

۱- اگر $A = \sqrt[3]{27^2 \sqrt[3]{243}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{3}}$ باشد، حاصل $(\Delta + A)^{-\frac{1}{5}}$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

گزینه ۱

$$A = \sqrt[3]{27^2 \sqrt[3]{243}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^3 \sqrt[3]{3^5}} (3)^{-\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^5} (3)^{-\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^8} (3)^{-\frac{7}{3}}$$

$$= 3^{\frac{8}{3}} \times 3^{-\frac{7}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$(\Delta + A)^{-\frac{1}{5}} = (3^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{5}} = (3^{\frac{1}{15}})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

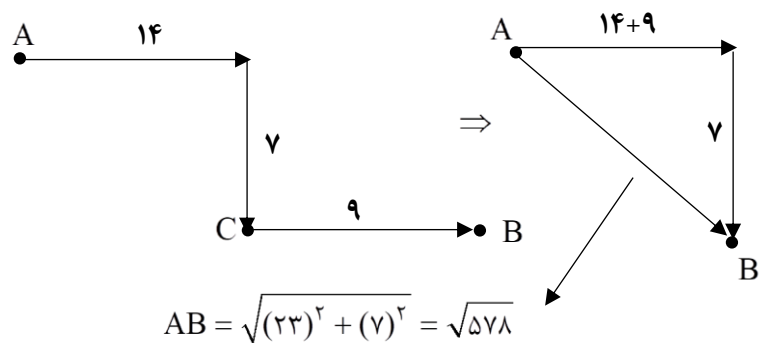
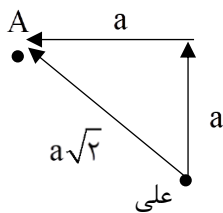
۲- رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول، ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب پیماید. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می‌کنند. مقدار a کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۱ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)



$$\Rightarrow \sqrt{578} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 17\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 17$$

۳- مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد،

مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

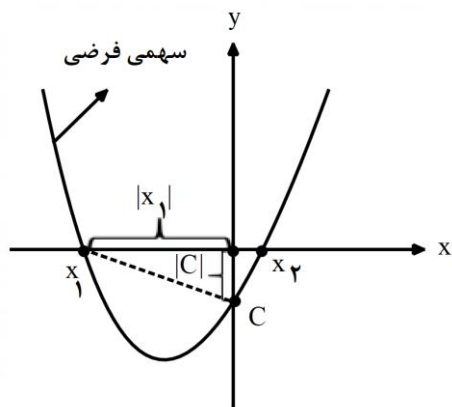
-۲/۷۵ (۴)

-۱/۷۵ (۳)

۲/۷۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

گزینه ۴



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{|x_1| \times |C|}{2} = c^2$$

$$\rightarrow |x_1| = 2c \rightarrow x_1 = \pm 2c$$

$$x_1 = 2c \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} 4c^2 + 10c + c = 0 \rightarrow c(4c + 11) = 0 \rightarrow c = 0, -\frac{11}{4}$$

$$x_1 = -2c \rightarrow 4c^2 - 10c + c = 0 \rightarrow c(4c - 9) = 0 \rightarrow c = 0, \frac{9}{4}$$

۴- تابع خطی $f(x) = mx + h$ در هیچ نقطه‌ای با خط $3x - 2y = b$ برخورد ندارد. اگر $f(2) = 2a - 1$

و $f(1-a) = 2$ باشد، مقدار $f(-6)$ کدام است؟

۸ (۴)

۱۱ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

پاسخ:

زمانی دو خط با هم موازی باشند در هیچ نقطه‌ای با هم برخورد ندارند.

