www.konkur.in

سوال ۱: گ «۲»

$a, aq, aq^2 \longrightarrow 4a, 8aq, 16aq^2$ جملات دنباله عددی

$\int_{\text{داریم}}$ $4a + 16aq^2 = 16aq \rightarrow 1 + 4q^2 - 4q = 0 \quad (2q-1)^2 = 0$

$\rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$

$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 4a + 8aq + 16aq^2 \Rightarrow a + aq^2 + aq^4 = 4 + 8q + 16q^2 \xrightarrow{q=\frac{1}{2}}$

$a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} = 4 + 4 + 4 = 12 \rightarrow \frac{21a}{16} = 12 \rightarrow a = \frac{64}{7}$

سوال ۲: گ «۴»

رأس سهمی $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ نقاط $(2, \frac{-4-6k}{k})$ و $(0, -8)$ روی سهمی

$\int_{\text{حال}}$ خط صدق می‌کند:

$\frac{-4-6k}{k} = -8 - 4 \quad -4-6k = -8-4k \quad 4 = 2k \quad k = 2$

$\frac{-4-6k}{k} = \frac{-4-12}{2} = -8$ ←

سوال ۳: گ «۱»

$((A-B)' - (B-C)) - C = ((A \cap B')' \cap (B \cap C')') \cap C'$

$= [(A' \cup B) \cap (B' \cup C)] \cap C' = (A' \cup B) \cap (B' \cup C) \cap C') = (A \cup B) \cap [(B' \cap C') \cup (C \cap C')]$

$= (A' \cup B) \cap (B' \cap C') = ((A' \cup B) \cap B') \cap C' = ((A' \cap B') \cup (B \cap B')) \cap C' = A' \cap B' \cap C'$

$= A' \cap (B' \cap C') = A' \cap (B \cup C)' = A' - (B \cup C)$

سوال ۴: گ «۲»

$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) = ((\sim p \wedge \sim q) \wedge r) \vee (r \wedge (q \vee p))$

$= [\sim (p \vee q) \wedge r] \vee [r \wedge (q \vee p)] = [\sim (p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge r = T \wedge r = r$

سوال ۵: گ «۳»

$x^2 + 4x + m = x^2 + 2x - 2m \quad 4x = -4m \quad x = -m$

غیرقابل قبول: $m^2 - 4m + m = m^2 - 3m = 0 \rightarrow m \neq 0 \rightarrow m = 3$

$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow 3 - (-1) = 4$

$\begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in

www.konkur.in

سؤال ۶ : گ «۴»

$$-2 < \frac{2}{x^2-3x+2} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+1}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2 < -1 \Rightarrow x^2-3x+3 < 0$$

عبارت x^2-3x+3 همواره مثبت است

بنابراین هیچ x نمی‌تواند در نامعادله صدق کند.

سؤال ۷ : گ «۳»

$m_{AB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3}$ عمود بر AB معادله AD: $y-1 = \frac{4}{3}x$

طول $AB = \sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2} = 5 \Rightarrow AD^2 = 25$ $\quad x^2+(\frac{4}{3}x)^2 = 25$

$x^2+\frac{16}{9}x^2 = 25 \quad \frac{25}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \pm 3$

سؤال ۸ : گ «۲»

$(g^{-1}of^{-1})(0) = \alpha \quad f^{-1}(0) = g(\alpha)$

$f^{-1}(0) \rightarrow 2x-5 = 1 \quad x = 3 \rightarrow f^{-1}(0) = 3$

$\Rightarrow 3 = \alpha + \sqrt{2\alpha-4}$

$3-\alpha = \sqrt{2\alpha-4}$ توان ۲ $\Rightarrow$ $\alpha \neq 3$

$9+\alpha^2-6\alpha = 2\alpha-4 \quad \alpha^2-8\alpha+13 = 0$

$\alpha = 4+\sqrt{3}$ ق ق

$\alpha = 4-\sqrt{3}$

سؤال ۹ : گ «۱»

$g(1) = 4 \quad (1,4) \in f \Rightarrow 4 = 2+2^{b-a} \Rightarrow b-a = 1$ ①

$f^{-1}(10) = -1 \Rightarrow f(-1) = 10 \Rightarrow 10 = 2+2^{b+a} \Rightarrow b+a = 3$ ②

