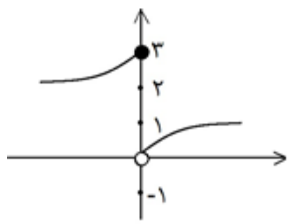
نام و نام خانوادگی :   نام درس : ریاضی (۲)

پایه تحصیلی : یازدهم تجربی

نام دبیر : سیّد علی موسوی

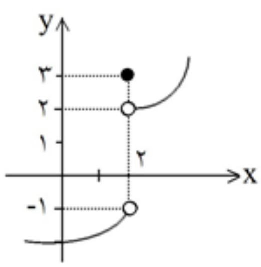
عنوان آزمون :فصل ۶ - حد و پیوستگی

۱ نمودار تابع f شکل مقابل است. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ کدام است؟



۱) ۰
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

۲ شکل مقابل نمودار تابع است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) - f(2)$ کدام است؟



۱) -۲
۲) ۰
۳) ۲
۴) ۴

۳ اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

۱) -۴　　۲) -۳　　۳) -۲　　۴) -۱

۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x + a)^2 & ; \ x \geq -1 \\ 2x + 1 & ; \ x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟

۱) $\{0\}$　　۲) $\{2\}$　　۳) ϕ　　۴) $\mathbb{R}$

۵ حاصل $\lim\limits_{x \to -۳^+} \frac{x+۳}{\sqrt{x+۳}}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۶ حاصل $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{|x| - [x]}{۲|x| + [x]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۷ به ازای کدام مقدار از a تابع $f(x) = [x+۱] + a[x]$ در نقطه $x = ۰$ دارای حد است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۸ حد عبارت $([۲x] - [x] + x - ۱)$ وقتی $x \to ۱^-$ کدام است؟ (نماد [ ] به معنی جزء صحیح است.)

۱) ۲ - ۲) ۱ - ۳) ۱ ۴) ۲

۹ حد چپ تابع $y = \frac{x - |x|}{[x+۱] - x}$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲-

۱۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱-x} & ; \; x > ۰ \\ -\sqrt{۱+x} & ; \; x < ۰ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x^۳ - x)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

۱۱ مقدار $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}^-} [۲\sin x - ۱]$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۲ حدّ عبارت $\left[\tan^{2} x\right] + \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x$ ، وقتی $x \to \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) حدّ ندارد

۱۳ حد راست عبارت $[x]^{2}$ از حد چپ آن در نقطه $x = -2$ چقدر بیش‌تر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴ $\lim\limits_{x \to 0^{+}} x\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۵ قدرمطلق تفاضل حد چپ و راست تابع f به معادله $y = \frac{2x^{2} - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۶ اگر $\lim\limits_{x \to -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

۱۷ حد عبارت $\frac{\sqrt[3]{x - 2} - 1}{x^{2} - 9}$ وقتی $x \to 3$ برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{18}$

۱۸ حد عبارت $\dfrac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۷+\sqrt{x}-۳}}$ وقتی که $x \longrightarrow ۴$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۹ حد تابع $y=\dfrac{x+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{-۴x+۱}-۳}$ وقتی $x \longrightarrow -۲$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

۲۰ حد عبارت $\dfrac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$ وقتی $x \longrightarrow -۲$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱ حاصل $\lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{x+\sqrt{x+۲}}{x^{۳}+۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲- ۴) ۲

۲۲ حاصل $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۳ حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۲۴ اگر تابع f در نقطه ۱ = x حد داشته و $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵ تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ را در نظر می‌گیریم ، حد راست این تابع چقدر از حد چپ این تابع در $x = 0$ بیشتر است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶ حد چپ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3-[x]}{x-3}\sqrt{x^2-6x+9}$ در نقطه $x = 3$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۲۷ اگر حد $\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}$ وقتی $x \to 1$ برابر ۱ باشد، a چقدر است؟

۱) ۳- ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۲۸ کدام گزینه در مورد حدود تابع $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ در نقطه $x = 0$ صحیح است؟

۱) حد موجود است ۲) حد چپ موجود نیست

۳) حد چپ و راست موجود نیست ۴) حد چپ و راست موجود است ولی برابر نیستند

۲۹ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۳۰ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+|x-2|}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=1$ پیوسته است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۳۱ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & ; |x|<2\\ \frac{1}{2}x-1 & ; |x|>2\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

۳۲ تابع f با ضابطه $f(x)=(x-1)[x]$ بر بازه $[0\ ,\ 2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) سه ۲) دو ۳) یک ۴) هیچ

۳۳ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه: $3<x<6\ ;\ f(x)=x-[x]+\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$ ، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در $x=0$ پیوسته است؟

۱) $\{0\}$ ۲) ϕ ۳) $\{2\}$ ۴) $\{0\ ,\ 2\}$

۳۵ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+3)[x] & x < 3 \\ Ax+3 & 3 \leq x \end{cases}$ در نقطه‌ای به‌طول ۳ پیوسته باشد. مقدار A چیست ؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -2x & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) در ۱ - پیوسته و در ۱ از چپ پیوسته
۲) در ۱ - ناپیوسته و در ۱ از راست پیوسته
۳) در ۱ - ناپیوسته و در ۱ از چپ پیوسته
۴) در ۱ - پیوسته و در ۱ از راست پیوسته

۳۷ مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{16-x^2} & |x| \leq 4 \\ x-4 & |x| > 4 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{-4\}$ ۲) $\{4\}$ ۳) $\{-4, 4\}$ ۴) $\varnothing$

۳۸ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x+3| & ; x \neq -3 \\ 3 & ; x = -3 \end{cases}$ در نقطه $x = -3$ ....

۱) از چپ پیوسته نیست و از راست پیوسته نیست.
۲) فقط از راست پیوسته است.
۳) فقط از چپ پیوسته است.
۴) هم از راست و هم از چپ پیوسته است.

