گروه آموزشی آفتاب کنکور تیزهوشان

ریاضی ۳

علوم تجربی

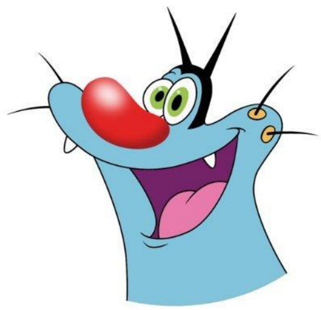
مخصوص داوطلبان کنکور و امتحانات نهایی

جزوه سطح دشوار برای رتبه های زیر ۱۰۰۰

مولفین : گروه ریاضی با سرپرستی استاد میعاد دارستانی

تدریس آنلاین و حضوری دروس تخصصی تجربی در اکثر نقاط کشور

اصل
در خود
ریاضی
جزوه که
و



دکترین و پرستارهای محترم!!! ورود شما رو به ریاضیات دوازدهم تبریک عرض می کنم. میشه گفت که داستان ریاضی تجربی ، همین ریاضی ۳ دوازدهم می باشد که مسائل اساسی ریاضی یعنی حد و مشتق را جای داده است. مباحث ریاضیات ۳ از مباحث آسون حساب میشه . کلا خیالیتون رو راحت کنم که درسیه که جز با تکرار و تمرین فراوان نمیشه اصلا در اون تسلط پیدا کرد. پس تست های منتخب این صرفا برای رسیدن شما به تسلط انتخاب شده رو حتما جدی بگیرد. امیدوارم که با قبولیتون دل پدر و مادر خانوادتون رو پس از یک دوره ی سخت از زندگی شاد کنید. انشا الله.

توی این جزوه مباحث رو به چند سطح بیان کردیم. اول در سطح سوالات امتحانی کلاسی تالیفی. دوم نمونه سوال های امتحانی پایانی مدارس برتر کشور و سوم در سطح سوالات کنکور سراسری.تمامی نکاتی که ممکنه برای یک فصل مطرح بشه رو به صورت کامل در جزوه بیان کرده ایم.

البته هیچ جزوه ای خالی از ایراد و کم و کاستی نیست . شما می تونید این جزوه رو پرینت گرفته و در گوشه کنار جزوه مطالبی را که به نظرتون مفیده یادداشت کنید و به جزوه اضافه کنید.

نظرات و پیشنهادات خودتون رو میتونید با مهندس دارستانی با شماره تلفن ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷ در میان بگذارید. (در تمامی اپلیکیشن ها ی اجتماعی و تماس در خدمتتون هستیم) در صورت درخواست مشاوره تلفنی و حضوری و همچنین تدریس آنلاین میتوانید به این شماره یا ایمیل تماس بگیرید.

بی جهد به عالم معانی نرسی

زنده به حیات جاودانی نرسی

تا همچو خلیل به آتش اندر نشوی

چون خضر به آب زندگانی نرسی

توابع چند جمله ای

بزرگترین توان متغیر در یک عبارت جبری برابر درجه آن عبارت جبری می باشد.

مثال :درجه عبارت جبری زیر را بنویسید.

$$y = ax^{۴} + bx^{۲} + cx^{-۲}$$

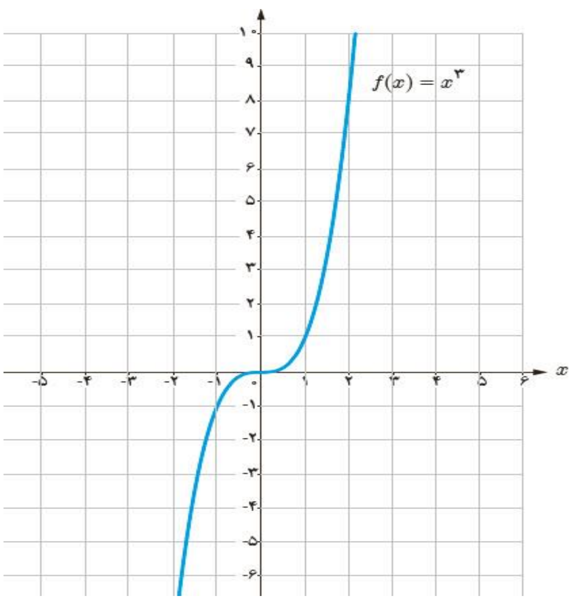
جواب: بزرگترین توان متغیر در این عبارت ۴ است. لذااین عبارت ۴ است.

تابع درجه ۳

یکی از توابع معروف ، تابع درجه ۳است. ساده ترین تابع درجه ۳ برابر $y = x^{۳}$ می باشد.

فرم کلی تابع درجه سوم به صورت $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ می باشد.

نمودار تابع $y = x^{۳}$ به صورت مقابل است.



انتقال و جابه جایی نمودار ها را در ریاضیات پایه خواندید. در این جزوه سعی میکنم خلاصه نکته ها و کلیات انتقال رو براتون توضیح بدم.

***نمودار $f(x) + b$انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه b در راستای مثبت یا منفی (بستگی به علامت b)محور Y می باشد.**

***نمودار $f(x + b)$ انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه b در جهت منفی محور x می باشد.**

***نمودار $f(x - b)$ انتقال نمودار f(x) به اندازه b در جهت مثبت محور x ها می باشد.**

نکته: اگر فرم گسترده ی تابع درجه سوم در سوال باشد و رسم نمودار مد نظر سوال باشد باید حتما آن فرم را به فرم فشرده تبدیل کنیم و بعد آن را رسم کنیم.(درمورد بقیه ی انواع توابع هم همین گونه می باشد)

(امتحان نهایی هماهنگ کشوری)

صحیح یا غلط بودن موارد زیر را مشخص کنید.

الف)نمودار $y = x^۲$ در دامنه $[۰,۱]$ بالاتر از نمودار $y = x^۲$ قرار میگیرد.

ب)دامنه نمودار $f(x) = ax^۳ + bx$ همواره اعداد مثبت حقیقی می باشد.

پاسخ: اگر تمرین کتاب رو حل کرده باشید یا نمودار را رسم کنید ، تابع $y^۲$ در بازه $[۰,۱]$ بالاتر از نمودار $y^۳$ قرار میگیرد. لذا این مورد غلط می باشد.

ب)دامنه ی تابع درجه سوم همواره تمام اعداد حقیقی می باشد . لذا این گزینه هم اشتباه است.

(آزمون آزمایشی سنجش)

نمودار تابع $y = x^۲ + ۳x + ۵$ را ۷ واحد به طرف yهای منفی، سپس ۱ واحد بـه طـرف xهـای مثبـت انتقـال می‌دهیم. نمودار جدید در بازهٔ (۱ , ۳) زیر تابع خطی $y = f(x)$ قرار دارد. $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

گزینه ۳ درست است.

ابتدا ضابطهٔ تابع جدید را به دست می‌آوریم:

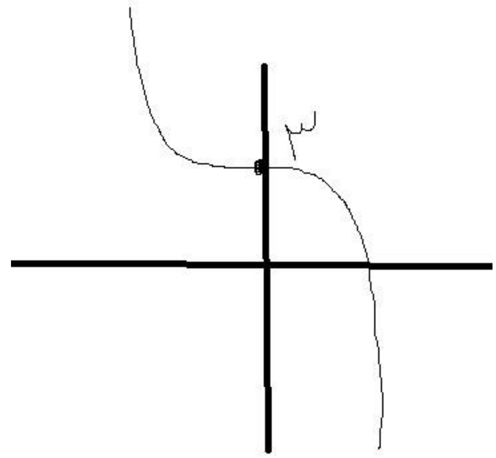
$$y = (x-۱)^۲ + ۳(x-۱) + ۵ - ۷ \Rightarrow y = x^۲ + x - ۴$$

چون نمودار جدید در بازهٔ (۱ , ۳) زیر تـابع خطـی $f(x) = ax + b$ قـرار دارد، پـس $f(x)$ از نقـاط (۱ , ۲−) و (۳ , ۸) می‌گذرد. بنابراین داریم:

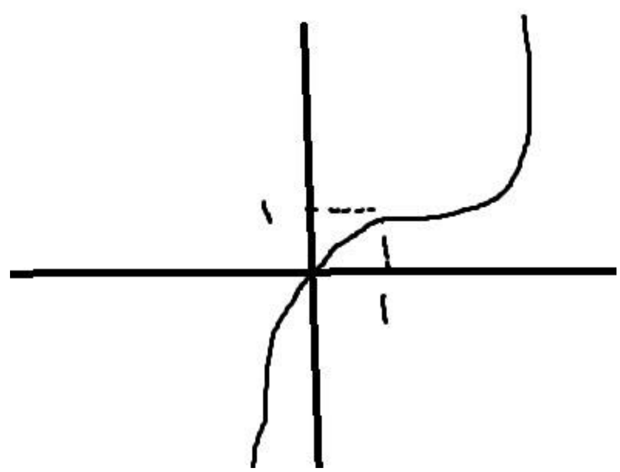
$$\begin{cases} f(۱) = -۲ \Rightarrow a + b = -۲ \\ f(۳) = ۸ \Rightarrow ۳a + b = ۸ \end{cases} \Rightarrow a = ۵, b = -۷ \Rightarrow f(x) = ۵x - ۷ \Rightarrow f(۲) = ۳$$

(مدرسه توحید تهران -منطقه ۲)

نمودار های $y = -x^۳ + ۳$ و $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱$ را رسم کنید.



فرم فشرده تابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱$ به صورت $(x - ۱)^{۳} + ۱$ می باشد.



تابع صعودی و نزولی

تابع صعودی تابعی می باشد که با افزایش دامنه ، برد تابع هم افزایش پیدا کند به طوری که هیچ بردی از برد ماقبل خود کوچکتر نباشد.

$$x_۱ \leq x_۲ \qquad f(x_۱) \leq f(x_۲)$$

تابع نزولی می باشد هرگاه با افزایش دامنه ، برد کاهش پیدا کند.

$$x_۱ \leq x_۲ \qquad f(x_۱) \geq f(x_۲)$$

اگر مساوی ها را در رابطه ی بالا حذف کنیم ، توابع به ترتیب صعودی اکید و نزولی اکید می شود که به آنها تابع یکنوا گفته می شود.

تابع ثابت نه صعودی می باشد نه نزولی.

(امتحان نهایی هماهنگ کشوری)

صحیح یا غلط بودن موارد زیر را مشخص کنید.

الف)نمودار $y = x^۳ + ۳$ در دامنه ی خود صعودی اکید می باشد.

ب)نمودار $y^۲$ در دامنه ی خود اکیدا صعودی می باشد.

جواب:با رسم نمودار ها به سادگی میتوان فهمید که گزینه ی الف صحیح و گزینه ی ب نادرست است.

تمرین (سنجش)

کدام تابع، تابعی صعودی است؟

۱) $f(x) = x^۲ - \sqrt{x}$

۲) $f(x) = x + \sqrt{۱ - x^۲}$

۳) $f(x) = x - \left[-\frac{x}{۲}\right]$

۴) $f(x) = \left[-\frac{x}{۲}\right] - ۲x$

گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = x - \left[-\frac{x}{۲}\right] \qquad x_۱ < x_۲ \Rightarrow -x > -x_۲ \Rightarrow -\frac{x_۱}{۲} > -\frac{x_۲}{۲} \Rightarrow \left[\frac{-x_۱}{۲}\right] \geq \left[-\frac{x_۲}{۲}\right]$$

$$-\left[-\frac{x_۱}{۲}\right] \leq -\left[-\frac{x_۲}{۲}\right] \Rightarrow x_۱ - \left[-\frac{x_۱}{۲}\right] \leq x_۲ - \left[-\frac{x_۲}{۲}\right] \qquad f(x_۱) \leq f(x_۲) \quad \text{تابع صعودی}$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=ax+7x+5$ یک تابع ثابت باشد، اندازهٔ بزرگترین بازه‌ای کــه در آن تــابع $g(x)=|x-a|-|x+a-1|$ صعودی اکید است، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲

گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=(a+7)x+5 \xrightarrow{\text{تابع ثابت } f} a+7=0 \to \boxed{a=-7}$$

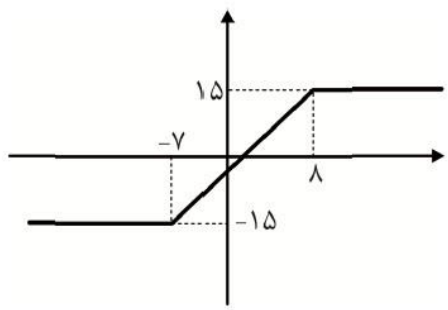
$$g(x)=|x+7|-|x-8|$$

ریشه داخل قدر مطلق $\nearrow x=-7$ ، $\searrow x=8$

$x<-7 \to g(x)=-15$

$-7\le x<8 \to g(x)=2x-1$

$x\ge 8 \to g(x)=15$



این تابع در بازهٔ $[-7,8]$ صعودی اکید است و اندازهٔ این بازه برابر ۱۵ واحد است.

تمرین(سنجش)

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-2x-1 & , \quad x<-5\\ -2 & , \quad -5\le x<1\\ 3x+a & , \quad x\ge 1\end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ یکنوا باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $a\le -5$ ۲) $a>5$ ۳) $a\ge -5$ ۴) $-5<a<5$

برای $x\ge 1$ ، به ازای $x=1$ مقدار $y=a+3$ به‌دست می‌آید. با توجه بـه اینکـه طبق فرض مسئله تابع f باید در دامنهٔ $[0,+\infty)$ یکنوا باشد، حالت (II) مـورد قبـول است. (توجه کنید که شیب خط مثبت است.)

یعنی: $a+3\ge -2 \Rightarrow a\ge -5$

ترکیب توابع

قبل از وارد شدن به ترکیب توابع لازم است که یادآوری به تابع دهم و یازدهم انجام بدیم.

تابع: مجموعه ای از زوج مرتب که هیچ دو عضو متفاوت آن دارای مولفه های یکسان نباشند.اگر مولفه ی اول آنها در دو یا چند زوج مرتب یکسان باشد ، حتما باید مولفه ی دوم آنها یکسان باشد.

هرگاه رابطه‌ای با چند ضابطه بیان شد در صورتی آن رابطه تابع است که دارای شرایط زیر باشد:

۱) تک تک آن ضابطه‌ها در دامنه‌ی تعریفشان، تابع باشد.

۲) اشتراک دو به دو ضابطه‌ها تهی باشد.

۳) در صورتی که اشتراک فاصله‌های مطرح شده تهی نباشد (دامنه‌های آن‌ها) به ازای عضوهای آن فاصله مشترک y های تولید شده دو ضابطه با هم برابر باشند.

دامنه(D_f) ورودی های ممکن برای یک تابع را دامنه ی تابع می گویند.

*در توابع رادیکالی با فرجه ی زوج اعدادی که زیر رادیکال را منفی میکنند جزیی از دامنه نیستند

*در توابع کسری، ریشه های مخرج کسر از دامنه نمی باشد.

*در توابع لگاریتمی اعدادی لگاریتم را صفر و منفی می کنند جزیی از دامنه نیستند.

برد تابع: خروجی تابع در ازای اعداد دامنه را برد تابع می گویند.در حقیقت عددی که در نهایت تابع به عنوان خروجی به ما می دهد برد یا y تابع نامیده می شود.

تساوی دو تابع : زمانی دو تابع یکسان هستند که اولا دامنه ی آنها یکسان باشد دوما به ازای x های مشترک ،y های یکسان دهند.

اعمال جبری روی توابع: توابع را در شرایط هایی میتوان با هم جمع یا از هم کم یا در هم ضرب یا تقسیم کرد.

اگر f و g با دامنه‌های D_f و D_g باشند.

$(kf)(x) = k\,f(x)$

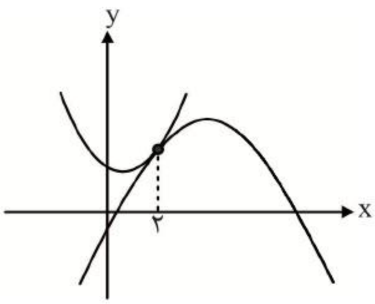
$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$(f.g)(x) = f(x)\,.\,g(x) \qquad D_{f.g} = D_f \cap D_g$

$(f-g)(x) = f(x)-g(x) \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$

تمرین (سنجش)



- در شکل مقابل اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع درجهٔ دوم و $f(x)-g(x) = ۳x^۲+mx+n$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۹

۲) -۱۲

۳) -۱۴

۴) -۸

. گزینه ۲ درست است.

واضح است که $f(۲)-g(۲)=0$ است، پس:

$$f(۲)-g(۲)=0 \Rightarrow ۱۲+۲m+n=0$$

از طرفی معادلهٔ $۳x^۲+mx+n=0$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^۲-۴(۳)(n)=0 \Rightarrow m^۲-۱۲(-۱۲-۲m)=0 \Rightarrow m^۲+۲۴m+۱۴۴=0$$
$$\Rightarrow (m+۱۲)^۲ = 0 \Rightarrow m=-۱۲$$

تمرین (سنجش)

- دامنه تابع $f(x)=\frac{c}{\sqrt{ax^۲+bx+۱}}$ بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ است. اگر $f(۴)=۲$ باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹

پیام مشاوره ای:ریاضی درسیه که با چند تا تست حل کردن محاله به تسلط برسید. رتبه های برتر کنکور میزان حل تستشون در دروس تخصصی به هزاران تست میرسه. از سوال غلط حل کردن ناامید نشید.(استاد میعاد دارستانی)

گزینه ۳ درست است.

چون دامنه تابع بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$است، پس $a=۰$است. از طرفی داریم:

$$bx+۱>۰\Rightarrow x>-\frac{۱}{b}\Rightarrow -\frac{۱}{b}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۲$$

حال چون $f(۴)=۲$ است، پس:

$$\frac{c}{\sqrt{۲(۴)+۱}}=۲\Rightarrow \frac{c}{۳}=۲\Rightarrow c=۶$$

بنابراین $b+c=۸$ می‌باشد.

تمرین (سنجش)

- اگر $f(۲x-۱)=۲x^۲-۳x-۱$ باشد، آنگاه $f(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})$ کدام است؟

۱) $-۱/۵$ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۲

گزینه ۱ درست است.

$$۲x^۲-۳x-۱=۲(x-\frac{۳}{۴})^۲-\frac{۱۷}{۸}\ ,\ ۲x-۱=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}-\frac{\sqrt{۵}}{۴}$$

$$f(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})=۲(\frac{۳}{۴}-\frac{\sqrt{۵}}{۴}-\frac{۳}{۴})^۲-\frac{۱۷}{۸}=\frac{۵}{۸}-\frac{۱۷}{۸}=-۱/۵$$

تمرین (سنجش)

- اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و ۳ واحد به راست ببریم و نمودار تابع $y=۲x$ را ۲ واحد به چپ ببریم همدیگر را در نقطه به کدامین عرض قطع می‌کنند؟

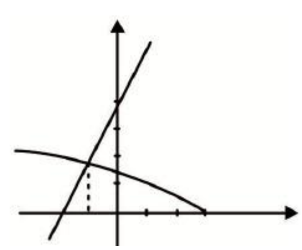
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $۱/۵$ ۴) ۲

گزینه ۴ درست است.

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به yها}}\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}}\sqrt{۳-x}$$

$$y=۲x\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}}y=۲(x+۲)=۲x+۴$$

$$x=-۱\Rightarrow y=۲$$



تمرین(سنجش)

اگر $x = x^{۲}f(x) - ۳f(-x)$ باشد، آنگاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) $-۰/۲۵$ ۲) $۰/۲۵$ ۳) $۰/۵$ ۴) $۰/۷۵$

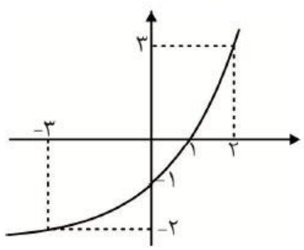
گزینه ۲ درست است.

$$x = ۳ \Rightarrow ۳ = ۹f(۳) - ۳f(-۳) \Rightarrow ۱ = ۳f(۳) - f(-۳)$$

$$x = -۳ \Rightarrow -۳ = ۹f(-۳) - ۳f(۳) \Rightarrow -۱ = ۳f(-۳) - f(۳) \Rightarrow ۲ = ۸f(۳) \Rightarrow f(۳) = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$$

تمرین (سنجش)

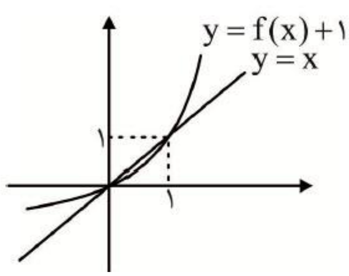
- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر و بزرگ‌ترین بازه xهایی که در $\sqrt{f(x) - x + ۱}$ صدق نمی‌کند، (m,n) باشد، آنگاه $m + n$ کدام است؟



۱) -۳
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

گزینه ۳ درست است.

با توجه به نمودارهای $y = f(x) + ۱$ و $y = x$ و ناحیه $f(x) + ۱ < -x$ که در زیر رادیکال منفی می‌شود، ناحیه (۱ و ۰) مورد نظر و $m + n = ۱$ است.



ترکیب دو تابع

۱) $f(g(x)) = fog(x)$ **یعنی در تابع** f **به جای** x **ها،** g(x) **قرار می‌دهیم.** $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

۲) $g(f(x)) = gof(x)$ **یعنی در تابع** g **به جای** x **ها،** f(x) **را قرار می‌دهیم.** $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

حتما به دامنه های g(x) در سوال ها دقت کنید.

