

۱- یک دنباله با جملات غیر صفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r + d$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

گزینه ۳ صحیح است.

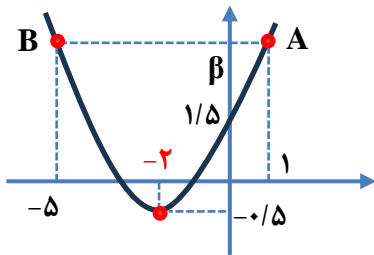
دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله اعداد ثابت a, a, a, \dots است که $d = 0$ و $r = 1$ بوده و $r + d = 1$ است.

۲- نقاط $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{4}$ است. اگر سهمی محور y ها را

در نقطه‌ای به عرض $\frac{3}{4}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۱

گزینه ۱ صحیح است.



$$\text{طول رأس } x = \frac{-5+1}{2} = -2 \longrightarrow f(x) = a(x+2)^2 - \frac{1}{4}$$

$$(0, \frac{3}{4}) \in f(x) \longrightarrow \frac{3}{4} = a(0+2)^2 - \frac{1}{4} \longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(1, \beta) \in f(x) \longrightarrow \beta = \frac{1}{2}(1+2)^2 - \frac{1}{4} \longrightarrow \beta = 4$$

۳- برای مجموعه‌های $A = \left\{ \frac{x}{2}, \frac{y}{3}, 5 \right\}$ و $B = \{z, t, 1, 4\}$ ، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. در چند حالت

$x + y + z + t > 20$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \rightarrow A = B = \{1, 4, 5\} \longrightarrow$$

گزینه ۴ صحیح است.

$\frac{x}{2} \longrightarrow$	۱	۱	۱	۴
$\frac{y}{3} \longrightarrow$	۴	۴	۴	۱
$z \longrightarrow$	۵	۵	۴	۵
$t \longrightarrow$	۵	۴	۵	۵
$x + y + z + t$	۲۴	۲۳	۲۳	۲۱

۴- با توجه به جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب زیر می‌تواند هم‌ارز منطقی گزاره X باشد؟

p	q	r	X
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$(1) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \sim r))$$

$$(2) (\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge r))$$

$$(3) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

$$(4) ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim((p \wedge r) \Rightarrow q)]$$

گزینه ۱ صحیح است.

به کمک سطر ۲ در جدول، گزینه ۲ حذف می‌شود.

به کمک سطر ۴ در جدول، گزینه ۳ حذف می‌شود.

به کمک سطر ۳ در جدول، گزینه ۴ حذف می‌شود.

۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ و $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشه بزرگ‌تر

معادله است؟

(۴) -۹

(۳) ۹

(۲) -۳

(۱) ۳

گزینه ۲ صحیح است.

$$\alpha + \beta = \frac{-(-12)}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{\beta = 4 - \alpha} \quad (1)$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7 \xrightarrow{(1)} 2\alpha^2 + (4 - \alpha)^2 - 4\alpha = 7 \Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{a = -9}$$

$$\frac{a}{\alpha_{\max}} = \frac{-9}{3} = -3$$

۶- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{40}{9}$ کدام است؟

۴/۵ (۴)

۴ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^2(2-x)^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow 40x^2(x-2)^2 - 18x(x-2) - 36 = 0 \xrightarrow{x(x-2)=t}$$

$$40t^2 - 18t - 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 36 \times 160}}{80} \Rightarrow \begin{cases} t = x(x-1) = \frac{6}{5} \Rightarrow x^2 - x - \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow S_1 = 1 \\ t = x(x-1) = \frac{-3}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow S_2 = 1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ۴ ریشه برابر ۲ است.

۷- نقطه $(-6, 3)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x - 3y = 4$ و $x + 4y = -3$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر با اضلاع کدام است؟

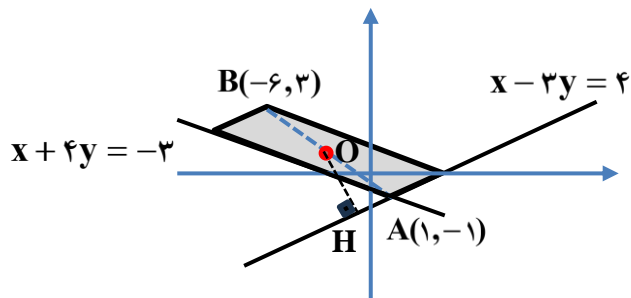
$$\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{65}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{19}{\sqrt{10}} \quad (۲)$$

$$\frac{19}{2\sqrt{10}} \quad (۱)$$

گزینه ۱ صحیح است.



$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x + 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(1, -1)$$

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

$$OH = \frac{\left| -\frac{5}{2} - 3 - 4 \right|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{2\sqrt{10}}$$

۸- وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $12 - 10x = 5y$ را در نقطه‌ای به عرض $7/2$ قطع می‌کند.

