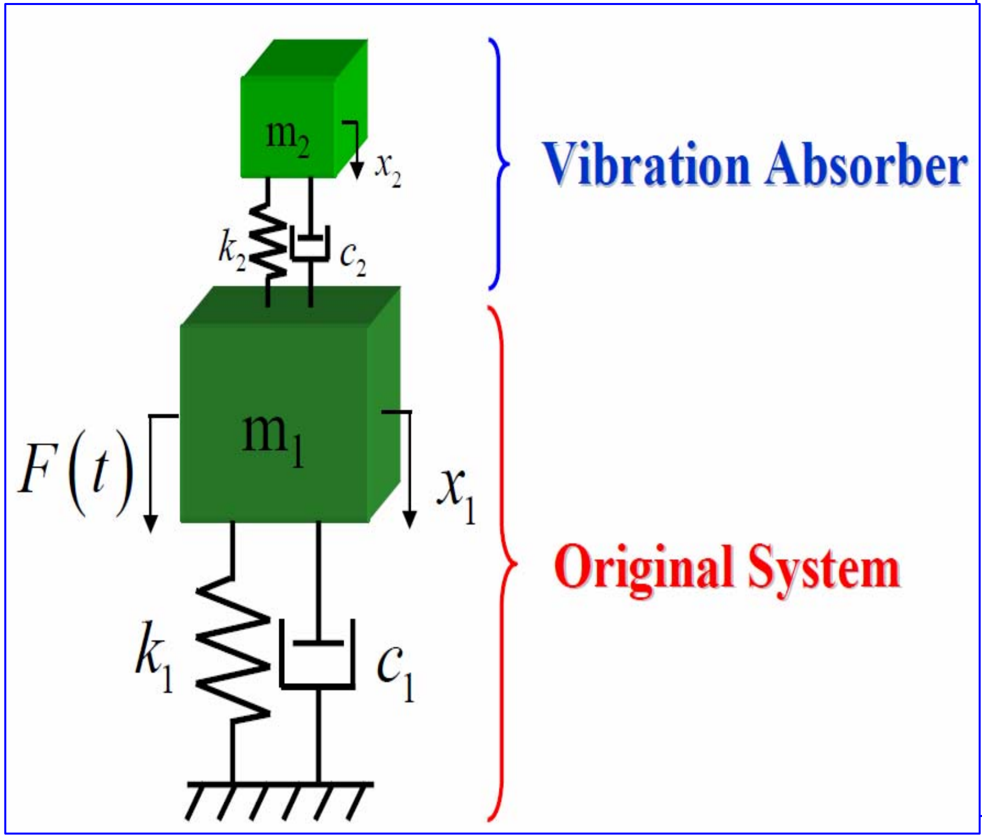
$X_m \sin(\omega t)$ $X_m$ = Amplitude (modified)

# Example: Moving or Broadband Force
## Effects of Adding Damping



# جاذبهای ارتعاشی

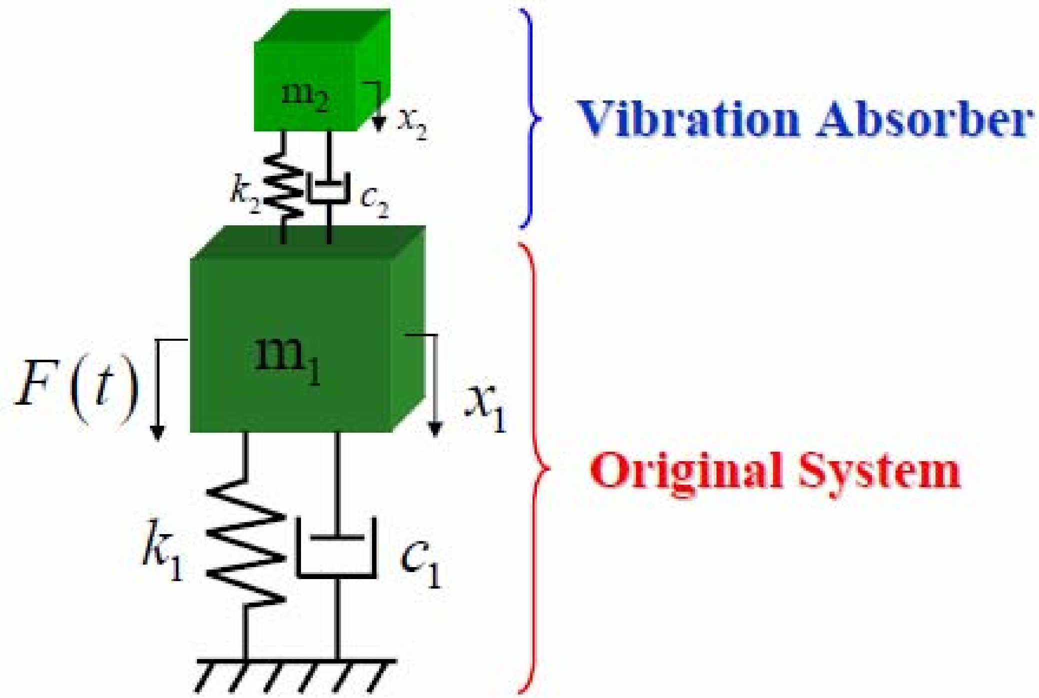
- در این شیوه:
  - در نزدیکی یا خود تشدید دامنه کاهش می یابد (حتی حذف می شود)
  - در هر فرکانس معلومی می توان دامنه را کاهش داد