امتحان نهایی

دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع gof را با توجه به تعریف آن به دست آورید.

نکته: *در امتحانات نهایی حتما پاسخنامه رو چک کنید و به شیوه ی نمره دهی و روشی که بهش نمره میدن دقت کنید. بچه ها خیلی وقت ها روش های کنکوری در امتحانات نهایی نمره نمیگیره. متاسفانه ما چون اغلب تست کار میکنیم در روش حل اغلب سوال ها در روش حل پرش زیاد داریم یعنی خیلی چیزا رو نمینویسیم در حالی که در امتحانات نهایی همیشه نیم تا ۰.۲۵ صدم متعلق به جواب نهایی است. پس مراقب باشید و حتما امتحانات نهایی سنوات گذشته رو با دقت مطالعه کنید.*

$$\underbrace{D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}}_{۰/۲۵}=\underbrace{\{x\geq ۴ \,|\, \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}}_{۰/۵}=\underbrace{[۴,۵)\cup(۵,+\infty)}_{۰/۲۵}$$

امتحان نهایی

اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید

پاسخ:

$$f(g(x))=۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴\ (۰/۵)\Rightarrow g(x)=x^۲-۲x+۶\ (۰/۵)$$

امتحان نهایی

توابع $\mathrm{f(x)}=\frac{x+۳}{۲x}$ و $g(x)=۳x-۱$ را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع fog را با استفاده از تعریف آن به دست آورید.

$$\overbrace{D_{fog}=\{x\in D_g \,|\, g(x)\in D_f\}}^{(۰/۲۵)}=\overbrace{\{x\in R \,|\, ۳x-۱\neq ۰\}}^{(۰/۷۵)}=R-\left\{\frac{۱}{۳}\right\}\quad(۰/۲۵)$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=\begin{cases}|x| & x<0\\ -|x| & x\geq 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$ باشد، ضابطه تابع $gof(x)$ کدام است؟

۱) $gof(x)=-x^2, x\in\mathbb{R}$

۲) $gof(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$

۳) $gof(x)=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$

۴) $gof(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x^2 & x\geq 0\end{cases}$

گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & x<0\\ -|x| & x\geq 0\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$$

$$g(f(x))=g(|x|)=|x|^2=x^2 \qquad x<0$$

$$g(f(x))=g(-|x|)=-(-|x|)^2=-x^2 \qquad x\geq 0$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=3x^2+x-1$ و $g(x)=1-2x$ باشد، آنگاه در معادلهٔ: $(fog)(x)+(gof)(x)=5-6x$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) -1

گزینه ۴ درست است.

$$(fog)(x)=f(1-2x)=3(1-2x)^2+(1-2x)-1=4x^2-6x+1$$

$$(gof)(x)=g(3x^2+x-1)=1-2(3x^2+x-1)=-6x^2-2x+3$$

$$(fog)(x)+(gof)(x)=5-6x$$

$$4x^2-6x+1-6x^2-2x+3=5-6x$$

$$-2x^2-2x-1=0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2)}{-2}=-1$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$ و $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$، دامنه تابع $gof(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-2,1)$ ۲) $\mathbb{R}-[-2,1]$ ۳) $(-\infty,-2]$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\infty)$

گزینه ۱ درست است.

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},\frac{x-1}{2x+1}\geq 0,\frac{x-1}{2x+1}\leq 1\Rightarrow \frac{-x-2}{2x+1}\leq 0\Rightarrow (x<-\frac{1}{2} \text{ یا } x\geq 1),(x\leq -2 \text{ یا } x>-\frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-(-2,1)$$

تمرین (سنجش)

کدام گزاره زیر درست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-x$ و $fog(x)=4x^2+2x$ باشد آنگاه $g(x)=2x+1$ است.

ب) به ازاء هر دو تابع g و f که $f\neq g$ باشد، آنگاه $fog(x)\neq gof(x)$

پ) اگر $f(x)$ دارای دامنه $[-3,2)$ باشد، آنگاه دامنه $3f(|x-1|)+2$ برابر $[-1,3]$ است.

۱) الف ۲) ب ۳) پ ۴) الف ـ پ

. گزینه ۳ درست است.

$$g(x)=ax+b\Rightarrow f(ax+b)=a^2x^2+(2ab-a)x+b^2-b$$
$$a^2=4\Rightarrow a=2\Rightarrow b=1$$
$$a=-2\Rightarrow b=0$$

پس $g(x)=2x+1$ و $g(x)=-2x$ و گزاره نادرست است.

$$f(x)=2x\neq g(x)=\frac{11}{2}\Rightarrow fog(x)=gof(x)=x$$

و نادرست است.

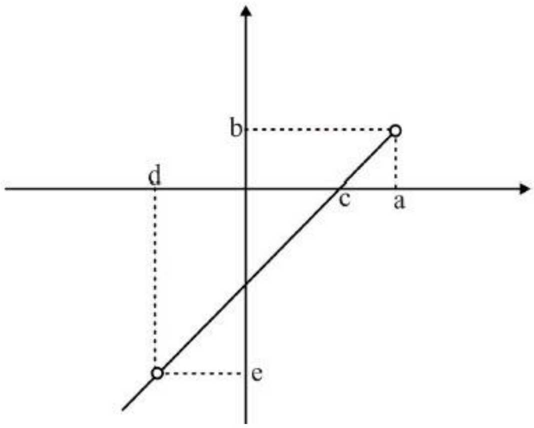
$$|x-1|\leq 2\Rightarrow -2\leq x-1\leq 2\Rightarrow -1\leq x\leq 3$$

گزاره پ درست است.

عبادت به جز خدمت خلق نیست / به سجاده و تسبیح و دلق نیست

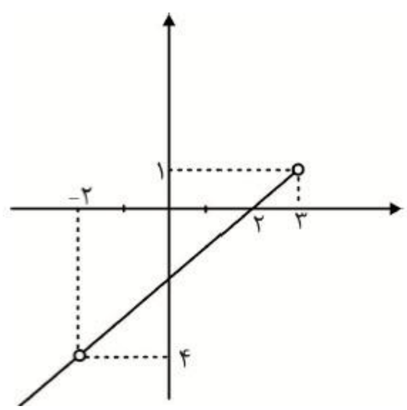
تمرین (سنجش)

- اگـــر $f(x)=(x^{۲}-۴)\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=(x+۲)\sqrt{۳-x}$ و نمودار $y=(\frac{f}{g})(x)$ به صورت زیر باشـد حاصـل $ac+bde$ کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۴
۳) -۲
۴) -۱۸

.گزینه ۲ درست است



$$D_{\frac{f}{g}}:(-\infty,۳)-\{-۲\}$$

$$y=\frac{f}{g}=\frac{(x^{۲}-۴)\sqrt{۳-x}}{(x+۲)\sqrt{۳-x}}=x-۲$$

$$a=۳,c=۲,b=۱,d=-۲,e=-۴$$

تمرین (سنجش)

اگر $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$, $g(x)=\frac{x+۱}{۲x-۱}$، آنگاه مقدار $(gof)(۵)\times(fog^{-۱})(۱)$، کدام است؟

۱) $۰/۸\sqrt{۳}$
۲) $۰/۶\sqrt{۳}$
۳) $۰/۸\sqrt{۵}$
۴) $۰/۶\sqrt{۵}$

گزینه ۱ درست است.

$$g^{-۱}(۱)=a\Rightarrow\frac{a+۱}{۲a-۱}=۱ \qquad g(f(۵))=g(۳)=\frac{۴}{۵}$$

پس $a=۲$ در نتیجه $f(g^{-۱}(۱))=f(۲)=\sqrt{۳}$ پس حاصل به‌صورت $۰/۸\sqrt{۳}$ است.

تمرین (سنجش)

اگر $f(x)=x^{۲}-x$ و $g(x)=۲x-۵$ باشد، نمودارهای دو تابع gof, fog با کدام طول‌ها متقاطع‌اند؟

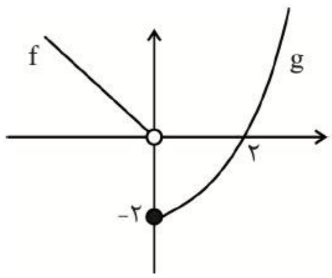
۱) $۵\pm\sqrt{۲/۵}$ ۲) $۵\pm\sqrt{۷/۵}$ ۳) $۳\pm\sqrt{۲/۵}$ ۴) $۳\pm\sqrt{۷/۵}$

گزینه ۲ درست است.

$$(fog)(x)=(۲x-۵)^{۲}-(۲x-۵)=۴x^{۲}-۲۲x+۳۰,(gof)(x)=۲x^{۲}-۲x-۵$$
$$۴x^{۲}-۲۲x+۳۰=۲x^{۲}-۲x-۵\Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۱۷/۵=۰\Rightarrow x=۵\pm\sqrt{۷/۵}$$

تمرین (سنجش)

- در شکل زیر، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. اگر کمترین مقدار تابع g برابر ۲- باشد، دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ کدام است؟



۱) $[۲,+\infty)$
۲) $(-\infty,۲)$
۳) $(-۲,۲)$
۴) $[۰,۲)$

گزینه ۴ درست است.

$$g(x)=ax^{۲}+bx+c$$

$$\left.\begin{array}{l}(۰,-۲)\in g\Rightarrow -۲=c\\ (۲,۰)\in g\Rightarrow ۴a+۲b-۲=۰\\ x_{۰}=-\dfrac{b}{۲a}=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow a=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}g(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}\ ,\ D_g=[۰,+\infty),D_f=(-\infty,۰)$$

$$D_{fog}=\left\{[۰,+\infty)\mid \frac{۱}{۲}x^{۲}-۲\in(-\infty,۰)\right\}$$

$$\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲<۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^{۲}<۲\Rightarrow x^{۲}<۴\Rightarrow -۲<x<۲$$

$$D_{fog}=\{[۰,+\infty)\bigcap(-۲,۲)\}=[۰,۲)$$

برای تعیین $g(x)$ وقتی که $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند کافی است $g(x)$ را در $f(x)$ به جای x قرار داده و $f(g(x))$ را تشکیل داده و مساوی $f(g(x))$ داده شده قرار داده و از حل این معادله $g(x)$ را به دست می‌آوریم.

محاسبه $f(x)$ وقتی $f(g(x))$ و $g(x)$ معلوم‌اند:

روش اول: $g(x)$ را برابر t اختیار کرده و x را بر حسب t در صورت امکان محاسبه می‌کنیم با قرار دادن آن در عبارت $f(g(x))$ و $f(t)$ محاسبه کرد. سپس با تبدیل t به x $f(x)$ مشخص می‌شود.

روش دوم: در این روش سعی می‌کنیم $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ مرتب کنیم سپس یک جا $g(x)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

تمرین (مکمل)

اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$ باشد، $f(x)$ کدامست؟

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\times x\times\frac{1}{x}=(x+\frac{1}{x})^2-2\Rightarrow x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow f(t)=t^2-2\Rightarrow f(x)=x^2-2$$

انتقال نمودار

*اگر f(x) یک تابع باشد ، برای رسم نمودار $f(x)+b$ نمودار f(x) را به اندازه ی b در جهت محور y ها انتقال می دهیم (اگر b مثبت باشد در جهت مثبت y و اگر منفی باشد در جهت منفی y)

*برای رسم نمودار f(x+c) اگر $c>0$ باشد نمودار f(x) را به اندازه ی c در جهت منفی محور x جابه جا می کنیم. اگر $c<0$ باشد نمودار f(x) را به اندازه ی c در جهت مثبت محور x انتقال می دهیم.

*برای رسم نمودار $af(x)$ بایدعرض نقاط نمودار f(x) را به در a ضرب کنیم.

اگر $a > ۱$ نمودار تابع در جهت عمودی با ضریب a منبسط می‌شود.

اگر $۰ < a < ۱$ نمودار تابع در جهت عمودی با ضریب a منقبض می‌شود.

اگر $-۱ < a < ۰$ نمودار تابع با ضریب a منقبض و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

اگر $a < -۱$ نمودار تابع با ضریب a منبسط و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

*برای رسم نمودار $f(bx)$ باید طول نقاط نمودار f(x) را در $\frac{۱}{b}$ ضرب کنیم.

نتیجه ۱: اگر $b > ۱$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محورx ها به دست می‌آید (نمودار با ضریب $\frac{۱}{b}$ منقبض می‌شود).

نتیجه۲: اگر $۰ < b < ۱$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور افقی به دست می‌آید (نمودار با ضریب $\frac{۱}{b}$ منبسط می‌شود).

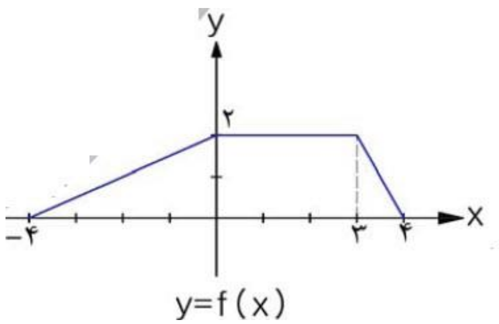
نتیجه۳: اگر $-۱ < b < ۰$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انبساط نمودار تابع $y = f(x)$ با ضریب $\frac{۱}{b}$ در راستای محور xها و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور yها حاصل می‌شود .

*برای رسم نمودار $-f(-x)$ باید قرینه ی نمودار f(x) را نسبت به هر دو محور x و y به دست بیاوریم.

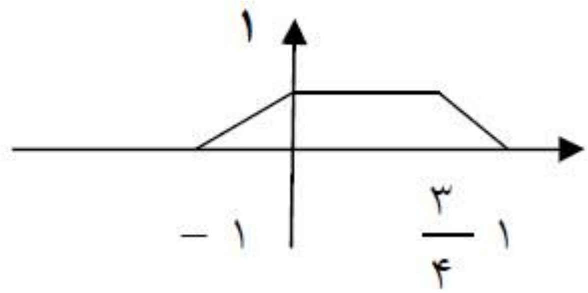
جهت مشاوره و حضور در کلاس های ما میتوانید به شماره ی ابتدای جزوه رجوع کنید(۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷)

(امتحان نهایی هماهنگ کشوری)

اگر نمودار تابع f(x) به صورت مقابل باشد ، نمودار تابع $\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.



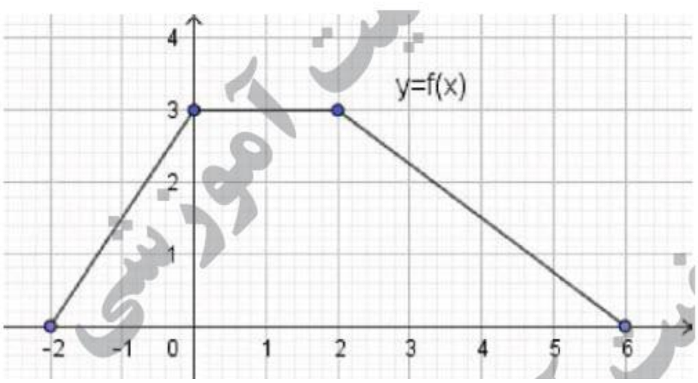
پاسخ:

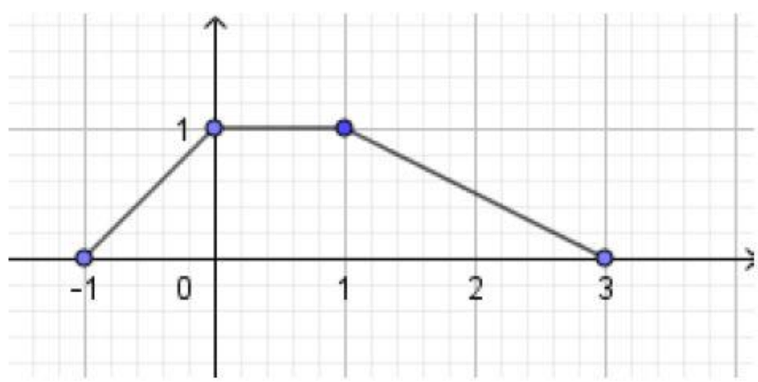


امتحان نهایی

نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}f(۳x)$ را رسم کنید



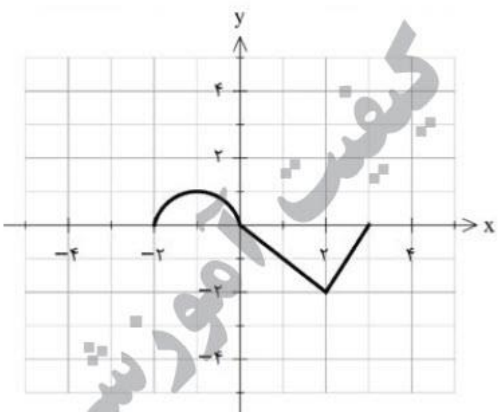


امتحان نهایی

نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

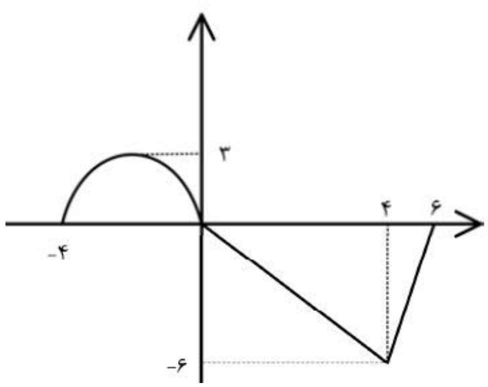
الف) نمودار تابع $y = ۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع $y = ۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را تعیین کنید.



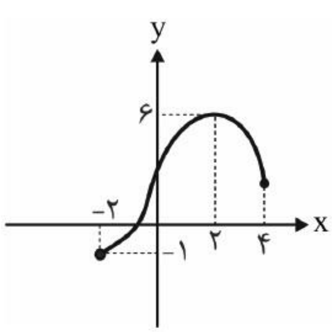
الف)رسم شکل (۰/۵)

ب) $D = [-۴,۶]$ (۰/۲۵)



تمرین (سنجش)

- اگر تمام نمودار تابع $y = \frac{۱}{۳}f(۴x+۲) - ۵$ به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = ۱ - f(\frac{۲x}{۳} + ۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳۶

۲) ۳۵

۳) ۲۶

۴) ۲۵

. **گزینه ۱ درست است.**

با توجه به نمودار:

$$-۲ \le x \le ۴ \to -۸ \le ۴x \le ۱۶ \to -۶ \le ۴x+۲ \le ۱۸ \to D_f = [-۶,۱۸]$$

از طرفی:

$$-۶ \le \frac{۲x}{۳}+۱ \le ۱۸ \to -۷ \le \frac{۲x}{۳} \le ۱۷ \to \frac{-۲۱}{۲} \le x \le \frac{۵۱}{۲} \to D_{۱-f(\frac{۲x}{۳}+۱)} = [-۱۰/۵,۲۵/۵]$$

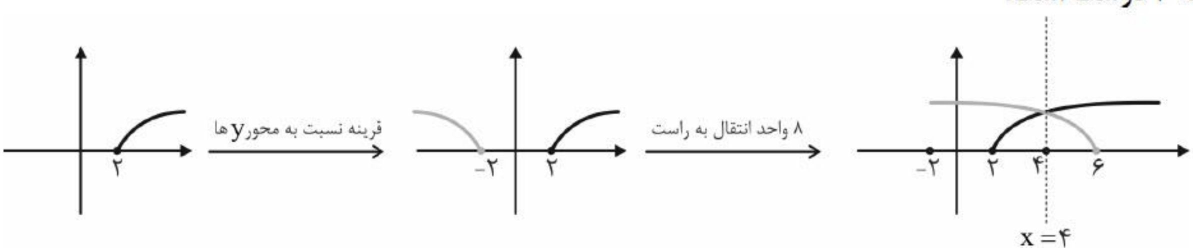
اعداد صحیح این بازه $-۱۰,-۹,\dots,۰,۱,۲,\dots,۲۵$ می‌باشند که تعدادشان برابر ۳۶ است.

تمرین (سنجش)

- **قرینه نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده و سپس منحنی حاصل را ۸ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی جدید و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟**

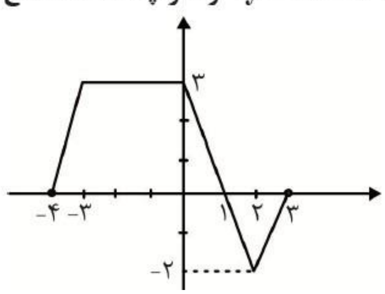
۱) $x=۵$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

گزینه ۴ درست است.



تمرین (سنجش)

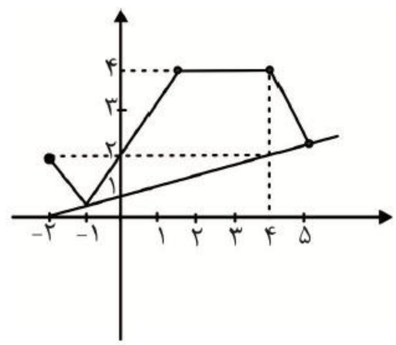
اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}f(۱-x)+۲$ خط $۹y-۲x=۸$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

گزینه ۳ درست است.

خط $9y-2x=8$ را رسم می‌کنیم.