۳۹ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & x < 1 \\ bx - 1 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ بر R پیوسته باشد، $a + b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 2 \\ x^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوستگی چپ داشته باشد، $f(2)$ کدام است؟

۱) $f(3) - 3$ ۲) $f(3) - 2$ ۳) $f(3) - 1$ ۴) $f(3)$

۴۱) به ازای کدام مقدار A ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{۲} + |x|}{x^{۲} - ۲|x|} & x \neq ۰ \\ A & x = ۰ \end{cases}$ در نقطه $x = ۰$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲-

۴۲) به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x + \dfrac{|۲x|}{x} & x \neq ۰ \\ a - ۳ & x = ۰ \end{cases}$ در نقطه $x = ۰$ پیوستگی چپ دارد؟

۱) ۱- ۲) ۵- ۳) ۱ ۴) ۵

۴۳) مجموعه طول‌های نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{۳} - x}{x^{۲} - ۱} & x \neq \pm ۱ \\ -۱ & x = \pm ۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{۱ , -۱\}$ ۲) $\{-۱\}$ ۳) $\{۱\}$ ۴) $\varnothing$

۴۴) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۱ & x < ۱ \\ ۲x & x > ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ چه مقدار تعریف شود تا در این نقطه پیوستگی راست داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۱-

۴۵) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۱ & x < ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ -x + ۳ & x > ۱ \end{cases}$ در نقطه $x = ۱$ از نظر پیوستگی در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) پیوسته است ۲) پیوستگی چپ دارد
۳) پیوستگی چپ و راست ندارد ۴) پیوستگی راست دارد

۴۶ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱-x} & ; \quad x\neq ۱ \\ a & ; \quad x=۱ \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی غیر منفی پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۴۷ فرض کنیم که $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x}\left(\sqrt[۳]{x+۸}-۲\right) & x\neq ۰ \\ a & x=۰ \end{cases}$. اگر f در نقطه صفر پیوسته باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۸ اگر تابع $y=\begin{cases} x-a & x<۱ \\ ax+۲ & x\geqslant ۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ متصل باشد، a کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۴۹ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+ax & x>۲ \\ ax^۲+۱ & x\leqslant ۲ \end{cases}$ در R پیوسته باشد، a چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۰ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۴+x^۲-۲}{x^۲-۱} & x\neq \pm ۱ \\ a & x=\pm ۱ \end{cases}$، همواره پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۱ اگر تابعی در نقطه $x_۰$ از چپ .... و از راست .... باشد، در آن نقطه ....

۱) پیوسته - پیوسته - پیوسته است.
۲) پیوسته - حد داشته باشد - حد دارد.
۳) حد - حد داشته - حد دارد.
۴) حد داشته - حد داشته - پیوسته است.

۵۲) تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+۲x-۱}{x} & ; |x|>۱\\ ax+b & ; |x|\le ۱\end{cases}$ روی R پیوسته است. دوتایی مرتب (a , b) کدام است؟

۱) $(۰ , ۱)$
۲) $(۱ , ۰)$
۳) $(۰ , ۲)$
۴) $(۲ , ۰)$

۵۳) به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & x<۲\\ a+۲\operatorname{Sin}\dfrac{\pi}{x} & x\ge ۲\end{cases}$ در بازهٔ $[۰ , ۳]$ پیوسته است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۰
۴) ۱

۵۴) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sin}x+۲\operatorname{Cos}x & ۰<x<\dfrac{\pi}{۲}\\ -\operatorname{Cos}۲x & \dfrac{\pi}{۲}<x<\pi\end{cases}$ با تعریف $f\left(\dfrac{\pi}{۲}\right)=۱$ از نظر پیوستگی در نقطه $x=\dfrac{\pi}{۲}$ چگونه است؟

۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
۳) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

۵۵) تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\\ ax-a+۴ & x\leqslant ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در R پیوسته است؟

۱) هیچ مقدار a
۲) هر مقدار حقیقی a
۳) فقط $a=۰$
۴) فقط $a=۴$

۵۶) تابع $f(x)=[۲\operatorname{Sin}x]$ در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{۲}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ ([ ] تابع جزء صحیح است.)

۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

۵۷ در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ; x\neq ۲\\ a & ; x=۲\end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=۲$ پیوسته است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵۸ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+ax-۵ & ; x>۲\\ ax-۱ & ; x<۲\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) فقط $a=۲$ ۳) فقط $a=-۲$ ۴) هیچ مقدار a

۵۹ به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۳x-[x] & ; x<۲\\ a & ; x=۲\\ x+۲ & ; x>۲\end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) هیچ مقدار a

۶۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x+۱} & |x|>۱\\ ۲x & |x|\leq ۱\end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- چگونه است؟

۱) در (۱-) ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته
۲) در (۱-) ناپیوسته - در ۱ پیوسته
۳) در (۱-) پیوسته - در ۱ پیوسته
۴) در (۱-) پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۶۱ حد عبارت $\dfrac{|x^{۲}-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^{-}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۶۲ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۳x^۲ - ۱۰x - ۸}{\sqrt{۳ - \sqrt{x} - ۱}}$، کدام است؟

۱) -۱۱۲ ۲) -۹۶ ۳) -۸۴ ۴) -۷۲

۶۳ حدّ عبارت $\dfrac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۱۲ + ۶\sqrt[۳]{x}}$، وقتی $x \to -۸$، کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۶۴ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۲x - ۷\sqrt{x} + ۵}{۲x - \sqrt{۳x + ۱}}$، کدام است؟

۱) -۱/۵ ۲) -۱/۲ ۳) -۰/۸ ۴) -۰/۶

۶۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + ۲^{x-۳} & ; x < ۳ \\ a\log_۲(۱ + x) & ; x \geq ۳ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۳$ پیوسته است، $f(۲)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱/۵ ۳) ۱ ۴) صفر

۶۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a + \sin ۳x & ۰ \leq x < \frac{\pi}{۲} \\ b\cos ۲x & \frac{\pi}{۲} < x \leq ۲\pi \end{cases}$ با شرط $f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ پیوسته است.

$a - b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۷ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+x-2|}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$، به ازای کدام مقادیر a در R پیوسته است؟

۱) هر مقدار a
۲) ۳-
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

۶۸ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+b & ;|x|\geq 1\\ x[x] & ;|x|<1\end{cases}$ روی R پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

۶۹ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

۷۰ به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\left(1+\sqrt[3]{1-x}\right)}{x^2-2x} & ; x>2\\ x-a & ; x\leq 2\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۱) ۱/۲
۲) ۱/۶
۳) ۲/۴
۴) ۳/۲

۷۱ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x>2\\ ax-1 & ; x\leq 2\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

۷۲ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|} & ; x\neq -۲\\ a & ; x=-۲\end{cases}$، در نقطه‌ی $x=-۲$، فقط از چپ پیوسته است؟

۱) ۱۲-　　۲) ۶-　　۳) ۶　　۴) ۱۲

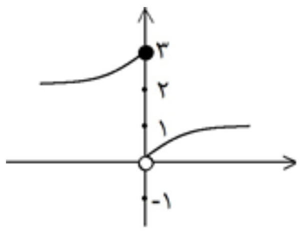
۷۳ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ; |x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ; |x-۱|\geq ۱\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) $\frac{۵}{۲}$

۷۴ فرض کنید $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۱\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $f(x)=۱-x^۲$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof، کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل:



مقدار تابع در نقطه صفر : $f(\cdot) = ۳$

حد راست : $\lim\limits_{x \to \cdot^+} f(x) = \cdot$

حد چپ : $\lim\limits_{x \to \cdot^-} f(x) = ۳$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \cdot^+} f(x) + \lim_{x \to \cdot^-} f(x) = \cdot + ۳ = ۳$$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۲ \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = -۱ \\ f(۲) = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to ۲^+} f(x) + \lim_{x \to ۲^-} f(x) - f(۲) = ۲ - ۱ - ۳ = -۲$$

۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \left(x^۲ + ۲a\right) = ۱ + ۲a \quad \text{و} \quad \lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (ax - ۱) = a - ۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) - \lim_{x \to ۱^-} f(x) = -۱ \Rightarrow (۱ + ۲a) - (a - ۱) = -۱ \Rightarrow a = -۱ - ۲ = -۳$$

۴ باید حد چپ و راست در $x = -۱$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند پس:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -۱^+} (x + a)^۲ = (-۱ + a)^۲ \\ \lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -۱^-} (۲x + ۱) = ۲(-۱) + ۱ = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow (-۱ + a)^۲ = -۱ \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵

$$\lim_{x\to -۳^+} \frac{x+۳}{\sqrt{x+۳}} = \lim_{x\to -۳^+} \frac{\left(\sqrt{x+۳}\right)^۲}{\sqrt{x+۳}} = \lim_{x\to -۳^+} \sqrt{x+۳} = ۰$$

پس گزینه ۲ صحیح است. باید توجه نمود که $\sqrt{x+۳}$ در نقطه $x = -۳$ فقط حد راست دارد.

۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{|x| - [x]}{۲|x| + [x]} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x-(-۱)}{۲(-x)-۱} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x+۱}{-۲x-۱} = -۱$$

۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم: $K \in Z \Rightarrow [x+K] = [x] + K$ و نیز تابع $[x]$ در $x \in Z$ حد ندارد چون حد چپ و راست آن برابر نیست. (حد راست آن برابر x و حد چپ آن $x - ۱$ می‌باشد) برای اینکه تابع دارای حد باشد، باید $[x]$ حذف شود:

$f(x) = [x+۱] + a[x] = [x] + ۱ + a[x] \Rightarrow$

$[x] + a[x] = ۰ \Rightarrow [x](۱+a) = ۰ \Rightarrow ۱ + a = ۰ \Rightarrow a = -۱$

روش دوم: حد چپ و راست تابع $f(x) = a[x] + [x] + ۱$ را در نقطه صفر برابر قرار می‌دهیم.

$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} f(x) = -a - ۱ + ۱ = -a$ چپ ، $\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}} f(x) = ۰ + ۰ + ۱ = ۱ \Rightarrow -a = ۱ \Rightarrow a = -۱$ راست

۸ تابع جزء صحیح در محل نقاط صحیح تغییر می‌کند پس اگر $۰ < x < ۱$ باشد $[x] = ۰$ می‌باشد وهمچنین اگر $۱ \leq ۲x < ۲$ باشد، $[۲x] = ۱$ می‌باشد. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^-} [x] = ۰ \\ \lim_{x\to ۱^-} [۲x] = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} (۱ - x + [x] - [۲x]) = ۱ - ۱ + ۰ - ۱ = -۱$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

چون $۰ < x + ۱ < ۱$ است پس $[x+۱] = ۰$ حال حد چپ را بدست می‌آوریم:

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} \frac{x-(-x)}{۰-x} = \frac{۲x}{-x} = -۲$$

لازم به ذکر است که چون $x \to ۰^-$ پس $x < ۰$ است پس $|x| = -x$ می‌باشد. بنابراین جواب ۲- بوده.

۱۰ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^{۳} - x = x(x^{۲} - ۱) \underset{x \to ۰^-}{=} ۰^-(-۱) = ۰^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۰^-} f(x^{۳} - x) = f(۰^+) \Rightarrow \lim_{x \to ۰^+} \sqrt{۱ - x} = ۱$$

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\sin x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{۶}$ باشد، حاصل از $\frac{۱}{۲}$ کمتر است.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}^-} [۲\sin x] - ۱ = [۱^-] - ۱ = -۱$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که درون جزء صحیح عدد صحیح می‌شود باید حد راست و چپ را جدا حساب کرد.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}^+} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{۳}\right)\right] \cos ۳x + [\text{tg}^{۲} x] = [۰^+](-۱) + [۳^+] = ۰ + ۳ = ۳$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}^-} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{۳}\right)\right] \cos ۳x + [\text{tg}^{۲} x] = [۰^-](-۱) + [۳^-] = ۱ + ۲ = ۳$$

چون حد راست و چپ برابر ۳ است بنابراین حاصل حد ۳ می‌شود.

۱۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} l_۱ = \lim_{x \to -۲^+} ۲[x] = ۲[-۲^+] = -۴ \\ l_۲ = \lim_{x \to -۲^-} ۲[x] = ۲[-۲^-] = -۶ \end{array}\right\} \Rightarrow l_۱ - l_۲ = -۴ - (-۶) = ۲$$

۱۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to ۰^+} x \sin\left(x + \frac{\pi}{۶}\right) = ۰ \times \sin\left(۰ + \frac{\pi}{۶}\right) = ۰ \times \frac{۱}{۲} = ۰$$

۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا حد چپ و راست تابع را محاسبه می‌کنیم، در حد چپ چون مقدار قدر مطلق منفی است داریم:

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{۲x^۲ - x - ۱}{|x - ۱|} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{(x - ۱)(۲x + ۱)}{-(x - ۱)} = \lim_{x \to ۱^-} -(۲x + ۱) = -۳$$

در حد راست چون مقدار قدر مطلق مثبت است داریم:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{۲x^۲ - x - ۱}{|x - ۱|} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x - ۱)(۲x + ۱)}{(x - ۱)} = \lim_{x \to ۱^+} (۲x + ۱) = ۳$$

قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست برابر است با:

$$\left|\lim_{x \to ۱^+} f(x) - \lim_{x \to ۱^-} f(x)\right| = |۳ - (-۳)| = ۶$$

۱۶

$$I = \lim_{x \to -۳} \frac{ax + ۳a}{۱ - \sqrt{۵x + ۱۶}} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} I = \lim_{x \to -۳} \frac{a}{\frac{-۵}{۲\sqrt{۵x + ۱۶}}} = \frac{a}{\frac{-۵}{۲}} = \frac{۲a}{-۵} = ۲ \Rightarrow a = -۵$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۷ با استفاده از اتحاد $(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})=a^{۳}-b^{۳}$ صورت کسر را گویا می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt[۳]{x-۲}-۱}{x^{۲}-۹}=\frac{\left(\sqrt[۳]{x-۲}-۱\right)\left(\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{x-۲}+۱\right)}{(x^{۲}-۹)\left(\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{x-۲}+۱\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[۳]{x-۲}^{۳}-۱^{۳}\right)}{(x^{۲}-۹)\left(\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{x-۲}+۱\right)}=\frac{x-۳}{(x-۳)(x+۳)\left(\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{x-۲}+۱\right)}$$

با حذف $x=۳$ از صورت و مخرج و جایگزینی $x=۳$ خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۶\left(\sqrt[۳]{۱}+\sqrt[۳]{۱}+۱\right)}=\frac{۱}{۱۸}$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ جواب صحیح است.