$$3x - 2y = b \Rightarrow 2y = 3x - b \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = mx + h \Rightarrow m = \frac{3}{2} \quad f(2) = 2a - 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right) \times 2 + h = 2a - 1$$

$$\Rightarrow 3 + h = 2a - 1 \Rightarrow a = 2 + \frac{h}{2} \quad f(1-a) = f\left(1 - 2 - \frac{h}{2}\right) = f\left(-1 - \frac{h}{2}\right) = 2$$

$$\Rightarrow f\left(-1 - \frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(-1 - \frac{h}{2}\right) + h = 2 \Rightarrow h = 14 \quad f(-6) = \left(\frac{3}{2}\right) \times (-6) + 14 = 5$$

۵- تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب

$$\left[\frac{mn}{5} \right] \text{ مقدار } (2n^2 - 7n + 1, -f(m)) \text{ و } (m^2 - 4m + 6, nf(n)) \text{ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار}$$

کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

پاسخ

$$f(x) = c \text{ ثابت } f(m) + f(n) = f(m)f(n) \Rightarrow c + c = c^2 \Rightarrow c^2 - 2c = 0$$

$$\Rightarrow c(c-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 & \text{غ ق ق} \\ c=2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$2n^2 - 7n + 1 = -f(m) = -2 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0 \Rightarrow n = \frac{7 \neq 5}{4} = \begin{matrix} \nearrow \text{ق ق ۳} \\ \searrow \frac{1}{2} \text{ ق ق ۲} \end{matrix}$$

$$m^2 - 4m + 6 = nf(n) = 3 \times 2 = 6 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \begin{matrix} \nearrow m=0 \text{ x} \\ \searrow m=4 \text{ ✓} \end{matrix}$$

$$\left[\frac{mn}{5} \right] = \left[\frac{4 \times 3}{5} \right] = 2$$

۶- تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه

صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

- ۱ (۶) ۲ (۴) ۳ (۲) ۴ (صفر)

پاسخ گزینه ۴

$$f(x) = [x] + [-x], -3 \leq x \leq 3$$

$$g(x) = k \text{ تابع ثابت}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f = 0\}$$

$$= \{-3 \leq x \leq 3\} \cap \mathbb{R} - \left\{ x \mid \underbrace{[x] + [-x]}_{x \in \mathbb{Z}} = 0 \right\}$$

$$= \{-3 \leq x \leq 3\} - \{x \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{-3 < x < 3\} - \{x \in \mathbb{Z}\}$$

هیچ نقطه صحیحی در دامنه وجود ندارد پس جواب، گزینه ۴ است.

۷- اگر تابع خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2}$ ، به ازای همه مقادیر m از نقطه (α, β) بگذرد، مقدار

$\beta - \alpha$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (1) \qquad -\frac{3}{2} \quad (2) \qquad \frac{5}{2} \quad (3) \qquad -\frac{5}{2} \quad (4)$$

پاسخ

$$\text{خطی } f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2} \text{ از نقطه } (\alpha, \beta) \Rightarrow \beta = (1-2m)\alpha - \frac{2m+3}{2} = \alpha - 2m\alpha - m - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = -m(2\alpha+1) + \alpha - \frac{3}{2} \Rightarrow 2\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \alpha - \frac{3}{2} = \beta \Rightarrow \beta = -2$$

$$\beta - \alpha = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

۸- مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$

برابر است. طول رأس سهمی $y = x^2 + (1-2a)x - 3$ کدام است؟

$$-1/5 \quad (1) \qquad -3 \quad (2) \qquad 1/5 \quad (3) \qquad 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-a)}{1} = a$$

$$ax^2 - 4x + a + 2 = 0 \rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{a+2}{a}$$

$$\rightarrow S = P \Rightarrow a = \frac{a+2}{a} \Rightarrow a^2 = a+2$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 - a - 2}_{\text{تجزیه با جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

تجزیه با جمله مشترک

ولی به ازای $a = 2$ معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ جواب ندارد پس $a = -1$ قابل قبول است.