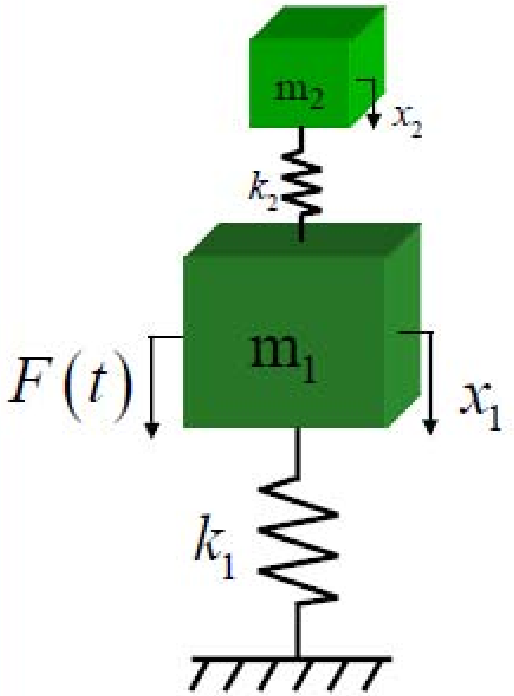
# Vibration Absorber (a.k.a Tuned Mass Damper)

1.) Reduces amplitude response at or near a resonance.

2.) Reduces amplitude response at a specific frequency.

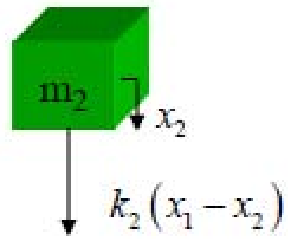


# Vibration Absorber (undamped configuration)



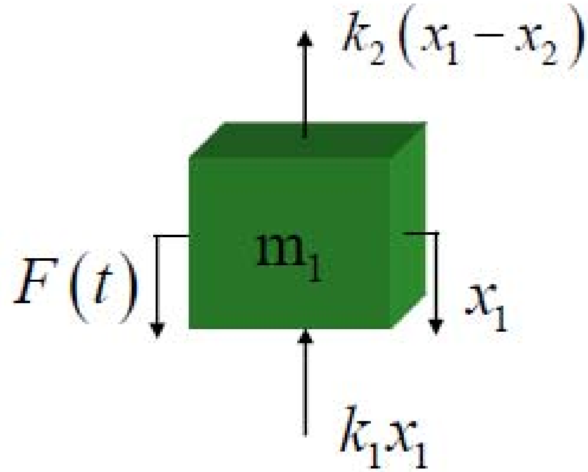

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

**FBD's**




$$\sum F_{x_2} = m_2\ddot{x}_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0$$




$$\sum F_{x_1} = m_1\ddot{x}_1$$

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0 \sin(\omega t)$$

# Vibration Absorber (undamped configuration)

## Equations of Motion

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## Solution

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{\left(k_2 - m_2\omega^2\right)F_0}{\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)-k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)-k_2^2}$$

## Vibration Absorber

$$X_1 = \frac{\left(k_2 - m_2\omega^2\right)F_0}{\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - k_2^2}$$

**Goal: Reduce amplitude $\mathbf{X_1}$**

$$\therefore \quad \left(k_2 - m_2\omega^2\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

**The natural frequency of the vibration absorber equals the frequency of the forcing function:**

$$F_0 \sin(\omega t)$$

## Vibration Absorber: Design for Resonance

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}}$$

**Define:** $\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1}$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}}$$