راه حل دوم: با استفاده از قضیهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}-۱}{x^{۲}-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}}}{۲x}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

۱۸ حد عبارت بصورت $\frac{۰}{۰}$ است و برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و عامل صفر کننده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۷+\sqrt{x}}-۳}\times\frac{\sqrt{۷+\sqrt{x}}+۳}{\sqrt{۷+\sqrt{x}}+۳}=\frac{\left(\sqrt{x}-۲\right)\left(\sqrt{۷+\sqrt{x}}+۳\right)}{۷+\sqrt{x}-۹}=\sqrt{۷+\sqrt{x}}+۳$$

در حالت $x\to ۴$ حد عبارت حاصل $\sqrt{۷+\sqrt{x}}+۳=۶$ است و گزینه ۳ جواب صحیح است.

روش دوم: با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۷+\sqrt{x}}-۳}=\lim_{x\to ۴}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}{۲\sqrt{۷+\sqrt{x}}}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{\frac{۱}{۴}}{۲\sqrt{۹}}}=۲\sqrt{۹}=۶$$

۱۹ از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم زیرا کسر در $x = -۲$ بصورت $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد. داریم:

$$\underset{x \to -۲}{\text{حد}} \frac{x + \sqrt{۲ - x}}{\sqrt{-۴x + ۱} - ۳} = \underset{x \to -۲}{\text{حد}} \frac{۱ + \frac{-۱}{۲\sqrt{۲ - x}}}{\frac{-۴}{۲\sqrt{-۴x + ۱}}}$$

با جایگزینی $x = -۲$ حد تابع بصورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱ + \frac{-۱}{۴}}{\frac{-۴}{۶}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{-\frac{۲}{۳}} = -\frac{۹}{۸}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۰

$$\underset{x \to -۲}{\text{Lim}} \frac{x + \sqrt{۲x + ۸}}{x + ۲} = \underset{x \to -۲}{\text{Lim}} \frac{\left(x + \sqrt{۲x + ۸}\right)\left(x - \sqrt{۲x + ۸}\right)}{(x + ۲)\left(x - \sqrt{۲x + ۸}\right)}$$

$$= \underset{x \to -۲}{\text{Lim}} \frac{x^۲ - ۲x - ۸}{(x + ۲)\left(x - \sqrt{۲x + ۸}\right)} = \underset{x \to -۲}{\text{Lim}} \frac{\cancel{(x + ۲)}(x - ۴)}{\cancel{(x + ۲)}\left(x - \sqrt{۲x + ۸}\right)} = \frac{-۶}{-۲ - ۲} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.
تذکر: این مساله با قاعده هوپیتال ساده‌تر حل می‌شود.

۲۱

$$\lim_{x\to -۱} \frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^۳+۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^۳+۱}\times\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x-\sqrt{x+۲}} = \lim_{x\to -۱} \frac{x^۲-x-۲}{(x^۳+۱)\left(x-\sqrt{x+۲}\right)} =$$

$$=\lim_{x\to -۱} \frac{\cancel{(x+۱)}(x-۲)}{\cancel{(x+۱)}(x^۲-x+۱)\left(x-\sqrt{x+۲}\right)} = \frac{-۱-۲}{\left((-۱)^۲-(-۱)+۱\right)\left(-۱-\sqrt{-۱+۲}\right)} = \frac{-۳}{۳\times(-۲)} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تذکر: این حد به کمک قاعدهٔ هوپیتال به سادگی قابل حل است.

۲۲

$$\lim_{x\to ۴} \frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۴} \frac{\frac{-۱}{\sqrt{۲x+۱}}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} = \frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{-۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۳

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\text{Cotg}\,x}{۱+\text{tg}\,x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\frac{۱}{\text{tg}\,x}}{۱+\text{tg}\,x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\text{tg}\,x} = -۱$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۴

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۱ \Rightarrow \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, ۲f(x)-۱ = \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, f(x)+۱ \Rightarrow ۲\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, f(x) - \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, f(x) = ۱+۱ \Rightarrow \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, f(x) = ۲$$

بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

۲۵ حد چپ و راست تابع وقتی $x \to ۰$ را باید محاسبه کنیم. داریم:

محاسبه حد راست: $x>۰ \Rightarrow |x| = x\,,\ \frac{|x|}{x} = ۱ \Rightarrow \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\, f(x) = ۰+۱ = ۱$

محاسبه حد چپ: $x<۰ \Rightarrow |x| = -x\,,\ \frac{|x|}{x} = -۱ \Rightarrow \underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\, f(x) = ۰-۱ = -۱$

حد راست - حد چپ $= ۱-(-۱) = ۲$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{(x-۳)^۲}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}|x-۳|$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}(۳-[x])\left(\frac{|x-۳|}{x-۳}\right)=(۳-[۳-\varepsilon])\left(\frac{|۳-\varepsilon-۳|}{۳-\varepsilon-۳}\right)=(۳-۲)\frac{\varepsilon}{-\varepsilon}=-۱$$

۲۷ با فاکتورگیری مناسب از صورت و مخرج کسر، می‌توان عامل $x-۱$ را از صورت و مخرج کسر حذف کرد و عبارت را از حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ خارج نمود. پس :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲ax^۲-x-۲a}{ax^۲+x(۱-a)-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x)+۲a(x+۱)(x-۱)}{ax(x-۱)+(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x+۲a(x+۱)}{a+۱}$$

$$=\frac{۱+۱+۲a(۱+۱)}{a+۱}=\frac{۴a+۲}{a+۱}\Rightarrow\frac{۴a+۲}{a+۱}=۱\Rightarrow a=\frac{-۱}{۳}$$

لذا گزینه ۲ جواب صحیح است.

لازم به یادآوری است که این مسئله با قاعدهٔ هوپیتال نیز قابل حل است.

