نام و نام خانوادگی :

نام درس : ریاضی ۲

پایه تحصیلی : یازدهم تجربی

نام دبیر : سیّد علی موسوی

عنوان آزمون :فصل ۳ - تابع

۱) برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + x^2}{2x}$ کدام است؟

۱) $[-1 , 1]$ ۲) $(-1 , 1)$ ۳) $R - (-1 , 1)$ ۴) $R - [-1 , 1]$

۲) اگر $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2}$ باشد، $f\left(1 - \sqrt{2}\right)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $1 + \sqrt{2}$

۳) برد تابع $(x \in R)$, $f(x) = \frac{|x|}{|x| + 1}$ کدام است؟

۱) $(-\infty , 1)$ ۲) $(-\infty , 1]$ ۳) $[0 , 1]$ ۴) $[0 , 1)$

۴) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+4}$ ، در بازه‌ی (a,b) پایین‌تر از خط به معادله‌ی $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ∞

۵) اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$، ضابطه تابع $f\left(x^2\right) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1 - x^2}$ ۲) $\frac{2x}{x^2 - 1}$ ۳) $\frac{2x + 1}{1 - x^2}$ ۴) $\frac{2x - 1}{x^2 - 1}$

۶) تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2|$ مساوی کدام یک از توابع است؟

۱) $\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}\right|$ ۲) $\left|\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right|$

۳) $\frac{(x - 2)^2}{|x - 2|}$ ۴) $\frac{|6x - 12|}{6}$

۷ نمودار تابع $y=[x^۲]$ ، روی بازه $x \in (-۲,۲)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸ اگر $۱۹۸ = \left(۱-\sqrt{۲}\right)^۶ + \left(۱+\sqrt{۲}\right)^۶$ باشد، جزء صحیح عدد $\left(۱+\sqrt{۲}\right)^۶$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

۹ برد تابع $f(x) = ۲x - ۲[x] + ۱$ کدام است؟

۱) $[۰ , ۲]$ ۲) $[۱ , ۳)$ ۳) $[۰ , ۲)$ ۴) $[۰ , ۳]$

۱۰ برد تابع f با ضابطه $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{۱-[x]}}$ کدام مجموعه است؟

۱) $(-\infty , ۰]$ ۲) $(-\infty , ۱)$ ۳) $[۰ , +\infty)$ ۴) $(۱ , +\infty)$

۱۱ مساحت نمودار رابطه $S=\{(x , y) \mid ۰ < x < ۲ , ۰ < y < x-[x]\}$ در صفحه برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۲ حاصل $\left|[۵x]-[۷x]\right|$ به ازای $x = \frac{-۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۳ نمودار تابع $y = x - [x] \quad ; \quad x \in [-۲ , ۳)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n , L) کدام است؟

۱) (۴ و ۱) ۲) $\left(۴ , \sqrt{۲}\right)$ ۳) $(۵ , ۱)$ ۴) $\left(۵ , \sqrt{۲}\right)$

۱۴ برد تابع f با معادله $y = \sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) R ۲) R^+ ۳) $[۰ , ۱]$ ۴) $[-۱ , ۱]$

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+۲|}$، دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x \leq -۱$ ۲) $x \geq -۱$ ۳) $x \leq ۱$ ۴) $x \geq ۱$

۱۶) اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ ، دامنه‌ی تابع $f(3-x)$ ، کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,3]$

۱۷) دامنه تابع $f=\left\{(x,y): y=\sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}\right\}$ کدام مجموعه است؟

۱) R ۲) $\{x: x\leqslant 1\}$ ۳) $\{x: x\geqslant 1\}$ ۴) $\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$

۱۸) برد تابع $y=\sqrt{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{y|y\geqslant 0\}$ ۳) $\{y|y<0\}$ ۴) $\{0\}$

۱۹) اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\sqrt{2x-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟

۱) $[-1,0)$ ۲) $[0,1)$ ۳) $[-1,1)$ ۴) $[1,+\infty)$

۲۰) اگر جزء صحیح (x^2+x) برابر ۱- باشد، آن‌گاه $[x^{20}]$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۱) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2[x]$، مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f\left(\sqrt{3}\right)\right)$، کدام است؟

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

۲۲) برای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل $\left[\sqrt{n^2-2n}\right]-2\left[\sqrt{4n^2-3n+1}\right]$ کدام است؟ (ابعاد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳) اگر $x^2+x<0$ باشد، حاصل $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۲۴) اگر $f(x)=[x]$، مجموعه‌ی مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{-1,0,1\}$

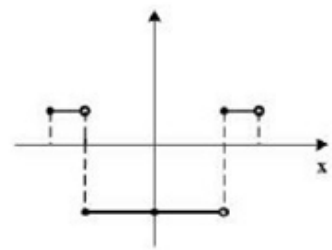
۲۵ اگر $[x-۲]=۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-۳|-|x-۴|$ و $g(x)=۲x^۲+x-۱۷$، در چند نقطه مشترک هستند؟

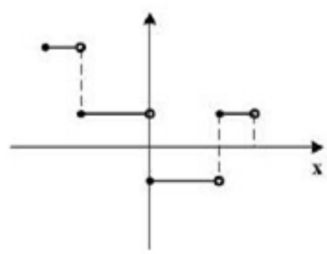
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

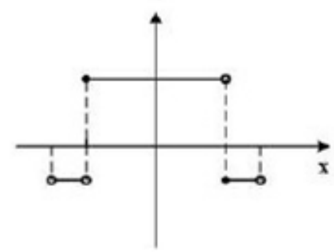
۲۶ ضابطه‌ی تابع $y=[-۲x+|x|]+x$ در دامنه‌ی $-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳}$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

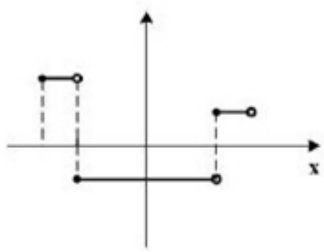
۱) $-۲x$ ۲) $x+۱$ ۳) $x-۲$ ۴) $۲x+\frac{۸}{۳}$

۲۷ نمودار تابع $y=۲|[۳x]|-۱$ به ازای $-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$، کدام است؟

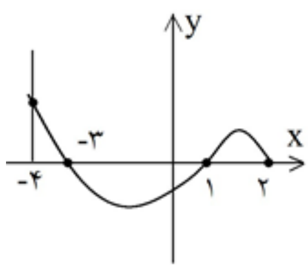
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۸ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{x\,f(x)}$، کدام است؟



۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$
۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۲۹ برد تابع $y=\frac{x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ کدام است؟

۱) $[۳\sqrt{۲},+\infty)$ ۲) $[\sqrt{۳},+\infty)$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $[۴,+\infty)$

۳۰ دامنه تعریف تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۲,۳)$

۳۱ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{|x-۱|-۴}$ کدام است؟

۱) $x<-۴$ ۲) $-۱<x<۳$ ۳) $x<۳$ یا $x>۱$ ۴) $x<-۳$ یا $x>۵$

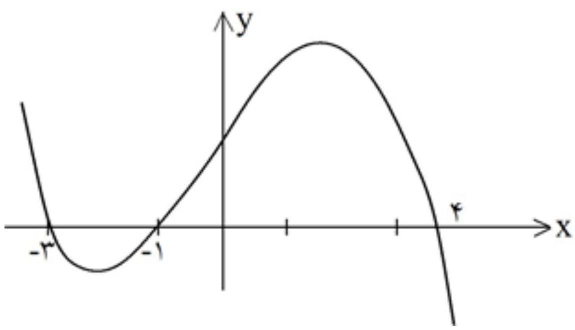
۳۲ دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۴-|x-۱|}$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۵

۳۳ برد تابع $y=\sqrt{۱۷-x^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۳۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟

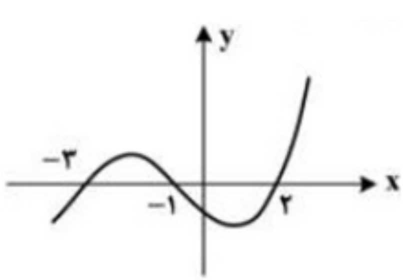


۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۳۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر k، بازه‌ی $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ است؟

۱) $(\frac{۱}{۳},۳]$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۳})$ ۴) $[-۱,-\frac{۱}{۳})$

۳۶ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)f(x)}$، کدام است؟



۱) $[-۳,۲]$
۲) $[-۱,+\infty)$
۳) $(-\infty,-۱]$
۴) $R-(-۳,۲)$

۳۷) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محورها yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

۳۸) قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۱/۵$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۲/۵$

۳۹) اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(-۱,m+۱),(n+۲,۲)\}$ یک تابع یک به یک باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۴۰) اگر تابع $f=\{(-۲\,,\,۲)\,,\,(m\,,\,۳)\,,\,(-۱\,,\,۳)\,,\,(۲m\,,\,a)\}$ یک به یک باشد، a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۴۱) اگر رابطه‌ی $f=\left\{(۳,۲),(a,۵),\left(۳,a^۲-a\right),(b,۲),(-۱,۴)\right\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۲) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x-|۴-۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}x+۱,\ x>۴$ ۲) $\frac{۱}{۴}x-۱,\ x<۴$ ۳) $\frac{۱}{۴}x-۱,\ x>۴$ ۴) $\frac{۱}{۴}x+۱,\ x<۴$

۴۳) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left|x^۳\right|$ با دامنه‌ی R ، چگونه است؟

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

۴۴) تابع با کدام ضابطه زیر یک به یک است؟

۱) $y=|x|$ ۲) $y=x^۲$ ۳) $y=\begin{cases}x & x>۰\\ x^۲ & x<۰\end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases}-x & x>۰\\ x^۲ & x<۰\end{cases}$

۴۵) معکوس تابع $y=x^۳+\sqrt{x}$، از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) (۴،۶۶) ۲) (۳،۱) ۳) (۶۶،۴) ۴) (۱،۲)

۴۶) نمودار تابع f بر نمودار معکوس آن منطبق است f(x) برابر کدام است؟

۱) $x^۳$ ۲) $x^۲$ ۳) $|x|$ ۴) $-x$

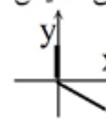
۴۷) اگر ضابطه تابع f، $f(x) = x^{۳} + x + ۱$ باشد، نمودار $f^{-۱}$ الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد؟

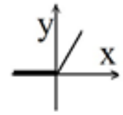
۱) $(-۱ , ۰)$ ۲) $(۰ , -۱)$ ۳) $(۱ , ۰)$ ۴) $(۰ , ۱)$

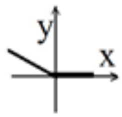
۴۸) در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$، مقدار $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

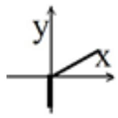
۱) -۸ ۲) -۵ ۳) -۲ ۴) تعریف‌نشده

۴۹) منحنی نمایش معکوس تابع $y = ۲x + |۲x|$ کدام است؟

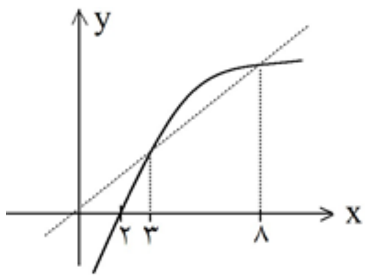
۱)


۲)


۳)


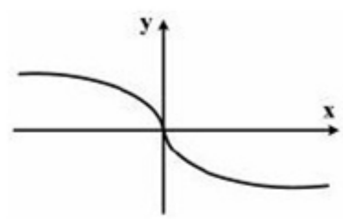
۴)


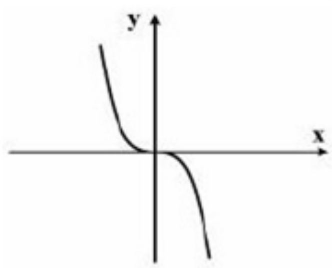
۵۰) شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است.
دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-۱}(x)}$ کدام است؟

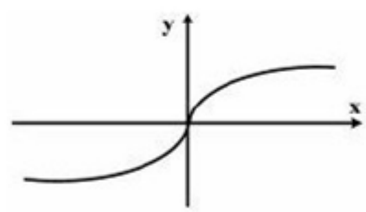


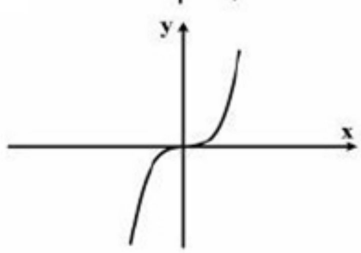
۱) $(۰,۲]$ ۲) $[۲, ۳]$
۳) $[۲, ۸]$ ۴) $[۳, ۸]$

۵۱) اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵۲) وارون تابع $f : R \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = ۲x + ۳$ کدام است؟

۱) $۲x + ۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}x + ۳$ ۳) $۲x - ۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲}$