در دو نقطه قطع می‌کند.

$$x=5 \Rightarrow y=\frac{2}{3}f(-4)+2=2$$

$$x=4 \Rightarrow y=\frac{2}{3}f(-3)+2=4$$

$$x=1 \Rightarrow y=\frac{2}{3}f(0)+2=4$$

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}f(1)+2=2$$

$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{2}{3}f(2)+2=\frac{2}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow y=2$$

تمرین (سنجش)

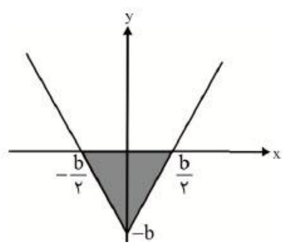
- طول تمام نقاط تابع $f(x)=|x|$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. تابع حاصل را چند واحد در راستای محور yها به سمت پایین انتقال دهیم تا مساحت سطح محصور بین نمودار و محور طول‌ها در پایین آن ۷۲ واحد مربع شود؟

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲

گزینه ۴ درست است.

تابع حاصل $y=|2x|-b$ است. پس:

$$\Rightarrow 72=\frac{1}{2}\times b\times b \Rightarrow b^2=144 \Rightarrow b=12$$

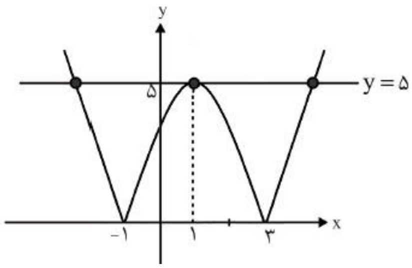


تمرین (سنجش)

- تابع $f(x)=x^2+2x-3$ را ابتدا ۲ واحد به راست، سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $y=g(x)$ به دست آید. به ازای کدام مقدار k معادلهٔ $|g(x)|=k$ دارای سه ریشه است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

برای رسم نمودار $y=|g(x)|$ کافی است قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور xها است، نسبت به محور xها قرینه کنیم. پس به ازای $k=۵$ معادلهٔ $|g(x)|=۵$ دارای سه ریشه است.



تمرین (سنجش)

تابع $f(x)=x^{۳}$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و آن را $g(x)$ می‌نامیم. اگر دامنه تابع $y=\sqrt{g(۳x-۲)-g(x^{۲})}$ به صورت $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

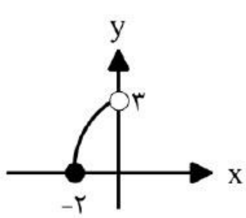
گزینه ۱ درست است.

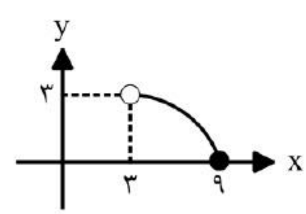
تابع $g(x)=-x^{۳}$ تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$g(۳x-۲)-g(x^{۲})\geq ۰ \Rightarrow g(x^{۲})\leq g(۳x-۲)\Rightarrow x^{۲}\geq ۳x-۲ \Rightarrow x^{۲}-۳x+۲\geq ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x-۲)\geq ۰ \Rightarrow ۱\leq x\leq ۲ \Rightarrow [a,b]=[۱,۲]\Rightarrow b-a=۲-۱=۱$$

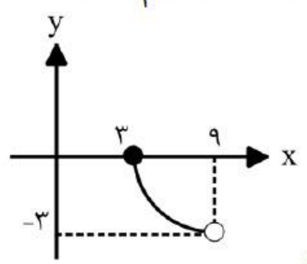
تمرین(ماز)

-نمودار تابع $y=f(۱-x)$ را رسم کرده‌ایم. نمودار $f(\frac{x}{۳})$ چگونه است؟

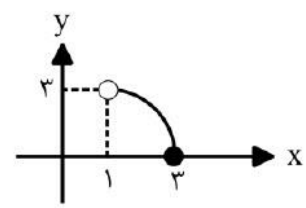




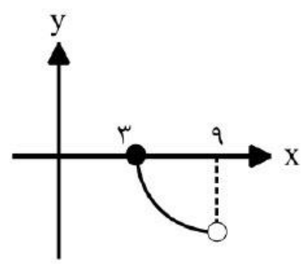
۱)



۲)



۳)



۴)

حل: برعهده ی خودتون !

تابع وارون

هرگاه f تابعی یک به یک باشد در صورتی که جای x و y را عوض کنیم تابع جدیدی بدست می‌آید کـه آن‌را معکـوس تـابع f گویند و با نماد f^{-1} نشان می‌دهند.
برای بدست آوردن ضابطه معکوس تابع کافیست x را برحسب y پیدا کنیم.
نکات مربوط به تابع معکوس:

۱- $(a\,,\,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$

۲- $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

۳- $fof^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

٤- $f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

۵- $D_f = R_{f^{-1}}\,,\, R_f = D_{f^{-1}}$

٦- نمودار تابع f^{-1} همان نمودار f است که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه شده است.

۷- اگر f تابعی صعودی یا اکیداً صعودی باشد، f^{-1} نیز صعودی یا اکیداً صعودی است.

۸- اگر f تابعی نزولی یا اکیداً نزولی باشد، f^{-1} نیز نزولی یا اکیداً نزولی است.

۹- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ $\qquad$ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

امتحان نهایی

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دوتابع $f(x) = -\frac{2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ وارون یکدیگرند. (درست ، نادرست)

جواب:باید معکوس یکی از تابع ها را به دست بیاوریم. برای به دست آوردن معکوس ضابطه مراحل زیر را باید طی کنیم.

❋تابع را بر حسب x مرتب میکنیم. به این معنی که تمام اعداد و y را در یک طرف و x بدون ضریب را در یک طرف قرار می دهیم.

*بعد از انجام مرحله ی بالا ، جای x و y را عوض میکنیم. تابع به دست آمده تابع معکوس خواهد بود.

$$y = \frac{۲x + ۶}{-۷} \to\to -۷y = ۲x + ۶ \to\to -۷y - ۶ = ۲x$$

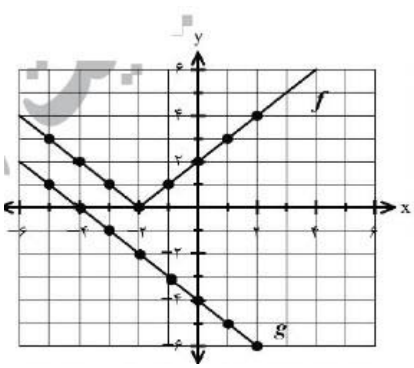
$$x = \frac{-۷y - ۶}{۲} \to\to y^{-۱} = \frac{-۷x - ۶}{۲}$$

بنابراین این گزینه غلط می باشد.

امتحان نهایی

الف) با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید. ۱) $(gof)(-۱)$ ۲) $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$

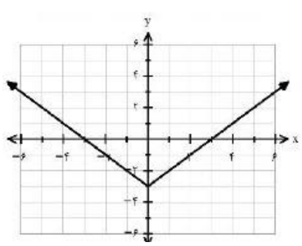
ب) نمودار تابع $f(x-۲)-۳$ را رسم کنید.



الف)

۱) $(gof)(-۱) = g(۱) = -۵$ $(۰/۵)$ ۲) $(g^{-۱}of^{-۱})(۲) = g^{-۱}(۰) = -۴$ $(۰/۵)$

ب)رسم درست نمودار یک نمره



صفحات:۲۳و۲۹

تمرین (سنجش)

اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد، مقدار $g^{-1}of^{-1}(5)$ را به دست آورید.

$$y=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow 8y=x-24 \Rightarrow x=8y+24 \Rightarrow f^{-1}(x)=8x+24 \Rightarrow f^{-1}(5)=64$$

$$y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow g^{-1}=(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$g^{-1}of^{-1}(5)=g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4$$

تمرین (سنجش)

اگر تابع وارون تابع $f(x)=2x+|x-1|$ به‌صورت $f^{-1}(x)=ax+b|x|$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۲ درست است.

با دادن مقدارهای کوچکتر یا بزرگتر از $x=1$ (ریشه عبارت داخل قدر مطلق در ضابطه **f**) و تعریف تابع وارون:

$$x=2 \to f(2)=5 \to f^{-1}(5)=2 : 5a+5b=2 \qquad (1)$$

$$x=-2 \to f(-2)=-1 \to f^{-1}(-1)=-2 : -a+b=-2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \to \begin{cases}5a+5b=2\\ -a+b=-2 \quad {}_{5\times}\end{cases} \Rightarrow \boxed{b=\frac{-4}{5}} \ , \ \boxed{a=\frac{6}{5}}$$

$$a-b=\frac{6}{5}-(\frac{-4}{5})=\frac{10}{5}=2$$

تمرین (سنجش)

- اگر وارون تابع $f(x)=6x^2-12x-x^3$ را به‌صورت $f^{-1}(x)=m+\sqrt[3]{ax+b}$ نمایش دهیم، حاصل $m(a+b)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) −۱۸ ۳) ۱۶ ۴) −۱۶

گزینه ۲ درست است.

$$f(x)=\underbrace{۶x^{۲}-۱۲x-x^{۳}+۸}-۸$$

$$f(x)=(۲-x)^{۳}-۸\rightarrow y+۸=(۲-x)^{۳}\rightarrow ۲-x=\sqrt[۳]{y+۸}$$

$$x=۲-\sqrt[۳]{y+۸}\rightarrow x=۲+\sqrt[۳]{-y-۸}\rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{-x-۸}$$

$$\underbrace{\boxed{m=۲}\quad\boxed{a=-۱}\quad\boxed{b=-۸}}_{m(a+b)=-۱۸}$$

تمرین (سنجش)

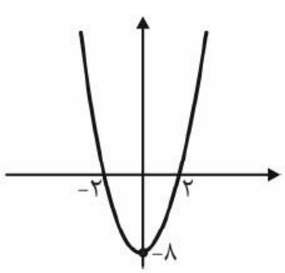
ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^{۲}|x|-۸$ در بازه‌ای که صعودی اکید است، در کدام مورد درست بیان شده است؟

۱) $f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}-۸\ ;x\le -۸$ 　　۲) $f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x+۸}\ ;x\le -۸$

۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}+۸\ ;x\ge -۸$ 　　۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۸}\ ;x\ge -۸$

گزینه ۴ درست است.

نمودار تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}x^{۳}-۸\ ;x\ge ۰\\ -x^{۳}-۸\ ;x<۰\end{cases}$ به‌صورت شکل زیر است.



این تابع در بازهٔ $[۰,+\infty]$ صعودی اکید است و ضابطهٔ وارون آن:

$$x\ge ۰\xrightarrow{y\ge -۸}y=x^{۳}-۸$$

$$y+۸=x^{۳}$$

$$x=\sqrt[۳]{y+۸}$$

تمرین (سنجش)

f تابع خطی با دامنه $[-۱,۳]$ است که از دو نقطه $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ می‌گذرد. ضابطهٔ تابع $g(x)=f(x)+f^{-۱}(x)$ و دامنه $g(x)$ به‌ترتیب در کدام مورد آمده است؟

۱) $[-۱,۶]\ ;y=۲x+۱$ 　　۲) $[-۱,۶]\ ;y=۲x$ 　　۳) $[۲,۳]\ ;y=۲x$ 　　۴) $[۲,۳]\ ;y=۲x-۱$

گزینه ۳ درست است.

f تابع خطی $f(x)=mx+h, D_f=[-۱,۳]$

شیب خط $m=\frac{۴-۲}{۱-(-۱)}=۱ \to y-۲=۱(x+۱) \to \boxed{f(x)=x+۳}$

$y=x+۳ \to x=y-۳ \to \boxed{f^{-۱}(x)=x-۳}$

$D_f-۱=R_f=[f(-۱),f(۳)]=[۲,۶]$

$D_g=D_{f^{-۱}\cap f}=[۲,۳]$

$g(x)=f(x)+f^{-۱}(x)=x+۳+x-۳=۲x$

تمرین (سنجش)

اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۴۲)-f^{-۱}(۱۲)$ کدام است؟

۱) ۳۹ ۲) ۳۶ ۳) ۳۳ ۴) ۳۰

گزینه ۳ درست است.

می‌دانیم:

$$\begin{matrix} f & & f^{-۱} \\ (a,b) & \longleftrightarrow & (b,a) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x-\sqrt{x}=۴۲ \to x=۴۹ \\ x-\sqrt{x}=۱۲ \to x=۱۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f^{-۱}(۴۲)-f^{-۱}(۱۶)=۴۹-۱۶=۳۳$$

تمرین (سنجش)

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، وارون $g(x)=f(۲x-۱)+۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(f^{-۱}(x-۲)+۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(f^{-۱}(x+۲)-۱)$

۳) $۲(f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۱)$ ۴) $۲(f^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})-۱)$

گزینه ۱ درست است.

$$f(۲x-۱)=g(x)-۲ \Rightarrow f^{-۱}of(۲x-۱)=f^{-۱}(g(x)-۲)$$

$$\Rightarrow ۲x-۱=f^{-۱}(g(x)-۲) \Rightarrow x=\frac{f^{-۱}(g(x)-۲)+۱}{۲}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{f^{-۱}(x-۲)+۱}{۲}$$

تمرین (گروه آموزشی آفتاب کنکور تیزهوشان)

تابع $y=f(x)$ یک تابع خطی و دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f^{-1}(2x)-x^2}$ بازهٔ $[-1,3]$ است. طول نقطهٔ تلاقی تابع $y=f(x)$ با نیمساز ناحیهٔ دوم کدام است؟

۱) $0/5$ ۲) ۱ ۳) $1/5$ ۴) ۲

گزینه ۳ درست است.

تابع $y=f^{-1}(2x)-x^2$ یک سهمی است. پس $[-1,3]$ صفرهای آن هستند:

$$\begin{cases} f^{-1}(-2)-1=0 \Rightarrow f^{-1}(-2)=1 \Rightarrow f(1)=-2 \\ f^{-1}(6)-9=0 \Rightarrow f^{-1}(6)=9 \Rightarrow f(9)=6 \end{cases}$$

حال تابع $y=f(x)$ را به دست می‌آوریم و تلاقی آن را با $y=-x$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ 9a+b=6 \end{cases} \Rightarrow 8a=8 \Rightarrow a=1, b=-3$$

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow x-3=-x \Rightarrow x=1/5$$

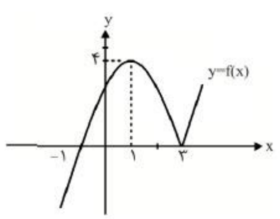
تمرین (سنجش)

. تابع $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-6x+9}$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. اگر دامنهٔ تابع $y=f^{-1}(x)$ در این بازه به صورت $[a,b]$ باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-6x+9} \Rightarrow f(x)=(x+1)\sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow f(x)=(x+1)|x-3|$$

$\Rightarrow$ 

بنابراین تابع در بازهٔ $[1,3]$ اکیداً نزولی است. می‌دانیم دامنهٔ تابع $y=f^{-1}(x)$ برابر بُرد تابع $f(x)$ است که برد تابع $f(x)$ در این بازه برابر $[0,4]$ است. پس:

$$[a,b]=[0,4] \Rightarrow b-a=4-0=4$$

سوالات تکمیلی فصل ۱

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه توابع چند جمله ای R است.

ب) تابع با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه اش اکیداً نزولی است.

نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$y=(x+۲)^{۳}-۲$$

اگر $f(x)=\sqrt{۴-۲x}\ ,\ g(x)=x^{۲}+۲x-۱$ باشد.

الف) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $\frac{f}{g}(۰)-(gof)_{(۲)}$ را تعیین کنید.

اگر $f(x)=2x-3$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ باشند

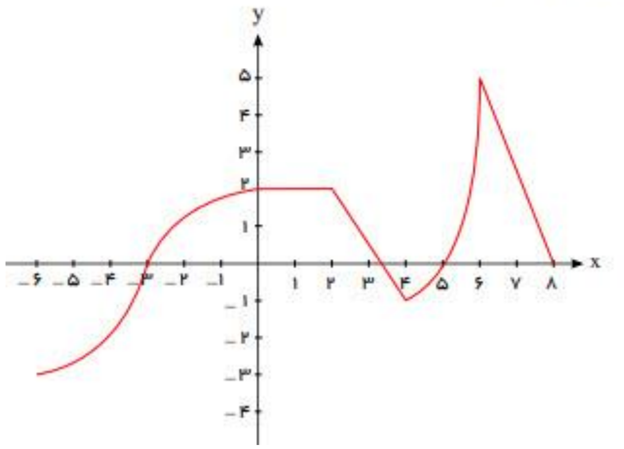
الف) مقدار $f\left(f\left(f(1)\right)\right)-(fog)\left(\frac{5}{4}\right)$ را بیابید.

ب) ریشه معادله $(gof)(x)=5$ را به دست آورید.

معکوس‌پذیری تابع زیر را بررسی نموده و معکوس آن را بنویسید.

$$f(x)=x^{۲}+۴x+۱ \qquad x<-۲$$

با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



مساحت ناحیه‌ی محصور بین دو تابع $f(x)=-|x-۱|+۵$ و $g(x)=|۲x|-x$ چند واحد مربع است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

- اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x+a-۱ & ; x\geq ۳ \\ x^{۲}-x-a & ; x\leq ۳ \end{cases}$ تابع باشد و $g(x)=x+۲a$، آنگاه $g(-۱)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۸- ۴) ۸

- اگر تابع $f(x)=x^{۲}+\frac{a}{a-۱}x$ در فاصله $[۱,+\infty)$ صعودی اکید باشد، حدود a کدام است؟

۱) $\left(-\infty,\frac{۲}{۳}\right]\cup(۱,+\infty)$

۲) $(۱,+\infty)$

۳) $\left(-\infty,\frac{۲}{۳}\right]$

۴) $(-\infty,۱)$

- اگر دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{(a-۱)x^{۲}+۲x+۱}$ برابر $R-\{b\}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

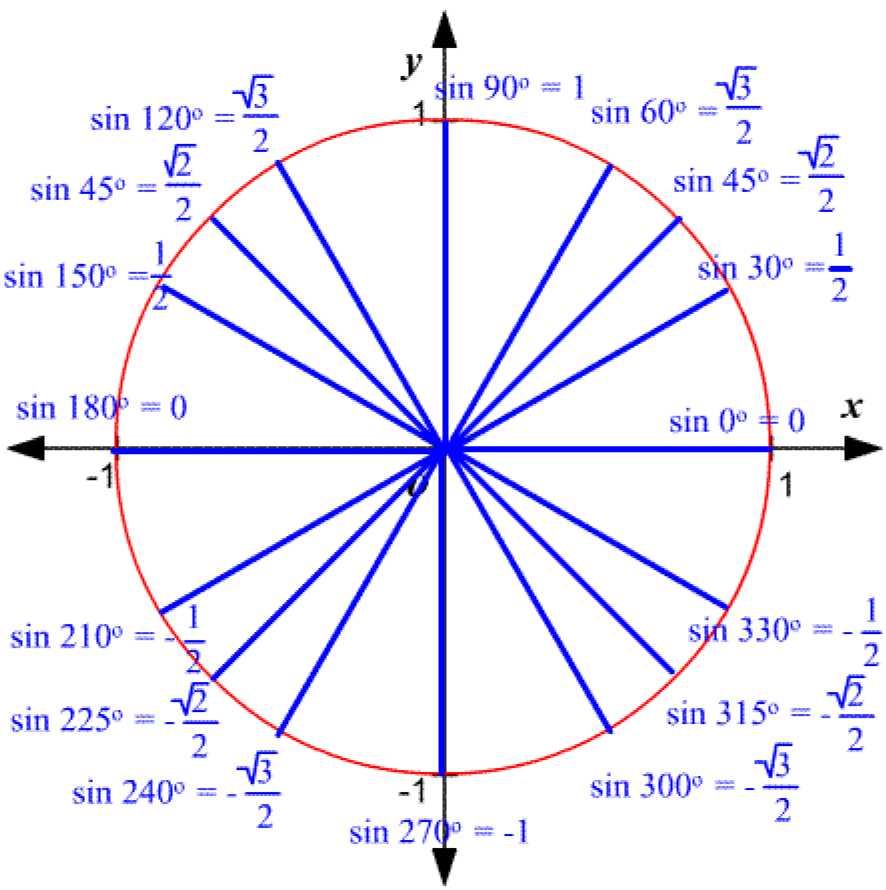
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$ یا ۳

فصل دوم

مثلثات

فصل مثلثات از فصل های خیلی مهمیه که در فیزیک هم کاربرد گسترده ای داره. یادگیری این فصل از واجبات کنکور سراسریه. مواظب باشید که حتما خوب این فصل رو یاد بگیرد. به صورت مستقیم حدود ۳ تست و به صورت غیر مستقیم چندین تست از این فصل برای کنکور می آید.

قبل از شروع فصل کمی یادآوری مثلثات پایه رو خواهیم داشت.



حفظ کردن نسبت مثلثاتی بالا از واجبات است.حتما اونا رو حفظ کنید.