مقدار $f\left(\frac{4}{m}\right)$ کدام است؟

$$2\sqrt{15} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{15} \quad (۳)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

گزینه ۲ صحیح است.

$$5y - 10x = 12 \xrightarrow{y=7/2} x = 2/4 \Rightarrow A'(2/4, 7/2) \in f^{-1}(x) \Rightarrow A(7/2, 2/4) \in f(x) \Rightarrow$$

$$2/4 = \sqrt{7/2} \sqrt{7/2m - 1} \rightarrow 2/4 \times 2/4 = 7/2(7/2m - 1) \Rightarrow 0/8 = 7/2m - 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{m = \frac{1}{4}} \rightarrow f\left(\frac{4}{m}\right) = f(16) = \sqrt{16} \sqrt{\frac{1}{4} \times 16 - 1} \Rightarrow \boxed{f(16) = 4\sqrt{3}}$$

۹- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از

چند روز، $\frac{1}{y}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_y 3 = 1/6$ و $\log_y 3 = 0/6$)

۱۲۶ (۴)

۵۶ (۳)

۲۸ (۲)

۸ (۱)

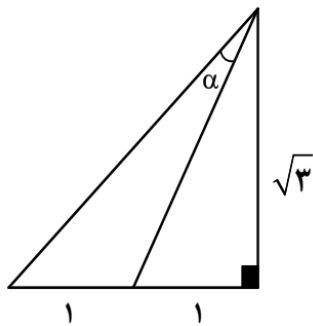
گزینه ۳ صحیح است.

$$\log_3^8 = \frac{1}{\log_8^3} = \frac{1}{\frac{1}{3} \times \log_3^3} = \frac{15}{8} \rightarrow \boxed{\log_3^8 = \frac{15}{8}}$$

۱۲/۵ درصد برابر $\frac{12/5}{100} = \frac{1}{8}$ است. اگر جرم اولیه را M فرض کنیم، داریم: $\left(\frac{y}{8}\right)^t \times M = \left(\frac{y}{8}\right)^t \times M$ جرم باقیمانده

$$\left(\frac{y}{8}\right)^t \times M = \frac{1}{y} M \Rightarrow \left(\frac{y}{8}\right)^t = \frac{1}{y} \xrightarrow{\log_y} \frac{t}{y} \log_y^y = \log_y^{y^{-1}} \rightarrow \frac{t}{y} (\log_y^y - \log_y^1) = -\log_y^y \rightarrow$$

$$\frac{t}{y} \left(\frac{10}{6} - \frac{15}{8}\right) = -\frac{10}{6} \rightarrow \frac{t}{y} \left(-\frac{10}{48}\right) = -\frac{10}{6} \rightarrow \boxed{t = 56}$$



۱۰- در شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

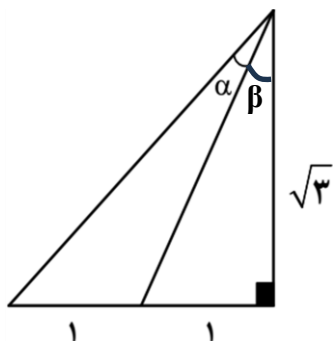
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

گزینه ۴ صحیح است.



$$\tan \alpha = \tan((\alpha + \beta) - \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}}$$

۱۱- در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

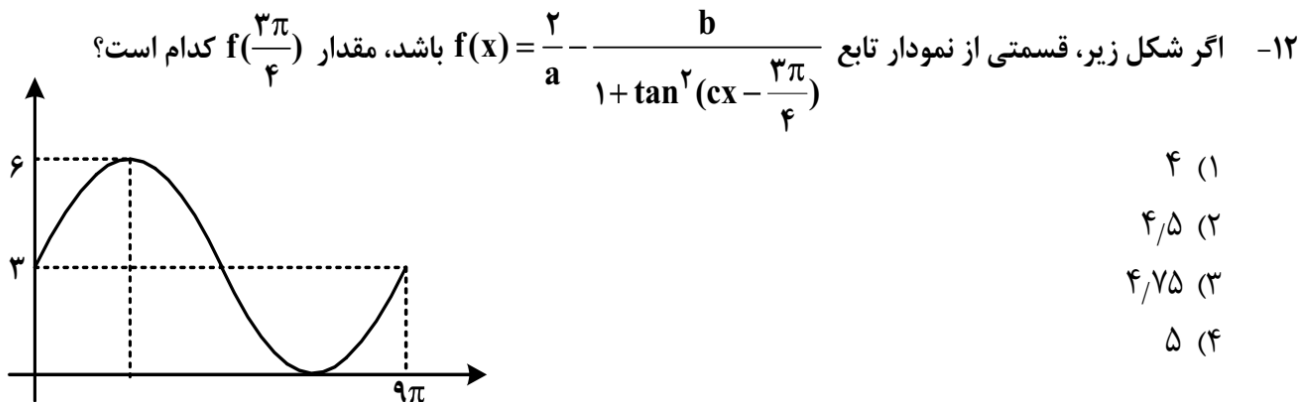
$$\frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۱)$$

گزینه ۱ صحیح است.

$$S = 15 = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 150^\circ, \alpha_2 = 30^\circ \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$



$$۴ \quad (۱)$$

$$۴/۵ \quad (۲)$$

$$۴/۷۵ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۴)$$

گزینه ۲ صحیح است.