۵۳) وارون تابع $f(x) = ۲x + ۱۴$ کدام است؟

۱) $g(x) = \frac{-۱}{۲}x - ۷$ ۲) $g(x) = \frac{-۱}{۲}x + ۷$ ۳) $g(x) = \frac{۱}{۲}x - ۷$ ۴) $g(x) = \frac{۱}{۲}x + ۷$

۵۴) معادله‌ی قرینه $y = ۲x + ۲$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم کدام است؟

۱) $۲y = -x - ۲$
۲) $۲y = -x + ۲$
۳) $۲y = x - ۲$
۴) $۲y = x + ۲$

۵۵) نمودار تابع $y = |۲x - ۶| - |x + ۴| + x$ در یک بازه، اکیداً نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x + ۶ \; ; \; x < -۴$
۲) $-x + ۵ \; ; \; x > ۲$
۳) $-\frac{۱}{۲}x + ۱ \; ; \; -۴ < x < ۳$
۴) $-\frac{۱}{۲}x + ۱ \; ; \; -۴ < x < ۱۰$

۵۶) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۱|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

۱) $-x + ۷ \; ; \; x > ۸$
۲) $\frac{۱}{۳}x + ۲ \; ; \; x > ۳$
۳) $x + ۷ \; ; \; x > -۴$
۴) $\frac{۱}{۲}x - ۱ \; ; \; -۴ < x < ۸$

۵۷) اگر دو خط به معادلات $ax + by = ۸$ و $۲x - ۳y = b$، نسبت به نیمساز ربع اول، متقارن باشند. $a + b$ کدام است؟

۱) ± ۳
۲) ± ۲
۳) $۲, -۳$
۴) $-۲, ۳$

۵۸) قرینه‌ی خط به معادله‌ی $۳y - ۲x = ۴$ را نسبت به خط $y = x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۵۹) اگر $f = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۴)\}$ و $g = \{(۱,۵), (۲,۶), (۳, ۰)\}$ آن‌گاه تابع $\frac{۲f}{g}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$
۲) $\left\{\left(۱,\frac{۴}{۵}\right),(۳,۱)\right\}$
۳) $\left\{\left(۱,\frac{۴}{۵}\right),\left(۲,\frac{۱}{۲}\right)\right\}$
۴) $\left\{(۲,۱),\left(۱,\frac{۴}{۵}\right)\right\}$

۶۰) فرض کنید $f = \{(x, x^{۲}) | x = \pm ۵, \pm ۴, \dots, \pm ۱, ۰\}$ و $g = \{(x, x^{۳}) | x = \pm ۵, \pm ۴, \dots, \pm ۱, ۰\}$ دو تابع در صفحه‌ی مختصات باشند. تعداد عناصر برد تابع $y = \frac{g}{f}(x)$، کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۵

سیّد علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس

۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه حل اول:

$$y=\frac{1+x^2}{2x}\Rightarrow 2xy=1+x^2\Rightarrow x^2-2xy+1=0$$

$$\Delta\geq 0\Rightarrow 4y^2-4\geq 0\Rightarrow y^2-1\geq 0\Rightarrow (y-1)(y+1)\geq 0\Rightarrow \begin{matrix} y\geq 1\\ y\leq -1\end{matrix}\Rightarrow R_f=R-(-1,1)$$

راه حل دوم:

$$\left.\begin{matrix} y=\dfrac{1+x^2}{2x}\Rightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{2x}{1+x^2}\\ x=\operatorname{tg}\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{1}{y}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{Sin}2\alpha\\ -1\leq \operatorname{Sin}2\alpha\leq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow -1\leq\frac{1}{y}\leq 1$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y\geq 1\\ \text{یا}\\ y\leq -1\end{cases}\Rightarrow R_f=R-(-1,1)$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{-2x^2+5x}{x-2}\Rightarrow f\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{-2\left(1-\sqrt{2}\right)^2+5\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-\sqrt{2}-2}$$

$$\Rightarrow f\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{-2\left(1+2-2\sqrt{2}\right)+5-5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-2}=\frac{-6+4\sqrt{2}+5-5\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}=\frac{-1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}=1$$

۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اولاً به ازاء هر x حقیقی داریم: $|x| \geqslant ۰$ پس همواره تابع $f(x) = \frac{|x|}{۱ + |x|} \geqslant ۰$ می‌باشد.

ثانیاً در تابع $f(x)$ خواهیم داشت: $f(x) = \frac{|x| + ۱ - ۱}{|x| + ۱} = ۱ - \frac{۱}{۱ + |x|}$ ، مقدار $f(x) < ۱$ است زیرا $\frac{۱}{۱ + |x|} > ۰$ است. لذا $۰ \leqslant f(x) < ۱$ خواهد بود و در نتیجه برد تابع، فاصله $[۰ , ۱)$ است.

روش دوم:

$$y = \frac{|x|}{|x| + ۱} \Rightarrow y(|x| + ۱) = |x| \Rightarrow y|x| + y = |x| \Rightarrow y|x| - |x| = - y$$

$$\Rightarrow |x|(y - ۱) = - y \Rightarrow |x| = \frac{- y}{y - ۱} \Rightarrow |x| = \frac{y}{۱ - y}$$

$$|x| \geqslant ۰ \Rightarrow \frac{y}{۱ - y} \geqslant ۰ \Rightarrow ۰ \leqslant y < ۱ \Rightarrow R_f = [۰ , ۱)$$

۴ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g باشد، در این صورت داریم $g < f \Leftarrow f - g > ۰$. بنابراین برای این که نمودار تابع $f(x) = \frac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴}$ ، پایین خط $y = ۲$ باشد، باید داشته باشیم:

$$۲ > \frac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴} \Rightarrow ۲ - \frac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴} > ۰ \Rightarrow \frac{۲x^۲ + ۸ - ۳x^۲ + ۲x}{x^۲ + ۴} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x^۲ + ۲x + ۸}{x^۲ + ۴} > ۰ \xrightarrow{\text{مخرج همواره مثبت}} -x^۲ + ۲x + ۸ > ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ < ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۲) < ۰ \Rightarrow x \in (-۲, ۴) = (a, b) \Rightarrow a = -۲ , b = ۴$$

بنابراین بیشترین مقدار b-a (بیشترین طول بازه) برابر است با $۴ - (-۲) = ۶$.