# Vibration Absorber: Design for Resonance

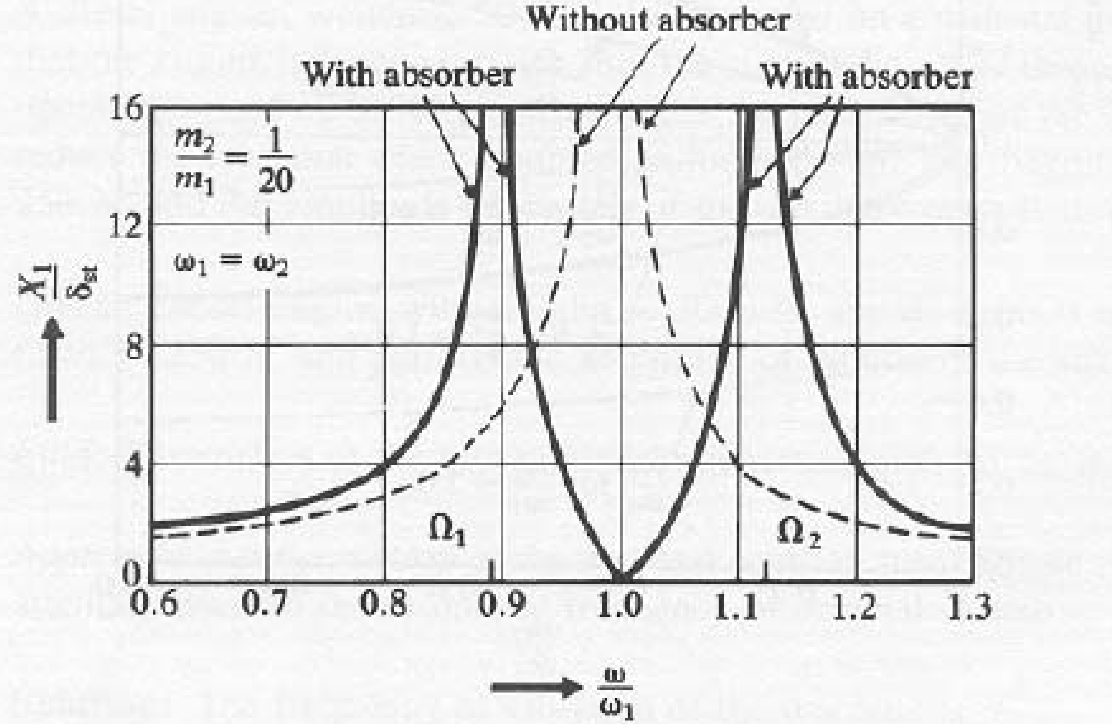



**FIGURE 9.25** Effect of undamped vibration absorber on the response of machine.

**$\Omega_1$ , $\Omega_2$ = natural frequency of the "new" combined system**

## Vibration Absorber: Amplitude of the Absorber

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - k_2^2}$$

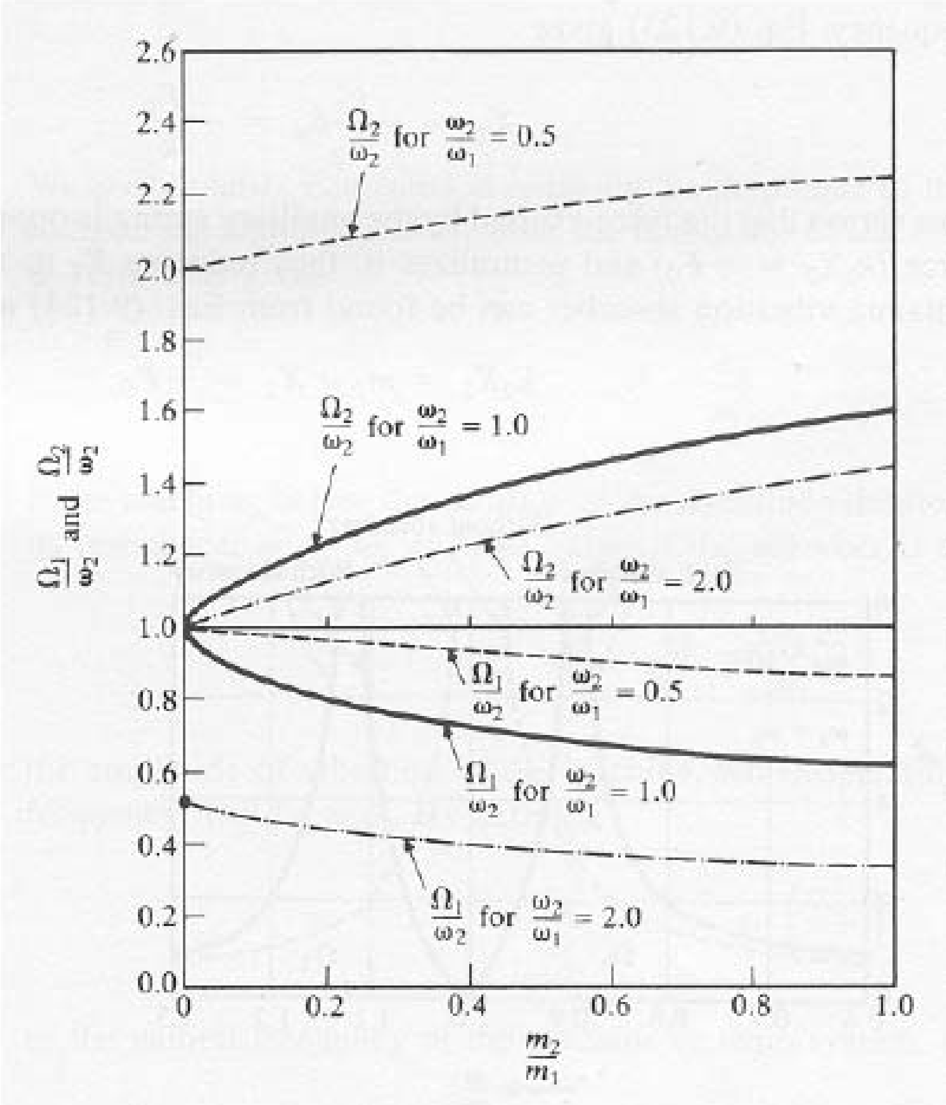
$$X_2 = -\frac{F_0}{K_2}$$

**Absorber design must accommodate this.**

# Vibration Absorber:

**Effect of** $\frac{\omega_2}{\omega_1}$

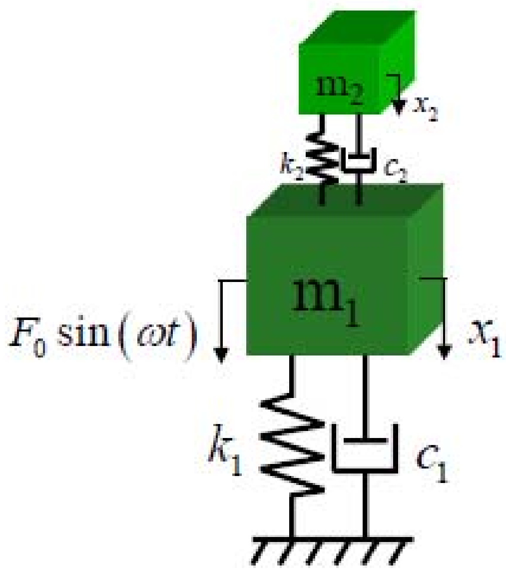
**Effect of the size of** $m_2$



# Vibration Absorber: Damped System

## Equations of Motion

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_0\sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$




**Solution:**

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{j\omega t}$$

# Vibration Absorber: Damped System

$$X_1 = \frac{F_0\left(k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega\right)}{\left[\left(k_1 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - m_2k_2\omega^2\right] + j\omega c_2\left(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2\right)}$$

$$X_2 = \frac{X_1\left(k_2 + j\omega c_2\right)}{\left(k_2 - m_2\omega^2 + j\omega c_2\right)}$$

# Vibration Absorber: Damped System

**By defining:**

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \text{ Mass ratio } = \text{ Absorber mass / main mass}$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1} = \text{ Static deflection of the system}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k_2}{m_2} = \text{ Square of the natural frequency of the absorber}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_1}{m_1} = \text{ Square of the natural frequency of the main mass}$$

$$f = \frac{\omega_a}{\omega_n} = \text{ Ratio of natural frequencies}$$

$$g = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{ Forced frequency ratio}$$

$$c_c = 2m_2\omega_a = \text{ Critical damping constant}$$

$$\zeta = \frac{c_2}{c_c} = \text{ Damping ratio}$$

# Vibration Absorber: Damped System

**Solution:** $$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

**The magnitudes, $X_1$ and $X_2$, can be expressed as:**

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \left[ \frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \left[ \frac{(2\zeta g)^2 + f^4}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2} \right]^{1/2}$$

