Date No

☑ منابع درس حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

۱) حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (کیندل اتکینسون ترجمه‌ی دانشگاه تبریز)

۲) حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (جرج امانیول؛ ترجمه‌ی محمدرضا شیرخورشیدی)

۳) حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (ارستو ریکانه اردبیلی - مرتضی گرشاسبی)

۴) حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (دکتر غلامرضا حجتی - دکتر علی عباسی)

(partial Differential Equation) PDE

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

(Ordinary Differential Equation) ODE

معادلات دیفرانسیل معمولی

روش‌های حل:
۱- دقیق
۲- تحلیلی (تقریبی)

«فصل اول»

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل معمولی

Introduction to Ordinary differentaidl equation

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) یکی از ابزارهای ریاضی می‌باشند که در حل بسیاری انواع مسائل علوم فیزیک، علوم زیستی

مهندسی و ... کاربرد دارد. در این فصل به معرفی انواع معادلات دیفرانسیل معمولی، شرایط اولیه و مرزی و وجود یکتایی جواب یک ODE می‌پردازیم.

ODE : ۱_ خطی ۲_ غیرخطی

1. معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول با شرایط اولیه (مسائل مقدار اولیه) Ivps (Inital value problem)

به طور کلی یک ODE مرتبه‌ی اول بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = F(t, Y(t)) \qquad (1)$$

$$t \in [a,b] \quad , \quad Y(a) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T \qquad :2$$

که در آن F یک تابع بصورت زیر است:

$$F: \underbrace{[a,b] \times \mathbb{R}}_{\text{متغیر}(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

به عبارت دیگری داریم:

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$$

$$F(t, y(t)) = [f_1(t,y), \dots, f_n(t,y)]^T$$

بطوری که:

$$f_k(t,y) = f_k(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

$$y_k(a) = \alpha k$$

:ex

$$y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + \sin(t)$$

$$y_2'(t) = y_1^2(t) + y_1 y_2 + e^{y_1(t)}$$

$$y_1(0) = 1 \quad \& \quad y_2(0) = 3$$

داریم $N=2$ می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) + y_2(t) + \sin(t) \\ y_1^2(t) + y_1 y_2 + e^{y_1(t)} \end{bmatrix}$$

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y' = F(t, y(t)) \ni y(0) = [1, 3] \quad , \quad t > 0$$

$$f_1 = F(t, y(t))$$

$$f_1(t, y_1, y_2) = y_1(t) + y_2(t) + \sin(t)$$

$$f_2(t, y_1, y_2) = y_1^2 + y_1 y_2 + e^{y_1(t)}$$

حالات خاص

اگر $N=1$ لذا معادلات (1) و (2) را می‌توان به شکل

را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad t \in [a,b]$$

$$y(a) = y_a$$

که در ارتباطی با $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ می‌باشد.

قضیه: اگر $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ یک تابع مشتق پذیر پیوسته در بازه‌ای همسایگی از a مانند $[a, a+\varepsilon]$ باشد آنگاه مسئله‌ی (۱) و (۲) دارای جواب یکتا در آن همسایگی می‌باشد.

توجه: داریم که همواره به ازای هر $t \in [a,b]$ ممکن است جواب وجود نداشته باشد چون مثال زیر را می‌توان برای بیان آن به کار برد؛ مثلاً

$$y'(t) = (y(t))^2$$

$$y(0) = \frac{1}{c} \quad (c > 0)$$

انتگرال از طرفین

$$\frac{dy}{dt} \Rightarrow y' = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + C$$

$$y(t) = -\frac{1}{t+C}$$

$$y(0) = \frac{1}{c} \rightarrow y(0) = -\frac{1}{C} = \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{C = -c}$$

$$y(t) = -\frac{1}{t-c} \quad t \neq c$$

چون جواب دقیق به ازای

$R/\{c\}$ پیوسته است از آنجایی که $y' = (y)^2 \geq 0$ باشد

لذا $y'(t) = \frac{1}{(t-c)^2}$ حالت اول $t<c$ باشد در این صورت

$$y(t) = -\frac{1}{t-c} > 0$$

لذا

$$y(t) = \frac{1}{c-t} \quad , \quad y'(t) = \frac{-1}{(c-t)^2} < 0$$

و لذا $y'(t) = y^2$ نخواهد شد.

پس به ازای $t>c$ رابطه درست است

$$y(t) = -\frac{1}{t-c} \quad t>c$$

تبدیل یک ODE مرتبه n ام به یک ODE مرتبه 1

مسئله ODE از مرتبه n ام را بصورت زیر در نظر میگیریم:

$$x^{n}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

که دارای شرایط اولیه‌ی $x^{k}(0) = dx \; , \; k = 0, 1, \dots, n-1$

باشد قرار می‌دهیم:

$$y_1 = x(t)$$
$$y_2(t) = x'(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = x^{n-1}(t)$$

با توجه به روابط صفحه‌ی قبل داریم:

$$y_1'(t) = y_2(t)$$

$$y_2'(t) = y_3(t)$$

$$\vdots$$

$$y'(n-1) = y_n$$

$$y_n'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$$

که روابط بالا را می‌توان به شکل $Y'(t) = F(t, Y(t))$ نوشت.

$$Y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$$

$$F(t, Y(t)) \quad \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

ex: مسئله‌ی حرکت پاندول به صورت زیر است:

$$\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin(\theta)$$

که در آن θ زاویه‌ی حاصل از محور عمودی و g ثابت شتاب جاذبه گرانش زمین می‌باشد. $\theta'(0) = B$ & $\theta(0) = A$

برای تبدیل به یک ODE داریم:

$$y_1(t) = \theta(t)$$

$$y_1'(t) = \theta'(t) = y_2$$

Date $y_2'(t) = \theta''(t) = -g\sin(\theta)$

$$y(t) = [y_1, y_2] \quad , \quad F(t,y) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -g\sin(y_1(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(\theta) \\ y_2'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -g\sin(y_1(t)) \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

ex: مسئله‌ی حرکت پاندول (معادله‌ی دیفرانسیل) به صورت زیر است:

$$\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin(\theta) \qquad g \simeq 9,8$$