۵ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x - ۱} \Rightarrow f(x^۲) - ۲f(x) + ۱ = \frac{x^۲}{x^۲ - ۱} - \frac{۲x}{x - ۱} + ۱ = \frac{x^۲ - ۲x(x + ۱) + x^۲ - ۱}{x^۲ - ۱}$$

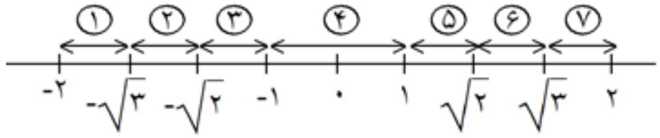
$$\frac{x^۲ - ۲x^۲ - ۲x + x^۲ - ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{-۲x - ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{۲x + ۱}{۱ - x^۲}$$

۶ دو تابع f و g برابرند اگر اولاً دامنه یکسان داشته باشند ثانیاً روی دامنه خود $f(x) = g(x)$ باشد طبق سوال دامنه تابع $f(x) = |x - ۲|$ مجموعه R است و با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه ۴ دامنه R دارد پس:

$$\frac{|۶x - ۱۲|}{۶} = ۶\frac{|x - ۲|}{۶} = |x - ۲| = f(x)$$

و گزینه ۴ صحیح است.

۷ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$-2 < x < 2 \Rightarrow 0 \le x^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow \text{یک پاره خط} \\ 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow \text{دوپاره خط} \\ 2 \le x^2 < 3 \Rightarrow \text{دوپاره خط} \\ 3 \le x^2 < 4 \Rightarrow \text{دوپاره خط} \end{cases} \text{۷ پاره خط}$$

۸ یادآوری: تعریف جزء صحیح $n \le x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n \quad , n \in Z , x \in R$ می‌دانیم قدرمطلق $\sqrt{2} - 1$ کوچکتر از یک است پس داریم:

$$\begin{cases} 0 < (1-\sqrt{2})^6 < 1 \\ (1-\sqrt{2})^6 + (1+\sqrt{2})^6 = 198 \end{cases} \Rightarrow 197 < (1+\sqrt{2})^6 < 198 \Rightarrow \left[(1+\sqrt{2})^6\right] = 197$$

گزینه ۳ صحیح است.

۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$[x] \le x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \le x - [x] < 1 \Rightarrow$$
$$0 \le 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 1 \le 2x - 2[x] + 1 < 3 \Rightarrow 1 \le f(x) < 3$$

و برد تابع فاصله نیم‌باز $[1 , 3)$ است.

۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

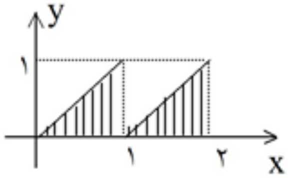
ابتدا دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-[x]}}$ را معلوم می‌کنیم تا برد آن، با تغییرات x بر روی دامنه، مشخص شود.

$$1 - [x] > 0 \Rightarrow [x] < 1 \Rightarrow x < 1$$

برای مقادیر $x < 0$ تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[x]}}x$ در ناحیهٔ سوم به حالت صعودی تغییر می‌کند اگر $0 \le x < 1$ باشد آن‌گاه $[x] = 0$ در نتیجه نمودار تابع $f(x) = x$ در فاصلهٔ $[0 , 1)$ واقع است. پس برد تابع مجموعهٔ $(-\infty , 1)$ است و گزینهٔ ۲ صحیح است.

(۱۱) گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق تعریف تابع جزء صحیح می‌دانیم $n \in N,\ n \le x < n+1 \Leftrightarrow [x]=n$. پس:



$$\begin{cases} 0 \le x < 1 \Rightarrow [x]=0 \\ 1 \le x < 2 \Rightarrow [x]=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1=\{(x,y) \mid 0 \le x < 1,\ 0 \le y < x\} \\ S_2=\{(x,y) \mid 1 \le x < 2,\ 0 \le y < x-1\} \end{cases}$$

بنابراین مساحت مورد نظر برابر با مجموع دو مساحت فوق می‌باشد.

هر قطعه یک مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد و مساحت‌های آن‌ها برابر با $S_1=S_2=\frac{1}{2}$ می‌باشد. بنابراین مساحت کل برابر با $S=S_1+S_2=1$ می‌باشد و در نتیجه گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

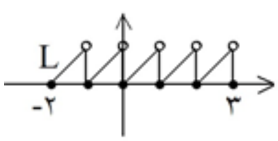
(۱۲) گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع جزء صحیح، می‌دانیم $n \le x < n+1 \Rightarrow [x]=n$ همچنین می‌دانیم $x<0 \Rightarrow |x|=-x$ بنابراین به ازاء $x=-\frac{1}{2}$ برای عبارت داده شده داریم :

$$\left|\left[\frac{-7}{2}\right]-\left|\left[\frac{-5}{2}\right]\right|\right| = |[-3/5]-|[-2/5]|| = |-4-|-3|| = |-4-3| = 7$$

(۱۳) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $(n, L)=\left(5, \sqrt{2}\right)$ زوج مرتب $-2<x<3$

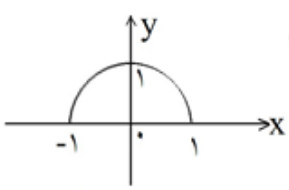
$0 \le y < 1$

$L=\sqrt{2}$



(۱۴) گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم، طبق شکل معلوم است که $y \ge 0$ و $-1 \le x \le 1$ تغییر می‌کند، پس برد تابع در فاصلهٔ $[0, 1]$ می‌باشد.

روش دوم:



$$y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow x^2=1-y^2,\ x^2 \ge 0 \Rightarrow 1-y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$$

کاملاً مشخص است که yهای منفی قابل قبول نمی‌باشد پس $0 \le y \le 1$ یعنی برد تابع برابر است با فاصلهٔ $[0, 1]$

(۱۵) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{x+|x+2|} \Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+2|} \Rightarrow -x+|-x+2| \ge 0$$

$$\Rightarrow x \le |x-2| \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} x^2 \le x^2-4x+4 \Rightarrow x \le 1$$

۱۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲x-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow x(۲-x)\geq ۰\Rightarrow x\in[۰,۲]\Rightarrow ۰\leq ۳-x\leq ۲\Rightarrow -۳\leq -x\leq -۱\Rightarrow x\in[۱,۳]$$

۱۷ شرط بامعنی بودن y آن است که زیر رادیکال مثبت باشد. پس: $\frac{۱-|x|}{۱+|x|}\geq ۰$

چون همواره مخرج مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، باید صورت کسر غیر منفی باشد. با توجه به تعریف قدر مطلق داریم: $۱-|x|\geq ۰\Rightarrow |x|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱۸ $x<۰\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow x-|x|=x-(-x)=۲x<۰\Rightarrow$ yتعریف نشده است

$(x\geq ۰\Rightarrow |x|=x\Rightarrow x-|x|=x-x)=۰\Rightarrow y=۰$

روابط فوق نشان می‌دهند که دامنه تابع، اعداد حقیقی نامنفی بوده و مقدار آن همواره برابر با صفر می‌باشد. لذا برد تابع مجموعه $\{۰\}$ بوده و گزینه ۴ صحیح است.