# Vibration Absorber: Damped System

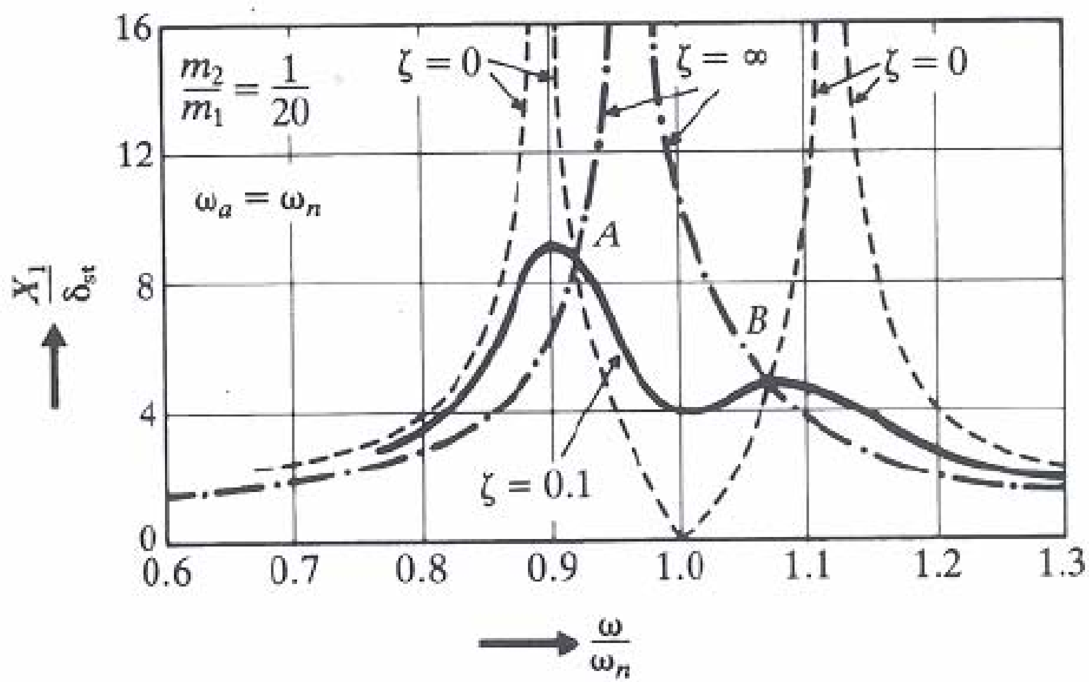
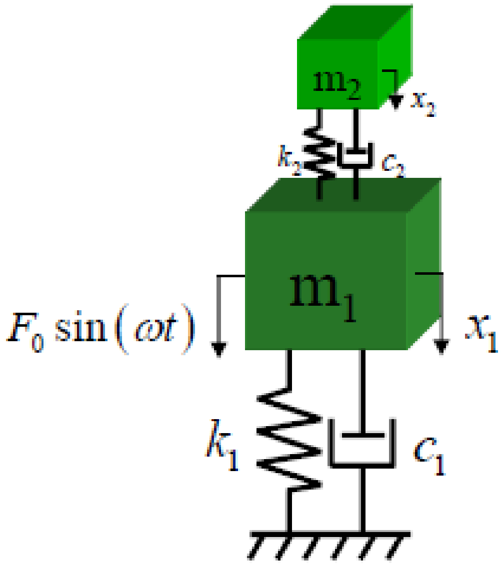