تعریف نرم: فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد، در این صورت تابع $V \longrightarrow [0, +\infty)$: را یک نرم می‌نامیم $\|\cdot\|$ گوییم هرگاه دارای شرایط ذیل باشد:

الف) $\forall\, x$ (بردار) $\in V : \|x\| \geq 0$

ب) $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$

ج) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ , x \in V : \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

د) $\forall\, x, y \in V \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

توجه: اگر فضای برداری V روی آن نرم $\|\cdot\|$ تعریف شده باشد

فضای برداری V را فضای برداری نرم دار گوییم و با $(V, \|.\|)$ نمایش می‌دهیم؛ روی یک فضای برداری می‌توان به تعداد نامتناهی نرم تعریف کرد.

ex: فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ ، $\dim V = 3$ لذا به راحتی می‌توان نشان داد توابع زیر نرم می‌باشند:

الف) $\forall x = (x_1, x_2, x_3) : \|x\|_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$

ب) $\forall x = (x_1, x_2, x_3) ; \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

ج) $\forall x = (x_1, x_2, x_3) : \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{3} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$

ex: فرض $V = C[a, b]$ (مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته Continuous) روی بازه‌ی بسته‌ی a , b بوده و روی اعداد حقیقی تعریف شده باشد؛ در این صورت نشان دهید که توابع زیر یک نرم روی V می‌باشند:

الف) $\forall f \in V : \|f\| = \max\{|f(x)| \quad x \in [a, b]\}$

ب) $\forall f \in V : \|f\|_2 = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

ج) فرض $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ مجزا باشد در این صورت

نشان دهید تابع $\|.\|_N$ یک نرم $\|f\|_N = \sum_{k=1}^{N} |f(t_k)|$

توجه: همچنان که گفته شده نرم یک تابع از فضای برداری V به $[0,+\infty)$ می باشد می توان ثابت کرد که هر نرم یک تابع پیوسته یکنواخت می باشد.

$$y' = F(t,y) \quad \& \quad y(0) = Y_0$$

شرط لیپ شیتس:

فرض کنید که $F: [a,b] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ داده شده باشد در این صورت

تابع $F(t,y)$ در شرط لیپ شیتس با ثابت K به y صدق می کند؛ هرگاه $K > 0$:

$$\|F(t,y_1) - F(t,y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|$$

وجود یکتایی جواب معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول

$$y'(t) = F(t,y)$$

$$y_0(a) = A_0 \longrightarrow \text{بردار معلوم}$$

$$F: \underbrace{[a,b] \times \mathbb{R}^N}_{(n+1)} \longmapsto \mathbb{R}^N$$

تعریف: فرض $(V, \|.\|)$ یک فضای برداری نرم دار باشد

در این صورت چنانچه $\|.\|$ و $|||.|||$ دو نرم تعریف

شده روی V باشند آنگاه دو نرم را معادل گوییم؛

فرض وجود داشته باشد $A > B > 0$ بطوری که به ازای هر $x \in V$ داشته باشیم:

$$B|||x||| \leq \|x\| \leq A|||x|||$$

مثال: فرض کنید که $V = \mathbb{R}^n$ و نشان دهید که دو نرم زیر معادل می باشند:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \quad \& \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

برهان: همواره فرض می کنیم:

$$\|x\|_\infty = |x_r| = \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\}$$

باشد لذا داریم:

$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 + \dots + x_n^2$$

$$= x_r^2\left(\left(\frac{x_1}{x_r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{r-1}}{x_r}\right)^2 + 1 + \dots + \left(\frac{x_n}{x_r}\right)^2\right)$$

$$= \|x\|_\infty^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{x_r}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 \leq n\|x\|_\infty^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \|x\|_2 \leq \overset{A}{\sqrt{n}}\, \|x\|_\infty$$

حال نشان می دهیم که $B > 0$ وجود دارد بطوری که

$$B\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

داریم که:

$$\|x\|_\infty^2 = (x_r)^2 \leq x_1^2 + \dots + x_r^2 + \dots + x_n^2$$

$$\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \quad B=1 \quad \text{لذا}$$

پس بازای هر $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

پس این دو نرم روی $V = \mathbb{R}^n$ (بعد متناهی) معادل می باشند

توجه: می توان نشان داد که هر دو نرم روی $\mathbb{R}^n$ هم معادل می باشند

قضیه: فرض V یک فضای برداری با بعدی متناهی می باشد: $(\dim V < \infty)$

در این صورت هر دو نرم دلخواه روی V معادل می باشند

توجه: اگر دو نرم روی فضای برداری V معادل باشند و چنانچه یک دنباله $\{x_k\} \subset V$ داده شده باشد چنانچه این دنباله در یک نرم همگرا باشد تحت نرم دیگر نیز همگرا خواهد شد

تعریف: شرط لیپ شیتس موضعی یا محلی (local)

تابع f دارای شرایط لیپ شیتس موضعی یا محلی نسبت به x در نقطه ی (t_0, x_0) می باشد، هرگاه یک همسایگی از نقطه ی (t_0, x_0) مانند N موجود باشد بطوری که

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad ; \forall (t,x) \in N$$

که در واقع

$$\Omega = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times \beta_0(x, \varepsilon)$$

$$\beta_0(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}$$

لم: اگر $F: [a,b] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ داده شده باشد بطوری که همه ی مشتق های جزئی آن $\frac{\partial f_k}{\partial y_j}$ در ناحیه ی Ω موجود و پیوسته باشد آنگاه F در شرط لیپ شیتس محلی یا موضعی صدق می کند

برهان: فرض کنید نقطه ی $(t_0, y_0) \in \Omega$ و δ داده شده باشد و داریم:

$$K = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \beta_0(y_0, \varepsilon)$$

بطور کامل در Ω باشد چون K پیوسته است کراندار و بسته و $\frac{\partial f_k}{\partial y_j}$ پیوسته روی K می باشد لذا روی K کران دار خواهد شد:

$$C = \max \sup \left\{ \left| \frac{\partial f_k}{\partial y_j} \right| \;\middle|\; \begin{matrix} k = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \end{matrix} \right\}$$

به ازای یک اندیس $k = 1, 2, 3, \dots, N$ (ثابت) داریم:

چون $f_k(t, y_1(t), \dots, y_N(t))$ پیوسته است دارای مشتق جزئی می باشد

$$f_k(t, y_1(t)) - f_k(t, y_2(t)) = (f_k)_y (y_1 - y_2)$$

Date No

$$|f_k(t,y_1(t)) - f_k(t,y_2(t))| = \|(f_k)_y\| \, \|(y_1-y_2)\|$$
$$\le c\|y_1-y_2\|$$

پس همواره داریم :

$$\|F(t,y_1) - F(t,y_2)\| \le c\|y_1-y_2\|$$

Example: Let $f(t,y) = ty^2$, $\Omega = \{(t,y) : 0\le t\le T\}$

then f does not satisfy any Lipshitz
صدق
Condition on Ω.

proof: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |ty_1^2 - ty_2^2|$

$F : [0,t]\times R \longrightarrow R$

$$\Rightarrow |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t|\,|y_1-y_2|\,|y_1+y_2|$$

چون $|t|\le T$ ، $|y_1+y_2|$ کران دار نیست

لذا در شرط لیپ شیتس صدق نمی کند.

قضیه: فرض کنید $F : [a,b]\times\mathbb{R}^n \longmapsto R^n$ پیوسته و

نسبت به متغیر دوم (y) در شرط لیپ شیتس به طور یکنواخت صدق کند.

$$\|F(t,y_1)-F(t,y_2)\| \leq L\,\|y_1-y_2\|$$

فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ فضای $\mathbb{R}^n$

به ازای هر $(t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n$ برقرار باشد در این صورت

مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر به ازای هر $t\in[a,b]$ دارای

جواب یکتا می‌باشد $Y'=F(t,y)\quad,(t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n$

$y(a)=y_0$

ex: بررسی کنید مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر دارای جواب یکتا می‌باشد

یا خیر؟ $y'=1+\sin(t,y)\quad t\in[-1,1]$

$y(-1)=y_0$

حل: واضح است که $n=1$

$F(t,y)=1+\sin(t,y)$

$$|F(t,y_1)-F(t,y_2)|=|\cancel{1}+\sin(t,y_1)-\cancel{1}-\sin(t,y_2)|$$

$$\Rightarrow |\sin(t,y_1)-\sin(t,y_2)|$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع مشتق‌پذیر داریم:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

لذا

$$=|t\cos(t,y_{1,2})|\leq|y_1-y_2|$$

$L=1$ مسئله‌ی فوق در شرط لیپ‌شیتس با ثابت لیپ‌شیتس

Date No

صدق می کند مسیر دارا جواب یکتایی باشد

ex: بررسی کنید مسئله ی مقدار اولیه ی زیر جواب یکتا دارد یا خیر؟

$$y' = \frac{t+y}{t-y}, \quad t \in [1,5]$$

$$y(1) = 0$$

حل:

با توجه به شرط لیپ شیتس برای وجود یکتایی جواب بررسی می کنیم $N=1$

$$F(t,y) = \frac{t+y}{t-y}$$

$$|F(t,y_1) - F(t,y_2)| \Rightarrow \left| \frac{t+y_1}{t-y_1} - \frac{t-y_2}{t-y_2} \right|$$

برای تقریب زدن بازه

$$|F(t,y_1) - F(t,y_2)| = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}} (y_1 - y_2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(\cancel{t}-y)+(t+\cancel{y})}{\cancel{(t-y)^2}\,(t-y)^2} = \frac{2t}{(t-y)^2}$$

در صورتی که تابع y در نقطه ی

$t \in [1,5]$ دارای شرط $t = y(t)$ باشد این مسئله جواب یکتا ندارد

یا به عبارتی دیگر جواب دارای نقطه ی ثابت نمی باشد

ex: دستگاه سه معادله و سه مجهول مرتبه‌ی اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2 e^{-t}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = y_3$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = (2 - \frac{1}{t}) y_3 - 4t^2 y_2$$

$$y(0) = 0 \quad y_2(0) = 1 \quad y_3(0) = y'(0) - y(0) = 0$$

اگر قرار دهیم

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4t^2(2-\frac{1}{t}) & 0 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

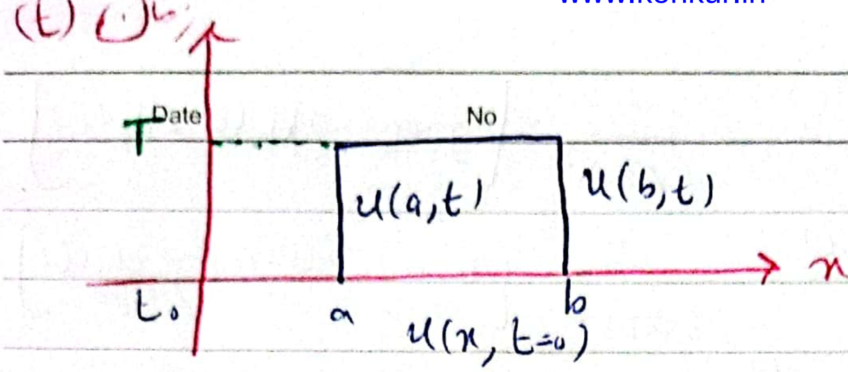
$$y'(t) = A(t) y(t) = F(t, y)$$
$$y(0) = y_0$$

ex: در این مثال می‌خواهیم به بررسی یک معادله‌ی با مشتقات جزئی (PDE) به کمک تقریب خطی به یک دستگاه معادله دیفرانسیل تبدیل کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t, x) \in [0, T] \times [a, b]$$

معادله‌ی گرما یا کشش

Heat Equation



$$u(a,t) = g_1(t)$$
$$u(b,t) = g_2(t)$$
شرایط مرزی

$$u(x,0) = h(x)$$ شرایط اولیه

برای اعمال روش خطی یا خطوط ابتدا بازه‌ی $[a,b]$ را به N زیربازه به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$x_k = a + kh \quad , k = 0, 1, \dots, N$$

و مقدار تقریبی تابع $u(x,t)$ در نقطه‌ی x_k را با $U_k(t)$ داریم: $U_k(t) :\simeq u(x_k, t)$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{x_k(t)} = \alpha \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_k,t)} \doteq \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(x_k,t)} \simeq$$

$$\alpha \frac{U(x_{k+1},t) - 2U(x_k,t) + U(x_{k-1},t)}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{x=x_k} = \alpha \frac{U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