مثلثات و روابط بین نسبت های مثلثاتی

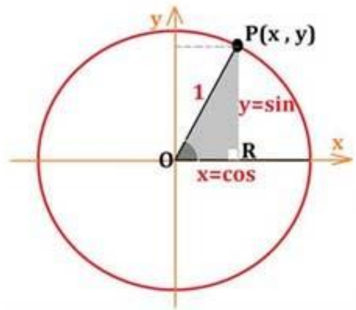
رابطه بین نسبت های مثلثاتی

$$\sin^{۲}\theta = ۱ - \cos^{۲}\theta$$

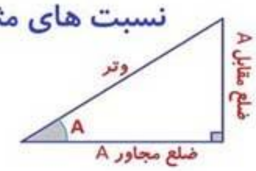
$$\cos^{۲}\theta = ۱ - \sin^{۲}\theta$$

$$\cos^{۲}\theta = \frac{۱}{۱ + \tan^{۲}\theta}$$

$$\sin^{۲}\theta = \frac{۱}{۱ + \cot^{۲}\theta}$$



نسبت های مثلثاتی



$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{وتر}} \qquad \cos A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{وتر}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{ضلع مجاور } A} \qquad \cot A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{ضلع مقابل } A}$$

α	0^0	$30^0 = \frac{\pi}{6}$	$45^0 = \frac{\pi}{4}$	$60^0 = \frac{\pi}{3}$	$90^0 = \frac{\pi}{2}$	$180^0 = \pi$	$270^0 = \frac{2\pi}{3}$	$360^0 = 2\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	∞	-1	∞	1
$cosec\,\alpha$	∞	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1	∞

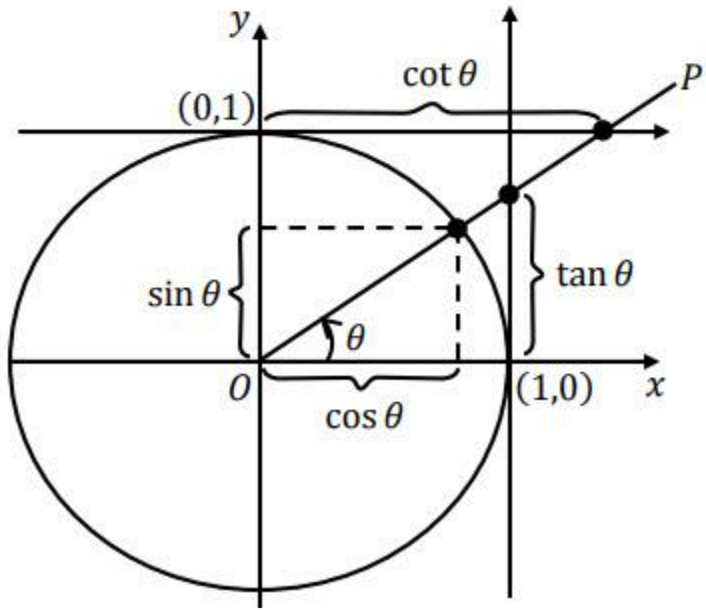
تعریف : تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

به عبارت دیگر در یک تابع مثلثاتی ، در یک بازه ی زمانی مشخص نمودار تابع تکرار می شود. به این دوره زمانی ، دوره ی تناوب گفته می شود.

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

دایره مثلثاتی

دایره زیر که به دایره مثلثاتی مشهور است، دایره ای است به شعاع واحد که مرکز آن در مبدأ مختصات واقع است. زاویه θ که نسبت به محور x محاسبه می شود، بنا بر استاندارد تعریف شده، در جهت پادساعتگرد مثبت است و در جهت ساعتگرد منفی. همچنین محورهای مختصات دایره را به چهار ربع دایره تقسیم می کنند. ربع بالا سمت راست ربع اول، ربع بالا سمت چپ ربع دوم، ربع پایین سمت چپ ربع سوم و ربع پایین سمت راست ربع چهارم نامیده می شود. با توجه به این که شعاع دایره به اندازه واحد است، مطابق شکل مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه θ را می توان روی این دایره نشان داد. محور OP که با محور x زاویه θ می سازد، در نقطه ای به مختصات $(\cos\theta , \sin\theta)$ دایره مثلثاتی را قطع می کند. این محور (OP) با خطی که از سمت راست بر دایره مماس است، در نقطه $(1,\tan\theta)$ تلاقی دارد. همچنین محور OP با خطی که از بالا بر دایره مماس است، در نقطه $(\cot\theta , 1)$ تلاقی دارد. برای اثبات توجه کنید که مثلا $\sin\theta$ نسبت ضلع مقابل به وتر است و در این جا وتر شعاع دایره و برابر واحد است، در نتیجه $\sin\theta$ اندازه ضلع مقابل زاویه θ می شود. به همین ترتیب مختصات نسبت های مثلثاتی دیگر نیز تعیین می شود. دقت کنید که مقدار $\cos\theta$ را روی محور x، مقدار $\sin\theta$ را روی محور y، مقدار $\tan\theta$ را روی محور مماس بر سمت راست دایره و مقدار $\cot\theta$ را روی محور مماس بر بالای دایره تعیین می کنیم. مقدار مثبت برای نسبت های مثلثاتی نیز در جهت محورها است.



فرمول های مجموع و تفاضل دو زاویه :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} = \frac{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha \pm \tan\beta}$$

$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\cot\alpha}$

$\cot^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\tan\alpha}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$$

نسبت های ۲α :

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \begin{cases} = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \\ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \\ = \dfrac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \\ = \dfrac{\cot^۲\alpha - ۱}{\cot^۲\alpha + ۱} \end{cases}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} = \frac{۲}{\cot\alpha - \tan\alpha}$$

$$\cot ۲\alpha = \frac{\cot^۲\alpha - ۱}{۲\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}$$

امتحان نهایی

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۱ - ۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را به دست آورید.

الف) $\underbrace{\max = |-۲| + ۱ = ۳}_{۰/۲۵}$, $\underbrace{\min = -|-۲| + ۱ = -۱}_{۰/۲۵}$

پیام مشاوره ای: مدرسه نامه مینویسه برای مادر بچه که: پسر شما یک کودن است و این مدرسه دیگر نمیتواند فرزند شما را ثبت نام کند. مادر به خودش قول داد که بچه رو با تلاش تربیت کنه. بله این بچه ی کودن همان ادیسون مخترع لامپ می باشد. با تلاش و پشت کار هر کاری میتونید انجام بدید.

امتحان نهایی

ب) دوره‌ی تناوب تابع $y=\tan x$ برابر 2π است. (درست ، نادرست)

دوره ی تناوب تابع تانژانت و کتانژانت برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ می باشد. لذا دوره ی تناوب این تابع برابر π می باشد که غلط است.

امتحان نهایی

دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

$y=\pi\sin(-x)+1$

$$\overbrace{\begin{aligned}\max &= |a|+c=\pi+1\\ \min &= -|a|+c=-\pi+1\end{aligned}}^{(0/25)} \quad (0/5) \quad T=\frac{2\pi}{|-1|}=2\pi \quad (0/5)$$

امتحان نهایی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

ب) برد تابع $f(x)=\tan x$ برابر بازهٔ $[-1,1]$ است.

برد توابع سینوس و کسینوس برابر R می باشد. لذا این گزینه غلطه .

امتحان نهایی

دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

$y=\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{2}x$

$$\begin{aligned}\max &= |a|+c=1+\sqrt{3}\\ \min &= -|a|+c=-1+\sqrt{3}\end{aligned} \quad (0/5) \quad T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4 \ (0/25)$$

امتحان نهایی

الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۲-۳\sin ۴x$ را به دست آورید

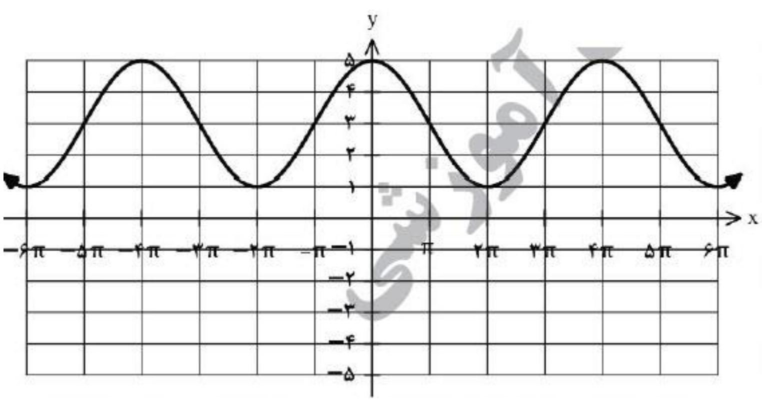
ب) دامنه تابع $f(x)=\tan(۲x)$ را بدست آورید.

$$\max=|۳|+۲=۵\ (۰/۲۵)\quad \min=-|۳|+۲=-۱\quad (۰/۲۵)\ T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\ (۰/۵)$$

$$۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (۰/۲۵)\quad \to x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی

نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y=a\cos bx+c$ است.
با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.



$$c=\frac{۵+۱}{۲}=۳$$

$$(۰/۵)\ b=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)\to y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$$

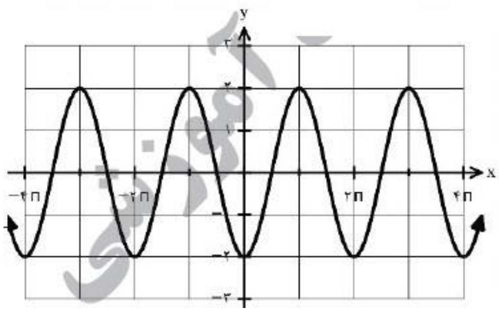
$$|a|=\frac{۵-۱}{۲}=۲\ \ a>۰, a=۲$$

$$\to\ y=۲\cos(-\frac{x}{۲})+۳\ \ (۰/۲۵)$$

گروه آموزشی آفتاب کنکور تیزهوشان ارائه ی دهنده ی بهترین جزوات دروس تخصصی تجربی ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

امتحان نهایی

نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.



امتحان نهایی

ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.

$$|b| = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$|a| = ۱\,, c = ۴ \Rightarrow y = \sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۴ \quad \text{یا} \quad y = -\sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۴$$

امتحان نهایی

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

تابع تانژانت در بازه $\left(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right)$ اکیداً صعودی است.

درست است.

امتحان نهایی

دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^۲ ۳x + \left|\cos\frac{۶x}{۵}\right| + \tan\frac{۹x}{۲}$ کدام است؟

$$T_۱ = \frac{\pi}{۳} \qquad T_۲ = \frac{\pi}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵\square}{۶} \qquad T_۳ = \frac{\pi}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۲\pi}{۹} \quad \rightarrow T = \frac{۱۰\pi}{۳}$$

امتحان نهایی

معادله ی یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

$$|b|=\frac{۲\pi}{۲}=\pi \quad \rightarrow b=\pm\pi \qquad (۰/۲۵)$$

$$|a|=\frac{۴-(-۴)}{۲}=۴ \quad \rightarrow a=\pm۴ \qquad (۰/۲۵)$$

$$c=\frac{۴+(-۴)}{۲}=۰ \qquad (۰/۲۵)$$

$$\rightarrow y=\pm۴\sin(\pm\pi x) \quad (۰/۲۵)$$

*** لطفا سعی کنید ریاضی را در حل مساله یاد بگیرید نه در درس نامه .. معمولا دانش آموزان دنبال کتاب هایی هستند که درسنامه ی زیادی داشته باشه. من معتقدم درس هایی مثل ریاضی و فیزیک ۹۰ درصد در حل مساله یادگیری برای آنها اتفاق میفتد. پس برای ریاضی انقد دنبال درسنامه نباشید. تجربه هم ثابت کرده نکته ای که خودتون توی تست استخراج میکنید و بهش میرسید خیلی ماندگارتره تا چیزی که در درسنامه بهتون نشون میدن.*

تمرین (سنجش)

کسینوس زاویه‌ای که خط گذرنده از نقاط $A(-۱,۶)$ و $B(۱,۳)$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$ ۳) $-\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}$ ۴) $-\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

گزینه ۴ درست است.

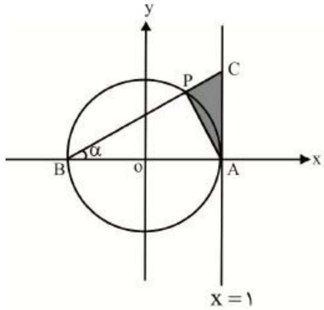
تانژانت زاویه‌ای که یک خط با جهت مثبت محور X ها می‌سازد برابر شیب خط است. پس:

$$\tan\alpha=\frac{۶-۳}{-۱-۱}=-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}}۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-۲}{\sqrt{۱۳}}$$

گروه آموزشی آفتاب کنکور تیزهوشان ارائه ی دهنده ی بهترین جزوات دروس تخصصی تجربی ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (سنجش)

- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی چند برابر $\tan\alpha$ است؟

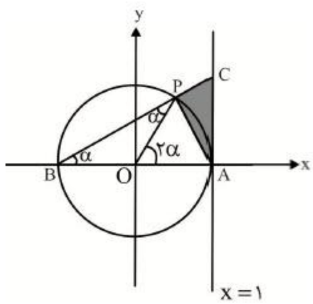


۱) $\frac{\sin^{۲}\alpha}{۲}$ ۲) $۲\sin^{۲}\alpha$

۳) $\frac{\cos^{۲}\alpha}{۲}$ ۴) $۲\cos^{۲}\alpha$

گزینه ۲ درست است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ CAB داریم:



$$\tan\alpha=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{AC}{۲}\Rightarrow AC=۲\tan\alpha$$

$$S_{CAB}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\tan\alpha=۲\tan\alpha$$

از O به P وصل می‌کنیم. زاویهٔ POA برابر ۲α است، پس ارتفاع مثلث BPA برابر $\sin۲\alpha$ می‌شود و داریم:

$$S_{BPA}=\frac{۱}{۲}\times۲\times\sin۲\alpha=\sin۲\alpha$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}}=۲\tan\alpha-\sin۲\alpha=۲\sin\alpha(\frac{۱}{\cos\alpha}-\cos\alpha)$$

$$=۲\sin\alpha(\frac{۱-\cos^{۲}\alpha}{\cos\alpha})=۲\sin^{۲}\alpha\times\tan\alpha$$

تست (سنجش)

- اگر $\frac{۱}{۴}=\frac{\cos x}{۱-\sin x}$، حاصل $\frac{۱+\sin x}{\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

گزینه ۴ درست است.

$$\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\cos x(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^{۲}x}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x(۱+\sin x)}{\cos^{۲}x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۴}$$

تمرین (سنجش)

- حاصل عبارت $A=\cos(\frac{۱۵\pi}{۲}-\alpha)+\tan(۷\pi-\alpha)\sin(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $۲\sin\alpha$ ۲) $-۲\sin\alpha$ ۳) $\sin ۲\alpha$ ۴) صفر

گزینه ۲ درست است.

$$A=\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)+\tan(\pi-\alpha)\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha-\tan\alpha\cos\alpha$$
$$=-\sin\alpha-\sin\alpha=-۲\sin\alpha$$

تمرین (سنجش)

- اگر $\frac{\sqrt{۶}}{۲}=\frac{۲\sin^۲\theta-۱}{\sin\theta-\cos\theta}$ باشد، حاصل $\tan\theta+\cot\theta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\frac{۲\sin^۲\theta-۱}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow\frac{\sin^۲\theta-\cos^۲\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

از طرفی داریم:

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}$$

بنابراین حاصل $\tan\theta+\cot\theta$ برابر است با:

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow\underbrace{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}_{۱}+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۳}{۲}\Rightarrow۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=۴$$

تمرین (سنجش)

- در رسم نمودار $y=\sin^۲ x$ از روی نمودار $y=\cos x$ کدام مرحله انجام نمی‌شود؟

۱) تقسیم طول نقاط بر ۲
۲) انتقال قائم
۳) ضرب طول نقاط در ۲
۴) تقسیم عرض نقاط بر ۲

گزینه ی ۳

تمرین (سنجش)

- اگر $A=\dfrac{\cos^4 x}{\cot^2 x-\cos^2 x}$ و $B=\dfrac{1}{\cos^4 x}-\tan^4 x$ باشد، چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

۱) $B-A-AB=1$ ۲) $AB=2$ ۳) $AB+B=2$ ۴) $A=2B$

گزینه ۱ درست است.

$$A=\frac{\cos^4 x}{\cos^2 x(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1)}=\frac{\cos^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sin^2 x$$

$$B=\frac{1-\sin^4 x}{\cos^4 x}=\frac{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}-1$$

$$B+1=\frac{2}{1-A}\Rightarrow 1-A+B-AB=2\Rightarrow B-A-AB=1$$

تمرین (سنجش)

- اگر $\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{11}{16}$ باشد، حاصل $\sin x+\cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\dfrac{1}{6}$ ۲) $\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

گزینه ۴ درست است.

$$t=\sin x+\cos x\Rightarrow \frac{t^2-1}{2}=\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow t(1-\frac{t^2-1}{2})=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\frac{11}{16}$$

$$\Rightarrow 8t^3-24t+11=0\Rightarrow (2t-1)(4t^2+2t-11)=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

تمرین (سنجش)

- اگر $2x+y=\frac{\pi}{4}$، آنگاه $\tan 2x+\tan 2y$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\cos 2y}$　　۲) $\frac{1}{\cos 2x}$　　۳) $\frac{1}{\tan 2y}$　　۴) $\frac{1}{\tan 2x}$

.گزینه ۱ درست است.

$$2y=\frac{\pi}{2}-4x \Rightarrow \tan 2x+\cot 4x=\frac{2\sin 2x\sin 2x+\cos 4x}{\sin 4x}=\frac{2\sin^2 2x+1-2\sin^2 2x}{\sin 4x}=\frac{1}{\cos 2y}$$

تمرین (سنجش)

- هر گاه در مثلث ABC، $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

گزینه ۴ درست است.

$$\frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2} \Rightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{4} \qquad \tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=4$$

تمرین (سنجش)

اگر $\cos x-\sin x-\sin x\cos x-\frac{1}{2}=0$ باشد، حاصل $\tan^2 x+\cot^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}(11+8\sqrt{3})$　　۲) $1+\sqrt{2}$　　۳) $1+\sqrt{3}$　　۴) $\frac{1}{3}(22+8\sqrt{3})$

. گزینه ۱ درست است.

$$\tan^2 x+\cot^2 x=(\tan x+\cot x)^2-2=(\frac{1}{\sin x\cos x})^2-2$$

با توجه به رابطه‌های $(\cos x-\sin x)^2=1-2\sin x\cos x$ و $\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\cos x}$ و با تغییر متغیر $\cos x-\sin x=t$، حاصل‌های $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$ و $\tan^2 x+\cot^2 x=(\frac{2}{1-t^2})^2-2$ بدست می‌آید، سپس معادله را حل می‌کنیم.

$$t-\frac{1-t^2}{2}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow t^2+2t-2=0\Rightarrow\begin{cases}t=-1+\sqrt{3} & \text{ق ق}\\ t=-1-\sqrt{3} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{1-(3+1-2\sqrt{3})}=\frac{2}{2\sqrt{3}-3}=\frac{2(2\sqrt{3}+3)}{12-9}=\frac{2}{3}(2\sqrt{3}+3)$$

$$\Rightarrow\tan^2 x+\cot^2 x=\frac{4}{9}(2\sqrt{3}+3)^2-2=\frac{4}{9}(12+9+12\sqrt{3})-2=\frac{2}{3}(11+8\sqrt{3})$$

تمرین (سنجش)

. اگر α زاویه حاده باشد، حاصل $(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha})^{\frac{1}{2}}-(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۱) $2\sin\alpha$ ۲) $2\cos\alpha$ ۳) $2\cot\alpha$ ۴) $2\tan\alpha$

گزینه ۴ درست است.

با توجه به تساوی $\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ خواهیم داشت.

$$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\tan\alpha$$

تمرین (سنجش)

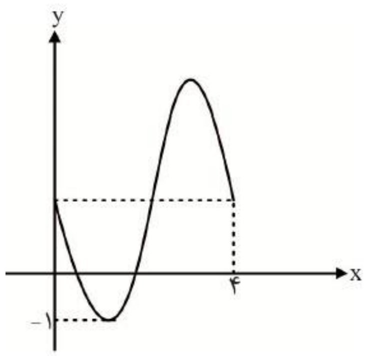
حاصل عبارت $\frac{\sin 255^\circ}{\cos 435^\circ}.(\frac{2\sin 885^\circ+\cos 825^\circ}{2\sin 795^\circ-\cos 735^\circ})$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

پاسخ: بر عهده ی خود دانش آموز

تمرین (سنجش)

- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=2+a\sin(b\pi x)$ است. حاصل $f(\frac{43}{3})$ کدام است؟



۱) $2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۲) $2-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$

۴) $\frac{7}{2}$

کمترین مقدار تابع -1 می‌باشد، بنابراین داریم:

$$2+a=-1 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

حال در تابع $f(x)=2-3\sin(\frac{\pi x}{2})$ مقدار $f(\frac{43}{3})$ را به دست می‌آوریم:

$$f(\frac{43}{3})=2-3\sin(\frac{43\pi}{6})=2-3\sin(7\pi+\frac{\pi}{6})=2-3\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=2-3(-\frac{1}{2})=\frac{7}{2}$$

تمرین (سنجش)

- اگر $\frac{\pi}{2}>\alpha>0$ و $\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=1$ باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ۲) $2\sqrt{2}-2$ ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) $\frac{-\sqrt{7}}{3}$

گزینه ۲ درست است.

$$\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}=1 \Rightarrow \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=1 \Rightarrow \cos\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$$

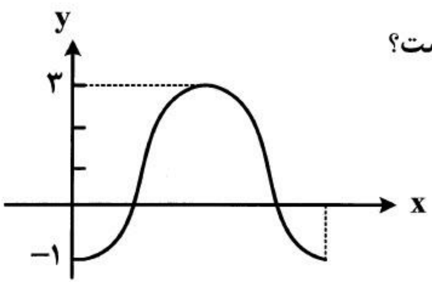
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\cos\alpha)^2 \xrightarrow{\sin\alpha\cos\alpha=t} 1-2t=t^2 \Rightarrow$$

$$t^2+2t-1=0 \xrightarrow{\alpha\ \text{ناحیهٔ اول}} t=\frac{-2+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{2}-1$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$$

تمرین (سنجش)

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(x-\frac{\pi}{۲})+b$ است، b کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) −۱

۴) −۲

گزینه ۱ درست است.