**FIGURE 9.29** Effect of damped vibration absorber on the response of the machine.

**Example:** $$\omega_a = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$



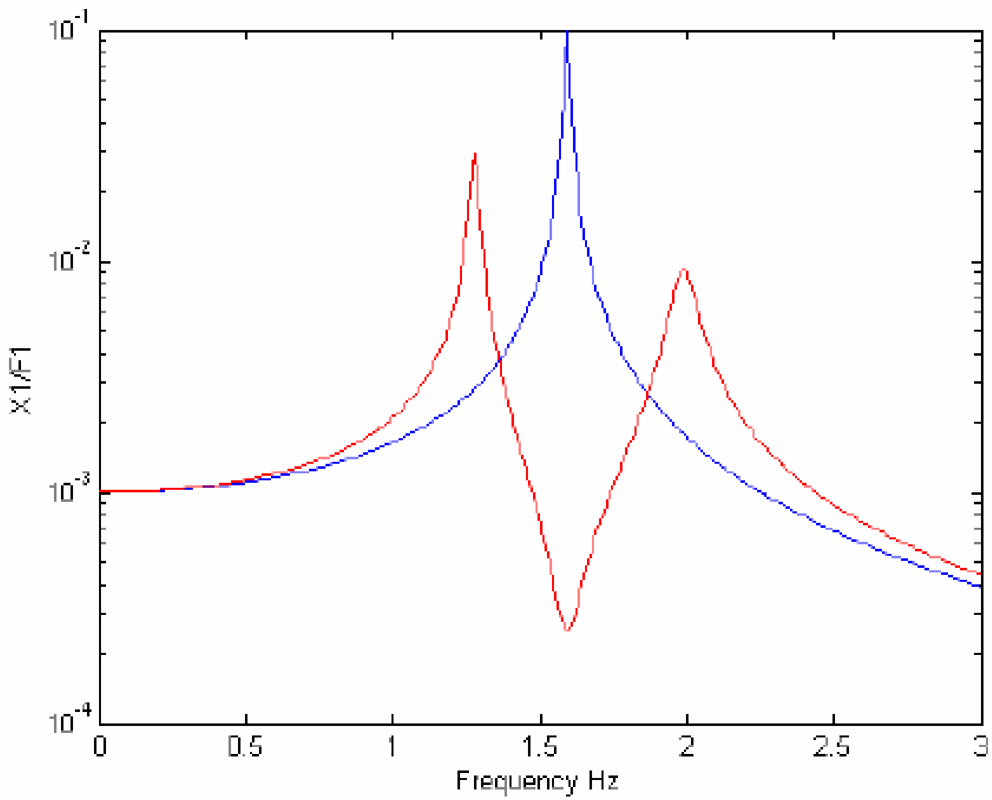

$m_1 = 10 \qquad m_2 = 2$

$k_1 = 1000 \qquad k_2 = 200$

$c_1 = 1 \qquad c_2 = 1$

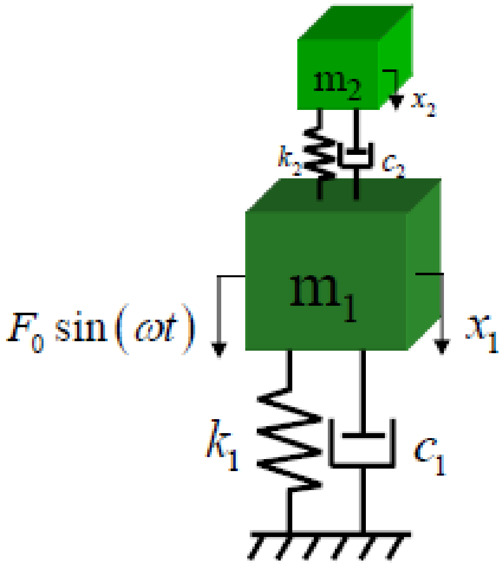
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Example:** $$\omega_a = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$



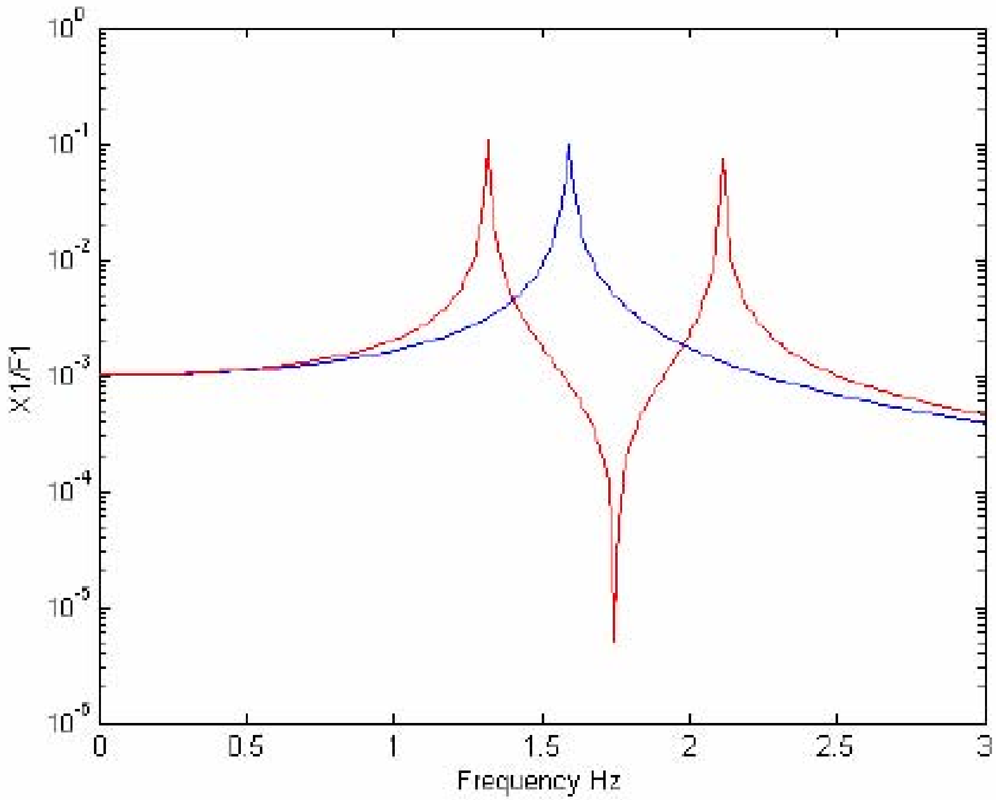
**Example:** $\omega_a = 1.75Hz$

$$m_1 = 10 \qquad m_2 = 2$$
$$k_1 = 1000 \qquad k_2 = 241$$
$$c_1 = 1 \qquad c_2 = 0$$




$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1241 & -241 \\ -241 & 241 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Example:** $\omega_a = 1.75Hz$



# Applications of Tuned Mass Damper

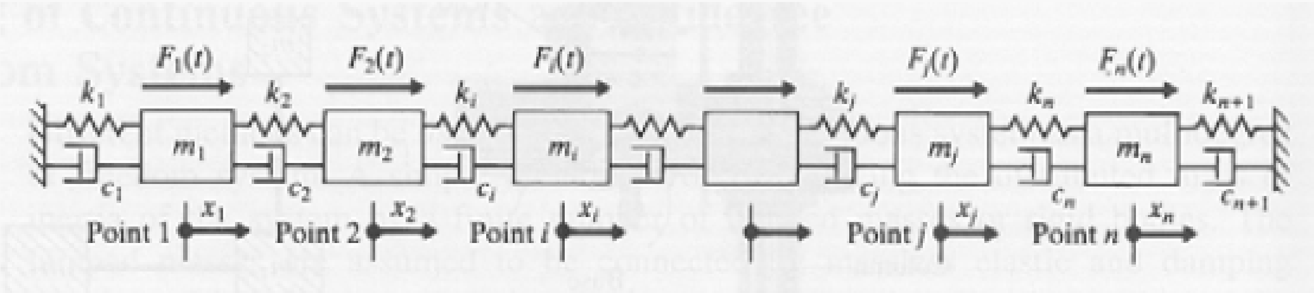
- **Automotive** (Exhaust, Steering & Suspension Systems, Rear view mirror, airbag, battery, etc.)
- **Appliances** (Washers, Dryers, Dishwasher, Refrigerators, etc.)
- **Machine Tools** (Lathes, Milling Machines, Grinders, etc.)
- **Buildings** (John Hancock Tower, Citicorp Center, Canadian National Tower)
- **Aircraft & Spacecraft** (Turbines, Inlet & Exhaust, accessory component motors, etc.)