$\forall k = 1, \dots, n-1$

حال اگر برای سادگی کار قرار دهیم $U_0(t) = g_1(t)$ ، $U_N(t) = g_2(t)$ رابطه‌ی قبل را می‌توان به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر نوشت:

$$k=1 \Rightarrow \frac{dU_1(t)}{dt} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[g_1(t) - 2U_1(t) + U_2(t)\right]$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{dU_2(t)}{dt} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[U_1(t) - 2U_2(t) + U_3(t)\right]$$

$$k=N-2 \Rightarrow \frac{dU_{N-2}(t)}{dt} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[U_{N-3}(t) - 2U_{N-2}(t) + U_{N-1}(t)\right]$$

$$k=N-1 \Rightarrow \frac{dU_{N-1}(t)}{dt} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[U_{N-2}(t) - 2U_{N-1}(t) + g_2(t)\right]$$

روابط بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_2(t) \end{bmatrix}}_{G(t)}$$

در اصل مقابل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرط اولیه

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} AU + G(t)$$

$U(0)$ می‌باشد

$$U(0) = \left[h(x_1) \; \cdots \; h(x_{N-1})\right]^T$$

فصل دوم

روش های تک گامی برای تقریب معادلات دیفرانسیل معمولی

در این فصل به معرفی انواع روش های تک گامی برای تقریب معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم؛

همچنین برای راحتی کار بیشتر این روش ها از بررسی معادله ی دیفرانسیل معمولی دیفرانسیل مرتبه ی اول بصورت زیر بهره می بریم:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

به طور کلی در تقریب معادلات دیفرانسیل بازه ی $[a,b]$ را به N زیر بازه ی مساوی به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم می کنیم.

$$t_k = a + kh \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

همچنین مقدار تقریبی تابع جواب $y(t)$ در نقطه ی t_k را با Y_k نمایش می دهیم.

• روش اول: روش پیکارد (Picard methode)

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

در این روش از طرفین (1) نسبت به t روی بازه ی $[a,t]$ انتگرال می گیریم:

$$\int_a^t y'(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau,y)d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) - y(a) = \int_a^t f(\tau,y)d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 + \int_a^t f(\tau, y)\, d\tau} \qquad (2)$$

رابطه‌ی بالا یا همان رابطه‌ی (2) را که $y(t)$ در هر دو طرف معادله وجود دارد و درون انتگرال بر حسب پارامتر متصل است را معادله‌ی

انتگرال ولترا می‌گوییم.

$$y(t) = g(t) + \int_a^b F(t, y(t))\, dt = 0$$

معادله انتگرال فردهلم

در روش پیکارد برای راحتی کار قرار می‌دهند:

$$y_{k+1} = y_0 + \int_a^{t_k} f(\tau, y_k)\, d\tau \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

فرایند تکراری بالا را روش پیکارد گوییم. این روش از نظر تئوری زمانی مناسب است که انتگرال قابل محاسبه باشد.

بزرگترین مشکل این روش محاسبه‌ی انتگرال $\int_a^{t_k} F(t, y_k)\, dt$ می‌باشد.

ex: معادله اولیه زیر را با روش پیکارد تقریب بزنید:

$$y'(t) = y(t) \qquad t \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1$$

حل: جواب دقیق مسئله $y(t) = e^t$ می‌باشد.

فرض $N = 4$ باشد لذا

$$t_k = \frac{k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$y_1 = y_0 + \int_0^{\frac{1}{4}} y_0\, d\tau = 1 + \frac{1}{4} = 5/4$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^{t_2} y_1\, dt = 1 + \frac{5}{4}\int^{1/2} dt\,(-1 + 5/8) = 13/8$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^{t_3} y_2\, dt = 1 + \frac{13}{8} \times \int_0^{3/4} dt = 1 + \frac{13}{8} \times 3/4 = 71/32$$

$$y_4 = y_0 + 71/32 = 1 + 71/32 = \frac{103}{32} = 3.2$$

یادآوری روش پیکارد:

معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول با شرط اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & ; \; t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

مسئله‌ی مقدار اولیه IVP

مسئله‌ی مقدار مرزی BVP

ابتدا بازه $[a,b]$ را به N زیر بازه‌ی مساوی به طول h برابر تقسیم می‌کنیم. زیرا جواب یکتا دارد که در شرط لیپ‌شیتس صدق کند. $h = \frac{b-a}{N}$

روی بازه‌ی $[t_k, t_{k+1}]$ معادله‌ی IVP را در نظر بگیرید

و از انتگرال‌گیری روی بازه‌ی IVP $[t_k, t]$ ، $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\int_{t_k}^{t} y'(\tau)\, d\tau = \int_{t_k}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

$$y(\tau) \Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,d\tau \qquad k=0,\dots,n-1$$

در حالیکه انتگرال رابطه‌ی بالا چون $y(t)$ مجهول است لذا بجای

آن مقدار $y_k(\tau)$ را جایگزین $y(t)$ در سمت چپ قرار داده $y_{k+1}(t)$

را محاسبه می‌کنیم

$$y_{k+1}(t) = y_0(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))\,d\tau \qquad k=0,\dots,n-1$$

Ex: جواب تقریبی روش پیکارد را برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول با

شرط اولیه داده شده (IVP) زیر را بدست آورید

$y'(x) = y(x) \qquad y_{exact} = e^x$

$y(0) = 1$

$n=0 \rightarrow y_1(x) = y_0 + \int_0^x y_0(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^x d\tau = 1+x$

$n=1 \rightarrow y_2(x) = y_0(x) + \int_0^x y_1(\tau)\,d\tau = 1 + x + \int_0^x (1+\tau)\,d\tau$

$= 1 + x + x + \frac{1}{2}x^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2 + 1$

$n=2 \rightarrow y_3(x) = y_0 + \int_0^x y_2(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^x \left(1+\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

$n=k \rightarrow y_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{k+1} \frac{x^r}{r!}, \quad y_k \longrightarrow e^x$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$y_{exact} = e^{x^2/2}$ No $\quad y'(x) = x\,y(x)$ ex

$y(0) = 1$

واقع است که $f(t, y(t)) = t\,y(t)$ را در نظر بگیریم به صورت

زیرا است: $\quad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_0^x t\,y_k(t)\,dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$

$$y_1 = y_0 + \int_0^x t\,y_0(t)\,dt = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x t\,y_1(t)\,dt = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{2}\right)dt$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x t\,y_2(t)\,dt = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right)dt$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$$

$$e^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$$

$$y_k = \sum_{r=0}^{k} \frac{x^{2r}}{2^r r!} \longmapsto e^{x^2/2}$$

روش های عددی برای تقریب معادلات دیفرانسیل معمولی با شرط اولیه (IVP's)

متاسفانه جواب صریح فقط برای تعداد کمی اندکی از مسائل غیرخطی شامل

ODE , DE (معادلات دیفرانسیل)

$$y' = \frac{t+y}{t-y} \qquad y(1) = 0$$

جواب معادله را به صورت: $\quad \ln(t^2 + y^2) = 2\arctan(y/t)$

حل الحمد شد.

