

سطح
سوال

پاسخ تشریحی سوالات ریاضی کنکور انسانی ۱۴۰۲ نوبت دوم

پیشنهادی: اسفند ملیح ملکی

۱- اگر $A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{2}}$ باشد، حاصل $(\Delta + A)^{-\frac{1}{5}}$ کدام است؟

$$A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{2}} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^5} \times 3^{\frac{7}{2}} = (3^2 \times 3^{\frac{8}{3}})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{7}{2}}$$

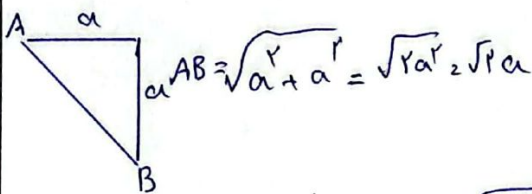
$$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{8}{9}} \times 3^{\frac{7}{2}} = 3^{\frac{4+8+21}{18}} = 3^{\frac{33}{18}} = 3^{\frac{11}{6}} = 3^2 = 27$$

$$(\Delta + A)^{-\frac{1}{5}} = (0 + 27)^{-\frac{1}{5}} = (3^3)^{-\frac{1}{5}} = (3^0)^{-\frac{1}{5}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است

۲- رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول، ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب بپیماید. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می‌کنند. مقدار a کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۷ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴)



$9 + 14 = 23$

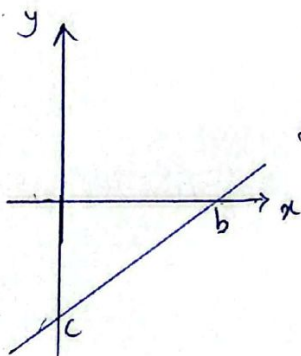
$AB = \sqrt{2a^2 + 7^2} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$

$\sqrt{2}a = 17\sqrt{2} \Rightarrow a = 17$

گزینه ۲ صحیح است

۳- مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

- ۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۷۵ ۳) -۱/۷۵ ۴) -۲/۷۵



$S = \frac{1}{2}bc = c^2 \Rightarrow \frac{1}{2}b = c \Rightarrow b = 2c$

$b^2 + 5b + c = 0 \Rightarrow 4c^2 + 10c + c = 0 \Rightarrow 4c^2 + 11c = 0$

$c(4c + 11) = 0 \Rightarrow 4c = -11 \Rightarrow c = -\frac{11}{4} = -2.75$

گزینه ۴ صحیح است

۴- تابع خطی $f(x) = mx + h$ در هیچ نقطه‌ای با خط $2x - 2y = b$ برخورد ندارد. اگر $f(2) = 2a - 1$ و $f(1-a) = 2$ باشد، مقدار $f(-6)$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۱۱ (۳) ۲ (۲) ۵ (۱) ✓

گزینه ۱ صحیح است

$$y = mx + h \rightarrow m = \frac{2}{-2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{-2}x + h$$

$$y = \frac{2}{-2}x - \frac{b}{-2}$$

$$\begin{cases} f(2) = 2a - 1 \Rightarrow 2 + h = 2a - 1 \Rightarrow h = 2a - 3 \\ f(1-a) = 2 \Rightarrow \frac{2}{-2}(1-a) + h = 2 \Rightarrow \frac{2}{-2}(1-a) + 2a - 3 = 2 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow h = 15 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = \frac{2}{-2}x + 15$ و $f(-6) = \frac{2}{-2}(-6) + 15 = -9 + 15 = 6$

۵- تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دوزوج مرتب $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ و $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $\left[\frac{mn}{5}\right]$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ✓ ۳ (۲) ۴ (۱)

گزینه ۳ صحیح است

$$f(x) = c \Rightarrow c + c = c \cdot c \Rightarrow 2c = c^2 \Rightarrow c = 2 \rightarrow f(x) = 2$$

$$(2n^2 - 7n + 1, -2) \text{ و } (m^2 - 4m + 6, 2n)$$

$$\begin{cases} 2n^2 - 7n + 1 = -2 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0 \rightarrow n = \frac{1}{2} \text{ یا } 3 \\ m^2 - 4m + 6 = 2n \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 2 \rightarrow m(m-4) = 2 \rightarrow m = 2 \text{ یا } 6 \end{cases}$$

بنابراین $\left[\frac{mn}{5}\right] = \left[\frac{4 \times 3}{5}\right] = \left[\frac{12}{5}\right] = 2$