با استفاده از روابط مثلثاتی $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$ و $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ داریم:

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(cx - \frac{3\pi}{4})} = \frac{2}{a} - b \cos^2(cx - \frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{a} - b(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(cx - \frac{3\pi}{4}))$$

$$f(x) = \frac{-b}{2} \sin 2cx + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{b}{2} \sin(-2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \begin{cases} b > 0 \\ -2c > 0 \Rightarrow c < 0 \end{cases}$$

سینوس به شکل درست صعودی شروع شده

$$T = \frac{2\pi}{|2c|} = 9\pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{9} \xrightarrow{c < 0} c = -\frac{1}{9}; y_{\max} = \left| \frac{-b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \xrightarrow{b > 0} \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$y_{\min} = -\left| \frac{-b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{b > 0} -b + \frac{2}{a} = 0 \quad (۱) \Rightarrow b = 6$$

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{2}{9}x\right) + 3 \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}\right) + 3 \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4/5$$

۱۳- در معادله مثلثاتی $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1$ اگر $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام

است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) -3

گزینه ۴ صحیح است.

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \quad (1)$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}; \quad \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1 \xrightarrow{(1), (2)} 2 + m \times \frac{1}{3} = 1 \longrightarrow m = -3$$

۱۴- تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ۱ صحیح است.

$$2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow m < \frac{9 - \sqrt{97}}{4}, m > \frac{9 + \sqrt{97}}{4} \quad (1), \quad m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (2)$$

$$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4) \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} 2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4 \rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0 \rightarrow$$

$$(m + 1)(m - 6) < 0 \longrightarrow m \in (-1, 6) \quad (3),$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \rightarrow m \in (-1, \frac{9 - \sqrt{97}}{4}) \cup (\frac{9 + \sqrt{97}}{4}, 6) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5$$

در بازه بدست آمده، فقط عدد ۵ عددی صحیح است.

۱۵- اگر f تابع هموگرافیک و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می تواند محل تقاطع مجانب های

تابع f باشد؟

(۴) $(1, 2)$

(۳) $(-1, 1)$

(۲) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

(۱) $(\sqrt{\pi}, \pi)$

گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{dx-b}{-cx+a}} = \frac{-ac}{cd} = \frac{-a}{d}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{dx-b}{-cx+a}}{\frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{-dc}{ac} = \frac{-d}{a}$$

$$\frac{-a^2}{d} = \frac{-d}{a} \rightarrow a^2 = d^2 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \xrightarrow{a=d} \Rightarrow \omega(-\frac{d}{c}, \frac{d}{c}) \\ x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \xrightarrow{a=-d} \Rightarrow \omega(\frac{d}{c}, \frac{d}{c}) \end{cases}$$

با توجه به نقطه تلاقی مجانب های بدست آمده، نقطه ای قبول است که یا طول و عرض برابر داشته باشند و یا طول و عرض قرینه که فقط گزینه ۳ چنین شرایطی دارد.

۱۶- برای مقدار مشخص k ، تابع $f(x) = \begin{cases} |[-x] - x| & \text{فرد } [x] \\ k - x + [x] & \text{زوج } [x] \end{cases}$ در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است. کدام مورد

در خصوص n صحیح است؟ ($k, n \in \mathbb{N}$)

(۱) برای هیچ مقداری از n ، پیوسته نیست.

(۳) n فرد

(۴) n زوج

(۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.

گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{فرد } n \Rightarrow [n^+] = n, [n^-] = n-1, [-n^+] = -n, [-n^-] = -n-1$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} |[-x] - x| = |(-n-1) - n| = 2n+1 = \lim_{x \rightarrow n^-} k - x + [x] = k - n + (n-1) = k-1 \Rightarrow \boxed{k = 2n+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -n^+} |[-x] - x| = |(n-1) + n| = 2n-1 = \lim_{x \rightarrow -n^-} k - x + [x] = k + n + (-n-1) = k-1 \Rightarrow \boxed{k = 2n}$$

با توجه به مقادیر مختلف که برای k بدست آمد، پس برای n های فرد پیوسته نیست.

$$\text{زوج } n \Rightarrow [n^+] = n, [n^-] = n-1, [-n^+] = -n-1, [-n^-] = -n$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} |[-x] - x| = |-n - n| = 2n = \lim_{x \rightarrow n^+} k - x + [x] = k - n + n = k \Rightarrow \boxed{k = 2n}$$

$$\lim_{x \rightarrow -n^+} k - x + [x] = k + n + (-n) = k = \lim_{x \rightarrow -n^-} |[-x] - x| = |n + n| = 2n \Rightarrow \boxed{k = 2n}$$

با توجه به مقادیر مساوی که برای k بدست آمد، پس برای n های زوج پیوسته است.

۱۷- اگر $f(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$ و $f(x) = xg(x) - 2x + 5$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۷ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x) = xg(x) - 2x + 5 \longrightarrow g(x) = \frac{\frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} + 2x - 5}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{\Delta \cos x + 2x - 5 - 2x \sin x + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos x + 2x - 5 - 2x \sin x + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\Delta \sin x + 2 - 2(\sin x + x \cos x) + 5 \cos x}{1 - (\sin x + x \cos x)} = \boxed{7}$$

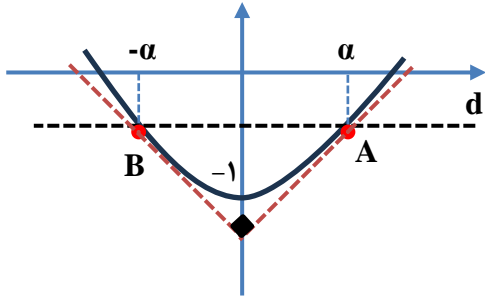
۱۸- خط d موازی محور x ها، سهمی $y = x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع می کند و مماس های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض های این دو نقطه کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$



گزینه ۱ صحیح است.