①,② $\Longrightarrow 2b = 4 \quad b = 2 \quad a = 1 \Rightarrow 2b-a = 4-1 = 3$

سؤال ۱۰ : گ «۴»

x^3+8 را خارج مشترک گیری می‌کنیم:

$x^2-2x+4-(x^2-9x-2) = 7x(x+2)$

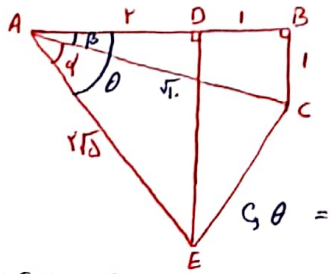
$\Rightarrow 7x+7 = 7x^2+14x \Rightarrow 7x^2+5x-7 = 0$

$x_1 = -\frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{2}{3}$

تنها x_2 مثبت است.

سؤال ۱۱ : گ «۲»



$DE^2+4 = 20 \Rightarrow DE = 4$

$AC^2 = 1+9 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta = \cos(\alpha+\beta) = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\theta$

$\cos\alpha = \cos(\theta-\beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲/

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in

www.konkur.in

سؤال ۱۲: گ «۳»

دورهٔ تناوب $T = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \Rightarrow |c| = 1$

$\max: |b| + a = 1 \xrightarrow{b>0}$

$(0,0) \rightarrow 0 = a + b\cos(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{2}$

$\begin{cases} b + a = 1 \\ b + 2a = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow b(c-a) = 2(1+1) = 4$

$b = 2$

$a = -1$

سؤال ۱۳: گ «۴»

$\cos(\frac{17\pi}{8} + x) = \cos(x + \frac{\pi}{8})$

$\cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{8} + x)) = \sin(x + \frac{\pi}{8})$

$\cos(x + \frac{\pi}{8})\sin(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases} \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]}$ $x = -\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}$

سؤال ۱۴: گ «۲»

$f(g(x+2)) = |\frac{1}{2}(g(x+2)) - 1| = 2$

با توجه به نمودار داریم:

$\Rightarrow$ $g(x+2) = 6$ (*)

$g(x+2) = -2$ (**) $\Rightarrow$

انتقال افقی تعداد دلخواه را تغییر نمی‌دهد و ۶ و ۲- همگی در برد تابع هستند

بنابراین معادلات * و ** هرکدام دارای یک جواب هستند

سؤال ۱۵: گ «۱»

$f^{-1}(x) = \frac{-\pi}{m}x + \pi \rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \frac{\frac{\pi}{m}}{\frac{m}{\pi}} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi \rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m<0} m = -\sqrt{\pi}$

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in

www.konkur.in

سؤال ۱۶ : گ «۱»

$x=0 \longrightarrow \begin{cases} |x-[x]| = 0 \\ |x-[x-a]| = |-[-a]| = [-a] = 0 \longrightarrow 0 \leq -a < 1 \end{cases}$

$\Leftarrow -1 < a \leq 0$ با فرض سؤال $-1 < a$ در تناقض است.

سؤال ۱۷ : گ «۲»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Leftarrow$ تنها نقطه بحرانی $x = \pm 1 \leftarrow x^2 = 1$ اما $x = 1$ قابل قبول است پس $x = -1$

سؤال ۱۸ : گ «۳»

$f(x) = |4x-3|\sqrt{ax}$ $\quad f'_{(\frac{3}{4})^+} = 4\sqrt{a\cdot\frac{3}{4}} = 4\sqrt{\frac{3a}{4}} = 2\sqrt{3a}$

$f'_{(\frac{3}{4})^-} = -2\sqrt{3a}$ $\quad f'_{(\frac{3}{4})^+} - f'_{(\frac{3}{4})^-} = 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ توان ۲ $\quad 48a = 24 \quad a = \frac{1}{2}$

سؤال ۱۹ : گ «۳»

$S = \alpha+\beta = \frac{m-2}{m^2-1}$ $\quad S'(m) = \frac{m^2-1-2m^2+4m}{(m^2-1)^2} = \frac{-m^2+4m-1}{(m^2-1)^2} = 0$

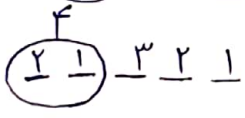
$\Rightarrow m^2-4m+1=0 \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$

m		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
S'	$-$	0	$+$	0	$-$
S	↓	min	↑	max	↓

که در $m = 2+\sqrt{3}$ دارای بیشترین مقدار است اما به ازای این مقدار معادله $f(x)=0$ جواب حقیقی ندارد.