# Multiple Degree of Freedom Systems

**Topics:**

1.) Equations of Motion
2.) Eigenvalue Problem
3.) Orthogonality
4.) Modal Space
5.) Solving MDOF Problems in Simple Fashion

# MDOF: Equations of Motion




## Equations of Motion Using Newton's Second Law:

1.) Choose suitable coordinates for the point masses and rigid bodies in the system.

2.) Determine static equilibrium position of the system. Measure motion from this position.

3.) Draw free-body diagram of each mass or rigid body. Indicate all forces acting on the mass or rigid body when positive displacement or velocity is present.

4.) Apply Newton's Second Law: **Translation:** $\sum F_{x_i} = m\ddot{x}_i$

**Rotation:** $\sum M_{\theta_i} = J\ddot{\theta}_i$

# MDOF: Equation of Motion

## General Form n-DOF System

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{F\}$$

$[m]=$ n x n mass matrix

$[c]=$ n x n viscous damping matrix

$[k]=$ n x n stiffness matrix

$\{\ddot{x}\}=$ n x 1 acceleration vector

$\{\dot{x}\}=$ n x 1 velocity vector

$\{x\}=$ n x 1 displacement vector

$\{F\}=$ n x 1 externally applied force vector

# MDOF: General Solution to Equation of Motion

1.) Determine natural frequencies ($\omega_i$) and mode shapes $\{X\}_i$ from undamped Free Vibration. (eigensolution)

2.) Use orthogonality of mode shapes to transform Equations of Motion into "*MODAL SPACE*".

3.) Solve "n" single degree of freedom problems.

4.) Use mode shapes to transform back to physical space.

# MDOF: $\omega_i$ and $\{X\}_i$ from Eigensolution

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

**For Harmonic Motion:** $\ddot{x}=-\omega^2 x$

$$\left(-\omega^2[m]+[k]\right)\{x\}=\{0\}$$

$$[k]\{x\}=\omega^2[m]\{x\}$$ **classic eigenvalue problem**

**Computer or calculator solution (MATLAB, Mathematica, etc.)**

**Yields "n" eigenvalues** $\omega_i^2$ for i = 1, n

**and "n" eigenvectors** $\{X\}_i$ for i = 1, n

**The natural frequencies are the square roots of the eigenvalues:**

$$\omega_i=\sqrt{\omega_i^2}$$

**The mode shapes are the corresponding eigenvectors.**

# MDOF: $\omega_i$ and $\{X\}_i$ from Eigensolution

$$\left(-\omega^2[m]+[k]\right)\{x\}=\{0\}$$

**To solve, the characteristic determinant = 0**

$$\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0 \qquad \left|[k]\right|-\lambda[m]=0$$

**results in an “n” order polynomial**

$$a_n(\lambda)^n+a_{n-1}(\lambda)^{n-1}+\ldots+a_1(\lambda)+a_0=0$$

$$\text{roots}=\lambda_i \ \text{ for } i=1,n$$

**natural frequencies** $\qquad \omega_i=\sqrt{\lambda_i}$

**Substitute $\omega_i$ or $\lambda_i$ into original equations for mode shape solution.**

# MDOF: $\omega_i$ and $\{X\}_i$ from Eigensolution

**Alternate Method**

$$\left(-\omega^2[m]+[k]\right)\{x\}=\{0\}$$

$$\left(\lambda[k]-[m]\right)\{x\}=\{0\} \qquad \lambda=\frac{1}{\omega^2}$$

$$\left(\lambda[k]^{-1}[k]-[k]^{-1}[m]\right)\{x\}=\{0\}$$

$$\left(\lambda[I]-[D]\right)\{x\}=\{0\}$$

$[I]=$ Identity Matrix

$$\lambda[I]\{x\}=[D]\{x\}$$

$[D]=[k]^{-1}[m]=$ dynamical matrix

**Solutions are the eigenvalues and eigenvectors of [D].**

$$\lambda_i=\frac{1}{\omega_i^2} \quad \text{for i = 1, n} \qquad \{X\}_i \quad \text{for i = 1, n}$$

# Orthogonality of Mode Shape Vectors

$$\left(-\omega^2[m]+[k]\right)\{x\}=\{0\}$$

**Using the $i_{th}$ natural frequency and mode shape**

$$\omega_i^2[m]\{X\}_i=[k]\{X\}_i \qquad \mathbf{1}$$

**Using the $j_{th}$ natural frequency and mode shape**

$$\omega_j^2[m]\{X\}_j=[k]\{X\}_j \qquad \mathbf{2}$$

Pre-multiply 1 by $\{X\}_j^T$ and 2 by $\{X\}_i^T$

$$\omega_i^2\{X\}_j^T[m]\{X\}_i=\{X\}_j^T[k]\{X\}_i \qquad \mathbf{3}$$

$$\omega_j^2\{X\}_i^T[m]\{X\}_j=\{X\}_i^T[k]\{X\}_j \qquad \mathbf{4}$$

# Orthogonality of Mode Shape Vectors

**Because of the symmetry of [k] , [m]**

$$\{X\}_j^T[k]\{X\}_i = \{X\}_i^T[k]\{X\}_j$$

$$\{X\}_j^T[m]\{X\}_i = \{X\}_i^T[m]\{X\}_j$$

$$\therefore \quad \omega_i^2\{X\}_j^T[m]\{X\}_i = \{X\}_i^T[k]\{X\}_j \qquad 3$$