در سهمی
 $y = x^2 + 3x - 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2} = -1.5$ باشد. اگر $a = -1$

۹- راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر

ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو

پس از کاهش کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{6}{5}$

$$\frac{5}{6}h = 50 \text{ min}$$

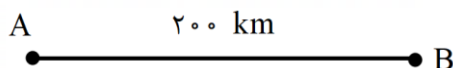
پاسخ: گزینه ۲

$$x = vt \Rightarrow 200 = (v - 20)kt + \frac{5}{6} = \cancel{vt} + \frac{5}{6}v - 20t - \frac{50}{3}$$

$$x = vt \Rightarrow 200 = vt \Rightarrow t = \frac{200}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}v - 20t = \frac{50}{3} \Rightarrow \frac{5}{6}v - 20\left(\frac{200}{v}\right) = \frac{50}{3} \Rightarrow 5v^2 - 24000 = 100v$$

$$\Rightarrow v^2 - 20v - 4800 = 0 \Rightarrow (v - 80)(v + 60) = 0 \Rightarrow v = 80 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$$



بار اول $\rightarrow V_1, t_1$ $t_2 = t_1 + \frac{50}{60}$

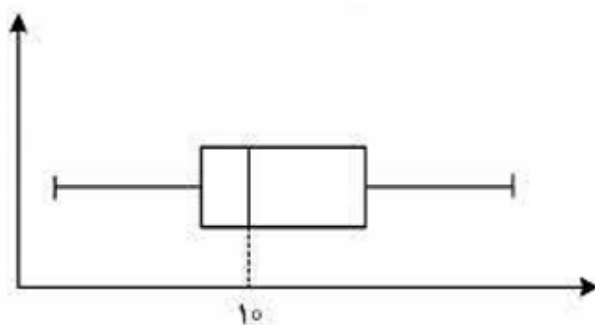
بار دوم $\rightarrow V_2 = 20, t_2$ $\frac{x_2}{v_2} = \frac{x_1}{v_1} + \frac{50}{60} \rightarrow \frac{400}{v_2 - 20} = \frac{400}{v_1} + \frac{50}{60}$

$$\rightarrow 2400V_1 = 2400V_2 - 48000 + v_2^2 - 20v_2 \rightarrow v_1^2 - 20v_1 - 4800 = 0$$

$$\rightarrow (v_1 - 80)(v_1 + 60) = 0 \rightarrow v_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

سرعت اول $\frac{v_1}{v_2 - 20} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$

۱۰- داده‌های نمودار زیر، اعداد زوج هستند. اگر مقدار ۴ داده بیشتر از میانه باشد، کدام می‌تواند بیشترین مقدار ممکن برای میانگین داده‌های کمتر از میانه باشد؟



(۱) ۵

(۲) ۷/۵

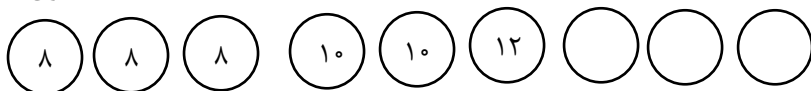
(۳) ۸/۵

(۴) ۹

پاسخ:

با بررسی حالت‌های زیر خواهیم داشت:

(حالت اول)



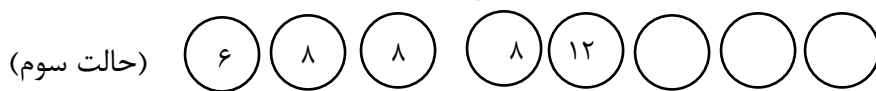
دقت شود سؤال میانگین داده‌های \Rightarrow در گزینه‌ها وجود ندارد. $\Rightarrow \frac{8+8+8}{3} = 8$ میانگین داده‌های کمتر

از میانه

کمتر از میانه را می‌خواهد، بنابراین اگر داده‌ای با میانه برابر است نباید در میانگین لحاظ شود.