به ازای $m = 2+\sqrt{5}$ ، Δ ی معادله $f(x)=0$ منفی است ولی برای $2-\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{5}$ Δ مثبت است و بیشترین مقدار را در $m = 2-\sqrt{5}$ رخ می‌دهد.

سؤال ۲۰ : گ «۲»



$4 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$

سؤال ۲۱ : گ «؟»

برای اینکه معادله $x^2-mx+n=0$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$

فرض کنیم m شماره تاس اول و n شماره تاس دوم باشد

$\Rightarrow \quad m^2-4n > 0 \longrightarrow m^2 > 4n$

$A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(4,1),(4,2),(4,3)$

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in

www.konkur.in

$n(A)=17$ ، $P(A)=\frac{17}{24}$ (بین تیرنه‌ها وجود دارد) ⇐

سؤال ۲۲ : گ «۱»

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P((A\cup B)')}{P(A')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-\frac{5}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{7}{10}$$

سؤال ۲۳ : گ «۳»

اعداد دسته اول به صورت ۱,۳,۷,۹ و دسته دوم به صورت ۲,۴,۶,۸

می‌بینیم لذا داریم:

$$\bar{x}_1=\frac{1+3+7+9}{4}=5 \qquad \bar{x}_2=\frac{2+4+6+8}{4}=5$$

$$\sigma_1^2=\frac{16+4+4+16}{4}=10 \qquad \sigma_2^2=\frac{9+1+1+9}{4}=5$$

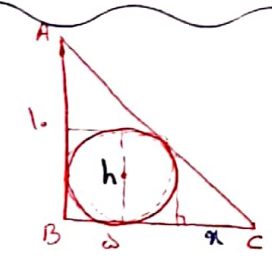
$$\frac{C.V_1}{C.V_2}=\frac{\sigma_1/\bar{x}_1}{\sigma_2/\bar{x}_2}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$$

سؤال ۲۴ : گ «۴»

فضای نمونه = { کیسه ۲ (۱۰ گوی)، کیسه ۳ (۲ قرمز) } = ۱۲

$$P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

سؤال ۲۵ : گ «۱»



$$\frac{h}{10}=\frac{x}{5} \qquad h=2x \qquad x+h=5$$

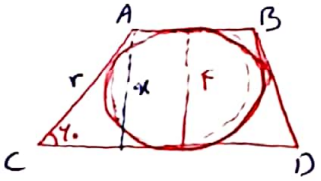
$$3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \qquad h=\frac{10}{3} \longrightarrow \text{شعاع}=\frac{5}{3}$$

$$S=\pi r^2=\pi\frac{25}{9}$$

سؤال ۲۶ : گ «۴»

در خط d، l_2 غیرهوازی‌اند زیرا اگر هوازی باشند چون $l_1 \parallel l_2$ بنابراین d، l_1 نیز هوازی می‌شوند که این با فرض سؤال در خلاف است پس d، l_2 قطعاً غیرهوازی هستند.

سؤال ۲۷ : گ «۴»



$$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{r}=\frac{4}{r}$$

$$\Rightarrow r=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

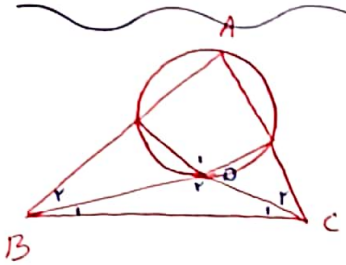
$$AB+CD=AC+BD=2r=\frac{16}{\sqrt{3}}$$

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in

www.konkur.in

$$\Rightarrow S_{\text{دوزنقه}} = \frac{1}{2} \times (AB+CD) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

سؤال ۳۰ : گ ... ۳



در $\triangle BDC$: $\hat{B}_1 + \hat{D}_2 + \hat{C}_1 = 180^\circ$

$$\frac{\hat{B}}{2} + \hat{D}_2 + \frac{\hat{C}}{2} = 180 \quad (1)$$

$$\hat{A} + \hat{D}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{D}_1 = \hat{D}_2} \hat{A} + \hat{D}_2 = 140 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Longrightarrow \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} + 180 - \hat{A} = 180 \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{180 - A}{2}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A} = 180 - \hat{A} \Rightarrow 3\hat{A} = 140 \Rightarrow \hat{A} = 70$$