$$\omega_j^2\{X\}_j^T[m]\{X\}_i = \{X\}_i^T[k]\{X\}_j \qquad 4$$

**Subtract 3 – 4** $\quad \left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)\{X\}_j^T[m]\{X\}_i = \{0\}$

**In general** $\quad \omega_i \neq \omega_j$

**Also:**

$$\{X\}_j^T[m]\{X\}_i = \{0\}$$

$$\{X\}_j^T[k]\{X\}_i = \{0\}$$

**Modal vectors are orthogonal with respect to [m] , [k].**

# Modal Mass, Stiffness, & Damping

$$\{X\}_i^T [m]\{X\}_i = M_{ii}$$ **Modal Mass**

$$\{X\}_i^T [k]\{X\}_i = K_{ii}$$ **Modal Stiffness**

$$\text{if } [c] = \alpha[m] + \beta[k]$$ **Proportional Damping**

$$\{X\}_i^T [c]\{X\}_i = C_{ii}$$ **Modal Damping**

# Modal Mass, Stiffness, & Damping

**Define** $[X]=\left[\{X\}_1\,\{X\}_2\cdots\{X\}_n\right]$ **Modal Matrix**

$$[X]^T[m][X]=\begin{pmatrix} m_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{nn} \end{pmatrix}=[M]$$

**Modal Mass Matrix**

$$[X]^T[k][X]=\begin{pmatrix} k_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{nn} \end{pmatrix}=[K]$$

**Modal Stiffness Matrix**

**For proportional damping:**

$$[X]^T[c][X]=\begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}=[C]$$

**Modal Damping Matrix**

# Example

$$[m]=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{bmatrix} \qquad [c]=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix} \qquad [k]=\begin{bmatrix}2000 & -1000 & 0\\ -1000 & 3000 & -2000\\ 0 & -2000 & 4000\end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = 9.15 \qquad \{X\}_1=\begin{Bmatrix}1.00\\ 1.16\\ 1.00\end{Bmatrix}$$

From $\omega_i^2[m]\{X\}=[k]\{X\}$

$$\omega_2 = 14.14 \qquad \{X\}_2=\begin{Bmatrix}1.00\\ 0.00\\ -0.50\end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 26.76 \qquad \{X\}_3=\begin{Bmatrix}1.00\\ -5.16\\ 1.00\end{Bmatrix}$$

## Example (continued)

$$[X] = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.16 & 0.00 & -5.16 \\ 1.00 & -0.50 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$[M] = [X]^T [m][X] = \begin{bmatrix} 36.75 & & \\ & 15.00 & \\ & & 163.25 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [X]^T [c][X] = \begin{bmatrix} 3.08 & & \\ & 3.00 & \\ & & 116.92 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [X]^T [k][X] = \begin{bmatrix} 3080 & & \\ & 3000 & \\ & & 116920 \end{bmatrix}$$

# Modal Space

**Original Equations of Motion:**

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{F\}$$

**Define a new coordinate system**

$$\{x\}=[X]\{q\}$$

**Modal Matrix**

$\{q\}$ = ***Modal Space***

**principal coordinates**

**Substitute into equation of motion**

$$[m][X]\{\ddot{q}\}+[c][X]\{\dot{q}\}+[k][X]\{q\}=\{F\}$$

**Pre-multiply by** $[X]^T$

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{q}\}+[X]^T[c][X]\{\dot{q}\}+[X]^T[k][X]\{q\}=[X]^T\{F\}$$

# Modal Space

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=[X]^T\{F\}$$

**Uncoupled equations of motion in the form of single degree of freedom systems.**

$$M_{11}\ddot{q}_1+C_{11}\dot{q}_1+K_{11}q_1=X_1^1F_1+X_2^1F_2+\cdots+X_n^1F_n$$

$$M_{22}\ddot{q}_2+C_{22}\dot{q}_2+K_{22}q_2=X_1^2F_1+X_2^2F_2+\cdots+X_n^2F_n$$

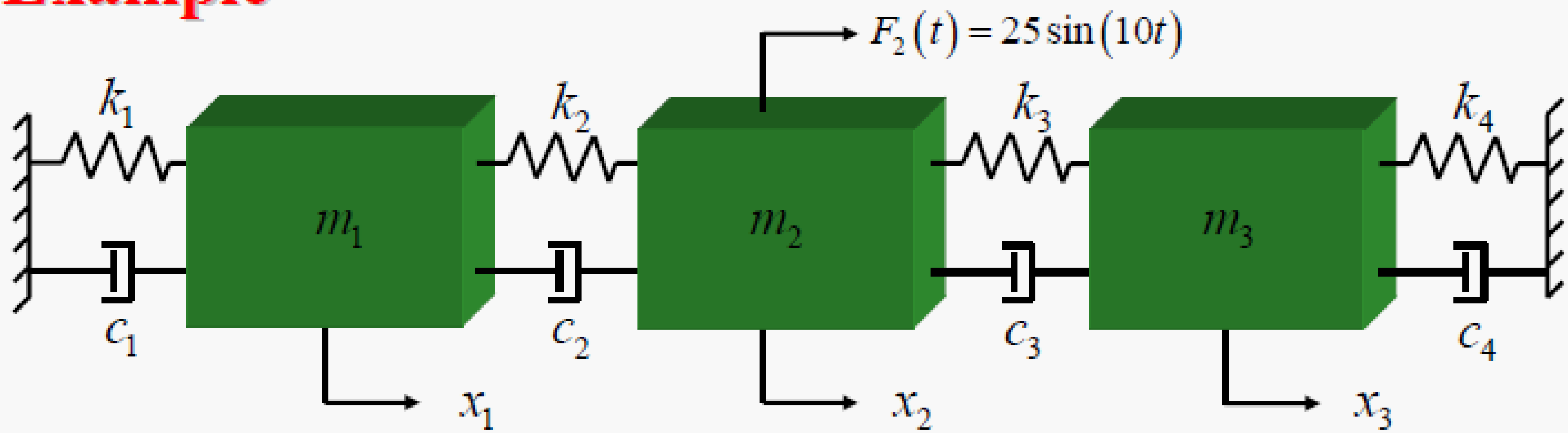
$$\vdots$$

$$M_{nn}\ddot{q}_n+C_{nn}\dot{q}_n+K_{nn}q_n=X_1^nF_1+X_2^nF_2+\cdots+X_n^nF_n$$

- **Solve each SDOF system**
- **Transform back to physical space for total solution**