که رابطه‌ی (۱) برای بدست آوردن تابع مجهول $y(x)$ بسیار پیچیده می‌باشد که جواب y در یک رابطه‌ی ضمنی صدق می‌کند. که به راحتی y قابل دسترسی نیست. لذا بهترین گزینه برای این مسائل روش عددی می‌باشد.

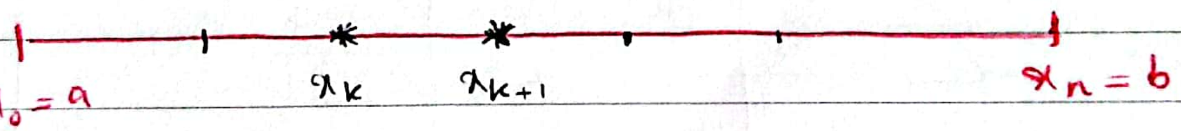
ابتدا به معرفی چند روش تک گامی برای تقریب معادله دیفرانسیل معمولی بپردازیم

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با شرط اولیه داده شده زیر را در نظر بگیرید.

$$y' = f(x,y)$$
$$y(a) = y_0 \longrightarrow \text{معلوم} \qquad x \in [a,b] \qquad (1)$$

در اکثر روش های تقریبی بازه‌ی $[a,b]$ به N زیربازه‌ی مساوی به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم می‌کنیم.

$$x_k = a + kh$$



الف) روش اویلر (Euler's methode)

همچنان که می‌دانیم

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

چنانچه h به قدر کافی کوچک باشد:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

حال در رابطه‌ی (1) داریم:

$$y'\Big|_{x=x_k} = f(x, y(x))\Big|_{x=x_k} = f(x_k, y(x_k))$$

$$y'(x_k)\Big|_{x=x_k} = f(x_k, y_k)$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} \simeq f(x_k, y_k)$$

$$\Rightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \simeq f(x_k, y_k)$$

به عبارت دیگر اگر به جای مقدار تقریبی $y(x_k)$ ، Y_k قرار دهیم داریم:

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \qquad k=0,1,\dots,N-1$$

$$y_0 = y(a)$$

ex: با روش اویلر معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را به ازای $h=0,1$ تقریب بزنید.

$$y'(x) = x y(x) \qquad x\in[0,1]$$
$$y(0)=1$$

$$h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow 0,1 = \frac{1}{N} \Rightarrow N=10$$

$$x_k = kh = k/10 \quad , \quad k=0,1,\dots,10$$

$$y_1 = y_0 + h(x_0, y_0) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0,1(x_1 y_1) = 1 + 10^{-2}\times 1 = 1,01$$

$$y_3 = y_2 + 0,1(x_2, y_2) = 1,01 + 0,1(0,2\times 1,01) = 1,0302$$

$$y_4 = y_3 + 0,1(x_3, y_3) = 1,0302 + 0,1(0,3 + 1,0302)$$

$$= 1,061106$$

$$y_4 \simeq y(x_4) = e^{\frac{(0,4)^2}{2}} = 1,08328$$

یادآوری روش اویلر

$y' = f(x,y) \quad x \in [a,b]$

$y(a) = y_0$

تقریبی $Y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$ & $h = \frac{b-a}{N}$

دقیق y $\begin{cases} \\ k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$ $\quad x_k = a + kh$

ex: معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول زیر را به ازای $h = 0{,}1 \; , \; 0{,}2 \; , \; 0{,}001$ تقریب بزنید.

$y' + y = x \quad x \in [0,1]$

$y(0) = 1$

$y_{exact} = x - 1 + 2e^{-x}$

	Y_i دقیق	y_i تقریبی	$E_i = \lvert Y_i - y_i \rvert$
0,2	0,8374	0.8	0.0374
0,4	0.740	0.68	0.06
0,6	0.6976	0.624	0.073
0,8	0.6986	0.6292	0.016
1,0	0.7357	0.6533	0.08

$h = 0.2$

$y_{i+1} = y_i + h(x_i - y_i) \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$

$i = 0 \rightarrow y_1 = y_0 + 0{,}2(0 - y_0)$

$y_1 = 1 - 0.2 = 0.8$

$x_k = 0.2$

$x_0 + kh = 0.2$

$0 + k \times 0{,}001$

$k = \frac{0{,}2}{0{,}001} = 200$

$i=1 \Rightarrow y_2 = y_1 + 0.2(x_1 - y_1) = 0.8 + 0.2(0.2 - 0.8)$

$y_2 = 0.8 - 0.12 = 0.68$

$h = 0.1$

i	x_i	y_i	Y_i	$E_i = \lvert Y_i - y_i \rvert$
2	0.2	0.82	0.8374	0.018
4	0.4	0.7122	0.7406	0.028
6	0.6	0.662	0.6976	0.034
8	0.8	0.6809	0.6986	0.034
10	1.0	0.6973	0.7357	0.38

$i=0 \Rightarrow y_1 = y_0 + 0.1(x_0 - y_0) = 1 + 0.1(0.1 - 1) = 0.9$

$i=1 \Rightarrow y_2 = y_1 + 0.1(x_1 - y_1) = 0.9 + 0.1(-0.8) = 0.9 - 0.08 = 0.82$