سؤال ۳۲ : گ ... ۴

طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ می باشد لذا داریم :

$$\vec{a} = (2, -a, 3)$$
$$\vec{b} = (1, 0, a)$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{|2+0+3a|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{|2+3a|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \frac{(2+3a)^2}{1+a^2} = \frac{25}{17} \qquad 17(4+9a^2+12a) = 25 + 25a^2$$

$$8 + 18a^2 + 24a = 25 + 25a^2 \qquad 7a^2 - 24a + 17 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفرشود}} a = 1 \text{ و } a = \frac{17}{7}$$

$\Rightarrow$ اختلاف مقادیر a : $\frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$

سؤال ۳۴ : گ ... ۱۰

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x+1 & -1+x \\ x & -x & x \\ -2-x & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & 3-x & x+1 \\ x & 0 & -x \\ -7-2x & x-3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x+1-7-2x = x+5-3 \rightarrow -2x = 8 \qquad x = -4$$

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in

www.konkur.in

سؤال ۳۵ : گ «۲»

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\left| |A| A \right| = \left| -A \right| = (-1)^3 |A| = (-1)(-1) = 1$$

سؤال ۳۶ : گ «۳»

$24 \overset{7}{\equiv} 3 \quad , \quad 21 \overset{7}{\equiv} 0$

$3^{21} \overset{7}{\equiv} (-1)^7 = -1 \quad 3^4 \overset{7}{\equiv} 27 \overset{7}{\equiv} -1 \quad 3^2 \overset{7}{\equiv} 2$

$\longrightarrow 3^{23} \times 3^{21} = 3^{44} \overset{7}{\equiv} -9 \overset{7}{\equiv} 5$

$\Rightarrow 24^{44} - 21^{44} \equiv 5 \xrightarrow{\times 9} (24^{43} - 21^{44}) \times 9 \overset{7}{\equiv} 5 \times 9 \overset{7}{\equiv} 45 \overset{7}{\equiv} 3$

$24 \overset{8}{\equiv} 0 \quad 21 \overset{8}{\equiv} 5 \quad 5^2 \overset{8}{\equiv} 1 \quad (5^2)^{11} \overset{8}{\equiv} 1^{11} \overset{8}{\equiv} 1 \quad 5^{22} \overset{8}{\equiv} 1$

$5^{44} \overset{8}{\equiv} 5 \qquad 24^{44} - 21^{44} \overset{8}{\equiv} 0 - 5 \overset{8}{\equiv} -5$

$(24^{43} - 21^{44}) \times 9 \overset{8}{\equiv} -45 \overset{8}{\equiv} +3$

$$\begin{cases} (24^{43} - 21^{44}) \times 9 \overset{7}{\equiv} 3 \\ (24^{44} - 21^{44}) \times 9 \overset{8}{\equiv} 3 \end{cases} \Rightarrow (24^{43} - 21^{44}) \times 9 \equiv 3 \quad \overset{56}{}$$

سؤال ۳۷ : گ «۳»

$17x + 18y = 948 \Rightarrow 18y \overset{17}{\equiv} 948 \quad y \overset{17}{\equiv} 1$

$y = 17k + 1 \qquad 17x + 18(17k+1) = 948 \qquad 17x + 18 \times 17k + 18 = 948$

$17x + 18 \times 17k = 930 \Rightarrow 17x = -18 \times 17k + 930$

$x = -18k + 55 \qquad x > 0 \longrightarrow -18k + 55 > 0 \qquad -18k > -55$

$k < \frac{55}{18} \qquad y > 0 \rightarrow 17k + 1 > 0 \qquad 17k > -1 \qquad k > -\frac{1}{17}$

$-\frac{1}{17} < k < \frac{55}{18} \Rightarrow k \in \mathbb{Z} \quad k = 0, 1, 2, 3 \longrightarrow$ دارای ۴ جواب در بیرانت

ویکا خوندی دکترای ریاضی

Scanned with CamScanner
forum.konkur.in