مشتق تابع $f'(x) = 2x$ است.

نقاط تماس را $A(\alpha, \alpha^2 - 1)$ و $B(-\alpha, \alpha^2 - 1)$ فرض می کنیم. چون مماس های رسم شده در این نقاط، بر هم عمود هستند داریم:

$$f'(\alpha) \times f'(-\alpha) = -1 \rightarrow (2\alpha) \times (-2\alpha) = -1 \rightarrow 4\alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{2}$$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح k ، نقطه عطف منحنی $y = \frac{k}{4}x^3 - (k+2)x^2$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار

دارد؟

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\text{بیش از } ۲ \quad (۱)$$

گزینه ۳ صحیح است.

$$y = \frac{k}{4}x^3 - (k+2)x^2 \rightarrow y' = \frac{3k}{4}x^2 - 2(k+2)x \rightarrow y'' = \frac{3k}{2}x - 2(k+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2(k+2)}{3k} < 0$$

$$k \in (-2, 0) \quad (۱)$$

$$y < 0 \Rightarrow f\left(\frac{2(k+2)}{3k}\right) < 0 \Rightarrow k\left(\frac{2(k+2)}{3k}\right)^3 - (k+2)\left(\frac{2(k+2)}{3k}\right)^2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{2(k+2)}{3k}\right)^2 \left(k\left(\frac{2(k+2)}{3k}\right) - (k+2)\right) < 0 \Rightarrow \left(k\left(\frac{2(k+2)}{3k}\right) - (k+2)\right) < 0 \Rightarrow \frac{-(k+2)}{3} < 0 \Rightarrow k+2 > 0 \rightarrow k > -2 \quad (۲) ; (۱) \cap (۲) = (-2, 0)$$

فقط ۱- در بازه نهایی عددی صحیح است.

۲۰- کمترین فاصلہ نقاط واقع بر منحنی $y = -\sqrt{-x - [x^2]}$ از خط $x - y - 1 = 0$ کدماں است؟

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} \quad (۴)$$

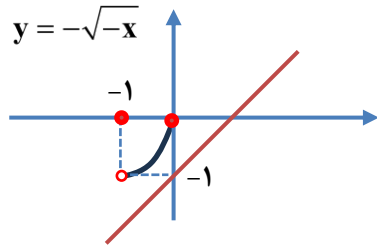
$$\frac{3\sqrt{2}}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

گزینه ۴ صحیح است.

$$-x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow -x \geq [x^2] \rightarrow D_f = [-1, 0] \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = -1, 0 \end{cases}$$



$$A(x, -\sqrt{-x}) \xrightarrow{x-y-1=0} AH = \frac{|x + \sqrt{-x} - 1|}{\sqrt{1+1}} \rightarrow AH' = \frac{|1 + \frac{-1}{2\sqrt{-x}}|}{\sqrt{2}} = 0$$

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \rightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}; AH = \frac{|(-\frac{1}{4}) + \sqrt{\frac{1}{4}} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

۲۱- ۴ کتاب متمایز با عنوان ریاضی و ۳ کتاب متمایز با عنوان فیزیک را به چند طریق می توان روی هم قرار داد به طوری که وقتی آنها را یکی یکی برمی داریم تا در گوشه دیگر اتاق روی هم بچینیم، ترتیب عنوان کتابها (ریاضی و فیزیک) مانند قبل باشد؟

$$۱۴۴ \quad (۴)$$

$$۳۱۵ \quad (۳)$$

$$۴۳۲ \quad (۲)$$

$$۶۳۰ \quad (۱)$$

گزینه ۲ صحیح است.

ریاضی ۱	ریاضی ۱	فیزیک ۱
فیزیک ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۱
ریاضی ۲	فیزیک ۱	ریاضی ۲
فیزیک ۲	فیزیک ۲	فیزیک ۲
ریاضی ۳	فیزیک ۳	ریاضی ۳
فیزیک ۳	ریاضی ۳	ریاضی ۴
ریاضی ۴	ریاضی ۴	فیزیک ۳

$$۴! \times ۳! + ۴! \times ۳! + ۴! \times ۳! = ۴۳۲$$

۲۲- اگر $P(A-B) = \frac{3}{7}$ و $P(B-A) = \frac{1}{7}$ باشد، کمترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

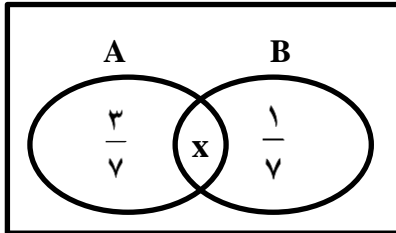
$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

گزینه ۱ صحیح است.



$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + \frac{3}{7}}{x + \frac{1}{7}} = \frac{7x + 3}{7x + 1} = 1 + \frac{2}{7x + 1}$$

هنگامی $\frac{P(A)}{P(B)} = 1 + \frac{2}{7x + 1}$ کمترین می شود که کسر $\frac{2}{7x + 1}$ کمترین شود. پس باید مخرج کسر یعنی $x + 7$ حداکثر شود.