$h = 0.001$

i	x_i	y_i	Y_i	$E_i = \lvert Y_i - y_i \rvert$
200	0.2	0.8370	0.8374	0.00018
400	0.4	0.74037	0.740	0.00027
600	0.6	0.67729	0.6976	0.00033
800	0.8	0.69830	0.6986	0.00036
1000	1.0	0.73539	0.7357	0.00037

تعریف O (بزرگ):

تابع $f(h)$ از مرتبه‌ی O بزرگ تابع $g(h)$ می‌باشد، آن را با $f(h) = O(g(h))$ نمایش می‌دهند هرگاه:

$$\lim_{h \to \substack{0 \\ \infty}} \frac{f(h)}{g(h)} \neq C \neq 0$$

به عنوان مثال

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

$$f'_i - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h)$$

زیرا: تیلور

$$f_{i+1} = f(x_i + h) = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'_i + \frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{3!} f'''_i + \dots \qquad \div h$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i}{h} = \frac{f''_i}{2} + \frac{h}{3!} f'''_i + \dots$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i}{h} = \frac{f''_i}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = O(h)$$

تعریف: فرض کنید که $y_i = y(x_i)$ نمایانگر جواب دقیق معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

و Y_i جواب تقریبی در نقطه‌ی x_i باشد و تعریف می‌کنیم:

خطای مطلق $E_i = |Y_i - y_i|$

$\{E_i\}_{i=1}^{N-1}$ خطای مطلق تقریب معادله‌ی دیفرانسیل می‌باشد

$$E_\infty = \max\{E_i : i = 1, \dots, N\}$$

لم: اگر E_i ها به ازای $i = 0, 1, \dots, N$ به گونه‌ای باشند که

در رابطه‌ی زیر صدق کنند $i = 0, 1, \dots, N-1$

$$E_{i+1} \leq A E_i + B$$

Date

آنگاه $i=1,\dots,n$

$$E_i \le A^i E_0 + \frac{A^i-1}{A-1}B$$

اثبات: با استفاده از استقرای ریاضی

$$i=0 \Rightarrow E_1 \le AE_0 + B \Rightarrow AE_0 + \frac{A-1}{A-1}B$$

حال فرض کنید به ازای $1 \le i = k < n$ برقرار باشد

$$E_k \le A^k E_k + \frac{A^k-1}{A-1}B$$

و نشان می‌دهیم که به ازای $k+1$ نیز حکم برقرار است.

$$\begin{aligned}
E_{k+1} &\le AE_k + B \\
&\le A\left(A^k E_k + \frac{A^k-1}{A-1}B\right) + B \\
&\le \left(A^{k+1}E_k + \frac{A^{k+1}-A}{A-1}B\right) + B \\
&\le A^{k+1}E_k + \left(\frac{A^{k+1}-A}{A-1} + 1\right)B \\
&\le A^{k+1}E_k + \frac{A^{k+1}-1}{A-1}B
\end{aligned}$$

تعمیم: فرض معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

$$y' = f(x,y)$$
$$y(a) = y_0$$

به ازای $x \in [a,b]$ دارای جواب یکتایی باشد

همچنین فرض کنید که $|y''(x)| \le A$ کران دار و بعلاوه

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le B$ بطوریکه $h = \frac{b-a}{n}$ ، $x_k = a + kh$ و

اگر $\{Y_k\}_{k=0}^{N}$ جواب تقریبی معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول با روش اویلر باشد آنگاه نشان می‌دهیم:

$$E_k \leq \frac{[(1+Bh)^k - 1]}{2B} Ah \quad \forall k=1,2,\dots,N$$

اثبات:

$$E_{k+1} = |Y(x_{+1}) - y(x_{+1})|$$

$$= |y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2} y''(\xi) - y_k - hy'_k - \frac{h^2}{2!} y''_k(\xi_1)|$$

$$= |Y_k - y_k + h(y'_k - f(x_k, y_k)) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi_k)|$$

$$E_{k+1} \leq |y_{k+1} - y_k| + h|\overset{f(x_k, Y_k)}{Y'_k} - f(x_k, y_k)| + \frac{h^2}{2!}|y''(\xi_k)|$$

$$E_{k+1} \leq E_k + h\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|(y_k - Y_k) + \frac{h^2}{2!}|y''(\xi_k)|$$

$$E_{k+1} \leq E_k + hBE_k + \frac{h^2}{2!}|y''(\xi_k)|$$

$$\leq (1+hB)E_k + \frac{h^2}{2}A$$

حال با توجه به سوال قبلی داریم:

$$E_{k+1} \leq \frac{(1+hB)^k - 1}{hB} \frac{h^2}{2} A + (1+hB)^k E_k$$

$$E_{k+1} \leq \frac{(1+hB)^k - 1}{2B} hA + (1+hB)^k E_k$$

تعبیر هندسی روش اویلر

$y' = f(x,y) \; ; \; x \in [a,b]$

$y(a) = y_0$

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \qquad n = 0, \dots, N-1$

$y' = f(t,y)$

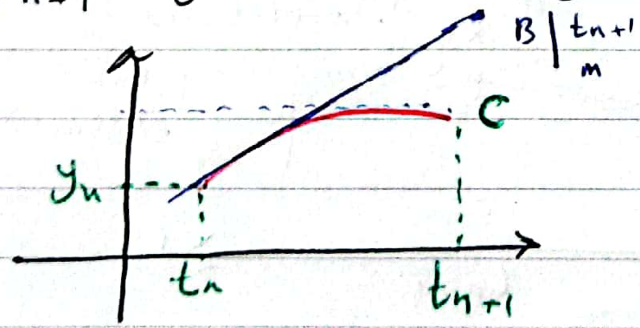
$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y)\,dt$

$= y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y)\,dt$

$\Rightarrow y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y)\,dt$

$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)\,dt \simeq h f(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$ — اگر $y(t)$ جواب دقیق باشد



فرض کنید که نمودار جواب دقیق $y(t)$ در بازه‌ی $[t_n, t_{n+1}]$ به شکل فوق باشد و شیب خط AB، $y'(t_n)$ باشد. در واقع m عرض نقطه‌ی B تقریب $y(t_{n+1})$ خواهد شد