۲۸ برای $\frac{|x|}{x}$ وقتی $x\to ۰^+$ می‌رود برابر $+۱$ می‌باشد و حد آن وقتی $x\to ۰^-$ می‌رود برابر -۱ می‌باشد پس داریم

$$\lim_{x\to ۰^+}\left(x+\frac{|x|}{x}\right)=x+۱=۱ \qquad \lim_{x\to ۰^-}\left(x+\frac{|x|}{x}\right)=x-۱=-۱$$

پس گزینه ۴ درست است

۲۹ باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در نقطهٔ صفر یکسان باشند داریم:

حد چپ : $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x(x+۱)}-\frac{۱}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x(x+۱)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{x+۱}=-۱$

حد راست : $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x(x+۱)}-\frac{۱}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-x}{x(x+۱)}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-۱}{x+۱}=-۱$

مقدار تابع $=f(۰)=a\Rightarrow a=-۱$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳۰ برای پیوسته بودن تابع باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+|x-۲|}{x-۱} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{-x+|x-۲|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{-x+۲-x}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۲(x-۱)}{x-۱}=-۲\ ,\quad f(۱)=a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)\Rightarrow a=-۲$$

تذکر: چون $x\to ۱$ پس x در حوالی ۱ است و $|x-۲|=۲-x$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۱ تابع $\sqrt{۴-x^۲}$ در فاصلهٔ $|x|\leqslant ۲$ پیوسته و $\frac{۱}{۲}x-۱$ نیز یک چندجمله‌ای است و پیوسته است پس باید نقاط مرزی را بررسی کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۴-x^۲} & -۲\leqslant x\leqslant ۲\\ \frac{۱}{۲}x-۱ & x>۲\ ,\ x<-۲\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\sqrt{۴-(۲)^۲}=۰\\ \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\frac{۱}{۲}\times ۲-۱=۰\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۲)=\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\sqrt{۴-(-۲)^۲}=۰\\ \lim_{x\to -۲^-} f(x)=\left(\frac{۱}{۲}\times -۲\right)-۱=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$f(x)$ در $x=-۲$ منفصل است.

پس تابع فقط یک نقطهٔ ناپیوسته دارد. بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

۳۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای این که $f(x)$ در $[۰ , ۲]$ پیوسته باشد باید در نقاط داخلی $(۰ , ۲)$ پیوسته و در $x = ۰$ پیوستگی راست و در $x = ۲$ پیوستگی چپ داشته باشد. پس:

$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۰ \\ \lim_{x \to ۰^+} f(۰) = (۰ - ۱) \times ۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$ در $x = ۰$ پیوستگی راست دارد

$$x = ۲ \Rightarrow \begin{cases} f(۲) = ۲ \\ \lim_{x \to ۲^-} f(۲) = (۲ - ۱)\left[۲^-\right] = ۱ \times ۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow$$ در $x = ۲$ پیوستگی چپ ندارد

پس در نقطه $x = ۲$ تابع ناپیوسته است.

برای این که $f(x)$ در $(۰ , ۲)$ پیوسته باشد فقط کافیست در $x = ۱$، که یک نقطهٔ صحیح است پیوسته باشد:

$$\left.\begin{matrix} f(۱) = (۱ - ۱)[۱] = ۰ \\ \lim_{x \to ۱^+} f(x) = (۱ - ۱)\left[۱^+\right] = ۰ \times ۱ = ۰ \\ \lim_{x \to ۱^-} f(x) = (۱ - ۱)\left[۱^-\right] = ۰ \times ۰ = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته است.

بنابراین تنها نقطه انفصال نقطهٔ $x = ۲$ می‌باشد، پس فقط یک نقطهٔ انفصال داریم لذا گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x - [x] + \sin\left(\frac{\pi [x]}{۲}\right) \quad ۳ \leq x \leq ۶$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - ۳ + \sin\frac{۳\pi}{۲} = x - ۴ & ۳ \leq x < ۴ \\ x - ۴ + \sin\frac{۴\pi}{۲} = x - ۴ & ۴ \leq x < ۵ \\ x - ۵ + \sin\frac{۵\pi}{۲} = x - ۴ & ۵ \leq x < ۶ \\ ۰ + \sin\frac{۶\pi}{۲} = ۰ & x = ۶ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - ۴ & ۳ \leq x < ۶ \\ ۰ & x = ۶ \end{cases}$$

تابع فقط در $x = ۶$ ناپیوسته است (پیوستگی چپ ندارد).

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیوسته بودن $f(x)$ در $x=۰$ کافی است که حد تابع در $x=۰$ با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x-|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x-|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x-x}{x}=۰\\[2ex]\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x-|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x+x}{x}=۲\end{cases}$$

چون تابع در این نقطه حد ندارد، پس به ازای هیچ مقدار a، پیوسته نمی‌شود. بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۵ یادآوری : شرط پیوستگی برای تابع $f(x)$ این است که در آن نقطه $f(x)$ موجود باشد و حد آن نیز موجود و برابر مقدار تابع باشد پس داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=(۳+۳)\left[۳^-\right]=۶\times ۲=۱۲\\ f(۳)=\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۳A+۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۳A+۳=۱۲\Rightarrow A=۳$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شروط پیوستگی را برای سؤال مذکور می‌نویسیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-2)(-1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = (-1)^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = (-2)(-1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ تابع در $x = -1$ پیوسته نیست

حال با توجه به اینکه مقدار تابع با حد چپ در $x = 1$ برابر است پس:

$$f(1) = -2(1) = -2$$

$$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2(1) = -2 \Rightarrow$$ تابع در $x = 1$ پیوستگی چپ دارد

۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تابع $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ در فاصله $|x| \leq 4$ همواره پیوسته است و تابع $f(x) = x - 4$ نیز در فاصله $|x| > 4$ پیوسته است، پس فقط نقاط مرزی باید بررسی شوند، یعنی نقاط $x = \pm 4$. شرط پیوستگی در این نقاط (نقطهٔ $x = a$) این است که اولاً $f(a)$ موجود باشد و ثانیاً $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجود و برابر با $f(a)$ باشد. در نقاط مرزی حد چپ و راست باید برابر باشند. با توجه به ضابطه تابع :

$$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4) = 0 \Rightarrow$$ تابع در $x = 4$ پیوسته است

ولی

$$\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = f(-4) = -\sqrt{16 - 16} = 0$$

$$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} (x - 4) = -8$$

که حد چپ و راست تابع در $x = -4$ برابر نیست، پس در این نقطه حد نداشته و ناپیوسته است.

۳۸

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} |x + 3| = 0 \\ f(-3) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x = -3$ از چپ و راست پیوسته نمی باشد.

بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

۳۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در این تست شرط پیوستگی در نقطه $x=۱$ بررسی می‌شود. پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = (۱)^۲ - a \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = b(۱) - ۱ \\ f(۱) = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ - a = b - ۱ = ۳ \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۲$$

۴۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شرط پیوستگی چپ آن است که شرط زیر برقرار باشد. پس داریم:

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x) = f(x_۰) \Rightarrow f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲^۲ + ۱ = ۵$$

با توجه به آن که $f(۳) = ۸$ می‌باشد داریم: $f(۲) = f(۳) - ۳$ لذا گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۴۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شرط پیوستگی $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = A$$

پس با جایگزینی داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - x}{x^۲ + ۲x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ + x}{x^۲ - ۲x} = A \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲x - ۱}{۲x + ۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲x + ۱}{۲x - ۲} = A \Rightarrow A = -\frac{۱}{۲}$$

۴۲ تابع مفروض بصورت زیر خلاصه می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x + ۲ & x > ۰ \\ ۳x - ۲ & x < ۰ \\ a - ۳ & x = ۰ \end{cases}$$

شرط پیوستگی چپ در نقطه $x = ۰$ چنین است:

$$\text{حد}_{x\to ۰^-} f(x) = f(۰)$$

$$\text{حد}_{x\to ۰^-} ۳x - ۲ = a - ۳ \Rightarrow ۳(۰) - ۲ = a - ۳ \Rightarrow a = ۱$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۴۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید حد مقدار تابع را در نقاط ۱- و ۱ بررسی کنیم تا پیوستگی تابع مشخص شود.

$$\lim_{x\to -۱} f(x) = \lim_{x\to -۱} \frac{x(x^۲ - ۱)}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to -۱} x = -۱$$

طبق نتیجه به دست آمده:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۱$$

بنابراین، چون حدتابع در $x = ۱$ با مقدار آن در $x = ۱$ برابر نیست، پس $f(x)$ ناپیوسته است.

۴۴ شرط لازم و کافی برای پیوستگی راست در نقطه‌ای بطول x آنست که حد راست تابع برابر مقدار تابع شود پس :

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x) = f(x_۰)$$

حال مقدار تابع را مقدار گذاری کرده پس حد حاصل می‌شود.

$$f(۱) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} ۲x = ۲$$

یعنی گزینه ۱ صحیح است.

۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به دست می‌آوریم. پس داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱^۲ - ۱ = ۰ \\ \lim_{x\to ۱^+} f(x) = -(۱) + ۳ = ۲ \\ f(۲) = ۲ \end{cases}$$

چون مقدار تابع با حد راست برابر است پس تابع پیوستگی راست دارد و گزینه ۴ صحیح است.

۴۶ تابع $y=\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱-x}$ روی اعداد غیر منفی به جز یک پیوسته است. پس اگر $f(x)$ بخواهد پیوسته باشد کافی است در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد. پس:

$$\begin{cases} f(۱)=a \\ \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱-x}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(۱-\sqrt{x})}}{\cancel{(۱-\sqrt{x})}(۱+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱}{۱+\sqrt{x}}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow a=\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۴۷ شرط پیوستگی یک تابع این است که تابع در آن نقطه دارای حد باشد و مقدار آن برابر مقدار تابع در نقطهٔ مورد نظر باشد به عبارت دیگر : $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=f(۰)=a$ حد.

وقتی $x\to ۰$ کسر بصورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ تبدیل می‌شود. پس عبارت را به صورت گویا تبدیل می‌نماییم :

$$\frac{۱}{x}\left(\sqrt[۳]{x+۸}-۲\right)=\frac{\left(\sqrt[۳]{x+۸}-۲\right)\left(\sqrt[۳]{(x+۸)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}{x\left(\sqrt[۳]{(x+۸)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}=$$

$$\frac{x+۸-۸}{x\left(\sqrt[۳]{(x+۸)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}=\frac{۱}{\left(\sqrt[۳]{(x+۸)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}$$

و وقتی $x\to ۰$ ، کسر بسوی $\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴+۴+۴}$ می‌رود. پس $a=\frac{۱}{۱۲}$ می‌باشد و گزینه ۱ صحیح است.

تذکر: مسئلهٔ فوق به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز قابل حل است.

۴۸ برای اینکه y در $x=۱$ متصل باشد باید $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ حد باشد.

$$y=f(۱)=a\times ۱+۲=a+۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^-} y=\lim\limits_{x\to ۱^-} x-a=۱-a \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} y=\lim\limits_{x\to ۱^+} ax+۲=a+۲ \end{array}\right\}\Rightarrow ۱-a=a+۲\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۴۹ برای پیوستگی تابع چند ضابطه‌ای باید اولاً هریک از ضوابط در ناحیه موردنظر تعریف شده باشند و ثانیاً کل تابع در نقاط مرزی پیوسته باشد. در این سوال چون هر یک از ضابطه‌ها پیوسته‌اند، پس کافی است که پیوستگی در مرزها را بررسی کنیم. پس:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۲^+} (۲x + ax) = ۴ + ۲a \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} (ax^۲ + ۱) = ۴a + ۱ \\ f(۲) = ۴a + ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴a + ۱ = ۴ + ۲a \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینه ۴ جواب صحیح است.

۵۰

$$\lim_{x \to \pm۱} \frac{x^۴ + x^۲ - ۲}{x^۲ - ۱} = \lim_{x \to \pm۱} \frac{(x^۲ + ۲)(x^۲ - ۱)}{x^۲ - ۱} = \lim_{x \to \pm۱} x^۲ + ۲ = ۳$$

چون باید حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند پس گزینه ۳ درست است. یعنی $a = ۳$.

۵۱ تابعی پیوسته است که از چپ و راست در آن نقطه پیوسته باشد. گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: اگر تابعی از چپ پیوسته و از سمت راست پیوسته باشد، در آن نقطه پیوسته است. این گزینه درست است و شرط لازم و کافی برای پیوستگی، پیوستگی از چپ و راست است.

گزینهٔ ۳: اگر تابعی از چپ حد و از سمت راست حد داشته باشد، در آن نقطه حد دارد. این گزینه لزوماً درست نیست چون معلوم نیست که حد چپ و راست باهم مساوی باشند. مثلاً تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > ۲ \\ x^۲ & x < ۲ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۲ \quad , \quad \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۲^۲ = ۴$$

این تابع از چپ و راست حد دارد ولی در کل حد ندارد.

گزینهٔ ۲ نیز هنگامی صحیح است که حد راست تابع با حد چپ آن (که چون پیوستگی چپ دارد، با مقدار تابع در $x_۰$ برابر باشد) که چنین شرطی قید نشده است.