از این رو مقدار x که اشتراک دو مجموعه است باید حداکثر شود و داریم: $x = 1 - (\frac{3}{7} + \frac{1}{7}) = \frac{3}{7}$

$$\min\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = 1 + \min\left(\frac{2}{7x + 1}\right) = 1 + \frac{2}{7 \times \frac{3}{7} + 1} = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\min\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = \frac{3}{2}}$$

۲۳- اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را در دسته جدید قرار می دهیم. این روند تا جایی ادامه می یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و غیر تکراری باشند. میانگین داده های دسته جدید کدام است؟

$$50,5 \quad (4)$$

$$50 \quad (3)$$

$$25,5 \quad (2)$$

$$25 \quad (1)$$

گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به شرایط سوال، یک عدد زوج و یک عدد فرد را به شکل زیر انتخاب کرده و داریم:

$$1, 100, 2, 99, 3, 98, 4, 97, \dots, 49, 52, 50, 51$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$\boxed{99} \quad \boxed{97} \quad \boxed{95} \quad \boxed{93} \quad \dots \quad \boxed{3} \quad \boxed{1}$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + \dots + 97 + 99}{50} = \frac{1 + 3 + \dots + 97 + (2 \times 50 - 1)}{50} = \frac{50^2}{50}, \quad \boxed{\bar{x} = 50}$$

۲۴- چهار کارت به شماره ۱ تا ۴ با احتمال متناسب با عدد نوشته شده روی آنها در اختیار است. کارتی به تصادف انتخاب شده و سپس به تعداد عدد کارت، یک سکه پرتاب می‌شود. اگر سکه یک بار «رو» آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً یک بار پرتاب شده است؟

$$\frac{4}{29} \quad (۴)$$

$$\frac{12}{23} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{13} \quad (۲)$$

$$\frac{12}{19} \quad (۱)$$

گزینه ۴ صحیح است.

$$P(۱) = w, P(۲) = 2w, P(۳) = 3w, P(۴) = 4w \rightarrow P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = 1 \rightarrow 10w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{10}$$

$$\text{احتمال یک بار رو آمدن} : \frac{1}{10} \rightarrow \text{احتمال انتخاب کارت ۱} : \frac{1}{10}$$

$$\text{احتمال یک بار رو آمدن} : \frac{2}{10} \rightarrow \text{احتمال انتخاب کارت ۲} : \frac{2}{10}$$

$$\text{احتمال یک بار رو آمدن} : \frac{3}{10} \rightarrow \text{احتمال انتخاب کارت ۳} : \frac{3}{10}$$

$$\text{احتمال یک بار رو آمدن} : \frac{4}{10} \rightarrow \text{احتمال انتخاب کارت ۴} : \frac{4}{10}$$

$$P(\text{رو}) = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10}} = \frac{20}{29} = \frac{4}{29}$$

۲۵- در یک لوزی، هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه بزرگ تر لوزی، چند درجه است؟

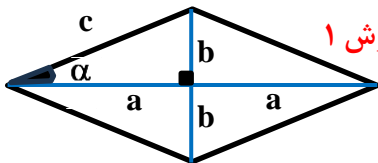
$$۱۱۵ \quad (۴)$$

$$۱۳۵ \quad (۳)$$

$$۱۲۰ \quad (۲)$$

$$۱۵۰ \quad (۱)$$

گزینه ۱ صحیح است.



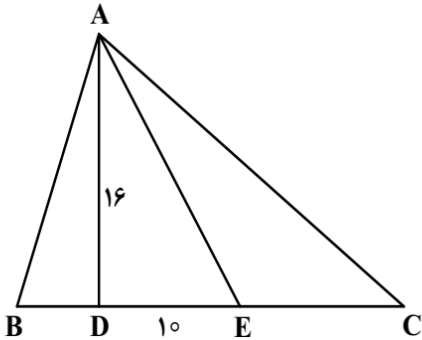
$$\text{روش ۱: } 2b, c, 2a \rightarrow c^2 = 2a \times 2b = 4ab, c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 4ab = a^2 + b^2 \xrightarrow{\div a^2}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{b}{a}\right) + 1 = 0 \rightarrow \frac{b}{a} = 2 - \sqrt{3} = \tan 15^\circ; \tan \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \alpha = 15^\circ$$

$$\text{زاویه بزرگ تر: } 180 - 2(15) = 150$$

$$\text{روش ۲: } c^2 = 4ab; \begin{cases} S = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times c \times c \times \sin 2\alpha\right) \\ S = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b \end{cases} \Rightarrow c^2 \times \sin 2\alpha = 4ab \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = 30 \rightarrow \alpha = 15^\circ$$

۲۶- در شکل زیر، $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$ و $BA = BE$ است. طول EC کدام است؟



(۱) ۸/۷

(۲) ۱۲/۴

(۳) ۹/۳

(۴) ۱۵/۶

گزینه ۴ صحیح است.