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}=[X]\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}$$

# Example




| | | |
|---|---|---|
| $m_1 = 10kg$ | $k_1 = 1000\ ^{N}/_{m}$ | $c_1 = 10\ ^{N\cdot\text{sec}}/_{m}$ |
| $m_2 = 15kg$ | $k_2 = 2000\ ^{N}/_{m}$ | $c_2 = 20\ ^{N\cdot\text{sec}}/_{m}$ |
| $m_3 = 5kg$ | $k_3 = 1000\ ^{N}/_{m}$ | $c_3 = 10\ ^{N\cdot\text{sec}}/_{m}$ |
| | $k_4 = 500\ ^{N}/_{m}$ | $c_4 = 5\ ^{N\cdot\text{sec}}/_{m}$ |

**Determine the total solution if the system starts from rest.**

# Example

## Equations of Motion

$$\begin{bmatrix}10 & & \\ & 15 & \\ & & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}30 & -20 & 0\\ -20 & 30 & -10\\ 0 & -10 & 15\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}3000 & -2000 & 0\\ -2000 & 3000 & -1000\\ 0 & -1000 & 1500\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 25\sin(10t)\\ 0\end{Bmatrix}$$

**Determine the mode shapes and natural frequencies**

$$[k]\{x\}=\omega^2[m]\{x\}$$

$$\omega_1 = 6.62\ {}^{rad}\!/_{sec}$$

$$\omega_2 = 17.3\ {}^{rad}\!/_{sec}$$

$$\omega_3 = 21.4\ {}^{rad}\!/_{sec}$$

$$\begin{array}{cccc} & \text{mode 1} & \text{mode 2} & \text{mode 3}\\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$[X]=\begin{bmatrix}1.00 & 1.00 & 1.00\\ 1.28 & 0.00 & -0.78\\ 1.00 & -2.00 & 1.00\end{bmatrix}$$

# Example

## Uncouple the Equations of Motion (transform to *Modal Space*)

$$\{x\} = [X]\{q\}$$

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{q}\} + [X]^T[c][X]\{\dot{q}\} + [X]^T[k][X]\{q\} = [X]^T\{F\}$$

$$\begin{bmatrix} 39.6 & & \\ & 30 & \\ & & 24.14 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 17.36 & & \\ & 90 & \\ & & 110.13 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1737 & & \\ & 9000 & \\ & & 11,013 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.28(25\sin(10t)) \\ 0 \\ -0.78(25\sin(10t)) \end{Bmatrix}$$

# Example

**Solve each SDOF system**

$$39.6\ddot{q}_1 + 17.36\dot{q}_1 + 1737q_1 = 32\sin(10t)$$

$$\zeta = \frac{17.36}{2\sqrt{39.6(1737)}} = 0.033$$

$$\omega_n = \omega_1 = 6.62$$
$$\omega_d = 6.60$$

$$q_1(t) = e^{-(0.033(6.62))t}\left(A\cos(6.6t) + B\sin(6.6t)\right) + Q\sin(10t - \phi)$$

$$r = \frac{10}{6.62} = 1.51$$

$$\text{from } \frac{XK}{F_0}(r,\zeta) = 0.78$$

$$\frac{QK}{F_0} = 0.78 \qquad Q = \frac{0.78(32)}{1737} = 0.0144 \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) = \pi$$

# Example

$$q_1(t) = e^{-0.218t}\left(A\cos(6.6t) + B\sin(6.6t)\right) + 0.0144\sin(10t - \pi)$$

**Initial conditions:**

$$\{x(0)\} = [X]\{q(0)\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = [X]\{\dot{q}(0)\}$$

$$\{q(0)\} = [X]^{-1}\{x(0)\} \qquad \{\dot{q}(0)\} = [X]^{-1}\{\dot{x}(0)\}$$

**For a system at rest:** $\{q(0)\} = \{0\}\ ,\ \{\dot{q}(0)\} = \{0\}$

$$0 = q_1(0) = (1)(A + 0) + 0.0144\sin(-\pi) \qquad A = 0$$

$$\dot{q}_1(t) = e^{-0.218t}\left(6.6B\cos(6.6t)\right) - 0.218e^{0.218t}\left(B\sin(6.6t)\right) + 0.144\cos(10t - \pi)$$

$$0 = \dot{q}_1 = (1)(6.6B) - (1)(0) - 0.144 \qquad B = 0.022$$

$$\therefore \quad q_1(t) = e^{-0.218t}\left(0.022\sin(6.6t)\right) + 0.0144\sin(10t - \pi)$$

**In a similar manner:**

$$30\ddot{q}_2 + 90\dot{q}_2 + 9000q_2 = (0)\left(25\sin(10t)\right) \longrightarrow q_2(t) = 0$$

$$24.14\ddot{q}_3 + 110\dot{q}_3 + 11{,}013q_3 = -19.5\sin(10t)$$

$$q_3(t) = e^{-2.3t}\left(1.25\sin(21t)\right) - 0.0025\sin(10t)$$

$$\{X\} = [X]\{q\} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.28 & 0.00 & -0.78 \\ 1.00 & -2.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$
$$x_2(t) = 1.28q_1(t) - 0.78q_3(t)$$
$$x_3(t) = q_1(t) - 2.00q_2(t) + q_3(t)$$