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تغییر متغیر زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x-۱}{x}=t\Rightarrow x=\frac{۱}{۱-t}\\&f\left(\frac{x-۱}{x}\right)=\sqrt{۲x-۱}\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(t)=\sqrt{۲\left(\frac{۱}{۱-t}\right)-۱}\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{۱+t}{۱-t}}\Rightarrow$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱+x}{۱-x}\geq ۰\\ x\neq ۱\end{cases}\Rightarrow -۱\leq x<۱$$

۲۰ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$-۱\leq x^{۲}+x<۰\Rightarrow -۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^{۲۰}<۱\Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۲۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^{۲}-۲[x]\Rightarrow f\left(\sqrt{۳}\right)=۳-۲\left[\sqrt{۳}\right]=۳-۲=۱$$

$$-\frac{۱}{۲}f\left(\sqrt{۳}\right)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f\left(-\frac{۱}{۲}f\left(\sqrt{۳}\right)\right)=f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}-۲\left[-\frac{۱}{۲}\right]=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۲۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{n^{۲}-۲n}=\sqrt{(n-۱)^{۲}-۱}\Rightarrow n-۲<\sqrt{n^{۲}-۲n}<n-۱\Rightarrow\left[\sqrt{n^{۲}-۲n}\right]=n-۲$$

$$\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}=\sqrt{(۲n-۱)^{۲}+n}\Rightarrow ۲n-۱<\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}<۲n\Rightarrow\left[\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}\right]=۲n-۱$$

$$\left[\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}\right]-۲\left[\sqrt{n^{۲}-۲n}\right]=(۲n-۱)-۲(n-۲)=۳$$

راه حل دوم: چون این رابطه برای همه اعداد طبیعی $n\geq ۳$ برقرار است پس:

$n=۳\Rightarrow$ عبارت $=\left[\sqrt{۳۶-۹+۱}\right]-۲\left[\sqrt{۳}\right]=۳$

۲۳ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر $x^۲+x<۰$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-۱<x<۰$ است. حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل براکت‌ها را مشخص کنیم. داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} -۱<x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۳ می رسانیم}} -۱<x^۳<۰ \Rightarrow [x^۳]=-۱ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۴ می رسانیم}} ۰<x^۴<۱ \Rightarrow [x^۴]=۰ \end{array}\right. \Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=(-۱)+۰+(-۱)+۰=-۲$$

۲۴ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x)=[x]$ است. برای تعیین مقادیر تابع $f(x-f(x))$ یا همان $f(x-[x])$، کافی است به این نکته توجه کنیم که تابع داخلی، یعنی $x-[x]$ همواره در فاصله‌ی $[۰, ۱)$ تغییر می‌کند، پس داریم:

$$f(x)=[x] \Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])=[x-[x]]=۰$$

۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[x-۲]=۱ \Rightarrow [x]=۳ \Rightarrow ۳\le x<۴ \Rightarrow f(x)=(x-۳)+(x-۴)=۲x-۷$$

$$g(x)=f(x) \Rightarrow ۲x^۲+x-۱۷=۲x-۷ \Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-۲ \quad \text{غ ق ق} \\ x=\frac{۵}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{array}\right.$$

در فاصله‌ی $[۳, ۴)$ نمی‌باشند.

۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روش اول: در بازه‌ی داده شده، درون قدرمطلق منفی است. لذا: $|x|=-x$

$$y=[-۲x+|x|]+x=[-۲x-x]+x \Rightarrow y=[-۳x]+x$$

از طرفی چون $-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳}$، بنابراین:

$$-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times -۳} ۱<-۳x<۲ \Rightarrow [-۳x]=۱ \Rightarrow y=[-۳x]+x=x+۱$$

روش دوم: از بازه‌ی داده شده عددی انتخاب می‌کنیم: مثلاً: $x=-\frac{۱}{۲}$. حال مقدار تابع y را به ازای این x محاسبه می‌کنیم:

$$y=\left[-۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)+\left|-\frac{۱}{۲}\right|\right]-\frac{۱}{۲}=\left[۱+\frac{۱}{۲}\right]-\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

تنها گزینه‌ای که اگر به جای x مقدار $-\frac{۱}{۲}$ قرار بدهیم، حاصل‌اش نیز $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. گزینه‌ی ۲ است.

۲۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$\lim_{x\to ۰^+} (۲|[۳x]|-۱)=-۱ \Rightarrow$ گزینه ۳ نادرست است.

$\lim_{x\to ۰^-} (۲|[۳x]|-۱)=۱ \Rightarrow$ گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند.

بنابراین با حذف گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴، گزینه‌ی ۲ درست است.

۲۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در بازه $[-۴, -۳]$ ، y مثبت و x منفی است که $xf(x)$ منفی می‌شود و قابل قبول نمی‌باشد. در بازه $[-۳, ۰]$ ، y منفی و x هم منفی است که $xf(x)$ مثبت می‌شود و قابل قبول است و در بازه $[۱, ۲]$ هم x و y مثبت هستند که قابل قبول است.

۲۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۲}{\sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{x^۲ + ۱ + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{x^۲ + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^۲ + ۱} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$$

با فرض $t = \sqrt{x^۲ + ۱}$ به تابع $g(t) = t + \frac{۱}{t}$ می‌رسیم. واضح است که $t \in [۱, +\infty)$، برد توابع f و g با هم برابر است.

$$g'(t) = ۱ - \frac{۱}{t^۲} = \frac{t^۲ - ۱}{t^۲} \geq ۰$$

بنابراین g در دامنه‌ی تعریفش اکیداً صعودی است.

$$t \geq ۱ \Rightarrow g(t) \geq g(۱) \Rightarrow g(t) \geq ۲$$

بنابراین:

$$R_g = R_f = [۲, +\infty)$$

(۳۰) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که رادیکال‌ها با فرجه زوج، زمانی معنی‌دار هستند که عدد زیر رادیکال غیرمنفی باشد پس داریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$$

$\frac{x-۱}{x-۳}\geqslant ۰$:

x		۱		۳	
$x-۱$	-		+		+
$x-۳$	-		-		+
$\frac{x-۱}{x-۳}$	+	•	-		+

$\Rightarrow x\leqslant ۱$ یا $x>۳$

$\frac{۲-x}{x}\geqslant ۰$:

x		۰		۲	
$۲-x$	+		+		-
x	-		+		+
$\frac{۲-x}{x}$	-		+	•	-

$\Rightarrow ۰<x\leqslant ۲$

برای به دست آوردن دامنه تعریف تابع f ، اشتراک دامنه‌های دو عبارت لازم است. در نتیجه $x\in(۰,۱]$ حاصل می‌شود.