چون $BA = BE$ است پس داریم: $\widehat{AEB} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$

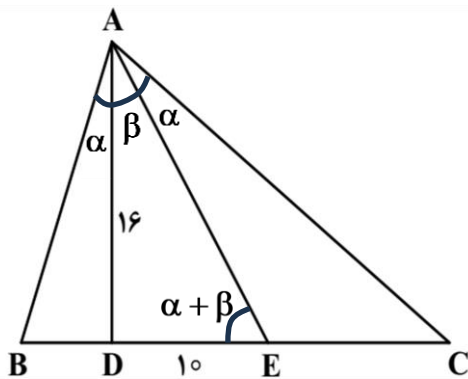
زاویه \widehat{AEB} ، زاویه خارجی مثلث AEC است و داریم:

$$\widehat{AEB} = \widehat{c} + \widehat{\alpha}, \widehat{AEB} = \widehat{\beta} + \widehat{\alpha} \longrightarrow \boxed{\widehat{c} = \widehat{\beta}}$$

دو مثلث ADC و ADE با توجه به زوایای برابر متشابه هستند. داریم:

$$\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{AED} \\ \widehat{C} = \widehat{DAE} = \widehat{\beta} \end{cases} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta ADE \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{ED} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{16}{10} = \frac{10 + EC}{16} \longrightarrow \boxed{EC = 15/6}$$



۲۷- از رئوس دو سر قطر کوچک یک متوازی الاضلاع، خط‌هایی عمود بر قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا سه پاره‌خط روی آن ایجاد شود و امتداد این خطوط ضلع مقابل را قطع کند. اگر طول پاره‌خط وسطی روی قطر بزرگ نصف طول پاره‌خط‌های کناری باشد، مساحت متوازی الاضلاع کوچک حاصل از دو عمود رسم شده چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ساخته شده در شکل است؟

(۴) ۱/۵

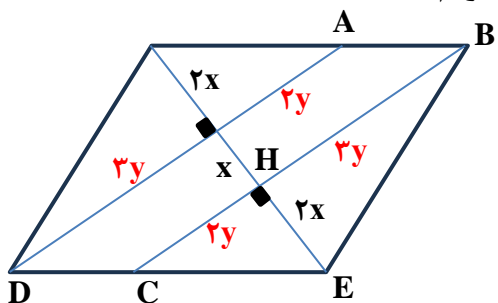
(۳) ۲

(۲) ۲/۵

(۱) ۳

گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به آن که دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند و استفاده از تالس داریم:



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ADH}} = \frac{2S_{ABD}}{S_{CHE}} = \frac{5y \times x}{\frac{1}{2} \times 2y \times 2x} = 2/5$$

۲۸- در مثلث ABC، طول دو میانه عمود بر هم رسم شده از رأس‌های B و C به ترتیب، ۱۲ و ۹ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

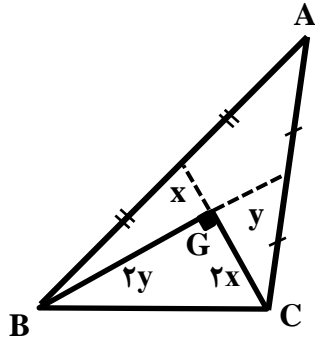
۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۳۲ (۱)

گزینه ۴ صحیح است.



میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. از طرفی از برخورد میانه‌های مثلث ۶ مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود که مثلث GBC دو تا از آن مثلث‌ها را دارد.

$$3y = 12 \Rightarrow y = 4, 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \longrightarrow S_{GBC} = \frac{2x \times 2y}{2} = 24$$

$$S_{ABC} = 3S_{GBC} = 3 \times 24 \longrightarrow S_{ABC} = 72$$

۲۹- چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

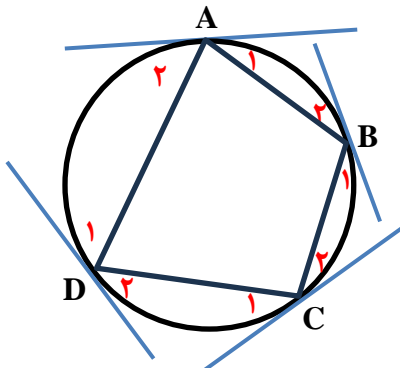
۷۲۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۵۴۰ (۲)

۱۸۰ (۱)

گزینه ۳ صحیح است.

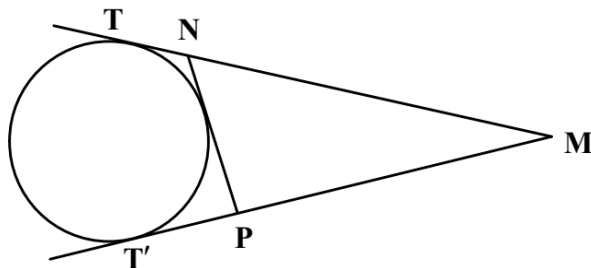


$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CD}{2} + \frac{DA}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = \frac{DA}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \boxed{360^\circ}$$

۳۰- در شکل زیر، از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $MT = 18$ ، $MN = 15$ و $MP = 12$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۴ (۱)

۶ (۲)

 $4\sqrt{5}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴)

گزینه ۲ صحیح است.

$$MT = MT', 2P = 2MT \Rightarrow P = 18; 2P = 36 = 15 + 12 + NP \longrightarrow NP = 9$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{18(18-15)(18-12)(18-9)} = 54; r_a = \frac{S}{p-NP} = \frac{54}{18-9} \Rightarrow r_a = 6$$

۳۱- پاره خط AB به طول ۵ در یک طرف خط d قرار دارد. فاصله دو سر پاره خط AB از خط d به ترتیب ۱ و ۵ است. نقطه C طوری روی خط d انتخاب می شود که محیط مثلث ABC کمترین مقدار باشد، حداقل مجموع اندازه های دو ضلع AC و BC کدام است؟

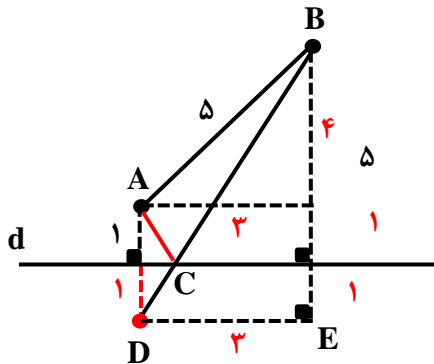
$$4\sqrt{6} \quad (4)$$

$$3\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{65} \quad (2)$$

$$\sqrt{57} \quad (1)$$

گزینه ۳ صحیح است.