بیشترین مقدار سینوس برابر ۱ می‌باشد $a+b=۳$ به ازای $x=۰$ داریم $-a+b=-۱$ از جمع دو تساوی $b=۱$

تمرین (سنجش)

بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲\sin^۲ x-۳\cos x+۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) $\frac{۳۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳۳}{۸}$

گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=۲(۱-\cos^۲ x)-۳\cos x+۱=-۲\cos^۲ x-۳\cos x+۳$$

$$f(x)=-۲(\cos^۲ x+\frac{۳}{۲}\cos x)+۳=-۲(\cos x+\frac{۳}{۴})^۲+\frac{۹}{۸}+۳\le\frac{۳۳}{۸}$$

پس بیشترین مقدار تابع $\frac{۳۳}{۸}$ است.

تمرین (سنجش)

- اگر $k=\tan\frac{۱۴\pi}{۵}$ باشد، $\sin\frac{۲\pi}{۵}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲k}{۱+k^۲}$ ۲) $\frac{-k}{۱+k^۲}$ ۳) $\frac{k}{۱+k^۲}$ ۴) $\frac{-۲k}{۱+k^۲}$

$$\frac{14\pi}{5}=3\pi-\frac{\pi}{5}\Rightarrow \tan\frac{14\pi}{5}=-\tan\frac{\pi}{5}=k$$

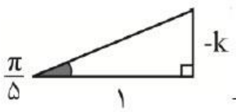
بنابراین: $\tan\frac{\pi}{5}=-k$

(راستی حتماً $k<0$ چون $0<\tan\frac{\pi}{5}$)

از طرفی: $\sin 2x=2\sin x\cos x$

پس: $\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$

برای به‌دست آوردن $\sin\frac{\pi}{5}$ و $\cos\frac{\pi}{5}$ از روی $\tan\frac{\pi}{5}$ دو راه داری یا بری سراغ فرمول‌ها یا از تعریف نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنی. ببین این خیلی راحت‌تره:



$\xrightarrow{\text{فیثاغورث}}$ وتر $=\sqrt{1+k^2}$

خلاصه با توجّه به تعریف سینوس و کسینوس داریم:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\ ,\ \sin\frac{\pi}{5}=\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\Rightarrow \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-2k}{1+k^2}$$

اگر هم دوست داری از فرمول‌ها بری اینجوریه:

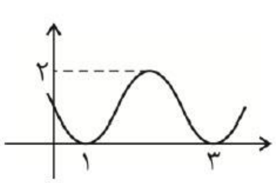
$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+k^2=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}}\Rightarrow \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{1}{1+k^2}=\frac{k^2}{1+k^2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{5}=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}\xrightarrow{(k<0\ \text{قبلاً گفتم})}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$$

تمرین

نمودار $f(x)=a\cos\left(b\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+c$ به‌صورت زیر است، مقدار تابع به‌ازای $\frac{1}{6}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ بر عهده ی خودتون. جواب گزینه ی ۲

محاسبات

تمرین (سنجش)

اگر ماکزیمم و دوره تناوب تابع $y=a-(۲a^۲-۴)\sin\frac{\pi x}{۳}$ با هم برابر باشند، کمترین مقدار تابع کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۱- ۴) ۳-

در این سوال دوره تناوب برابر $\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}$ یعنی برابر ۶ است.

$$\max=T\Rightarrow a+|۲a^۲-۴|=۶\Rightarrow|۲a^۲-۴|=۶-a\Rightarrow\begin{cases}۲a^۲-۴=۶-a\Rightarrow ۲a^۲+a-۱۰=۰\Rightarrow a=۲,-\frac{۵}{۲}\\ ۲a^۲-۴=a-۶\Rightarrow ۲a^۲-a+۲=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی}\end{cases}$$

$$a=۲\Rightarrow y=۲-۴\sin\frac{\pi x}{۳}\Rightarrow\min f(x)=۲-۴=-۲$$

$$a=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۵}{۲}-(\frac{۲۵}{۲}-۴)\sin\frac{\pi x}{۳}=\frac{-۵}{۲}-\frac{۱۷}{۲}\sin\frac{\pi x}{۳}\Rightarrow\min f(x)=\frac{-۵}{۲}-\frac{۱۷}{۲}=-۱۱$$

تمرین

اگر $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و $\cos\beta=\frac{-۳}{۵}$ باشد، حاصل $۱۶۹\sin۲\alpha+۲۵\cos۲\beta$ کدام است؟ (α و β در ناحیه دوم هستند).

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۲۷- ۴) ۱۲۹-

$$\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}\xrightarrow{\alpha\in(\frac{\pi}{۲},\pi)}\cos\alpha=\frac{-۱۲}{۱۳}$$

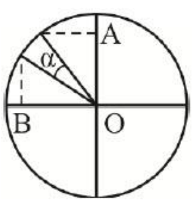
$$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\times\frac{۵}{۱۳}\times\frac{-۱۲}{۱۳}=\frac{-۱۲۰}{۱۶۹}$$

$$\cos۲\beta=۲\cos^۲\beta-۱=۲(-\frac{۳}{۵})^۲-۱=\frac{۱۸}{۲۵}-۱=\frac{-۷}{۲۵}$$

$$۱۶۹\sin۲\alpha+۲۵\cos۲\beta=-۱۲۰-۷=-۱۲۷$$

تمرین

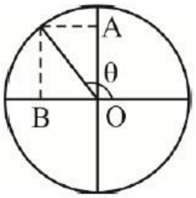
در دایره مثلثاتی شکل مقابل $OA=OB=\frac{۳}{۵}$ است. مقدار $\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})$ چقدر است؟



۱) $\frac{-۱۷}{۲۵}$ ۲) $\frac{-۷}{۲۵}$

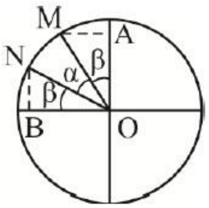
۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

نکته: در دایره مثلثاتی شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$OA = \sin\theta \quad , \quad OB = \cos\theta$$

دو مثلث OAM و ONB همنهشت‌اند، پس زاویه O در هر دو برابر β فرض می‌شود.



$$OA = \sin(\frac{\pi}{2}+\beta) = \cos\beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2(\frac{3}{5})^2 - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\beta) = \cos 2\beta = \frac{-7}{25}$$

تمرین

حاصل $P = \dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}(\cos x - \dfrac{1}{\cos x})$ به‌ازای $x = \dfrac{\pi}{6}$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

ابتدا به کمک اتحادها، عبارت را ساده می‌کنیم.

$$P = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}}(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} \times \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x \times \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = -\sin^2 x$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow P = -\frac{1}{4}$$

تمرین (سنجش)

اگر $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ باشد، مقدار $2\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2} - \cos x$ ۲) $1 - \frac{1}{2}\cos x$ ۳) $1 - \cos x$ ۴) $1 - 2\cos x$

حل با خودتون . گزینه ی ٤ پاسخ صحیح است.

معادلات مثلثاتی

از معادلات مثلثاتی معمولا ۱ یا ۲ سوال برای کنکور میاد پس بریم که این قسمت آسون رو با هم یاد بگیریم..

منظور از حل یک معادله ی مثلثاتی تعیین متغیر x بر حسب درجه و رادیان است که با تساوی مثلثاتی ممکن است.

خلاصه ی معادلات مثلثاتی به این صورت می باشد.

$$1)\ \sin x=\sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

$$2)\ \cos x=\cos\alpha \rightarrow x=2k\pi\pm\alpha$$

$$3)\ \tan x=\tan\alpha \rightarrow x=k\pi+\alpha$$

$$4)\ \cot x=\cot\alpha \rightarrow x=k\pi+\alpha$$

یادگیری معادلات مثلثاتی فقط با تمرین و حل مثال ممکن است. فقط چهار خط بالا درسنامه ی مثلثات می باشد. بقیه ی چیزها مربوط به روابط مثلثاتی میباشد که تا کنون یاد گرفتیم.برای یادگیری ریاضی در ابتدا حتما به مدرس و حضور پیدا کردن در کلاس یک استاد خوب نیاز دارید.

امتحان نهایی

معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1$ را حل کرده ،جواب‌های کلی آن را بنویسید.

$$\underbrace{1-2\sin^2\alpha-\sin\alpha+1=1}_{0/25} \rightarrow 2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0 \rightarrow \underbrace{\begin{cases} \sin\alpha=-1 \\ \sin\alpha=\frac{1}{2} \end{cases}}_{0/5}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{cases} \alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2} \\ \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad ,\alpha=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k\in z}_{0/5}$$

محاسبات

امتحان نهایی

معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴}$ را حل کنید.

$$۱-\sin^۲ x-\sin x=\frac{۱}{۴} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \sin^۲ x+\sin x-\frac{۳}{۴}=۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵) \rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$\sin x = -\frac{۳}{۲}$ غ.ق.ق $(۰/۲۵)$

امتحان نهایی

معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید

$$۲\cos^۲ x-۹\cos x-۵=۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{array}{l} \cos x=-\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵) \rightarrow \quad x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \quad (۰/۲۵) \\ \cos x=۵ \quad (۰/۲۵) \end{array}$$

$\cos x=۵$ غ ق ق

امتحان نهایی

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را حل کنید.

$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} & \rightarrow \quad x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\,,\ k\in\mathbb{Z} \quad (۰/۲۵) \\ & (۰/۲۵) \\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳} & \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\quad ,\ k\in\mathbb{Z}(۰/۲۵) \end{cases}$$

امتحان نهایی

معادله ی مثلثاتی $\sin x - \cos ۲x = ۰$ را حل کنید.

$$\sin x - ۱ + ۲\sin^۲ x = ۰ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}, \quad x = (۲k+۱)\pi + \frac{\pi}{۲} \; (۰/۵) \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \; (۰/۵) \end{cases}$$

امتحان نهایی

معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$ را حل کنید.

$$\overbrace{۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \quad (۰/۲۵) & \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad (۰/۲۵) \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵) & \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad (۰/۲۵) \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \quad (۰/۲۵) \end{cases} \end{cases}$$

امتحان نهایی

معادلات مثلاتی زیر را حل کنید.

$$۲\sin^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰$$

$$۲(۱ - \cos^۲ x) + ۹\cos x + ۳ = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \Rightarrow \cos x = ۵ \text{ غ ق ق } (۰/۵)$$

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \, (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \quad (۰/۲۵) \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

تمرین(سنجش)

- مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin^3 x - 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{2}$

گزینه ۳ درست است.

$$2\sin^2 x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(2\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{9\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

تمرین (سنجش)

- معادلهٔ $\frac{2\cos^2 x + \sin x - 2}{1 + \cos x} = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

گزینه ۲ درست است.

$$2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

اما به ازای $x = \pi$ ، مخرج کسر برابر صفر می‌شود پس غیرقابل قبول است. بنابراین معادلـه دارای ۳ جـواب در بـازهٔ $[0, \pi]$ است.

با شرکت در کلاس های استاد دارستانی (حضوری و آنلاین) و همچنین مشاوره تحت نظارت ایشان به جمع دانش آموزان قبولی ایشان بپیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین

جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos ۲x+\sin ۳x=۰$ روی دایره مثلثاتی، رئوس کدام چند ضلعی است؟

۱) مثلث ۲) مربع ۳) پنج ضلعی ۴) شش ضلعی

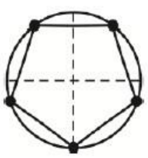
نکته: مجموعه جواب معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=\pm\alpha+۲k\pi$ است.

$$\cos ۲x=-\sin ۳x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=\frac{\pi}{۲}+۳x+۲k\pi\\ ۲x=-(\frac{\pi}{۲}+۳x)+۲k\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{k=۰}x=-\frac{\pi}{۲}\\ x=\frac{۲k\pi}{۵}-\frac{\pi}{۱۰}\xrightarrow{k=۰,۱,۲,۳,۴}x=-\frac{\pi}{۱۰},\frac{۳\pi}{۱۰},\frac{۷\pi}{۱۰},\frac{۱۱\pi}{۱۰},\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

دقّت کنید به k تا جایی اعداد صحیح را نسبت می‌دهیم که جواب‌های به‌دست آمده روی دایرهٔ مثلثاتی متمایز باشند.



تمرین (سنجش)

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۳})+\cos(x-\frac{\pi}{۶})=۱$ در بازه $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

با توجّه به رابطه $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\sin(\frac{\pi}{۲}+x-\frac{\pi}{۶})=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})+\sin(x+\frac{\pi}{۳})=۱$$

$$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۶}\\ \text{یا}\\ x+\frac{\pi}{۳}=۲\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۲}\\ x=\frac{۱۱\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۷\pi}{۳}$$

تمرین (سنجش)

اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادله مثلثاتی $\tan x \cdot \tan(x-\frac{\pi}{۳})=۱$ در بازه $(۰,\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

نکته: جواب معادله مثلثاتی $\tan x = \tan\alpha$ به‌صورت $x=\alpha+k\pi$ است.

سعی می‌کنیم دو طرف تساوی را برحسب تانژانت بنویسیم:

$$\tan x = \frac{۱}{\tan(x-\frac{\pi}{۳})} = \cot(x-\frac{\pi}{۳}) = \tan(\frac{\pi}{۲}-x+\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}-x+\frac{\pi}{۳}+k\pi \;\Rightarrow\; x=\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۲}$$

$$k=۰,۱ \;\Rightarrow\; x=\frac{۵\pi}{۱۲},\frac{۱۱\pi}{۱۲} \;\Rightarrow\; x_۲-x_۱=\frac{۶\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲}$$

تمرین (قلمچی)

- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x+\frac{\pi}{۶})-\sin(x-\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

منها را داخل sin می‌بریم: $\cos(x+\frac{\pi}{۶})+\sin(\frac{\pi}{۳}-x)=\sqrt{۳}$ می‌دانیم اگر جمع دو زاویه ۹۰° باشد sin یکی برابر cos دیگری است.

چون $\frac{\pi}{۲}=x+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}-x$ پس می‌توان به‌جای $\sin(\frac{\pi}{۳}-x)$ عبارت $\cos(x+\frac{\pi}{۶})$ قرار داد. پس:

$$۲\cos(x+\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۳} \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$x+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=۰ \;(۱)$$

$$x+\frac{\pi}{۶}=۲\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=۲\pi \;(۲)$$

$$x+\frac{\pi}{۶}=۲\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۳} \;(۳)$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب‌های (۱) و (۲) و (۳)}} ۰+۲\pi+\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۱۱\pi}{۳}$$

تمرین (سنجش)

- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos x - ۱ = \frac{\sin x \tan x}{۳}$ در بازهٔ $[۰, ۴\pi)$ کدام است؟

۱) ۵π ۲) ۷π ۳) ۹π ۴) ۱۰π

گزینه ۴ درست است.

$$\sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} = ۳ - ۳\cos x \Rightarrow \sin^۲ x = ۳\cos x - ۳\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۱ - \cos^۲ x = ۳\cos x - ۳\cos^۲ x \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۳\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۱ \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \xrightarrow{x \in [۰, ۴\pi)} x = ۰, ۲\pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}, ۲\pi + \frac{\pi}{۳}, ۲\pi + \frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه $[۰, ۴\pi)$ برابر ۱۰π می‌باشد.

تمرین (سنجش)

- معادلهٔ $۰ = \frac{۲\cos^۲ x + \sin x - ۲}{۱ + \cos x}$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

گزینه ۲ درست است.

$$۲\cos^۲ x + \sin x - ۲ = ۰ \Rightarrow ۲(۱ - \sin^۲ x) + \sin x - ۲ = ۰ \Rightarrow -۲\sin^۲ x + \sin x = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

اما به ازای $x = \pi$ ، مخرج کسر برابر صفر می‌شود پس غیرقابل قبول است. بنابراین معادلـه دارای ۳ جـواب در بـازهٔ $[۰, \pi]$ است.

تمرین (سنجش)

جواب معادلهٔ $\cos 2x = \sin 4x$ **با شرط** $\sin 2x \neq 1$ ، $k \in \mathbb{Z}$ **، کدام است؟**

۱) $\frac{4k-1}{12}\pi$

۲) $\frac{4k+1}{12}\pi$

۳) $\frac{3k+1}{6}\pi$

۴) $\frac{3k-1}{6}\pi$

به جای sin4x، کسینوس متمم ۴x را می‌نویسیم:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \to 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \to$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 4x \to x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{4k+1}{12}\pi & \checkmark \\ 2x = 2k\pi + 4x - \frac{\pi}{2} \to 2x = -2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{-k \to k} x = k\pi + \frac{\pi}{4} & \times \end{cases}$$

به ازای $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، مقدار sin2x، یک می‌شود، پس قابل قبول نیست.

تمرین (سنجش)

جواب کلی معادله‌ی $\mathrm{Cos}^2 3x - \mathrm{Cos}^4 3x = \mathrm{Sin}^4(\frac{5\pi}{4})$ **کدام است؟**

۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$

۲) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$

۳) $\frac{k\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}$

۴) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{24}$

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\mathrm{Cos}^2 3x(1 - \mathrm{Cos}^2 3x) = \mathrm{Cos}^2 3x\,\mathrm{Sin}^2 3x = (\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,6x)^2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2 6x = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathrm{Sin}^2 6x = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}\,6x = \pm 1$$

$$\Rightarrow 6x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}$$

فصل ۳

حد و حد در بی نهایت

از فصل های آسون در کنکور سراسری . برای این که این فصل رو یادبگیرید لازمه که حد و پیوستگی یازدهم را نیز یه دور بزنید و بلد باشید.

برای همین ما سعی میکنیم که حد و پیوستگی رو از ریشه براتون توضیح بدیم.

تعریف حد

تعریف حد (۱): فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f در $x=a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:

مقدار تابع f را به عدد L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به‌شرط آن‌که مقدار x را به عدد a به اندازه‌ی کافی نزدیک کرده باشیم.

تعریف حد (۲): فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f در $x=a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:

برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ یافت شود طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$.

یا به بیان دیگر: $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

تعریف: حد چپ و حد راست.

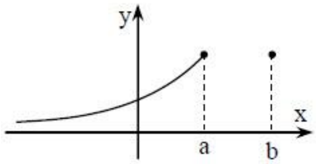
۱- تابع f در $x=a$ حد راستی برابر L دارد (می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن‌که x از سمت مقادیر بزرگ‌تر از a، به a به اندازه‌ی کافی نزدیک شود.

۲- تابع f در $x=a$ حد چپی برابر L دارد (می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن‌که x از سمت مقادیر کوچک‌تر از a، به a به‌اندازه‌ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

اگر حدهای چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و برابر باشند، آن‌گاه تابع f در $x=a$ حد دارد. به بیان دیگر:

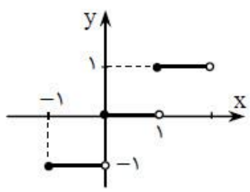
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L$$

اگر تابع f در یک همسایگی $x=a$ نامعین باشد (این همسایگی جزء دامنه‌ی تابع نباشد)، تابع در این نقطه حد نخواهد داشت. زیرا اصلاً نمی‌توانیم x را به آن نقطه نزدیک کنیم.



مثال: در شکل مقابل، تابع در $x=b$ حد ندارد و در $x=a$ حد راست ندارد. تابع در هر دو همسایگی $x=b$ و در همسایگی راست $x=a$ نامعین است. دقت کنید که طبق قرارداد، تابع در $x=a$ حد دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=a$ (همسایگی چپ) تعریف شده، بنابراین منظور از $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ همان $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ است.

اگر تابع در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود نباشند، یا موجود و نابرابر باشند، تابع در $x=a$ حد ندارد.



مثال: تابع $y=[x]$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا مطابق نمودار تابع داریم: $\lim\limits_{x\to 0^+} y=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-1$.

(در واقع این تابع در هیچ نقطه‌ی $x=n$ (که $n\in Z$) حد ندارد.)

قضایای حد:

۱- اگر f تابع ثابت با دامنه‌ی R باشد (برای هر $x\in R$ داشته باشیم: $f(x)=c$)، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ (برای هر $a\in R$).

۲- اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$، آن‌گاه:[1] ($c\in R$ یک عدد ثابت است و $n\in N$)

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cL_1$

ب) $\lim\limits_{x\to a} (f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)=L_1L_2$

ت) $\lim\limits_{x\to a} (\frac{f}{g})(x)=\frac{L_1}{L_2}$ (به شرط $L_2\neq 0$)

ث) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x)=L_1^n$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$ (اگر n زوج باشد، برای $L_1>0$ این تساوی برقرار است.)

چ) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=|L_1|$

در قضیه‌ی قبل دیدیم که اگر f و g در $x=a$ حد داشته باشند، توابع $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط غیر صفر بودن حد g) نیز در $x=a$ حد خواهند داشت. عکس این قضیه، درست نیست. در واقع:

الف) اگر f در $x=a$ حد داشته باشد و g حد نداشته باشد، آن‌گاه قطعاً $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد نخواهند داشت، ولی fg و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند.

ب) اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f\pm g$، fg، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند یا نداشته باشند.

قضیه‌ی فشردگی: اگر در یک همسایگی محذوف $x = a$ بدانیم: $f(x) \le h(x) \le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

در محاسبه‌ی حد در توابع شامل جزء صحیح، در صورت امکان جزء صحیح‌ها را حذف کنید و به جای آن‌ها اعداد ثابت قرار دهید. برای این منظور دقت کنید که:

۱- اگر $f(x) \to L$ و L عددی غیر صحیح باشد، آن‌گاه: $[f(x)] = [L]$

۲- اگر $f(x) \to L^+$ (به معنی $f(x) \to L$ و $f(x) > L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)] = L$

۳- اگر $f(x) \to L^-$ (به معنی $f(x) \to L$ و $f(x) < L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)] = L - ۱$

دقت کنید که در موارد (۲) و (۳) از نامساوی‌ها یا تعیین علامت عبارت $f(x) - L$ یا از نمودار تابع $f(x)$ می‌توانید کمک بگیرید.