(۳۱) گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$|x-۱|-۴\geqslant ۰\Rightarrow |x-۱|\geqslant ۴\Rightarrow \begin{cases}x-۱\geqslant ۴\\ \text{یا}\\ x-۱\leqslant -۴\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x\geqslant ۵\\ \text{یا}\\ x\leqslant -۳\end{cases}$$

(۳۲) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین:

$$y=\sqrt{۴-|x-۱|}\Rightarrow ۰\leq ۴-|x-۱|\Rightarrow |x-۱|\leq ۴\ (|u|\leq a\Rightarrow -a\leq u\leq a)\Rightarrow -۴\leq x-۱\leq ۴\Rightarrow -۳\leq x\leq ۵$$

بنابراین دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $[-۳,۵]$ است که شامل ۹ عدد صحیح است ($\{-۳,-۲,\dots,۴,۵\}$).

تذکر: تعداد اعداد صحیح که در رابطه‌ی $a\leq x\leq b$ با شرط $a,b\in Z$ صدق می‌کنند، برابر است با $b-a+۱$.

۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با به دست‌آوردن دامنه‌ی تابع داده شده، مسیر مناسبی برای تعیین برد آن گشوده می‌شود:

$$y=\sqrt{۱۷-x^{۲}} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} ۱۷-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۱۷ \Rightarrow D_f=\left[-\sqrt{۱۷},\sqrt{۱۷}\right]$$

حال با حرکت در جهت معکوس و در نتیجه‌ی اجرای فرآیند برگشت‌پذیر زیر، به حدود y می‌رسیم:

$$-\sqrt{۱۷}\leq x\leq \sqrt{۱۷} \xrightarrow{u^{۲}\leq a^{۲}\Leftrightarrow -a\leq u\leq a} x^{۲}\leq ۱۷ \xrightarrow{x^{۲}\geq ۰} ۰\leq x^{۲}\leq ۱۷$$

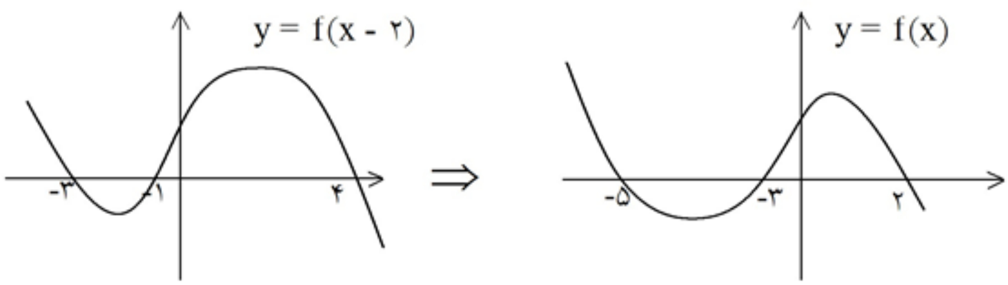
$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۱۷\leq -x^{۲}\leq ۰ \xrightarrow{+۱۷} ۰\leq ۱۷-x^{۲}\leq ۱۷$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین جذر می گیریم}]{\text{با توجه به منفی بودن}} ۰\leq \sqrt{۱۷-x^{۲}}\leq \sqrt{۱۷}$$

$$\xrightarrow{\text{حدود } y} ۰\leq y\leq \sqrt{۱۷} \Rightarrow R_f=\left[۰,\sqrt{۱۷}\right]$$

پس مجموعه‌ی اعضای صحیح برد تابع فوق $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ است و تعداد اعضای آن ۵ تا می‌باشد.

۳۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که نمودار $y=f(x-۲)$ داریم برای رسم $y=f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x)\geq ۰ \xrightarrow[\text{هم علامت باشند}]{f(x) \text{ و } x \text{ باید}} \begin{cases} x\geq ۰ \text{ و } f(x)\geq ۰ \Rightarrow x\in[۰,۲] \\ x\leq ۰ \text{ و } f(x)\leq ۰ \Rightarrow x\in[-۵,-۳] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D=[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

۳۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

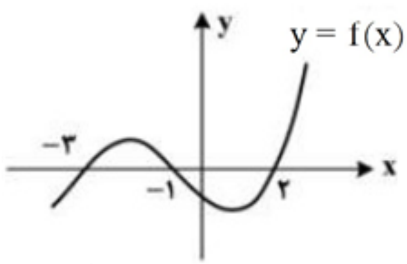
$$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_f=[-3,1)\cup(1,3]$$

$$(k-2, 3k+2)\subset D_f \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} k-2 \geq 1 \Rightarrow k \geq 3 \quad \text{اشتراک ندارد} \\ 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{یا} \\ \begin{cases} 3k+2 \leq 1 \Rightarrow k \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow k \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

بهترین گزینه، گزینه‌ی ۴ است.

۳۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{(x+1).f(x)}_{g(x)}} \quad \text{دامنه تابع} = ?$$

x		-۳		-۱		۲	
x + ۱	-		-	0	+		+
f(x)	-	0	+	0	-	0	+
g(x)	+	0	-	0	-	0	+

$$g(x)\geq 0$$
$$(-\infty, -3]\cup\{-1\}\cup[2, +\infty)$$

چون گفته تابع غیر نقطه ای است بنابراین ۱- از دامنه حذف می شود و درنتیجه دامنه به صورت زیر نوشته می شود.

$$(-\infty, -3]\cup[2, +\infty)$$

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$x \to x - ۱۲ \Rightarrow$ ۱۲ واحد در جهت مثبت محور x ها