با استفاده از قضیه هرون، از A بر d عمود کرده و به اندازه خودش امتداد می دهیم تا نقطه D بدست آید. با وصل B به D، نقطه C حاصل می شود. داریم:

$$\min(AC + BC) \xrightarrow{AC=DC} \min(DC + BC) = BD$$

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 \Rightarrow BD^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \boxed{BD = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}}$$

۳۲- در شکل زیر، اگر $\hat{BAD} = 2\hat{DAC}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

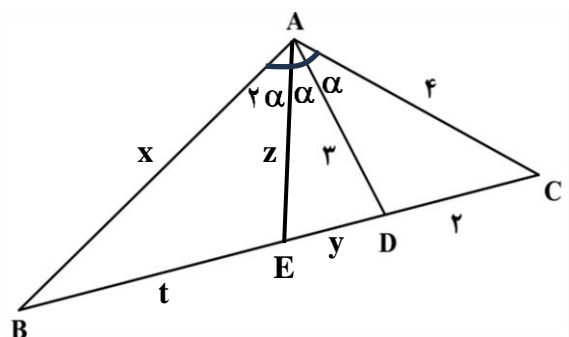
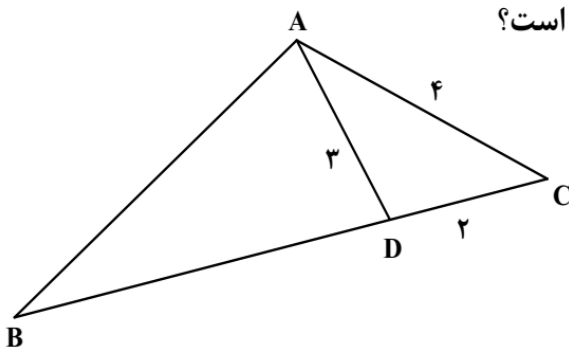
$$24 \quad (1)$$

$$25/5 \quad (2)$$

$$27 \quad (3)$$

$$28/5 \quad (4)$$

گزینه ۲ صحیح است.



$$AD \text{ نیمساز مثلث } AEC \rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{4}{z} = \frac{2}{y} \Rightarrow \boxed{z = 2y}$$

$$AD^2 = AC \times AE - CD \times DE$$

$$\Rightarrow 2^2 = 4 \times z - 2 \times y \xrightarrow{z=2y} 4 = 6y \rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow \boxed{z = 4/3} \rightarrow \boxed{EC = 2/5}$$

$$AE \text{ نیمساز مثلث } ABC \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{t}{2/5} \Rightarrow \boxed{t = \frac{5x}{8}}$$

$$AE^2 = AB \times AC - BE \times EC$$

$$2^2 = 4 \times x - 2/5 \times t \xrightarrow{t = \frac{5x}{8}} 4 = \frac{15}{8}x \rightarrow \boxed{x = 8/3} \Rightarrow \boxed{P = 8/3 + 4 + 2/5 + 8/4 = 25/5}$$

۳۳- اگر $a = (\log 25)^2 - (\log 4)^2$ و $A = \begin{bmatrix} \frac{a}{10^4} & \frac{a}{2^2} \\ \frac{a}{5^2} & \frac{a}{10^2} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left| \frac{1}{3} A \right|$ کدماں است؟

$$\frac{75}{24} \quad (4)$$

$$\frac{25}{24} \quad (3)$$

$$\frac{75}{8} \quad (2)$$

$$\frac{25}{8} \quad (1)$$

گزینه ۳ صحیح است.

$$a = (\log 25)^2 - (\log 4)^2 = (\log 25 - \log 4)(\log 25 + \log 4) = \log \frac{25}{4} \times \log 100 \Rightarrow a = 2 \log \frac{25}{4} \Rightarrow a = \log \frac{625}{16}$$

$$|A| = \frac{a}{10^4} \times \frac{a}{10^2} - \frac{a}{2^2} \times \frac{a}{5^2} = \frac{a}{10^4} \times \frac{a}{10^2} - \frac{a}{10^2} = \frac{1}{10^4} \log \frac{625}{16} \times \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^2} \log \frac{625}{16} = \frac{5}{2} \times \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = \frac{75}{8}$$

$$\left| \frac{1}{3} A \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^2 |A| = \frac{1}{9} \times \frac{75}{8} = \frac{25}{24}$$

۳۴- نمودار سهمی با مختصات رأس $(-2, 2)$ ، از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد. طول وترى که از کانون بر محور سهمی عمود رسم می‌شود، کدماں است؟

$$9 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

گزینه ۱ صحیح است.

$$y = k(x - \alpha)^2 + \beta \rightarrow y = k(x - 2)^2 - 2 \xrightarrow{(-1, 1) \in \text{سهمی}} 1 = k(-1 - 2)^2 - 2 \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 2)^2 - 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3(y + 2) \rightarrow \boxed{4a = 3} \quad \text{طول وتر کانونی}$$