تمرین (نشرالگو)

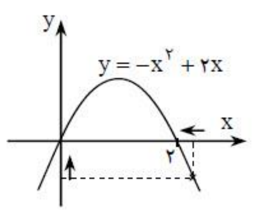
اختلاف حدهای راست و چپ تابع $f(x) = [-x^۲ + ۲x] - [\frac{-۲x - ۵}{۳}]$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) صفر **۲) ۱** **۳) ۱-** **۴) ۲**

حل: ابتدا حدهای چپ و راست $[\frac{-۲x-۵}{۳}]$ را پیدا می‌کنیم:

$$x \to ۲^+ \Rightarrow x > ۲ \Rightarrow -۲x < -۴ \Rightarrow -۲x - ۵ < -۹ \Rightarrow \frac{-۲x-۵}{۳} < -۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} [\frac{-۲x-۵}{۳}] = [(-۳)^-] = -۴$$

$$x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow -۲x > -۴ \Rightarrow -۲x - ۵ > -۹ \Rightarrow \frac{-۲x-۵}{۳} > -۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} [\frac{-۲x-۵}{۳}] = [(-۳)^+] = -۳$$



حال حدهای چپ و راست $[-x^۲ + ۲x]$ را با توجه به نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x$ پیدا می‌کنیم:

با توجه به نمودار، وقتی $x \to ۲^+$، مقدار y به صفر از سمت مقادیر کوچک‌تر از آن نزدیک می‌شود، یعنی $y \to ۰^-$.

بنابراین: $\lim\limits_{x\to ۲^+} [-x^۲ + ۲x] = [۰^-] = -۱$.

به‌همین ترتیب داریم: $\lim\limits_{x\to ۲^-} [-x^۲ + ۲x] = [۰^+] = ۰$. با ترکیب نتایج بالا به‌دست می‌آوریم:

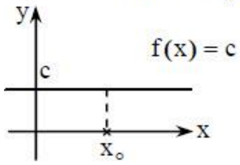
$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = -۱ - (-۴) = ۳ \ , \ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۰ - (-۳) = ۳ \Rightarrow \text{اختلاف دو حد} = ۰$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

(عامل صفر کننده در حد)

فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x=n$ (که $n \in Z$) دارای حد باشد. در این صورت تابع $y=f(x)[x]$ در نقطه‌ی $x=n$ تنها در صورتی حد دارد که f در این نقطه در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود. یعنی f در این نقطه حدی برابر صفر داشته باشد.

اگر $f(x)=c$ (c عددی ثابت و حقیقی است)، آن‌گاه حد تابع $f(x)$ در تمام نقاط برابر همان مقدار ثابت c است.



با توجه به نمودار روبه‌رو واضح است که: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$

تمرین (سنجش)

اگر $f(x)=3[x]+(2a-1)[-x]$ و $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=b$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) صفر

گزینه ۲ درست است.

تابع $f(x)$ را به صورت $f(x)=3([x]+[-x])+(2a-4)[-x]$ می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} 2a-4=0 \Rightarrow a=2 \\ b=\lim\limits_{x\to 4} f(x)=3\times -1=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1$$

قضیه:

اگر برای دو تابع f و g داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$، آن‌گاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=L_1-L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=L_1L_2$

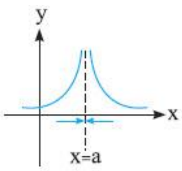
ت) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})=\frac{L_1}{L_2}$ (در این قسمت باید $L_2 \neq 0$)

قضیه

اگر در یک همسایگی عدد a تابع $f(x)$ دقیقاً برابر صفر باشد و داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (ولی تابع g دقیقاً صفر نباشد)، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. (به بیانی ساده‌تر: $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$)

همچنین دقت کنید که حالت $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}$ در دامنه‌ی تابع نیست، پس حدی هم وجود ندارد.

حد در بی نهایت

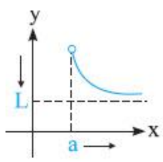


تابع $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}$ را در نظر بگیرید، هر چقدر x به a نزدیک و نزدیک‌تر شود، $f(x)$ بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. با توجه به نمودار در این حالت می‌گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

نکته: در $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، اگر حد $f(x)$ عددی غیرصفر و حد $g(x)$ برابر صفر باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ (در همسایگی محذوف a، $g(x)\neq 0$)

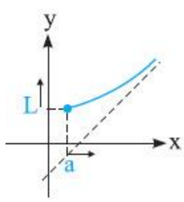
در این حالت برای تعیین نوع بی‌نهایت داریم:

$\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$ $\quad\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$ $\quad\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$ $\quad\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$



تابع $f(x)$ را در بازه‌ی $(a,+\infty)$ در نظر بگیرید. اگر x هر قدر که خواستیم بزرگ و بزرگ‌تر شود و $f(x)$ به عدد L نزدیک و نزدیک‌تر شود، در این صورت می‌گوییم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

تعریف دنباله‌ای حد در بی‌نهایت: فرض کنید f تابعی باشد که در بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده و L عددی حقیقی باشد. می‌گوییم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$، هرگاه به‌ازای **هر دنباله** از نقاط دامنه‌ی f مانند $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ است، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد. (به طور مشابه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ تعریف می‌شود.)



تعریف دنباله‌ای حد بی‌نهایت در بی‌نهایت: هرگاه به‌ازای هر دنباله از نقاط دامنه‌ی f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $+\infty$، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ باشد، آن‌گاه می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

نکته: در محاسبات حد از مطالب ساده‌ی زیر می‌توانیم استفاده کنیم: (a را یک عدد ثابت در نظر می‌گیریم.)

$a+(+\infty)=+\infty$ $\qquad a+(-\infty)=-\infty$

$(a>0)\times(+\infty)=+\infty$ $\qquad (a>0)\times(-\infty)=-\infty$ $\qquad (a<0)\times(+\infty)=-\infty$ $\qquad (a<0)\times(-\infty)=+\infty$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $\qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$ $\qquad (-\infty)\times(-\infty)=+\infty$ $\qquad (+\infty)\times(-\infty)=-\infty$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

یکی از مهم ترین مسائل کنکور و امتحان رفع ابهام حد صفری می باشد.

هم‌ارزی پرتوان: در یک چندجمله‌ای به شکل $ax^n + bx^{n-1} + \dots$ وقتی $x \to \pm\infty$، آن‌گاه عبارت، هم‌ارز جمله‌ی پرتوانش یعنی ax^n می‌باشد. یعنی از جملات درجه‌ی کم‌تر می‌توان صرف‌نظر کرد. بنابراین برای یک کسر که به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درآمد، می‌توان مطالب زیر را نتیجه گرفت: $(m, n \in \mathbb{N})$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \frac{a}{a'} & m = n \\ \text{صفر} & m > n \\ \pm\infty & m < n \end{cases}$$

در حالتی که درجه‌ی صورت بیشتر است، علامت بی‌نهایت با توجه به سؤال تعیین می‌شود.

تذکر: یادآور می‌شویم که هرگاه در استفاده از هم‌ارزی، تمام جملات حاصل از هم‌ارزی قرینه شد، استفاده از هم‌ارزی غلط است. برای مثال در حدهایی که به‌صورت $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x$ هستند، استفاده از هم‌ارزی پرتوان ممنوع است.

مثال: حاصل هریک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2 + 3x} + 2x} \xlongequal{\text{پرتوان}} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2} + 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{|x| + 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-x + 2x} = 3$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt{2x + 1}} \xlongequal{\text{پرتوان}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته: اگر تابعی کران‌دار باشد (حتی اگر حد هم نداشته باشد) و در محاسبات، این حد در صفر ضرب شود و یا بر $\pm\infty$ تقسیم شود، عبارت حاصل، حد خواهد داشت و حاصل حد آن همواره صفر است.

مثال: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - [x]}{x} = \frac{0 \le \text{عدد} < 1}{+\infty} = \frac{\text{کران‌دار}}{+\infty} = 0$

مثال: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{-1 \le \text{عدد} \le 1}{+\infty} = \frac{\text{کران‌دار}}{+\infty} = 0$

مثال: $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \text{صفر} \times \text{کران‌دار} = 0$

نکته: در بعضی از توابع به خصوص توابع مثلثاتی برای رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ بهتر است آن را بر طبق الگوی زیر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل کرده و سپس با توجه به آن چه در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ خواندید آن را رفع ابهام کنید.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}} \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \xlongequal{\frac{0}{0}\ \text{مبهم}} \dots$$

مثال: $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cot\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\tan \pi x} \xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cot \pi x}{\tan\left(x - \frac{1}{2}\right)} \xlongequal[\text{Hop}]{\frac{0}{0}\ \text{مبهم}} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{-\pi(1 + \cot^2 \pi x)}{1 + \tan^2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = -\pi$

رفع ابهام $\infty - \infty$

هرگاه در محاسبه‌ی حد به مبهم $\infty - \infty$ برخورد نمودیم، معمولاً یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

۱ اگر مبهم $\infty - \infty$ به‌صورت تفاضل (جمع) دو کسر باشد، برای رفع ابهام، کافی است مخرج مشترک بگیریم و آن را تا حد امکان ساده کنیم.

۲ اگر مبهم $\infty - \infty$ به‌صورت تفاضل (جمع) دو عبارت رادیکالی باشد، برای رفع ابهام، کافی است به کمک اتحاد مزدوج یا اتحاد چاق و لاغر عبارت رادیکـالی را گویا کنیم. (البته ممکن است با هم‌ارزی پرتوان نیز به جواب برسیم.)

مثال : $\lim\limits_{x\to -۴}\left(\frac{x+۱۹}{x^۲+۳x-۴}\right)+\frac{۳}{x+۴} \xlongequal{\text{مبهم } \infty-\infty} \lim\limits_{x\to -۴}\left(\frac{x+۱۹}{(x-۱)(x+۴)}+\frac{۳}{(x+۴)}\right)$

$$=\lim_{x\to -۴}\frac{x+۱۹+۳(x-۱)}{(x-۱)(x+۴)}=\lim_{x\to -۴}\frac{۴(x+۴)}{(x-۱)(x+۴)}=\lim_{x\to -۴}\frac{۴}{x-۱}=-\frac{۴}{۵}$$

مثال : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x+۱}\right) \xlongequal{\text{مبهم } \infty-\infty} \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x+۱}\right)\times\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+۱}}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}-۱}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+۱}} \xlongequal[\text{پرتوان}]{\text{مبهم } \frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}$$

هم‌ارزی رادیکالی: در عبارات رادیکالی وقتی $x\to \pm\infty$، اگر استفاده از هم‌ارزی پرتوان میسر نبود می‌توانیم از هم‌ارزی زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\dots}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\begin{cases}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & n \text{ فرد}\end{cases}\qquad (a\neq ۰)$$

برای رفع ابهام حدهایی که به صورت $۰\times\infty$ هستند، معمولاً عامل بی‌نهایت شونده را به شکل معکوس به مخرج انتقال می‌دهیم. (مانند الگوی زیـر)، تـا به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درآید. سپس با استفاده از مطالبی که برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ گفته شد، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to a}f(x)=۰\ ,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)g(x)\xlongequal{\text{مبهم } ۰\times\infty}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{۱}{g(x)}}\xlongequal{\frac{۰}{۰}}\dots$$

مثال : $\lim\limits_{x\to ۱}(x^۵-۱)\tan\frac{\pi x}{۲}\xlongequal{\text{مبهم } ۰\times\infty}\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۵-۱}{\cot\frac{\pi x}{۲}}\xlongequal[\text{Hop}]{\text{مبهم } \frac{۰}{۰}}\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۵x^۴}{-\frac{\pi}{۲}\left(۱+\cot^۲\frac{\pi x}{۲}\right)}=\frac{۵}{-\frac{\pi}{۲}}=-\frac{۱۰}{\pi}$

تمرین (سنجش)

اگر مجموع حدود چپ و راست تابع $f(x)=\left[x^2\right]+x[2x]$ در اعداد صحیح مثبت m برابر ۲۱ باشد، f(m) کدام است؟

۱) ۱۲   ۲) ۸   ۳) ۲۷   ۴) ۴۸

$$\lim_{x\to m^+} f(x)=\lim_{x\to m^+}\left[x^2\right]+x[2x]=m^2+m(2m)=3m^2$$

$$\lim_{x\to m^-} f(x)=\lim_{x\to m^-}\left[x^2\right]+x[2x]=(m^2-1)+m(2m-1)=3m^2-m-1$$

مجموع حدود چپ و راست در $x=m$ برابر است با:

$$6m^2-m-1=21\to 6m^2-m-22=0\to$$

$$(m-2)(6m+11)=0\xrightarrow{\text{اعداد صحیح مثبت } m} m=2$$

$$\to f(m)=f(2)=4+2(4)=12$$

تمرین (ماز)

برای تابع $f(x)=\dfrac{a(x-3)}{\sqrt{x^2+7}-b}$، داریم $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۴-   ۳) ۳-   ۴) ۳

$$\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{\sqrt{x^2+7}-b}=4 \qquad \sqrt{3^2+7}-b=0\to 4-b=0\to b=4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{\sqrt{x^2+7}-b}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 3}\frac{a}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}}=\frac{a}{\frac{3}{4}}=4\to\frac{4a}{3}=4\to a=3$$

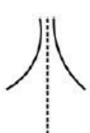
$$\lim_{\to-\infty}\frac{a(x-3)}{\sqrt{x^2+7}-4}\xrightarrow{\text{پر توان}}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{|x|}=-a=-3$$

تمرین (سنجش)

نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax}{\sin x-b}$ حوالی $x=\dfrac{\pi}{2}$ با کدام شرایط به شکل مقابل است؟

۱) $a<0$ ، $b=1$ ۲) $a<0$ ، $b=-1$

۳) $a>0$ ، $b=1$ ۴) $a>0$ ، $b=-1$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x) = +\infty \to \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{ax}{\sin x - b} = +\infty$$

مخرج کسر باید به صفر میل کند:

$$۱ - b = ۰ \to b = ۱$$

ضمناً مخرج کسر $(\sin x - ۱)$ عبارتی نامثبت است، چون:

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \to -۲ \le \sin x - ۱ \le ۰$$

پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{ax}{\sin x - b} = \frac{a(\frac{\pi}{۲})}{۰^-} = +\infty \to a(\frac{\pi}{۲}) < ۰ \to a < ۰$$

تمرین (سنجش)

تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^۲ ۲x}{۱+\cos x} & x \ne \pi \\ b & x = \pi \end{cases}$ در $x = \pi$ پیوسته است. مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶

باید حد و مقدار تابع در $x = \pi$ با هم برابر باشند:

$$f(x) = \lim_{x\to\pi} f(x) \to b = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^۲ ۲x}{۱+\cos x} \to b = \lim_{x\to\pi} \frac{(۲\sin x.\cos x)^۲}{۱+\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{۴\sin^۲ x.\cos^۲ x}{۱+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{۴(۱-\cos^۲ x)\cos^۲ x}{۱+\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{۴(۱-\cos x)(۱+\cos x)\cos^۲ x}{۱+\cos x} = \frac{۴(۲)(۱)}{۱} = ۸$$

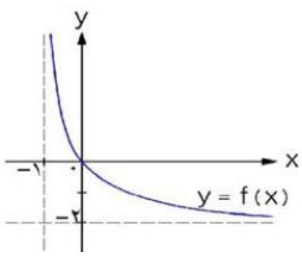
امتحان نهایی

الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

آ) $\lim_{x\to ۰^-} \frac{[x]}{\sin x} =$

ب) $\lim_{x\to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)} =$

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



آ) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x\to -۱^+} f(x) =$

محاسبات

الف)

آ) $\underbrace{\frac{-۱}{۰^-}}_{۰/۵} = \underbrace{+\infty}_{۰/۲۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \underbrace{\frac{x^۲ - x}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}}_{۰/۲۵} = \lim\limits_{x\to ۱} \underbrace{\frac{x(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}}_{۰/۲۵} = \underbrace{+\frac{۱}{۶}}_{۰/۲۵}$

ب)

آ) $\underbrace{-۲}_{۰/۲۵}$ ب) $\underbrace{+\infty}_{۰/۲۵}$

امتحان نهایی

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$

پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x^۳-۵x+۱}{۶x^۳-۱۱x^۲-۳}$

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{(۲-\sqrt{x+۱})(۲+\sqrt{x+۱})}$ $(۰/۵)$ $= \lim\limits_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-(x-۳)} = -۲۴$ $(۰/۵)$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$ $(۰/۵)$

پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x^۳}{۶x^۳} = \frac{۱}{۳}$ $(۰/۵)$

امتحان نهایی

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲-۲x-۳}{x-\sqrt{x+۶}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$

الف) $\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۱)(x+\sqrt{x+۶})}{x^۲-x-۶}$ $(۰/۷۵)$ $=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۱)(x+\sqrt{x+۶})}{(x+۲)(x-۳)}=\frac{۲۴}{۵}$ $(۰/۵)$

ب) $\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۱}{x-۳}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$ $(۰/۵)$

امتحان نهایی

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ ب) $\lim_{x\to(-\frac{۱}{۳})}\frac{[x]}{|۳x+۱|}$ ج) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$

الف) $\lim_{x\to ۵}\frac{(۲-\sqrt{x-۱})(۲+\sqrt{x-۱})}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}$ $(۰/۲۵)$ $=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۴}$ $(۰/۵)$

ب) $\underbrace{\lim_{x\to-\frac{۱}{۳}}\frac{-۱}{|۳x+۱|}}_{(۰/۲۵)}=\frac{-۱}{\underbrace{۰^+}_{(۰/۲۵)}}=-\infty$ $(۰/۲۵)$

مخرج در نزدیکی $-\frac{۱}{۳}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $-\frac{۱}{۳}$ برابر -۱ است. بنابراین جواب حد برابر $-\infty$ می شود.

ج) $\frac{۳+۰}{۰-۵}=-\frac{۳}{۵}$ $(۰/۵)$

امتحان نهایی

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$ ب) $\lim_{x\to ۰}\frac{x+۱}{\sin^۲ x}$

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $(0/5)$ $= \overbrace{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x)}{(2x+1)}}^{(0/25)} = \frac{1}{4}$ $(0/25)$

ب) $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+}}_{(0/5)} = +\infty$ $(0/25)$

تمرین (سنجش)

- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{[x]+2}{x^2+3x+2}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $-\infty$ ۴) صفر

گزینه ۴ درست است.

$$[(-1)^-] = -2 \Rightarrow \lim_{x\to(-1)^-} \frac{[x]+2}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0^-} = 0$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x) = 2x-1$ و $g(x) = \frac{x^2-2}{2x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \frac{fog(x)}{x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

گزینه ۱ درست است.

$$f(g(x)) = 2\left(\frac{x^2-2}{2x}\right)-1 = \frac{x^2-2}{x}-1 = \frac{x^2-x-2}{x}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{fog(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{3}{2}$$

تمرین (سنجش)

- حاصل $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{x^۲ + ax + a}{x^۲ - ۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

گزینه ۱ درست است.

$$\lim_{x \to ۳} (x^۲ - ۹) = ۰ \Rightarrow \lim_{x \to ۳} x^۲ + ax + a = ۰ \Rightarrow ۹ + ۴a = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۹}{۴}$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - \frac{۹}{۴}x - \frac{۹}{۴}}{x^۲ - ۹} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to ۳} \frac{\cancel{(x - ۳)}(x + \frac{۳}{۴})}{\cancel{(x - ۳)}(x + ۳)} = \frac{\frac{۱۵}{۴}}{۶} = \frac{۱۵}{۲۴} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین (سنجش)

- حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{۳ - \sqrt{۲x + ۵}}{۲ - x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۳ - \sqrt{۲x + ۵}}{۲ - x} = \frac{۳ - ۳}{۲ - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۳ - \sqrt{۲x + ۵}}{۲ - x} = \lim_{x \to ۲} \frac{۹ - (۲x + ۵)}{۶ \times (۲ - x)} = \frac{۲\cancel{(۲ - x)}}{۶ \times \cancel{(۲ - x)}} = \frac{۱}{۳}$$

تمرین (سنجش)

- اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{mx-\sqrt{x+۳}}{x^۲-x}=n$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}(nxf(x))$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۷}{۴}$ ۲) $\dfrac{۷}{۲}$ ۳) $\dfrac{۷}{۸}$ ۴) $\dfrac{۴}{۷}$

گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x\to ۱}(x^۲-x)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(mx-\sqrt{x+۳})=۰ \Rightarrow m-۲=۰ \Rightarrow m=۲$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-\sqrt{x+۳}}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲-(x+۳)}{۴(x^۲-x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(۴x+۳)}{۴x\cancel{(x-۱)}}=\frac{۷}{۴}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\frac{۷}{۴}xf(x))=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{۷}{۴}x(۲x-\sqrt{x+۳})}{x^۲-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{۷}{۲}x^۲}{x^۲}=\frac{۷}{۲}$$

تمرین (سنجش)

- اگر $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(a+۲)x^۳+(۳a+b)x+۵}{x+۳}=۰$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینه ۲ درست است.