$y \to y + ۲ \Rightarrow$ ۲ واحد در جهت مثبت محور y ها

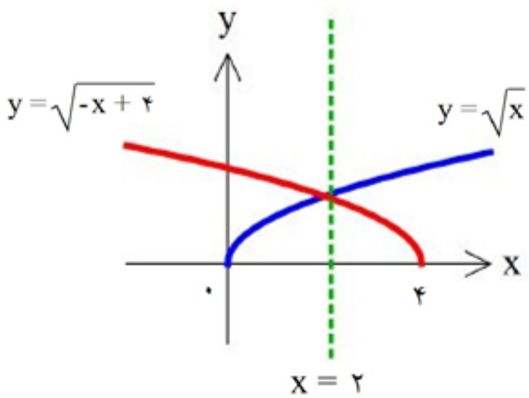
$$\sqrt{x - ۱۲} + ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{matrix} x - ۱۲ \geq ۰ \\ x \geq ۰ \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{x \geq ۱۲}_{\text{دامنه جواب}}$$

$$\sqrt{x - ۱۲} = \sqrt{x} - ۲ \Rightarrow \cancel{x} - ۱۲ = \cancel{x} - ۴\sqrt{x} + ۴ \Rightarrow ۴\sqrt{x} = ۱۶ \Rightarrow \sqrt{x} = ۴ \Rightarrow x = ۱۶$$

$$x = ۱۶ \Rightarrow y = ۴$$

$$A(۱۶ , ۴) , B(۰ , ۰) \Rightarrow AB = \sqrt{۱۶^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲^۸ + ۲^۴} = \sqrt{۲^۴(۲^۴ + ۱)} = ۴\sqrt{۱۷}$$

۳۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باید به جای x، $x - ۴$ قرار دهیم (۴ واحد به طرف راست) و سپس حاصل را قرینه کنیم (قرینه نسبت به محور y ها). دو نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{-(x - ۴)}$ را رسم می‌کنیم.



۳۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در یک تابع یک به یک اگر y ها یکسان باشند، x ها نیز یکسان است و در یک تابع اگر x ها یکسان باشند. y هانیز یکسان است.

$$\Rightarrow \begin{cases} m + ۱ = ۳ \Rightarrow m = ۲ \\ n + ۲ = ۱ \Rightarrow n = -۱ \end{cases} \Rightarrow m + n = ۱$$

۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تابع یک به یک داریم:

$$\forall\ (x_۱ , y_۱) , (x_۲ , y_۲) \in f : y_۱ = y_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

$$(m , ۳) , (-۱ , ۳) \in f \Rightarrow m = -۱ \Rightarrow (۲m , a) = \left.\begin{matrix} (-۲ , a) \in f \\ (-۲ , ۲) \in f \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = ۲$$

۴۱) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(۳,۲)=(۳,a^{۲}-a)\Rightarrow a^{۲}-a=۲\Rightarrow a^{۲}-a-۲=۰\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}a=۲\\a=-۱\end{cases}$$

ب) شرط یک‌به‌یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند. $(۳,۲)=(b,۲)\Rightarrow b=۳$

اما از میان دو مقدار به‌دست آمده برای a، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول می‌باشد. زیرا اگر $a=-۱$ باشد، دو زوج مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a,b)=(۲,۳)$ می‌باشد.

۴۲) گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=۲x-|۴-۲x|=\begin{cases}۲x+۴-۲x & x>۲\\ ۲x-۴+۲x & x<۲\end{cases}$$

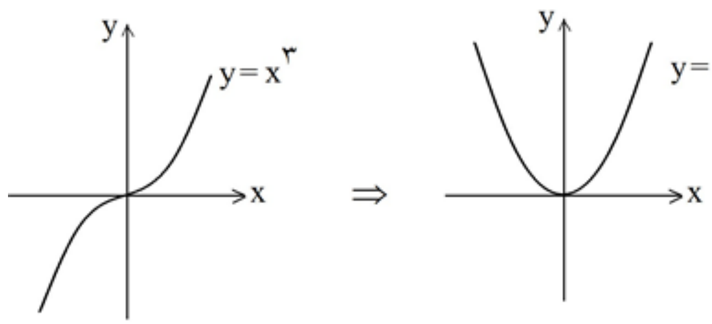
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۴ & x>۲\\ ۴x-۴ & x<۲\end{cases}$$

به ازای $x<۲$ تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

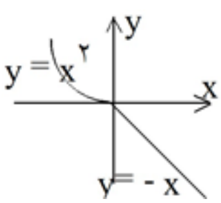
$$x<۲\Rightarrow ۴x-۴<۴\Rightarrow y<۴$$

$$y=۴x-۴\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱\ (x<۴)$$

۴۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۴۴) گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ یک‌به‌یک نیستند زیرا به ازای $x_۱=۱$ و $x_۲=-۱$ مقادیر $y=۱$ بدست می‌آید. اما گزینه ۴ یک به یک می‌باشد و طبق شکل دو خط موازی محور x ها منحنی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند پس گزینه ۴ درست است



۴۵) گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر f یک تابع معکوس‌پذیر باشد و نقطه‌ی (α,β) روی تابع f باشد، یعنی داشته باشیم $f(\alpha)=\beta$، آن گاه $f^{-۱}(\beta)=\alpha$ بوده و نقطه‌ی (β,α) بر روی تابع معکوس f قرار دارد. بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$f(x)=x^{۳}+\sqrt{x}\Rightarrow f(۴)=۴^{۳}+\sqrt{۴}=۶۴+۲=۶۶\Rightarrow f^{-۱}(۶۶)=۴\Rightarrow (۶۶,۴)\in f^{-۱}$$

گزینه‌ی (۱) یعنی نقطه‌ی $(۴,۶۶)$ بر روی خود تابع f قرار دارد، گزینه‌ی (۳) یعنی $(۶۶,۴)$ بر روی معکوس تابع f قرار دارد. به همین ترتیب نقطه‌ی $(۱,۲)$ روی تابع f و نقطه‌ی $(۲,۱)$ روی تابع $f^{-۱}$ می‌باشد.

۴۶ برای اینکه نمودار تابع معکوس بر نمودار تابع منطبق باشد، اگر x را به y تبدیل کنیم، نباید نمودار تغییر کند و این خاصیت در گزینه ۴ وجود دارد زیرا:

$$y = -x \Rightarrow x = -y$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۴۷ اگر زوج مرتب (a , b) متعلق به f باشد حتماً زوج مرتب (b , a) متعلق به معکوس f است یعنی:

$$(a , b) \in f \Leftrightarrow (b , a) \in f^{-۱}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده و ضابطه تابع f داریم $f(۰) = ۱$ ، چون $(۰ , ۱) \in f$ است پس $(۱ , ۰) \in f^{-۱}$ می‌باشد با توجه به مطالب فوق گزینه ۳ صحیح است.