کمتر از میانه میانگین داده‌های $= \frac{6+8+8+8}{4} = 7/5$



کمتر از میانه میانگین داده‌های $= \frac{6+8+8+8}{4} = 7/5$

چون Q_1, Q_2, \min طبق نمودار با هم متفاوت هستند و $Q_2 = 10$ است باید داده‌ها را به شکل زیر فرض

کنیم:

$$\underbrace{6, 8, 8, 8}_{\bar{x} = \frac{30}{4} = 7/5}, \underbrace{10, 12, 14, 16, 18}_{Q_2}$$

۱۱- اگر ۲۵، ۱، ۲a-۱۶، ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز ۱۳، a، ۴، ۶ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۹/۵ (۳) ۱۱ (۴) ۱۱/۵

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{۶+۴+a+۱۳}{۴} = \frac{۲۳+a}{۴} \quad \left(\frac{۲۳+a}{۴} - ۶\right)^۲ = \left(\frac{a-۱}{۴}\right)^۲$$

$$\left(\frac{۲۳+a}{۴} - ۴\right)^۲ = \left(\frac{۷+a}{۴}\right)^۲ \quad \left(\frac{۲۳+a}{۴} - a\right)^۲ = \left(\frac{۲۳-۳a}{۴}\right)^۲$$

باتوجه مقادیر مربع انحراف از میانگین می‌توان فهمید: $a = ۹$

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + (x_۳ - \bar{x})^۲ + (x_۴ - \bar{x})^۲}{۴} = \frac{۴+۱۶+۱+۲۵}{۴} = ۱۱/۵$$

۱۲- با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

۱) $a = b$

۲) $a^۲ = ab$ طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است

۳) $a^۲ - b^۲ = ab - b^۲$ $b^۲$ را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است.

۴) $(a-b)(a+b) = (a-b)b$ طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است.

۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$ طرفین تساوی گام ۴ را بر $a-b$ تقسیم کرده است.

۶) $b+b = b$ به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است.

۷) $\frac{۲b}{b} = \frac{b}{b}$ طرفین تساوی گام ۷ را بر b تقسیم کرده است.

۸) $۲ = ۱$

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲

از آنجایی که $a = b$ است، پس $a - b = 0$ می‌شود و در گام پنجم نمی‌توانیم عبارت را بر صفر تقسیم کنیم.

۱۳- کدام گزاره، هم ارز منطقی گزاره $[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow \sim p$ است؟

$$(1) \quad p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)) \quad (2) \quad \sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$$

$$(3) \quad (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \quad (4) \quad (p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $p \Rightarrow q$ هم ارز $\sim p \vee q$ است.

همچنین می‌دانیم $p \vee (q \wedge r)$ هم ارز $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ است.

همچنین می‌دانیم اعمال نقیض ($\sim p$ را به p) و (\vee را به \wedge) و (\wedge را به \vee) تبدیل می‌کند.

پس ابتدا از هم ارزی‌های گزاره‌های شرطی شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)}{\sim (q \vee r) \vee (q \wedge r)} \right) \Rightarrow p \\ & \sim (\wedge)VP \equiv ((q \vee r) \wedge \underbrace{\sim (q \wedge r)}_{\sim q \vee \sim r}) \vee p \\ & \equiv (p \vee (q \vee r)) \wedge (p \vee (\sim q \vee \sim r)) \end{aligned}$$

حال نقیض گزاره را می‌نویسیم:

$$(\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

توجه کنید که $(\sim p) \equiv p \sim$ است.

۱۴- در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از

تعداد بیکارها کم شود، نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ

بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟

۲۵۰ (۴)

۱۷۵ (۳)

۱۲۵ (۲)

۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

جمعیت بیکار
نرخ بیکاری $\frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}}$

فرض می‌کنیم جمعیت بیکار m باشد، با n شغل، $\frac{20}{100}$ از بیکارها کم می‌شود، پس:

$$\frac{n}{m} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow n = \frac{1}{5}m$$