۶- تابع $f(x) = |x| + |-x|$ با دامنه $-2 \leq x \leq 2$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

- ۱ (۴) ✓ ۲ (۳) ۴ (۲) ۶ (۱)

گزینه ۴ صحیح است

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

توجه: $\frac{g}{f} = 3 \Rightarrow g = 3f$

بنابراین $\frac{g}{f} = 3, x \notin \mathbb{Z}$

۷- اگر تابع خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+2}{2}$ ، به ازای همه مقادیر m از نقطه (α, β) بگذرد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

- ۵ (۴) ۵ (۳) $-\frac{2}{2}$ (۲) ✓ $\frac{2}{2}$ (۱)

گزینه ۲ صحیح است

برابر کردن نقطه ثابت رسم خطوط

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - \frac{2}{2} \\ y = -x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 = \alpha \\ y = \frac{1}{2} = \beta \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - \frac{4}{2} \\ y = -x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 = \alpha \\ y = \frac{1}{2} = \beta \end{cases}$$

بنابراین $\beta - \alpha = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

۸- مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 - 2x + a + 2 = 0$ برابر است. طول

رأس سهمی $y = x^2 + (1 - 2a)x - 3$ کدام است؟

3 (۴) $1,5$ (۳) -3 (۲) $-1,5$ (۱) ✓
 $a_1 = \frac{a+2}{a} \Rightarrow a+2 = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\begin{cases} a_2 = 1 \Rightarrow y = x^2 + 2x - 3 & x_1 = \frac{-b}{2a} = -1,5 \\ a_2 = 2 \Rightarrow y = x^2 - 3x - 3 & x_2 = \frac{-b}{2a} = 1,5 \end{cases}$

گزینه ۱ صحیح است. $\Delta < 0$ ریشه ندارد.

۹- راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

$\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) ✓ $\frac{3}{2}$ (۱)

$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$

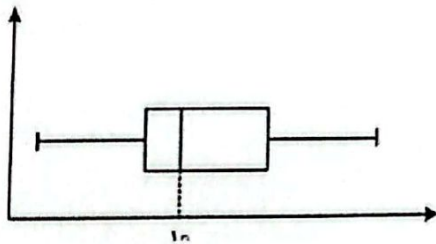
$t_2 - t_1 = \frac{5}{4}$

$\frac{200}{v_2} - \frac{200}{v_1} = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 1.0 \checkmark \\ v_2 = 3.0 \times \end{cases}$

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1.0}{3.0} = \frac{1}{3}$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۰- داده‌های نمودار زیر، اعداد زوج هستند. اگر مقدار ۴ داده بیشتر از میانه باشد، کدام می‌تواند بیشترین مقدار ممکن برای میانگین داده‌های کمتر از میانه باشد؟



$4, 8, 8, 8, 10$

$\frac{4 + 8 + 8 + 8}{4} = 7,5$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۱- اگر $4, 16, 2a - 17, 25$ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز $4, 4, a, 13$ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

$11,5$ (۴) ✓ 11 (۳) $9,5$ (۲) 9 (۱)

$\bar{x} = \frac{4 + 4 + a + 13}{4} = \frac{21 + a}{4}$

$(4 - \frac{21+a}{4})^2 = 4 \Rightarrow \frac{(1-a)^2}{14} = 4 \Rightarrow (1-a)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 1-a = 2 \Rightarrow a = -1 \\ 1-a = -2 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$

$a = 3 \Rightarrow \bar{x} = \frac{4 + 16 + 1 + 25}{4} = \frac{46}{4} = 11,5$

۱۲- با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

۱) $a = b$	
۲) $a^2 = ab$	طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است
۳) $a^2 - b^2 = ab - b^2$	b^2 را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است
۴) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$	طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است
۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$	طرفین تساوی گام ۴ را بر $a - b$ تقسیم کرده است
۶) $b + b = b$	به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است
۷) $\frac{2b}{b} = \frac{b}{b}$	طرفین تساوی گام ۶ را بر b تقسیم کرده است
۸) $2 = 1$	

۳ (۱) ۵ (۲) ✓ ۶ (۳) ۷ (۴)

گزینه ۲ صحیح است چون تقسیم بر صفر صورت گرفته است

۱۳- کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره $[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow \sim p$ است؟
 (۱) $p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
 (۲) $\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
 (۳) ✓ $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$
 (۴) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