۴۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

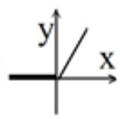
$$A\left|\begin{matrix}a\\ ۴\end{matrix}\right. \in f \Rightarrow ۴ = -x + \sqrt{-۲x} \Rightarrow \sqrt{-۲x} = x + ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} -۲x = x^{۲} + ۸x + ۱۶$$

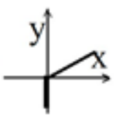
$$x^{۲} + ۱۰x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ & \text{قابل قبول} \\ x = -۸ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته: این تست به کمک گزینه‌ها به سادگی حل می‌شود.

۴۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف قدرمطلق مسئله را ساده می‌کنیم:

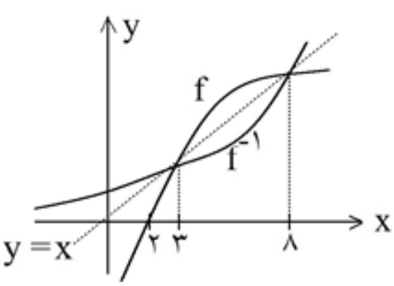
$$y = \begin{cases} ۲x + ۲x & x \geq ۰ \\ ۲x - ۲x & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع فوق بصورت 

می‌باشد. چون معکوس یک تابع، تقارن یافته آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم یعنی $(y = x)$ است. پس معکوس منحنی نمایش تابع بصورت 

می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۵۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

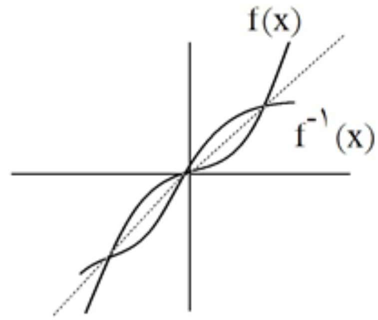


$$x - f^{-۱}(x) \geq ۰ \Rightarrow x \geq f^{-۱}(x)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیدا صعودی}} f(x) \geq f\left(f^{-۱}(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq x \Rightarrow x \in [۳,۸]$$

۵۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^{۲} & x \geq ۰ \\ x(-x) = -x^{۲} & x < ۰ \end{cases}$$

۵۲ این تابع یک به یک است پس دارای وارون است و برای یافتن وارون آن باید جای x و y را عوض کنیم و سپس y را برحسب x بیابیم: $(y = ۲x + ۳ \Rightarrow x = ۲y + ۳ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲})$ که $y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲}$ ضابطه تابع وارون است. و گزینه ۴ جواب صحیح است.

۵۳ برای یافتن وارون تابع $y = f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه نموده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

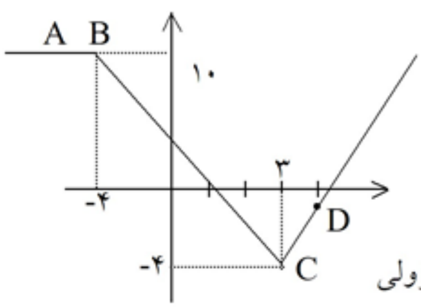
$$y = ۲x + ۱۴ \Rightarrow x = \frac{y - ۱۴}{۲} \Rightarrow y = \frac{x}{۲} - ۷$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۵۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای یافتن معادله خط نسبت به $y = x$ کافیست جای x و y را عوض کنیم پس داریم:

$$x = ۲y + ۲ \Rightarrow ۲y = x - ۲$$

۵۵ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۴| + x$$

x	-۵	-۴	۳	۴
y	۱۰	۱۰	-۴	-۲
	A	B	C	D

فاصله‌ی اکیداً نزولی : $x \in [-۴, ۳]$, $y \in [-۴, ۱۰] R_f \Rightarrow D_{f^{-۱}} = [-۴, ۱۰]$

برای رسیدن به ضابطه معادله‌ی خطی که از 'B و 'C نقطه‌ی متناظر B و C می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} B'(۱۰, -۴) \\ C'(-۴, ۳) \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{۷}{-۱۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y - ۳ = \frac{-۱}{۲}(x + ۴)$$

$$y = -\frac{۱}{۲}x + ۱ = f^{-۱}(x)$$

تذکر: با گزینه‌ها هم این تست به‌راحتی حل می‌شود.

۵۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|=\begin{cases}(۲x-۶)-(x+۱) & x\geqslant ۳\\ -۲x+۶-(x+۱) & -۱\leqslant x<۳\\ -۲x+۶-(-x-۱) & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-۷ & x\geqslant ۳\\ -۳x+۵ & -۱\leqslant x<۳\\ -x+۷ & x<-۱\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی $y=x-۷$ برای $x\geqslant ۳$ صعودی است.

$$x\geqslant ۳\xrightarrow{-۷}x-۷\geqslant -۴\Rightarrow y\geqslant -۴$$

$$y=x-۷\Rightarrow y+۷=x\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=x+۷$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y\geqslant -۴$ برای تابع معکوس محدوده‌ی دامنه می‌شود.

۵۷ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای به‌دست آوردن قرینه‌ی هر نقطه یا منحنی نسبت به نیم‌ساز ربع اول، کافی است جای x و y را باهم عوض کنیم.

$$ax+by=۸\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y=x}bx+ay=۸$$

این خط باید بر خط $۲x-۳y=b$ منطبق باشد، پس:

$$\frac{b}{۲}=\frac{a}{-۳}=\frac{۸}{b}\Rightarrow b^۲=۱۶\Rightarrow\begin{cases}b=۴\Rightarrow a=-۶\Rightarrow a+b=-۲\\ b=-۴\Rightarrow a=۶\Rightarrow a+b=۲\end{cases}$$

۵۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای یافتن قرینه‌ی هر منحنی نسبت به خط $y=x$ کافی است جای متغیرهای x و y عوض شود. زیرا قرینه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم همان تابع وارون است. پس:

$$۳x-۲y=۴\Rightarrow ۳x-۴=۲y\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x-۲\Rightarrow \text{عرض از مبدا}=-۲$$

۵۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_{\frac{۲f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=\{۱,۲,۳\}-\{۳\}=\{۱,۲\}$$

$$\left(\frac{۲f}{g}\right)(۱)=\frac{۲f(۱)}{g(۱)}=\frac{۲(۲)}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

$$\left(\frac{۲f}{g}\right)(۲)=\frac{۲f(۲)}{g(۲)}=\frac{۲(۳)}{۶}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲f}{g}=\left\{\left(۱,\frac{۴}{۵}\right),(۲,۱)\right\}$$

۶۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^۳}{x^۲}=x\,,\ x\neq ۰\Rightarrow y=\{\pm ۵,\pm ۴,\ldots,\pm ۱\}\Rightarrow \text{۱۰ تا}$$