در گزینهٔ ۴، یک تابع می‌تواند حد چپ و راست داشته باشد ولی اولاً می‌تواند این دو حد باهم برابر نباشد و ثانیاً تابع می‌تواند در $x_۰$ تعریف شده نباشد. بنابراین وجود داشتن حد چپ و راست الزاماً به معنی پیوستگی تابع در $x_۰$ نیست. با توجه به این توضیحات، گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x} & |x|>۱\\ ax+b & |x|\le ۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x} & x>۱\ ;\ x<-۱\\ ax+b & -۱\le x\le ۱\end{cases}$$

با توجه به اینکه ضابطه‌های $f(x)$ در فاصله‌های مربوط به خود پیوسته می‌باشند پس برای اینکه $f(x)$ روی R پیوسته باشد کافی است $f(x)$ در $x=۱,\ x=-۱$ پیوسته باشد.

$$x=۱\ \begin{cases}f(۱)=a+b\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=a+b\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\dfrac{۱+۲-۱}{۱}=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۲\ \ (I)$$

$$x=-۱\ \begin{cases}f(-۱)=-a+b\\ \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=-a+b\\ \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=\dfrac{(-۱)^۲+۲(-۱)-۱}{-۱}=۲\end{cases}\Rightarrow -a+b=۲\ \ (II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow ۲b=۴\Rightarrow b=۲\Rightarrow a=۰\Rightarrow (a,b)=(۰,۲)$$

۵۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر دو تابع درباره‌ی تعریفی پیوسته‌اند کافی است در نقاط شکست، تابع پیوسته باشد پس:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x-۱)[x]=۱\times ۱=۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} a+۲\sin\dfrac{\pi}{x}=a+۲\end{array}\right\}\Rightarrow a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

۵۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=۱\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$$

۵۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-۱\right)}=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{\left(\sqrt{x}+۱\right)(x+۱)}{\sqrt{x}}=۴$$

$$\lim\limits_{x\to۱^-}(ax-a+۴)=a-a+۴=۴$$

$f(۱)=۴$ پس f در $x=۱$ پیوسته است و چون نقطه‌ی انفصال دیگری ندارد f روی R پیوسته است .

۵۶ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: چون تابع $g(x)=۲\operatorname{Sin}x$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ دارای Max است بنابراین تابع $f(x)=[۲\operatorname{Sin}x]$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ هیچ نوع پیوستگی ندارد.

روش دوم:

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۲$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\left[۲\left(۱^-\right)\right]=۱\Rightarrow$ هیچ نوع پیوستگی ندارد

۵۷ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim\limits_{x\to۲} f(x)=\lim\limits_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x}\ \overset{HOP}{=\!=}\ \lim\limits_{x\to۲}\frac{۱-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

۵۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. باید f در $x=۲$ پیوسته باشد. پس:

$$۴+۲a-۵=۲a-۱\Rightarrow -۱=-۱\Rightarrow a\in R$$

۵۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

حد راست $=\lim\limits_{x\to۲^+} x+۲=۴$ ، حد چپ $=\lim\limits_{x\to۲^-} ۳x-[x]=۶-۱=۵$

حدود چپ و راست در $x=۲$ برابر نیستند، بنابراین هرگز تابع در این نقطه پیوسته نبوده و مقداری برای a وجود ندارد.

۶۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{x^۲-۱}{x+۱} = ۰ \\ f(۱)=۲ \text{ و } \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۲\end{array}\right\} \Rightarrow$$

f در $x=۱$ ناپیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۱)^-} \dfrac{x^۲-۱}{x+۱} = -۲ \\ f(-۱) = \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = -۲\end{array}\right\} \Rightarrow$$

f در $x=-۱$ پیوسته است.

۶۱ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. وقتی $x\to ۲^-$ آن‌گاه $x^۲-x-۲<۰$ پس $|x^۲-x-۲| = -(x^۲-x-۲)$

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲+x+۲}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۲x+۱}{۲-\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+۱۲}}} = \frac{-۳}{۲-\frac{۱}{۲}} = \frac{-۳}{\frac{۳}{۲}} = -۲$$

۶۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\lim_{x\to ۴} \frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱} = \lim_{x\to ۴} \frac{(x-۴)(۳x+۲)\left(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱\right)}{۲-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۲)}(\sqrt{x}+۲)(۳x+۲)\left(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱\right)}{-\cancel{(\sqrt{x}-۲)}} = \frac{(۴)(۱۴)(۲)}{-۱} = -۱۱۲$$

روش دوم: استفاده از قانون هوپیتال:

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۴} \frac{۶x-۱۰}{\dfrac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}} = \frac{۱۴}{\dfrac{-\frac{۱}{۴}}{۲}} = \frac{۱۴}{-\frac{۱}{۸}} = -۱۱۲$$

۶۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(x+8)}{6\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+2^3\right)}{6\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)\cancel{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{6\cancel{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم: هوپیتال

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}=\frac{-6}{6\left(\frac{1}{12}\right)}=\frac{-6}{\frac{1}{2}}=-12$$

۶۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{-6}{5}=-1/2$$

۶۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^+} f(x)=a\log_2 4=2a\\ f(3)=a\log_2 4=2a\\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=3a+1\end{array}\right\}\Rightarrow 3a+1=2a\Rightarrow a=-1$$

$$x<3:\ f(x)=ax+2^{x-3}=-x+2^{x-3}$$

$$f(2)=-2+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-1/5$$

۶۶ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x) = a + \sin\frac{۳\pi}{۲} = a - ۱ = ۲ \Rightarrow a = ۳\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x) = b\cos\pi = -b = ۲ \Rightarrow b = -۲\end{array}\right\} \Rightarrow a - b = ۵$$

۶۷ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۲x + ۱}{۱} = ۳$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{-۲x - ۱}{۱} = -۳$$

این تابع در $x=۱$ حد ندارد، پس هیچ‌گاه پیوسته نمی‌شود.

۶۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید تابع در نقاط مرزی یعنی $x = ۱$ و $x = -۱$ پیوسته باشد پس:

$$\begin{array}{l}x = ۱ \ \{a + b = ۱[۱^-] \Rightarrow a + b = ۰\\ x = -۱ \ \{-a + b = -۱[(-۱)^+] = -۱(-۱) = ۱\end{array} \Rightarrow \frac{\begin{cases}a + b = ۰\\ -a + b = ۱\end{cases}}{a = -\frac{۱}{۲} \text{ ، } b = \frac{۱}{۲}}$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = ax + b = \frac{-۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}(۳) + \frac{۱}{۲} = -۱$$

۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۱ - x}}} = ۲$$

$$f(۰) = a \Rightarrow a = ۲$$

۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(۲) = ۲ - a$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۲ - a$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{a\left(۱ + \sqrt[۳]{۱ - x}\right)}{x^۲ - ۲x} \underset{=}{\overset{Hop}{=}} \lim_{x \to ۲^+} \frac{a\left(۰ + \frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۱ - x)^۲}}\right)}{۲x - ۲} = \frac{-\frac{a}{۳}}{۲} = -\frac{a}{۶}$$

$$۲ - a = -\frac{a}{۶} \Rightarrow ۱۲ - ۶a = -a \Rightarrow ۵a = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

۷۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x + ۲}} & x > ۲ \\ ax - ۱ & x \leq ۲ \end{cases}$$