یا به طور دقیق تر

$m \simeq y(t_{n+1})$

$$y - y_n = Y'(t_n)(t - t_n)$$

$$y = y_n + (t - t_n) f(t_n, y_n)$$

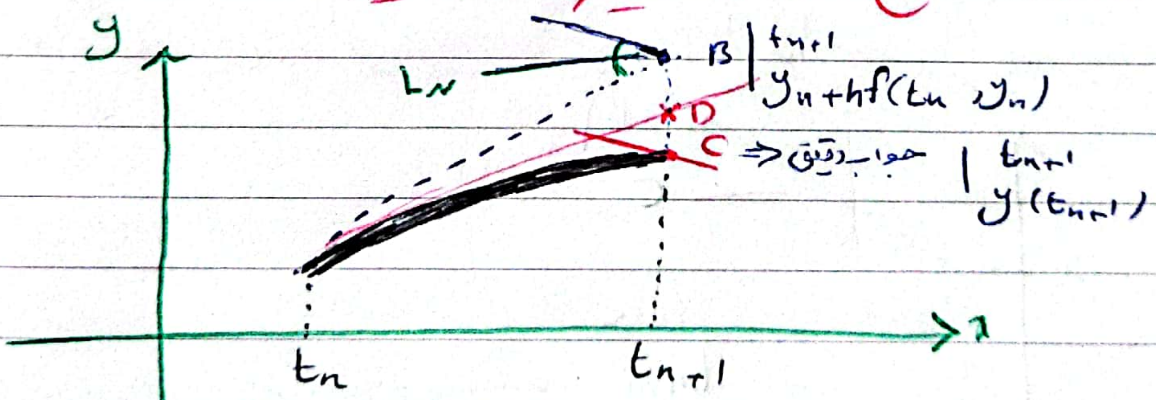
$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n)$$

$$Y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \qquad E_n = |BC|$$

روش اصلاح شده‌ی اویلر:

همچنان که می‌دانیم روش اویلر یک روش تک گامی می‌باشد که دقت آن از مرتبه‌ی $O(h)$ می‌باشد؛ در این بخش دو روش اصلاح شده‌ی اویلر تک گامی با مرتبه دقت بالا معرفی می‌شود.

۱- روش اصلاح شده‌ی اویلر یا روش هیون (Heun Methode)



با توجه به شکل اگر خط AB خط مماس بر تابع $y(t)$ در نقطه‌ی t_n باشد و چنانچه خط مماس در نقطه‌ی C را موازی آن به نقطه‌ی B منتقل کنیم حال با نصف زاویه‌ی بین LC و خط AB را در L_n می‌نامیم سپس خط L_n با شیب مشخص را به نقطه‌ی A منتقل می‌کنیم و سپس حاصل را داخل

این خط (با رخط) BC را D می‌نامیم که نقطه‌ی D یک تقریب جدید

برای $y(t_{n+1})$ می‌باشد با توجه به توضیحات بالا داریم:

شیب خط مماس در نقطه‌ی C $\quad m_C = y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$

شیب خط مماس در نقطه‌ی A $\quad m_A = y'(t_n) = f(t_n, y_n)$

لهذا $\quad m_D = \dfrac{m_C + m_A}{2}$

$$m_D = \frac{1}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

خط گذرنده از نقطه‌ی A در موازی به L می‌باشد:

$$y - y_n = \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1})(t - t_n)$$

تقریبی $y \quad = y_n + \frac{1}{2}(t - t_n)(f_n + f_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_D = y_n + \frac{1}{2}(t_{n+1} - t_n)(f_n + f_{n+1})$$

$$Y_{n+1} \simeq y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right) \qquad (1)$$

در رابطه‌ی قبلی Y_{n+1} که در دو طرف معادله مجهول می‌باشد وجود دارد برای

رفع این مشکل ترازی داریم:

$$(2) \quad f(t_{n+1}, y_{t_{n+1}}) \simeq f(t_{n+1}, y_n + h f(t_n, y_n))$$

با جایگذاری رابطه‌ی (2) در رابطه‌ی (1) داریم:

$$Y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + h f(t_n, y_n))\right]$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

رابطه‌ی فوق را به شکل زیر نمایش می‌دهیم.

$$K_1 = f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = f(t_{n+1}, y_n + hK_1)$$

$$Y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

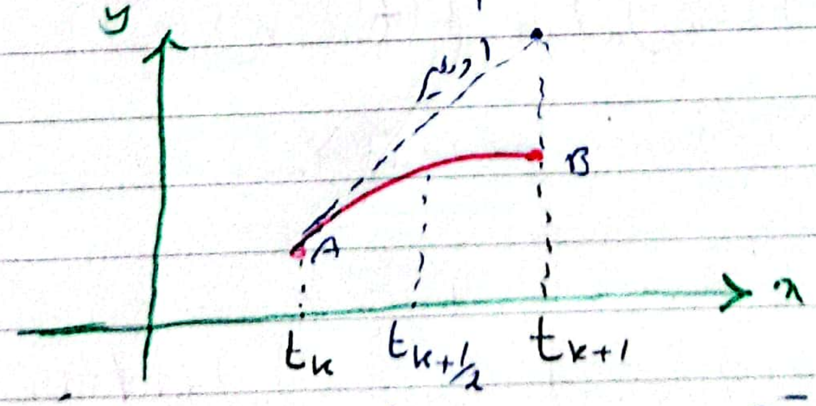
روش دوم:

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با شرط اولیه‌ی داده شده را در نظر بگیرید ابتدا بازه‌ی $[a, b]$ را به N زیر بازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم.

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad t_k = a + kh$$

در زیر بازه‌ی k اُم فرض کنید:

دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} t_k \\ y_k \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} t_{k+1} \\ y_{k+1} \end{matrix}\right.$ رسم شده باشد



با توجه به شکل برای تقریب y_{k+1} شیب خط مماس در نقطه‌ی $y_{k+\frac{1}{2}}$ را در نظر بگیرید. حال چنانچه خط گذرنده از نقطه‌ی A

با شیب نقطه‌ی $Y_{k+1/2}$ خط، را در نقطه‌ی جدید $x = t_{k+1}$ تقریب می‌زنند

شیب جدید $m_A = y'_{k+1/2} = f(t_{k+1/2}, y_{k+1/2})$

$$m_A = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right) \quad (1)$$

$$y_{k+1/2} \cong y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)$$

خط گذرنده از نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} t_k \\ y_k \end{matrix} \right.$ با شیب m_A'

$$y - y_k = m_A'(t - t_k)$$

$$y = y_k + (t - t_k) f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$$

$$Y_{k+1} = y_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

۱) به عبارت دیگری در روش‌های ضمنی مجهول Y_{n+1} در دو طرف رابطه‌ی (2) وجود دارند به این دلیل که باید برای محاسبه‌ی y_{n+1} دوباره‌ی معادله‌ی (۲) حل شود به آن روش ضمنی گویند.