اگر نرخ بیکاری اولیه k باشد، داریم:

$$k = \frac{m}{1500} \rightarrow k - \frac{5}{100} = \frac{m-n}{1500} \Rightarrow \frac{m}{1500} - \frac{5}{100} = \frac{m}{1500} - \frac{n}{1500}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{1500} = \frac{5}{100} \Rightarrow n = \frac{5}{100} \times 1500 = 75, \quad \frac{1}{5}m = 75 \Rightarrow m = 375$$

پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{m}{1500} = \frac{375}{1500} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} \text{ کاهش باید} \\ \frac{1}{3} \text{ یعنی } \frac{1}{3} \text{ شود} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{3}k = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{m-n-x}{1500}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 \times 4} = \frac{375 - 75 - x}{1500} \Rightarrow 300 - x = \frac{1500}{3 \times 4} = 125$$

$$\Rightarrow x = 300 - 125 = 175$$

۱۵- سه نفر می‌خواهند زمین مستطیل شکلی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی

کنند، به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصارکشی ۱۹۰ متر

باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

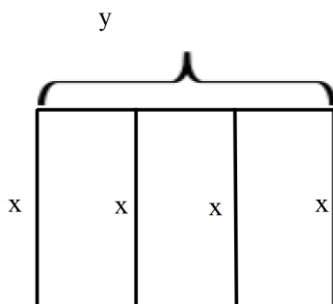
$$S(x) = 190x - x^2 \quad \text{و} \quad 0 < x < 95 \quad (2)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2 \quad \text{و} \quad 0 < x < 47/5 \quad (1)$$

$$S(x) = 190x - x^2 \quad \text{و} \quad 0 < x < 47/5 \quad (4)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2 \quad \text{و} \quad 0 < x < 95 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ی ۱

اگر طول زمین را y و عرض آن را x در نظر بگیریم، برای طول حصار کشیده شده خواهیم داشت:

$$4x + 2y = 190 \xrightarrow{\div 2} 2x + y = 95 \Rightarrow y = 95 - 2x$$

$$\text{مساحت زمین} = \text{عرض} \times \text{طول} = y \times x = (95 - 2x)x$$

$$\Rightarrow S(x) = 95x - 2x^2$$

توجه کنید که مساحت زمین عددی مثبت است پس:

$$x(95 - 2x) > 0 \xrightarrow{x > 0} 95 - 2x > 0 \Rightarrow 2x < 95$$

$$\Rightarrow x < \frac{95}{2} = 47.5 \Rightarrow 0 < x < 47.5$$

۱۶- یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می شوید باید از درب دیگری خارج

شوید. به چند طریق حسن و علی می توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آن ها درب

ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

۵۴ (۴)

۸۴ (۳)

۱۰۸ (۲)

۱۶۸ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲

برای ورود و خروج هر یک 4×3 حالت وجود دارد: از هر یک از ۴ در می توانند وارد شوند، و از ۳ در باقیماندهخارج شوند. پس برای هر دو آن ها در کل $12 \times 12 = 144$ حالت داریم.

حالت هایی که ورود یا خروج آن ها یکسان است: هر دو از یک در وارد هر دو از یک در خارج هر دو از یک در وارد هر دو از دو در متفاوت خارج

$$\binom{4}{1} \binom{3}{1} = 4 \times 3 = 12$$

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12$$

پس در $۱۲+۱۲+۱۲=۳۶$ حالت درب ورود یا خروج آن‌ها یکسان است، پس تعداد حالت‌های مطلوب

$۱۴۴-۳۶=۱۰۸$ حالت است.