چون حد عبارت وقتی $x\to\infty$ برابر صفر شده است، پس درجهٔ صورت از مخرج کمتر است و داریم:

$$\begin{cases} a+۲=۰ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \xrightarrow{a=-۲} b=۶ \Rightarrow a+b=-۲+۶=۴$$

با شرکت در کلاس های استاد دارستانی به جمع دانش آموزان قبولی ایشان بپیوندید.

۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (سنجش)

کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{x^2-1}=\dfrac{3}{4}$

۲) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x^2-1}}{3x+\sqrt{x-1}}=1$

۳) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin x+1}{\cos x-1}=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin^2 x-3\cos x}{2\cos x-1}=\dfrac{5}{2}$

گزینه ی ۴

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{-(2\cos x-1)(\cos x+2)}{2\cos x-1}=-\dfrac{5}{2}$

تمرین (سنجش)

حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{[1+\sin x]}{\pi+2x}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) ∞

گزینه ۲ درست است.

$1+\sin(-\frac{\pi}{2})=0$ و همواره $1+\sin x\geq 0$ است.

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{[1+\sin x]}{\pi+2x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{0}{\pi+2x}=0$$

پیام مشاوره ای: ناامیدی از حل تست هایی مثل درس ریاضی به دلیل تفاوت سطح سوالات کنکور با درسی که توی مدرسه بهمون میدن معمولا در کنکوری ها رایجه. اینو مطمئن باشید که برای رتبه های برتر کنکور هم این داستان بوده. اما اونا یه ویژگی داشتن...پایداری!

با صبر و پایداری میتونید به درصد های بالا برسید. پس ناامید نشین اصلا.

تمرین (سنجش)

- حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-|x|}{x+۱}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+x}{x+۱} = \lim_{x\to -\infty}\frac{۲x}{x+۱} = ۲$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=\begin{cases} ax+۲b & x>۳ \\ ax^۲+bx+۲ & x<۳ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۶$ ، $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} ax+۲b = ۳a+b=۶$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} ax^۲+bx+۲ = ۹a+۳b+۲=۲$$

$$-۳\begin{cases} ۳a+۲b=۶ \\ ۹a+۳b=۰ \end{cases} \Rightarrow -۳b=-۱۸ \Rightarrow b=۶ \Rightarrow a=-۲$$

$$a+b=۴$$

تمرین (سنجش)

- اگر $+\infty = \lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{x^۲}{۴x^۲+ax+b}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۳ ۴) -۳

گزینه ۱ درست است.

$$x\to -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow ۲x+۱=۰ \quad \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{x^۲}{(۲x+۱)^۲} = +\infty \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱ = ۴x^۲+ax+b \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۱ \end{cases}$$

$$a+b=۴+۱=۵$$

تمرین (سنجش)

حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{۲^n+۳^n+۴^n+۵^n}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) $+\infty$　　۳) ۲　　۴) ۵

گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{۵^n\left(\cancel{(\frac{۲}{۵})^n}+\cancel{(\frac{۳}{۵})^n}+\cancel{(\frac{۴}{۵})^n}+۱\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{۵^n}=۵$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=\dfrac{۴x-۱}{ax^۲+bx-۱۲}$ و $\lim\limits_{x\to۲}f(x)=-\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}bxf(x)$ کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) -۸　　۳) -۱۶　　۴) ۶

گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to۲}\frac{۴x-۱}{ax^۲+bx-۱۲}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to۲}\frac{۷}{a(x-۲)^۲}=-\infty\Rightarrow۴a=-۱۲\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=۱۲$$

$$\lim_{x\to+\infty}bxf(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x(۴x-۱)}{-۳x^۲+۱۲x-۱۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴۸x^۲}{-۳x^۲}=-۱۶$$

حد عبارت $\dfrac{۴x-۷-[۲x]}{۲+x-\sqrt{۵x+۱۰}}$ وقتی $x\to۳^-$، کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

- حد عبارت $\dfrac{۳x+۱}{۲^x-x^۲}$ وقتی $x\to۲^+$ کدام است؟

۱) $+\infty$　　۲) $-\infty$　　۳) ۲　　۴) -۲

- اگر $\lim\limits_{x\to۲}\dfrac{x-\sqrt{x+۲}}{ax+b}=\dfrac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-\sqrt{x^۲+۲x+۳}}{۲x+۵}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

فصل ۴

مشتق

مفهوم مشتق و کاربرد مشتق از فصل های مهم و آسان کنکور می باشد که حدود ٤ تست از کنکور را به خود اختصاص می دهند. مطالعه ی این فصل و یادگیری قوانین آن شما رو در حل این ٤ سوال یاری میکنه.

همچنین حدود ۸ نمره از ۲۰ نمره ی امتحانی در امتحانات نهایی هماهنگ کشوری به این فصل های مشتق اختصاص پیدا میکنه که اهمیت راهبردی این فصل ها رو در امتحان نشون میده.

روزی مردی از کنار جنگلی می گذشت مرد دیگری را دید که با اره ای کند به سختی مشغول بریدن شاخه های درختان است .
پرسید ای مرد چرا اره ات را تیز نمی کنی تا سریعتر شاخه ها را ببری . مرد گفت وقت ندارم باید هیزم ها را تحویل دهم کارم خیلی زیاد است و حتی گاه شب ها هم کار میکنم تا سفارش ها را به موقع برسانم . دیگر وقتی برای تیز کردن اره نمی ماند .
مرد داستان ما اگر گاهی می ایستاد و وقتی برای تیز کردن اره اش می گذاشت شاید دیگر با کمبود وقت مواجه نمی شد چون بدون شک با اره کند نمی توان سریع و موثر کار کرد .
حکایت بیشتر ما انسانها نیز همین است .
باید اندکی تامل کنیم . گاه ذهن ما بسیار درگیر کار یا تحصیل است و ما با فشار زیاد سعی در پیش کشیدن خود داریم .
گاه باید بایستیم و به درون خود رسیدگی کنیم و اره ذهن و روح خود را تیز کنیم
زندگی ترکیبی است از تناقض هاست.

دو تعریف از مشتق در کتاب درسی وجود دارد که به آنها اشاره می کنیم.

تعریف: مشتق تابع پیوسته $f(x)$ را در نقطه $x=a$ با $f'(a)$ نشان می‌دهیم و از یکی از دو رابطه زیر به دست می‌آید:

۱)تعریف اول مشتق: $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

همون طور که در حد و پیوستگی ، حد راست و حد چپ داشتیم ، در مشتق گیری هم مشتق راست و مشتق چپ خواهیم داشت.

مشتق راست f در $x=a$: اگر تابع f در $x=a$ از راست پیوسته باشد آنگاه مشتق راست تابع f را در این نقطه با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ f در $x=a$: اگر تابع f در $x=a$ از چپ پیوسته باشد آنگاه مشتق چپ تابع f را در این نقطه با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شرط مشتق پذیر بودن یک تابع در یک نقطه:

الف) باید در آن نقطه پیوسته باشد.

ب)مشتق راست و مشتق چپ آن موجود و برابر باشند.

*اگر تابعی پیسوته نباشد مشتق پذیر نیست

۲)تعریف دوم مشتق:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: مشتق چپ و راست:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تابع g به معادله $g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ را تابع مشتق تابع f گفته که به صورت $y=f'(x)$ نیز نمایش می‌دهند. بدیهی است دامنه تابع مشتق f نقاطی است که $f'(x)$ موجود می‌باشد. پس نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست جزء دامنه تابع مشتق تابع f و یا به عبارت دیگر دامنه تابع f' نمی‌باشد.

نکته: علاوه بر $f'(x)$از نماد $\frac{dy}{dx}$ نیز استفاده می‌شود.

قوانین توابع مشتق گیری: به جز فرمول عمومی مشتق گیری ، روابط زیر برای مشتق گیری از توابع خاص آورده شده است که حفظ آنها برای شما الزامی است.

۱	$y=c$	$y'=0$
۲	$y=x$	$y'=1$
۳	$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
۴	$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
۵	$y=u\pm V\pm\ldots$	$y'=u'\pm V'\pm\ldots$ (u و V و ... تابعی از x هستند)
۶	$y=u.V$	$y'=u'.V+V'.u$
۷	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'V-V'u}{V^2}$
۸	$y=\|u\|$	$y'=\frac{u'u}{\|u\|}=\frac{u'\|u\|}{u}$
۹	$y=u^n$	$y'=nu^{n-1}.u'$
۱۰	$y=\sqrt[m]{u^n}$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
۱۱	$y=\frac{k}{f}$	$y'=-\frac{kf'}{f^2}$

$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\sin^m u$	$y'=mu'\cos u\sin^{m-1}u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$
$y=\cos^m u$	$y'=-mu'\sin u\cos^{m-1}u$
$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$
$y=\tan^m u$	$y'=mu'(1+\tan^2 u)\tan^{m-1}u$
$y=\cot g\, u$	$y'=-u'(1+\cot g^2 u)$
$y=\cot g^m u$	$y'=-mu'(1+\cot g^2 u)\cot g^{m-1}u$

مشتق تابع به فرم $y=[f(x)]$ در نقاطی که مشتق پذیر باشد صفر است.

هنگام مشتق‌گیری از توابعی به فرم کلی $f(x)=g(x)[h(x)]$ در نقطه‌ای به طول a (البته به شرطی که $h(a)$ صحیح نشود) دو راه وجود دارد.

۱) از همان ابتدا $[h(a)]$ را که عدد صحیح می‌باشد، حساب کرده، سپس از تابع ساده شده، مشتق بگیریم و a را در آن قرار دهیم.

۲) با جزء صحیح، مثل یک ضریب عددی برخورد می‌کنیم و از تابع مشتق می‌گیریم، سپس عدد a را در جواب، قرار می‌دهیم.

تمرین (امتحان نهایی)

مشتق‌تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق درنقطه ای به طول $x=-1$ به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\underbrace{\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}}_{0/25}=\underbrace{\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2+3}{x+1}}_{0/25}=\underbrace{\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}}_{0/25}=\underset{0/25}{3}$$

تمرین(امتحان نهایی)

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=(x^{۴}-۳x)^{۵}$ **ب)** $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{۱-x}$

الف) $f'(x)=\underbrace{۵}_{۰/۲۵}\underbrace{(x^{۴}-۳x)^{۴}}_{۰/۲۵}\underbrace{(۴x^{۳}-۳)}_{۰/۲۵}$

ب) $g'(x)=\dfrac{\overbrace{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-x)}^{۰/۲۵}-\overbrace{(-۱)\sqrt{x}}^{۰/۲۵}}{\underbrace{(۱-x)^{۲}}_{۰/۲۵}}$

تمرین (امتحان نهایی)

تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۰ \\ x^{۲}-۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ **را در نظر بگیرید:**

الف) نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

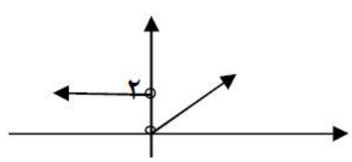
ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

الف) در $x=۰$ گوشه ای ومشتق ناپذیراست.۰/۵ (در صورتی که با مقدار مشتق چپ و راست بررسی کند نمره تعلق می گیرد)

ب) $f'(x)=\begin{cases} ۲ & x<۰ \\ ۲x & x>۰ \end{cases}$ ۰/۵

ج)



تمرین (امتحان نهایی)

تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰ \\ ۲x+۱ & x<۰ \end{cases}$ داده شده است؛

الف)نشان دهید که $f'(۰)$ وجود ندارد.

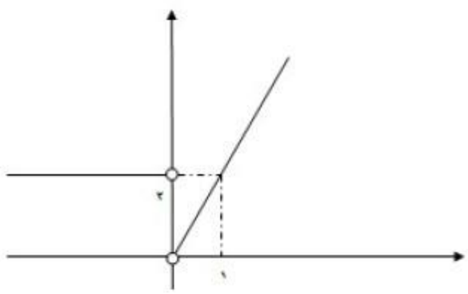
ب) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

الف) تابع f در صفر پیوسته نیست. بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست (۰/۵)

ب) $f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ ۲ & x<۰ \end{cases}$ (۰/۵)

پ) (۰/۵) نمره



تمرین (امتحان نهایی)

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=\dfrac{۳x+۱}{\sqrt{x}}$

ب) $g(x)=(\dfrac{۱}{x})(x^۲+۵x)^۷$

الف) $f'(x)=\dfrac{۳\sqrt{x}-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x+۱)}{(\sqrt{x})^۲}$ (۰/۷۵)

ب) $g'(x)=\underbrace{(-\dfrac{۱}{x^۲})(x^۲+۵x)^۷}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{(\dfrac{۱}{x})(۷(۲x+۵)(x^۲+۵x)^۶)}_{(۰/۷۵)}$

تمرین (سنجش)

- تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$ در تساوی $g(x)=(-۳x+۲)f'(x)$ صدق می‌کند. مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

گزینه ۳ درست است.

ابتدا $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$$

حال به ازای $x=۱$ داریم:

$$(-۳x+۲)f'(x)=g(x)\xrightarrow{x=۱}-f'(۱)=g(۱)$$

بنابراین $-f'(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$-f'(۱)=-\frac{(-۱)\times(-۱)+۳\times(-۱)}{۱}\Rightarrow -f'(۱)=-۲\Rightarrow f'(۱)=۲\Rightarrow g(۱)=۲$$

تمرین(سنجش)

- اگر $f'(-۱)=-f(-۱)=-f'(۱)=۱$، باشد. مشتق تابع $y=۲f(x)+۳fof(x)$ در $x=-۱$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۵

گزینه ۴ درست است.

$$y'=۲f'(-۱)+۳f'(-۱)f'(f(-۱))=۵$$

تمرین (سنجش)

اگر $f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+bx & ; \quad x<۱\\ ۳\sqrt[۳]{x^{۲}}+ax & ; \quad x\geq ۱\end{cases}$ در کل $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینه ۳ درست است.

تابع در $x=۱$ نیز مشتق‌پذیر است.

$$L_۱=a+b\ ,\ L_۲=۳+a\ ,\ L_۱=L_۲\Rightarrow b=۳$$

$$f'(۱^{+})=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۱}}+a\ ,\ f'(۱^{-})=۲a+۳\Rightarrow a=-۱\Rightarrow b-a=۴$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-x & ; \quad x>۲ \\ x^۳+x & ; \quad x\leq ۲ \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-} \dfrac{f(۲-h)-f(۲+h)}{۲h}$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) -۱۲ ۳) -۱۳ ۴) وجود ندارد.

گزینه ۲ درست است.

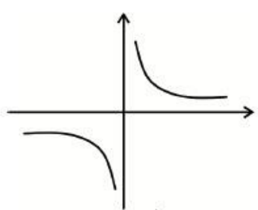
چون تابع در $x=۲$ پیوسته و $f'(۲^+)=۱۲-۱=۱۱$ و $f(۲^-)=۱۲+۱=۱۳$

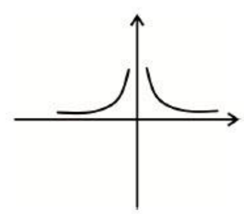
$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{۲h}-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲h}=\frac{-f'(۲^+)-f'(۲^-)}{۲}$$

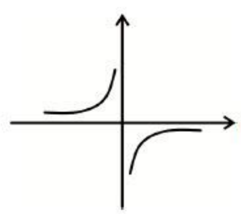
$$=\frac{-۱۱-۱۳}{۲}=-۱۲$$

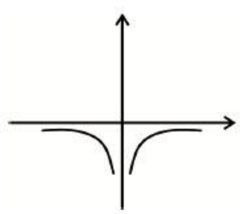
تمرین (سنجش)

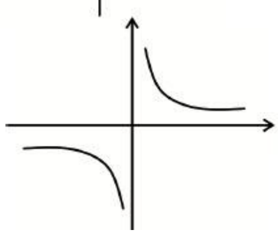
- اگر شکل زیر نمودار تابع f باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

. گزینه ۳ درست است.

F نزولی بنابراین $f'<۰$ است. نمودار f' زیر محور xها قرار دارد.

با شرکت در کلاس های مشاوره و برنامه ریزی گروه آموزشی آفتاب ، به جمع قبولی ها بپیوندید.

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=x|x|$ و $g'(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $F(x)=gof(x)$ باشد، $F'(x)$ کدام است؟

۱) $۲|x|.\sqrt{۴-x^۴}$ ۲) $-۲|x|.\sqrt{۴-x^۴}$ ۳) $۴|x|.\sqrt{۲-x^۴}$ ۴) $-۴|x|.\sqrt{۲-x^۴}$

گزینه ۱ درست است.

$$F'(x)=(gof)'(x)=f'(x).g'(f(x))$$
$$=(|x|+\frac{x^۲}{|x|}).\sqrt{۴-(x|x|)^۲}=۲|x|.\sqrt{۴-x^۴}$$

تمرین (سنجش)

- اگر $f(x)=(x+۱)\sqrt[۳]{x^۲+۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\sqrt{۶}+h)-f(\sqrt{۶})}{h}$ کدام است؟

۱) $۳+\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۲) $۲+\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $۳+\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $۲+\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم حاصل حد خواسته شده برابر $f'(\sqrt{۶})$ است. پس:

$$f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{x^۲+۲}+\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲)^۲}}\times(x+۱)\Rightarrow f'(\sqrt{۶})=۱\times۲+\frac{۲\sqrt{۶}\times(\sqrt{۶}+۱)}{۳\times۴}$$

$$=۲+\frac{۱۲+۲\sqrt{۶}}{۱۲}=۳+\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

تمرین (سنجش)

- مشتق عبارت $(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^{\frac{۱}{۳}}$ در نقطه $x=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶\sqrt[۳]{۳}}$ ۲) $\frac{-۱}{۶\sqrt[۳]{۳}}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲\sqrt[۳]{۹}}$ ۴) $\frac{۱}{۶\sqrt[۳]{۹}}$

.گزینه ۳ درست است.

$$y=(\frac{x}{\sqrt{x}}+۱)^{\frac{۱}{۳}}=(\sqrt{x}+۱)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x}+۱)^{-\frac{۲}{۳}}$$

به ازای $x=۴$ مقدار مشتق برابر است با $\frac{۱}{۱۲\sqrt[۳]{۹}}$

تمرین (سنجش)

– مشتق عبارت $\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$، به‌ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

.گزینه ۱ درست است.

اگر به فرم $f(x)=(۱-x)\frac{۱+x}{۱+x^۲}$ در نظر بگیریم $f'(s)=-\frac{۱+۱}{۱+x^۲}$ و برابر ۱– است.

کاربرد مشتق

۱- جهت تغییرات تابع (صعودی یا نزولی) (یکنوایی تابع)

به عنوان اولین کاربرد مشتق ، تعیین می کنیم که تابع در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی و در چه نقاطی ثابت است .

الف : تابع صعـــــــــودی

تابع $y=f(x)$ را در دامنه ی خود صعودی گوییم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه ی تابع داشته باشیم :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 \le x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز افزایش یابد .

صعودی اکید (اکیداً صعودی) : $\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

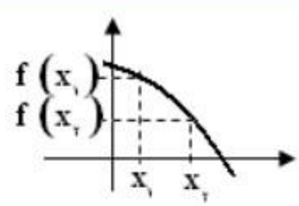
ب : تابع نــــــــــزولی

تابع $y=f(x)$ را در دامنه ی خود نزولی گوییم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه ی تابع داشته باشیم :

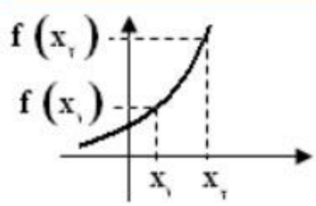
$$\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 \le x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز کاهش یابد .