معادله‌ی دیفرانسیل $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ روی بازه‌ی $[a, b]$ را در نظر بگیرید

همچنین فرض کنید که f تابع دو متغیره‌ای پیوسته باشد. بازه‌ی $[a, b]$ را به N زیر بازه تقسیم می‌کنیم.

$$h = \frac{b - a}{N}$$

$t_k = a + kh \quad , k = 0, 1, \dots, N$

معادله دیفرانسیل $y' = f(t,y)$ را روی بازه $[t_k, t_{k+1}]$

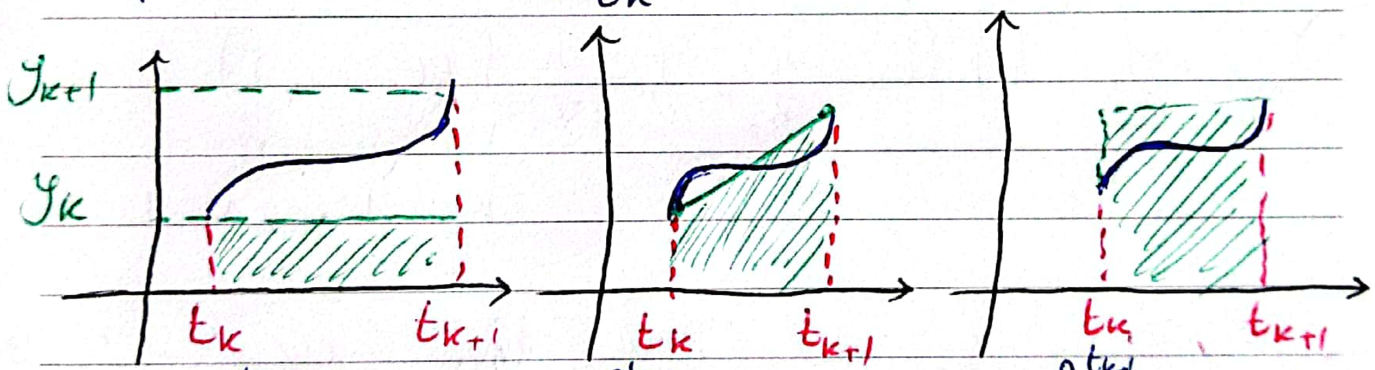
انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt$$

$$\Rightarrow y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt$$

$$\Rightarrow y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt$$

$y'(t) = f(t,y)$ را انتگرال $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt$ را تقریب می‌زنیم.



$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt \simeq h y_k$ $\qquad$ $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt \simeq \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1})$ $\qquad$ $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt \simeq h y_{k+1}$

☑ روش مستطیل پایینی $\qquad$ ☑ روش ذوزنقه‌ای $\qquad$ ☑ روش مستطیل بالایی

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt \simeq h f(t_k, y_k)$$

☑ روش اویلر

الف)

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$$

ب) $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt \simeq \frac{h}{2}\left(f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y_{k+1})\right)$

$$\begin{cases} Y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y_{k+1})\right) \\ k=0,1,\dots,N-1 \end{cases}$$

روش ضمنی یا ذوزنقه‌ای

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt \simeq h f(t_{k+1},y_{k+1})$$

ج) $\begin{cases} Y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1},y_{k+1}) \\ k=0,1,\dots,N-1 \end{cases}$

روش اویلر پسرو (مستطیل بالایی)

ex: معادله‌ی دیفرانسیل $y' = (1-\frac{2}{3}t)y$ را در نظر بگیرید: روش ضمنی (ذوزنقه)

تقریب بزنید.

$$Y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y_{k+1})\right)$$

$$Y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left((1-\frac{2}{3}t_k)Y_k + (1-\frac{2}{3}t_{k+1})Y_{k+1}\right)$$

$$y_{k+1}\left[1-\frac{h}{2}(1-\frac{2}{3}t_{k+1})\right] = \left[1+\frac{h}{2}(1-\frac{2}{3}t_k)\right]y_k \qquad k=0,1,\dots,N-1$$

$$y_{k+1} = \frac{1+\frac{h}{2}(1-\frac{2}{3}t_k)}{1-\frac{h}{2}(1-\frac{2}{3}t_{k+1})}\,y_k \qquad k=0,1,\dots,N-1$$

$$\frac{dy}{y} = (1-\frac{2}{3}t) \Rightarrow \ln y = t-\frac{1}{3}t^2+c$$

$$\Rightarrow y = c\,e^{t-\frac{1}{3}t^2} \Rightarrow y = e^{t-\frac{1}{3}t^2}$$

روش اویلر

مهندس محمد حمیدی

☑ مدرس و مولف ریاضی

☑ رتبه ی برتر کارشناسی ارشد : ۲۱ ریاضی و ۴۵۲ کامپیوتر

☑ مدرس پروازی ریاضی

خرداد 1402

مشاور بیش از ۱۰۰ رتبه زیر ۱۰۰۰

مهندس محمد حمیدی

- مولف کتاب ریاضیات و سه سطحی کانون
- اولین طراح هر سه پایه و هر سه رشته نظری
- اولین ارائه دهنده سوالات احتمالی کنکور
- مولف کتاب الکترونیکی ۱۵۶۰ تست
- مولف، طراح و ویراستار ریاضی
- آزمون های آزمایشی ماز، گاج، گزینه دو و سنجش
- عضو انجمن ریاضی ایران
- طراح ریاضی المپیاد و مسابقات ریاضی
- مدرس پروازی ریاضی شهر های
- تهران، کرمان، سنندج، کرمانشاه، رشت، مشهد و تبریز
- اولین ارائه دهنده پاسخ تشریحی کنکور در وبسایت های رسمی

۱۰۰٪ هر سه رشته پروژه ... رسمی کانون قلمچی و ماز