هر دو از در متفاوت وارد
هر دو از یک در خارج

$$\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = \frac{4 \times 3}{1} \times 2 = 12$$

۱۷- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای

این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته

باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟

$$\frac{1}{7} \quad (۴) \qquad \frac{3}{7} \quad (۳) \qquad \frac{10}{21} \quad (۲) \qquad \frac{11}{21} \quad (۱)$$

پاسخ:

(۳) دختر و دو والدین) یا (۲) دختر و دو والدین و یک پسر) یا (۳) دختر و یکی از والدین و یک پسر)

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{3} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{2} \times \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{5}} = \frac{2 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 3 + 1 \times 1}{21} = \frac{11}{21}$$

۱۸- جمله نهم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_{n-\frac{n}{2}} + a_{n-\frac{n}{3}}$ ، $a_1 = a_2 = 1$ کدام است؟ [علامت جزء

صحیح است.)

$$۱۰ \quad (۴) \qquad ۸ \quad (۳) \qquad ۶ \quad (۲) \qquad ۴ \quad (۱)$$

پاسخ:

در رابطه $a_{n+1} = a_{n-\frac{n}{2}} + a_{n-\frac{n}{3}}$ جای n به ترتیب ۲، ۳، ... را قرار می‌دهیم:

$$n = 2: a_3 = a_{2-\frac{2}{2}} + a_{2-\frac{2}{3}} = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$n = 3: a_4 = a_{3-\frac{3}{2}} + a_{3-\frac{3}{3}} = a_2 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$n = 4 : a_{\Delta} = a_{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}} + a_{\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}} = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 5 : a_{\Gamma} = a_{\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}} + a_{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}} = a_3 + a_4 = 2 + 2 = 4$$

$$n = 6 : a_{\Upsilon} = a_{\begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}} + a_{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} = a_4 + a_5 = 2 + 2 = 4$$

$$n = 7 : a_{\Lambda} = a_{\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}} + a_{\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix}} = a_5 + a_{\Delta} = 2 + 3 = 5$$

$$n = 8 : a_{\Omega} = a_{\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}} + a_{\begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix}} = a_6 + a_{\Gamma} = 2 + 4 = 6$$

۱۹- اگر x, y, z دنباله‌ای هندسی با جملات نابرابر و $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $\left[\frac{x}{z} \right]$

کدام است؟

۲۵ (۴)

۹ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ:

$$\text{هندسی } x, y, z \Rightarrow y^2 = xz \quad \text{حسابی } x, 3y, 5z \Rightarrow 6y = x + 5z$$

$$\Rightarrow 36y^2 = x^2 + 25z^2 + 10xz \Rightarrow x^2 + 25z^2 - 26xz = 0 \Rightarrow (x - z)(x - 25z) = 0$$

xy

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z & \text{غ ق ق} \\ x = 25z \Rightarrow \frac{x}{z} = 25 \Rightarrow \left[\frac{x}{z} \right] = 25 \end{cases}$$

۲۰- نمودار تابع نمایی $f(x) = k + 4^{ax-b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از

مبدأ مختصات قطع می‌کند. مقدار bk کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = k + 4^{ax-b}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{---} f(0) = k + 4^{-b} = 2 \quad (*) \\ x = 0, f(0) = 2 \\ \text{تقاطع با محور طولها} \\ \text{---} f(2) = k + 4^{2a-b} = 0 \Rightarrow k = -4^{2a-b} \\ f(2)=0 \end{array} \right.$$

$$\text{---} \text{جایگذاری در } (*) \rightarrow -4^{2a-b} + 4^{-b} = 2 \Rightarrow 4^{-b}(1 - 4^{2a}) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 4^{2a}}{4^b} = 2 \Rightarrow 1 - 4^{2a} = 2 \times 4^b$$

$$\Rightarrow 1 - (2^2)^{2a} = 2 \times (2^2)^b \Rightarrow 1 - 2^{4a} = 2^{1+2b}$$

مجموع دو عدد مثبت یک شده است، پس هر دو عدد باید کمتر از یک باشند، چون پایه‌ی توان آن‌ها ۲ است،

می‌توان در نظر گرفت که هر کدام برابر با $2^{-1} = \frac{1}{2}$ است، پس:

$$1 + 2b = -1 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{---} \text{جایگذاری در } (*) \rightarrow k + 4^{-(-1)} = 2 \Rightarrow k = 2 - 4 = -2$$

$$\Rightarrow bk = 2$$