کافی است f در $x = ۲$ پیوسته باشد:

$$f(۲) = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (ax - ۱) = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x + ۲}} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۳(x - ۲)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}{x^۲ - x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۳\cancel{(x - ۲)}\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}{\cancel{(x - ۲)}(x + ۱)}$$

$$= \frac{۳ \times ۴}{۳} = ۴$$

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۲/۵$$

۷۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{aligned} & f(-۲) = a \\ & \lim_{x \to (-۲)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۲)^-} \frac{۸ + x^۳}{-(x + ۲)} = \lim_{x \to (-۲)^-} \frac{\cancel{(x + ۲)}(x^۲ - ۲x + ۴)}{-\cancel{(x + ۲)}} = -۱۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -۱۲$$

۷۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x-۱|=۱ \Rightarrow x-۱=\pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۰ \end{cases}$$

با توجه به شروط داده شده باید در نقاط $x=۰ , x=۲$ پیوستگی‌ها بررسی شوند.

$$f(x)=\begin{cases} (x-۱)[x] & ; \quad ۰<x<۲ \\ x^{۲}+ax+b & ; \quad x\leq ۰ \text{ یا } x\geq ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=۴+۲a+b \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=(۲-۱)\left[۲^{-}\right]=۱ \end{cases} \Rightarrow ۴+۲a+b=۱ \Rightarrow ۲a+b=-۳$$

$$\begin{cases} f(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=۰+۰+b=b \\ \lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=(۰-۱)\left[۰^{+}\right]=۰ \end{cases} \Rightarrow b=۰$$

$$\xrightarrow{b=۰} ۲a+۰=-۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

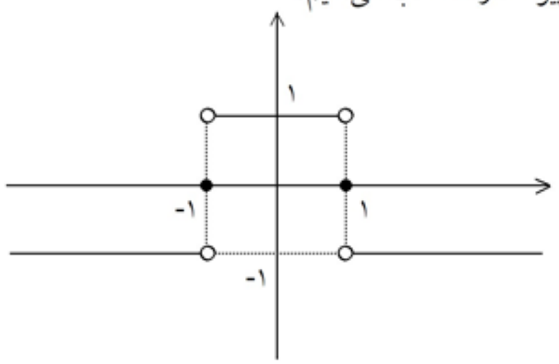
۷۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(gof)(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $۱ - x^۲$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $۱ - x^۲$ منفی باشد، حاصل y برابر ۱- و اگر $۱ - x^۲$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} ۱ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۱ \\ ۱ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۰ \\ ۱ - x^۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \Rightarrow g(f(x)) = -۱ \end{cases}$$

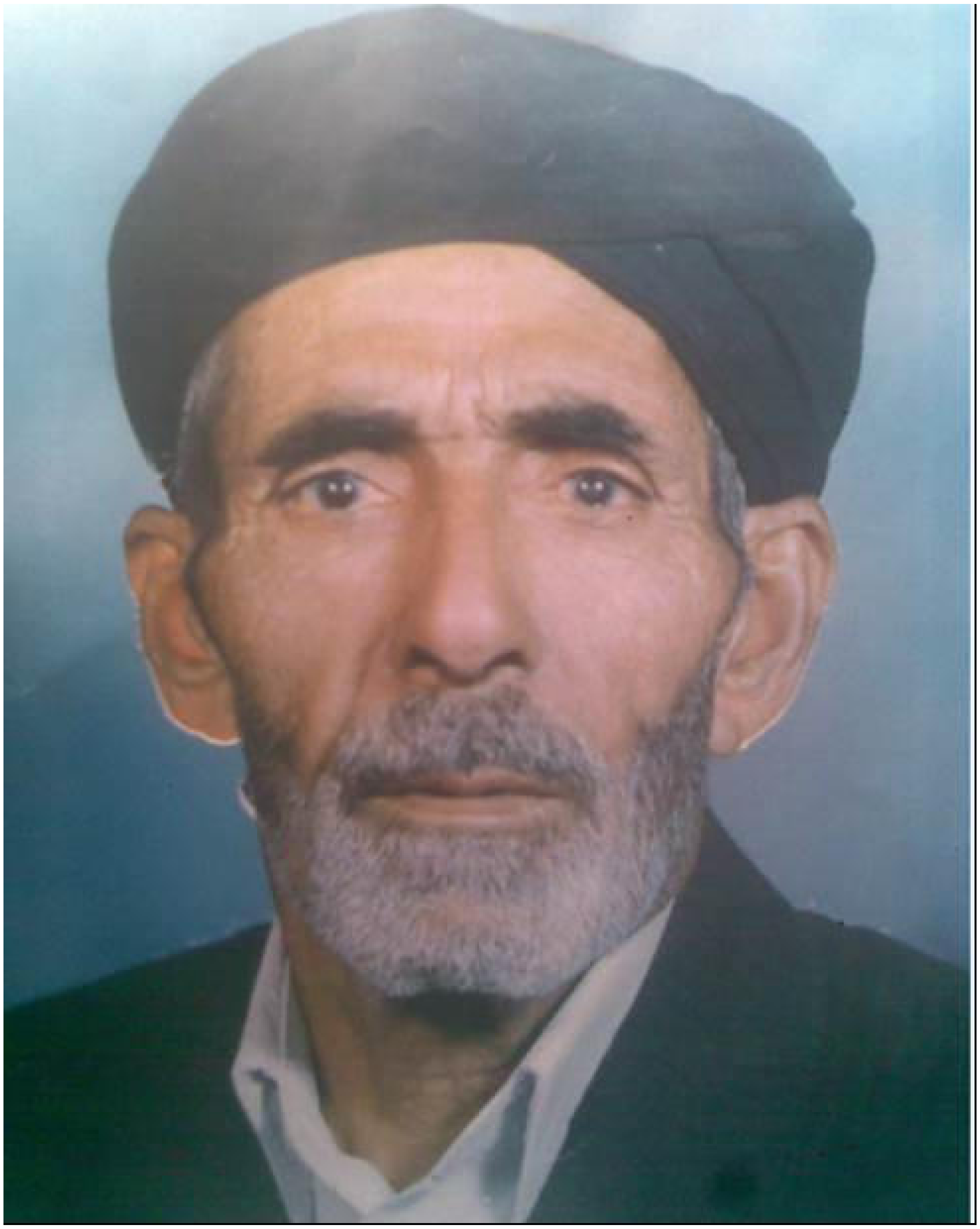
با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(gof)(x)$ برابر است با:

$$(gof)(x) = \begin{cases} ۱ & ; \ -۱ < x < ۱ \\ ۰ & ; \ x = \pm ۱ \\ -۱ & ; \ x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

با رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.



دانش آموزان و همکاران عزیز برای دریافت تست های کنکور ازسال ۱۳۶۳ تا ۱۴۰۱ به صورت مبحث به مبحث می توانید با شماره ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴ تماس بگیرید .

منتظر نقطه نظرات و پیشنهادات شما می باشم