نزولی اکید (اکیداً نزولی) : $\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$



تابـــــع نزولی



تابع صعودی

نکته :

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع

1. **مشتق تابع را می گیریم .**
2. **مشتق را برابر صفر قرار می دهیم و ریشه های آن را تعیین می کنیم .**
3. **مشتق را تعیین علامت می کنیم و در هر فاصله ای که مشتق مثبت باشد تابع اکیداً صعودی است و برعکس .**

مثال **جهت تغییرات تابع $f(x)=2x^3-9x^2+12x+30$ را بررسی کنید .**

حـــــل :

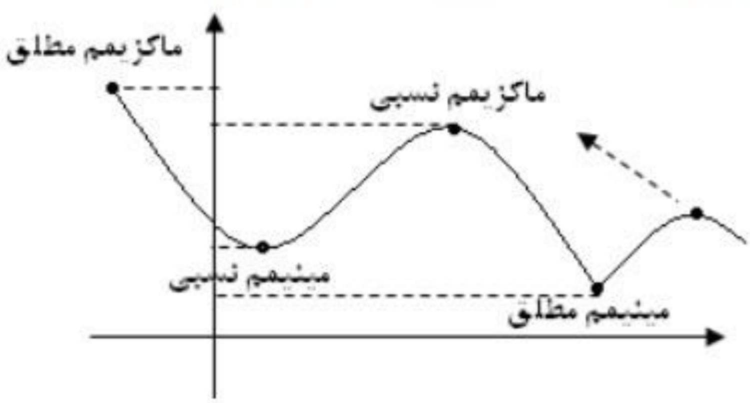
$$f(x)=2x^3-9x^2+12x+30 \Rightarrow f'(x)=6x^2-18x+12=0$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=35 \\ x=2 \rightarrow y=34 \end{cases}$$

x		۱		۲	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	۳۵ Max	↘	۳۴ Min	↗

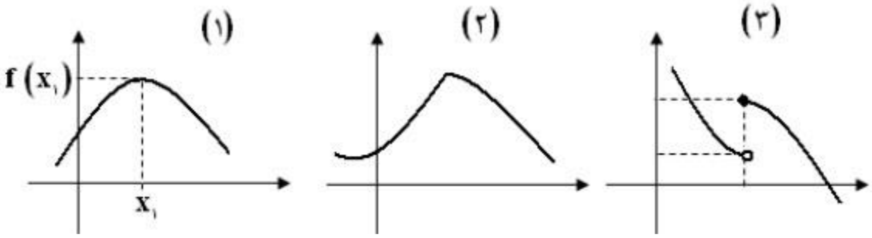
۲- تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع (اکسترمم نسبی)

قبل از تعریف دقیق و علمی ماکزیمم و مینیمم یک تابع ، به شکل زیر توجه کنید :



الف: ماکزیمم نسبی:

نقطه ای به طول x_1 را ماکزیمم نسبی تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک همسایگی در اطراف x_1 وجود داشته باشد که $f(x_1)$ بالاترین نقطه باشد یعنی به ازای هر x از آن همسایگی داشته باشیم : $f(x)\le f(x_1)$



ب) مینیمم نسبی :

نقطه ای به طول x_1 را مینیمم نسبی تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک همسایگی در اطراف x_1 وجود داشته باشد که $f(x_1)$ پایین ترین نقطه باشد یعنی به ازای هر x از آن همسایگی داشته باشیم : $f(x)\ge f(x_1)$

نکات :

۱. به نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی اصطلاحاً اکسترمم نسبی می گویند .
۲. ممکن است تابعی در نقطه ای اکسترمم نسبی داشته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد . (شکل ۲)
۳. ممکن است تابعی در نقطه ای اکسترمم نسبی داشته باشد ولی در آن نقطه پیوسته نباشد (شکل ۳)
۴. اگر تابعی در نقطه ای اکسترمم نسبی داشته باشد و در آن نقطه مشتق پذیر باشد ، آنگاه مشتق در آن نقطه صفر است : $\boxed{f'(x_1)=0}$
۵. در یک فاصله بسته $[a,b]$ نقاط ابتدا و انتها نمی توانند اکسترمم نسبی باشند . زیرا در نقطه ی a همسایگی چپ ندارد و در نقطه ی b همسایگی راست ندارد .
۶. تابع ثابت در تمام نقاط دامنه خود هم ماکزیمم و هم مینیمم است .

توجه : برای بدست آوردن نقاط اکسترمم

۱. مشتق تابع را حساب می کنیم
۲. ریشه های مشتق را به دست می آوریم .
۳. تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم و مطابق جدول زیر :

ریشه های مشتق

x		x_1		x_2		x_3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(x_1)$ ماکزیمم نسبی	↘	$f(x_2)$ می نیمم نسبی	↗	$f(x_3)$ ماکزیمم نسبی	↘

۳- تعیین ماکزیمم و مینیمم مطلق:

- ماکزیمم مطلق : نقطه ای به طول x_1 را ماکزیمم مطلق تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک به ازای هر x از دامنه ی تابع داشته باشیم : $f(x)\le f(x_1)$
- مینیمم مطلق : نقطه ای به طول x_1 را مینیمم مطلق تابع $y=f(x)$ می گوییم هرگاه یک به ازای هر x از دامنه ی تابع داشته باشیم : $f(x)\ge f(x_1)$

نکته : اگر تابع $y=f(x)$ در فا صله ی $[a,b]$ پیو سته با شد آن گاه تابع حتماً در این فا صله یک ماکزیمم مطلق و یک مینیمم مطلق دارد .

برای تعیین اکسترمم های مطلق در فاصله ی $[a,b]$ ابتدا اکسترمم های نسبی را به دست آورده و $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می کنیم از بین این مقادیر، بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق است .

مثال ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2$ را در فاصله ی $[-3,2]$ بیابید .

حـــــل :

$$f(x)=x^3-3x^2$$

$$f'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=0\\x=2\Rightarrow y=-4\end{cases}$$

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗
		Max		Min	

$$[-3,2]\rightarrow\begin{cases}f(3)=-4\\f(-3)=-54\end{cases}$$

از بین مقادیر $\{0,-4,-54\}$ بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق است .

و لذا : $(-3,-54)$ مینیمم مطلق و $(0,0)$ ماکزیمم مطلق تابع در فاصله ی $[-3,2]$ است .

> نقاط *Max* یا *Min* یک تابع را نقاط اکسترمم تابع می نامند که دو ویژگی مهم دارند :
>
> در معادله صدق می کنند
>
> اولاً این نقاط مشتق را صفر می کنند

۴- نقاط بحرانی:

نقطه ای به طول x_1 متعلق به دامنه ی تابع ، نقطه ی بحرانی گفته می شود ، اگر مشتق در x_1 برابر صفر باشد ویا مشتق درآن نقطه موجود نباشد .

نکته : تمام نقاط اکسترمم نسبی نقطه ی بحرانی هستند (ولی نقاط بحرانی ممکن است اکسترمم نسبی نباشد.)

نکته : نقاط ناپیوستگی جزو نقاط بحرانی هستند .

مثال نقاط بحرانی تابع به معادله ی $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+x-4}$ را تعیین کنید .

حـــــل :

$$f(x)=\sqrt[3]{3x^2+x-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{6x+1}{3\sqrt[3]{\left(3x^2+x-4\right)^2}}=0$$

$$\Rightarrow 6x+1=0\rightarrow x=-\frac{1}{6}$$

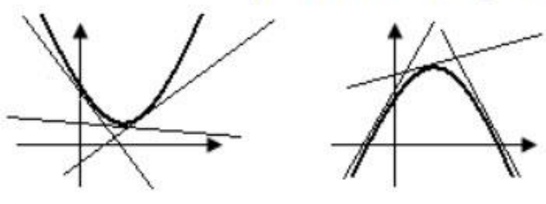
برای تعیین نقاط مشتق ناپذیر : $3x^2+x-4=0$

$$\Delta=1-4(3)(-4)=49\rightarrow x=\frac{-1\pm 7}{3}\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

و نقاط بحرانی عبارتند از : $\left(-\frac{1}{6},-\sqrt[3]{\frac{49}{12}}\right)$ و $(1,0)$ و $\left(-\frac{4}{3},0\right)$.

۵- تقعر منحنی و نقطه ی عطف

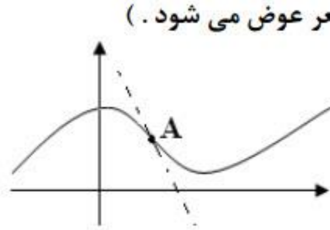
جهت تقعر یک منحنی در بازه ی $[a,b]$ رو به بالا است اگر آن تابع در این بازه مشتق پذیر بوده و هر مماس دلخواه بر منحنی در این بازه رسم کنیم زیر منحنی قرار گیرد . و برعکس .



جهت تقعر رو به بالا   جهت تقعر رو به پایین

نقطه عطف :

نقطه ی A نقطه ی عطف تابع نامیده می شود اگر خط مماس بر منحنی در نقطه ی A موجود باشد و منحنی را قطع کند (در این نقطه جهت تقعر عوض می شود .)



برای تعیین تقعر و نقطه عطف :

1. مشتق تابع و مشتق دوم تابع را به دست می آوریم .
2. ریشه های مشتق دوم را تعیین می کنیم . $(y''=0)$
3. مشتق دوم را تعیین علامت می کنیم . و در هر فاصله ای که مشتق دوم مثبت باشد جهت تقعر منحنی روبه بالاست و برعکس .
4. نقطه ای که مشتق دوم تابع صفر است و تغییر علامت می دهد آن نقطه نقطه ی عطف تابع نامیده می شود .

نتیجه : طول نقطه ی عطف یک تابع از حل معادله ی $f''(x)=0$ به دست می آیند . (xهایی که در آنها مشتق دوم تغییر علامت می دهد .)

نقطـــــــــه عطف هر تابع دو خاصیت مهم دارد :
در معادله صدق می کنند
طول نقطه ی عطف مشتق دوم را صفر می کند .

مثال مقادیر a ، b و c را چنان تعیین کنید که (۳- ، ۱) نقطه ی عطف منحنی $y=ax^3+bx^2+c$ بوده و منحنی از نقطه ی (۱- ، ۰) بگذرد .

$$y=ax^3+bx^2+c \Rightarrow y'=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$

$$\text{نقطه عطف}(1,-3) \Rightarrow \begin{cases} f(1)=3 \Rightarrow a+b+c=-3 \\ f''(1)=0 \Rightarrow f''(1)=6a+2b=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{نقطه ی معمولی}(0,-1) \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow 0+0+c=-1 \Rightarrow \boxed{c=-1} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=-4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=2 \quad , \quad b=-6$$

رسم نمودار یک تابع:

مهمترین کاربرد مشتق در رسم نمودار یک تابع است که برای این کار :

1. تعیین دامنه تابع .
2. تعیین مجانب های تابع در صورت وجود .
3. یافتن مشتق و ریشه های آن (جدول تغییرات و تعیین اکسترمم ها).
4. یافتن تقعر منحنی و نقاط عطف در صورت وجود .
5. رسم نمودار به کمک جدول تغییرات .

نکات نمودار توابع خاص

الف : تابع درجه ۲ :

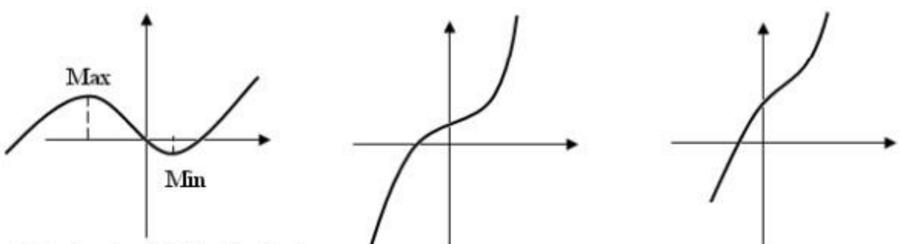
شکل استاندارد تابع درجه ۲ به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که نمودار این توابع به یکی از دو صورت زیر است :

در هر دو حالت طول نقطه ی راس که در یکی ماکزیمم و در دیگری مینیمم تابع است ریشه مشتق است .

$$y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

و لذا مختصات نقطه ی راس

$$S \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{-b}{2a} \\ y = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{array} \right.$$



در حالتی که مشتق تابع دو جواب دارد
دو مماس افقی

در حالتی که مشتق یک جواب دارد
یک مماس افقی

در حالتی که مشتق جواب ندارد
بدون مماس افقی

نکته ۱ : در حالتی که مشتق دو ریشه ی متمایز داشته باشد ، نقطه ی عطف وسط پاره خطی است که ماکزیمم و مینیمم را به هم وصل می کند .

نکته ۲ : در حالتی که مشتق ریشه ی مضاعف داشته باشد ، مماس بر منحنی در نقطه ی عطف ، خطی افقی موازی محور xها است .

ج - توابع به صورت $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c \neq 0$ و $ad \neq bc$) هموگرافیک نام دارد . این توابع همواره یک مجانب قائم به صورت $x = \dfrac{-d}{c}$ و یک مجانب افقی به صورت $y = \dfrac{a}{c}$ دارد . که حل برخورد دو مجانب نقطه ی $\left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ مرکز تقارن نمودار است

مثال منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^{2}}{x-1}$ را رسم کنید .

حــــــل : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ب قائم $\qquad \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}}{x-1}=\pm\infty \Rightarrow x=1$

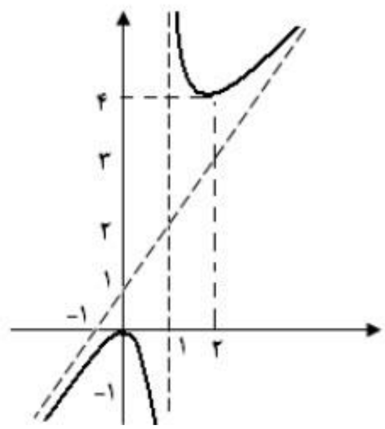
این تابع مجانب افقی ندارد زیرا درجه صورت بزرگتر است لذا دارای مجانب مایل است :

ب مایل $\qquad y=x+1 \Leftarrow \frac{1}{x-1}+\boxed{x+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x^{2}-1}{x-1}=\frac{x^{2}-1+1}{x-1}=\frac{x^{2}}{x-1}=y$ جدول تغییرات و مشتق :

$$y=\frac{x^{2}}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{x^{2}-2x}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}=0\Rightarrow x^{2}-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow y=0\\ x=2\rightarrow y=4\end{cases}$$

$$y=\frac{x^{2}}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{x^{2}-2x}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}=0\Rightarrow x^{2}-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow y=0\\ x=2\rightarrow y=4\end{cases}$$

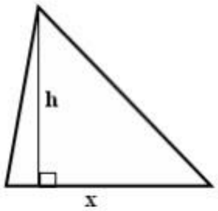
x	$-\infty$		0		1		2		∞
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0 Max	↘	∞ ‖ ∞	↘	4 Min	↗	∞



مسائل بهینه سازی

در بعضی مسائل کاربردی می توان با استفاده از مشتق و محاسبه اکسترمم ها حالت مطلوب مسئله را به دست آوریم برای این کار مراحل زیر را طی می کنیم :

۱. در صورت لزوم شکلی از مسئله رسم می کنیم .



۲. با ترجمه دقیق ریاضی به زبان ریاضی ، تابعی از متغییرهای x و y و... می نویسیم .

۳. اگر رابطه ی به دست آمده یک متغیره نباشد به کمک فرضهای مسئله یک معادله ی یک متغییره به دست می آوریم .

۴. از تابع به دست آمده مشتق گرفته و نقاط ماکزیمم ویا مینیمم رادر صورت وجود به دست می آوریم .

مثال: از میان مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است ، مساحت مثلث را به دست آورید که بیشترین مساحت را داشته باشد .

حــــــل :

$$x+h=۱۶ \;\Rightarrow\; h=۱۶-h$$

$$\text{مساحت}\; S=\frac{۱}{۲}xh=\frac{۱}{۲}x(۱۶-x)=۸x-\frac{۱}{۲}x^{۲}$$

$$S'=۸-x=۰\Rightarrow x=۸ \;\rightarrow\; h=۸ \;\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۸)(۸)=۳۲$$

قاعده هوپیتال

در محاسبه ی حد یک تابع در حالتی که به ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می رسیم برای رفع ابهام می توان از دستور که به نوعی کاربرد مشتق در حد است استفاده کنیم .

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\dots$$

مثال: حد تابع $\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-\mathrm{Sin}x}{x}$ را به د ست آورید .

حــــــل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-\mathrm{Sin}x}{x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۳-\cos x}{۱}=\frac{۳-\mathrm{Cos}۰}{۱}=۳-۱=۲$$

زاویه ی بین دو منحنی - (بین خط و منحنی)

می دانیم زاویه ی بین دو خط با شیب های m و m' از دستور $\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|$ به دست می آید .

منظور از زاویه ی بین دو منحنی ، زاویه ی بین خطوط مماس بر آن دو منحنی در نقطه ی برخورد آنها است . پس برای به دست آوردن این زاویه ، ابتدا باید دو منحنی را با هم تلاقی داده و طول نقاط برخورد آنها را به دست آوریم . سپس شیب خطوط مماس در این نقاط را یافته و از دستور زاویه ی بین دو خط ، زاویه را پیدا می کنیم .

مثال: دو منحنی $y=x^2$ و $y=x^2+x$ با هم چه زاویه ای می سازند ؟

حــــل :

طول نقاط تلاقی :
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^2+x \end{cases} \Rightarrow x^2=x^2+x \Rightarrow x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \Rightarrow y'=2x \xrightarrow{x=0} m=y'(0)=0 \\ y=x^2+x \Rightarrow y'=2x+1 \xrightarrow{x=0} m'=y'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{0-1}{1+0}\right|=1 \Rightarrow \alpha=45^\circ$$

مشتق توابع شامل قدر مطلق:

اگر بخواهیم از توابع شامل قدر مطلق مشتق بگیریم :

$$f(x)=|u| \Rightarrow f(x)=|u|=\sqrt{u^2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2uu'}{2\sqrt{u^2}} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{uu'}{|u|}}$$

مقدار مشتق تابع $y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است ؟ (تجربی – ۹۱)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

جواب

$$y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x} \Rightarrow$$
$$y'=\frac{2\sin x\cos x(2-\sin^2 x)-(-2\sin x\cos x)(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$
$$\Rightarrow y'_{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{8}{9}$$

تمرین (سنجش)

- تابع $f(x)=\dfrac{x^2+3x+m}{2x+5}$ اکسترمم نسبی ندارد. حدود **m** کدام است؟

۱) $m<\frac{5}{4}$ ۲) $m<\frac{4}{3}$ ۳) $m\le\frac{5}{4}$ ۴) $m\le\frac{4}{3}$

گزینه ۳ درست است.

باید $f'(x)$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)-2(x^2+3x+m)}{(2x+5)^2}\xrightarrow{f'(x)=0}2x^2+10x+15-2m=0$$

$$\Delta\le 0\Rightarrow 100-4(2)(15-2m)\le 0\Rightarrow m\le\frac{5}{4}$$

تمرین (سنجش)

- اگر مجموع طول‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-ax^2-9x$ برابر ۲ باشد، حاصل جمع عرض‌هـای ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع **f** کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۲- ۳) ۳۲ ۴) ۳۲-

گزینه ۲ درست است.

$$f(x)=x^3-ax^2-9x$$

$$f'(x)=3x^2-2ax-9$$

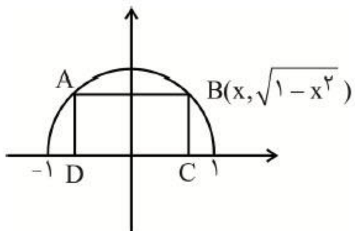
$$x'+x''=-\frac{-2a}{3}=2\Rightarrow a=3\Rightarrow\begin{cases}f(x)=x^3-3x^2-9x\\ f'(x)=3x^2-6x-9\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\end{cases}\quad \text{طول اکسترمم‌های نسبی}$$

$$\begin{cases}f(-1)=5\\ f(3)=-27\end{cases}\quad \text{عرض اکسترمم‌های نسبی}\Rightarrow 5+(-27)=-22$$

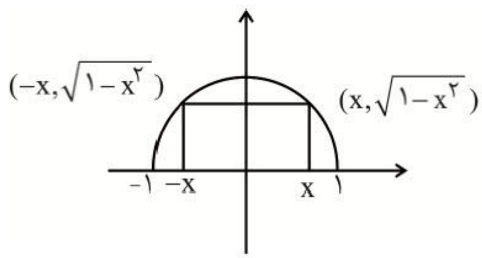
تمرین (سنجش)

در شکل زیر، مستطیل ABCD، داخل نیم‌دایره‌ای به معادلهٔ $y=\sqrt{۱-x^{۲}}$ و به شعاع ۱ واحد محاط شــده اســت. بیشترین مقدار مساحت ممکن، برای این مستطیل کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

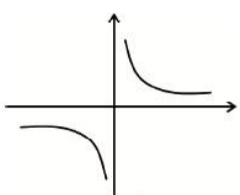
گزینه ۱ درست است.

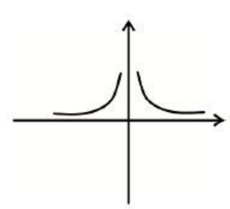


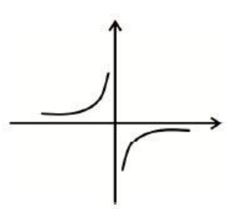
$$S_{ABCD}=۲x.\sqrt{۱-x^{۲}}$$
$$S'=۲\sqrt{۱-x^{۲}}+\frac{(-۲x)(۲x)}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}=۰$$
$$S'=\frac{۲(۱-x^{۲})-۲x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{-۴x^{۲}+۲}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$S=۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}).\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}.\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۱$$

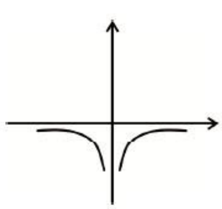
تمرین (سنجش)

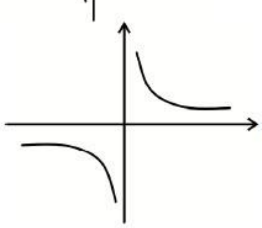
اگر شکل زیر نمودار تابع f باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

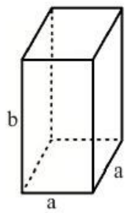
۴) 

گزینه ۳ درست است.

F نزولی بنابراین $f'<۰$ است. نمودار f' زیر محور xها قرار دارد.

تمرین (سنجش)

- **مکعب مستطیل شکل مقابل با یک صفحهٔ مقوایی به مساحت ۳۶ مترمربع ساخته شده است. بیشترین مقدار حجم مکعب مستطیل چند مترمکعب است؟**



۱) $۶\sqrt{۳}$

۲) $۹\sqrt{۶}$

۳) $۶\sqrt{۲}$

۴) $۶\sqrt{۶}$

گزینه ۴ درست است.

$$۲a^{۲} + ۴ab = ۳۶ \Rightarrow b = \frac{۱۸ - a^{۲}}{۲a}$$

$$V = a^{۲}b = a^{۲} \times \frac{۱۸ - a^{۲}}{۲a} = \frac{۱۸a - a^{۳}}{۲}$$

$$V'(a) = \frac{۱۸ - ۳a^{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow a^{۲} = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$

$$V(\sqrt{۶}) = \frac{۱۸\sqrt{۶} - (\sqrt{۶})^{۳}}{۲} = \frac{۱۸\sqrt{۶} - ۶\sqrt{۶}}{۲} = ۶\sqrt{۶}$$