گزینه ۳ صحیح است با رسم جدول

۱۴- در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم شود،

نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟
 (۱) ۵۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۷۵ (۴) ✓ ۲۵۰

گزینه ۴ صحیح است
 $\frac{x}{100} \times 100 = y \Rightarrow x = 10y$
 $\frac{y-5}{100} = \frac{x - \frac{2}{3}x}{y} \Rightarrow y \geq 250 \Rightarrow x \geq 2500$
 $\frac{2}{3} \times 2500 \geq 250$

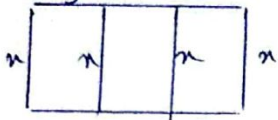
۱۵- سه نفر می خواهند زمین مستطیل شکلی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند، به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصارکشی ۱۹۰ متر باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

$$S(x) = 190x - x^2, 0 < x < 95 \quad (2)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2, 0 < x < 47.5 \quad (1) \checkmark$$

$$S(x) = 190x - x^2, 0 < x < 47.5 \quad (4)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2, 0 < x < 95 \quad (3)$$



$$x + 2y = 190 \Rightarrow y = 95 - 2x > 0 \Rightarrow x < 47.5$$

$$S = xy = x(95 - 2x) = 95x - 2x^2$$

۱۶- یک پارکینگ دارای ۴ درب است، وقتی از یک درب وارد می شوید باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آنها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

$$54 \quad (4)$$

$$84 \quad (3)$$

$$108 \quad (2) \checkmark$$

$$168 \quad (1)$$

$$4 \times 3 = 12 \text{ حسن}$$

$$3 \times 3 = 9 \text{ علی}$$

$$12 \times 9 = 108$$

گزینه ۲ صحیح است

۱۷- خانواده ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟

$$\frac{1}{7} \quad (4)$$

$$\frac{2}{7} \quad (3)$$

$$\frac{10}{21} \quad (2)$$

$$\frac{11}{21} \quad (1) \checkmark$$

$$\frac{\binom{2}{2} \binom{3}{2} + \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{2} + \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{11}{21}$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

گزینه ۱ صحیح است

۱۸- جمله نهم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ ، $a_1 = a_2 = 1$ کدام است؟ (علامت جز صحیح است.)

$$10 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$6 \quad (2) \checkmark$$

$$4 \quad (1)$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = a_1 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 2 + 3 = 5$$

$$n=5 \rightarrow a_5 = 3 + 5 = 8$$

$$n=7 \rightarrow a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13$$

$$n=8 \rightarrow a_8 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21$$

$$n=9 \rightarrow a_9 = 13 + 21 = 34$$

گزینه ۲ صحیح است

۱۹- اگر x, y, z دنباله ای هندسی با جملات نابرابر و $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $\left[\frac{x}{z}\right]$ کدام است؟

$$25 \quad (4) \checkmark$$

$$9 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$3 \quad (1) \checkmark$$

$$xy = x + 5z \Rightarrow y = \frac{x+5z}{x}$$

$$y^2 = xz \Rightarrow \left(\frac{x+5z}{x}\right)^2 = xz$$

$$x^2 + 10xz + 25z^2 = x^2z$$

$$x^2 + 25z^2 - 10xz = 0 \Rightarrow (x-5z)^2 = 0 \Rightarrow x = 5z$$

$$\frac{x}{z} = 5$$

۲۰- نمودار تابع نمایی $f(x) = k + 4^{ax-b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از مبدأ مختصات قطع می کند. مقدار bk کدام است؟

$$x=0 \rightarrow y = k + 4^{-b} \Rightarrow k = y - 4^{-b}$$

$$y=0 \Rightarrow 0 = k + 4^{a(-b)} \Rightarrow k = -4^{-ab}$$

$$k = \frac{4^{ab}}{4^b} = 4^{a(b-1)}$$

$$y = \frac{ax}{4^b} + \frac{1}{4^b} = \frac{ax}{4^b} + 1$$

$$y = 1 \Rightarrow \frac{ax}{4^b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{ax}{4^b} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 2 \Rightarrow \frac{ax}{4^b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{ax}{4^b} = 1 \Rightarrow x = \frac{4^b}{a}$$

$$k = -\frac{4^{ab}}{4^b} = -4^{a(b-1)}$$

$$k = -4^{a(b-1)}$$

$$k = -4^{a(b-1)}$$

گزینه ۳ صحیح است