۳۵- اگر دو بردار ناصفر $\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی الاضلاعی را که توسط بردارهای

ناصفر $\frac{3\vec{a}}{|\vec{b}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می شود، کدام است؟

$$6/4 \quad (4)$$

$$4/8 \quad (3)$$

$$3/2 \quad (2)$$

$$1/6 \quad (1)$$

گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = 0 \Rightarrow \frac{9|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{21|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = 0 \Rightarrow -2 \cdot \cos \alpha = 12 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$S = \left| \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{b}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \right| = \left| \frac{3\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{b}|^2} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \frac{2\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{4\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right| = \left| \vec{0} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{2\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \vec{0} \right| = \left| -\frac{8\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right|$$

$$S = \frac{8|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8|\vec{a}||\vec{b}|\sin \alpha}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{64}{5}$$

۳۶- خطی به معادله $y + 2x = 0$ عمود منصف خط المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر

معادله دایره بزرگ تر به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ و خط مفروض بر دایره کوچک تر مماس باشد، مجموع طول

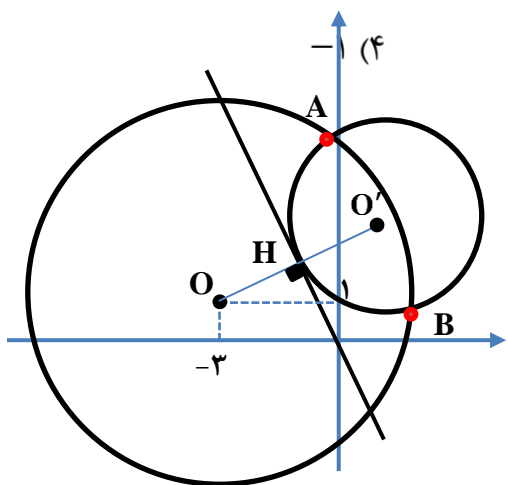
نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

$$1 \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{15}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{15}}{2} \quad (1)$$

گزینه ۳ صحیح است.



$$C: O(-3, 1), OH = O'H = r' = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

$$r = 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{36+4+4a}}{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow a = 10$$

$$O(-3, 1) \xrightarrow{y=-2x} O'(1, 3), r' = \sqrt{5} \rightarrow C': (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

محور تقارن

$$C = C' \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = (x-1)^2 + (y-3)^2 - 5 \rightarrow 8x + 4y = 15 \rightarrow y = -2x + \frac{15}{4}$$

$$(x-1)^2 + \left(-2x + \frac{15}{4} - 3\right)^2 - 32 = 0 \rightarrow 5x^2 - 5x + k = 0 \rightarrow x_A + x_B = \frac{-b}{a} = 1$$

۳۷- اگر عدد دو رقمی \overline{aa} را بین ارقام a و $2a$ قرار دهید، عدد جدید ساخته می‌شود، حداکثر چند عدد طبیعی می‌تواند a را عا د کند؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

گزینه ۲ صحیح است.

$$a = 1 \rightarrow 1112; a = 2 \rightarrow 2224; a = 3 \rightarrow 3336; a = 4 \rightarrow 4448$$

بزرگ‌ترین رقمی که می‌توان قرار داد، عدد ۴ است که دارای ۳ عامل طبیعی است.

۳۸- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $76x + 124y = 364$ صدق می‌کند، کدام است؟

- ۴ (۴) ۵ (۳) ۱۰ (۲) ۱۱ (۱)

گزینه ۱ صحیح است.

$$76x + 124y = 364 \xrightarrow{\div 4} 19x + 31y = 91 \xrightarrow{31} 19x \equiv 91 \rightarrow -12x \equiv 60 \xrightarrow{31} x \equiv -5 \rightarrow x = 31k - 5$$

$$x = 31k - 5 \xrightarrow{k=4} x = 119 \rightarrow \boxed{1+1+9=11}$$

۳۹- حداقل چند زوج مرتب (a, b) با مؤلفه‌هایی از اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن شویم دو زوج مرتب وجود دارد که مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم آنها، مضرب ۳ هستند؟

- ۱۰ (۴) ۹ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

گزینه ۲ صحیح است.

$$\left\{ \underbrace{(3k, 3k), (3k, 3k+1), (3k+1, 3k), (3k+1, 3k+1)}_{\text{مجموع مؤلفه‌های اول و دوم مضرب ۳}}, (3k+1, 3k+2), (,) \right\}$$

در مجموعه فوق ۵ زوج نوشته شده، شرایط سوال را ندارند، ولی هر زوج ششمی اضافه شود با یکی از آن ۵ زوج به هدف سوال می‌رسد.

۴۰- حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $\delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۱ (۳)

۲۹ (۲)

۳۱ (۱)

گزینه ۴ صحیح است.

برای آن که حداقل یال را داشته باشیم، درجه رئوس را باید کمترین انتخاب کنیم. داریم:

$$G : 432 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \longrightarrow$$

$$2q = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \Rightarrow q(G) = 9$$

$$p = 8 \Rightarrow q_{K_8} = \binom{8}{2} = 28 \Rightarrow q(\bar{G}) = 19$$

$$\Delta(G) = 3 \xrightarrow[\Delta(G)=3]{\delta(\bar{G}) + \Delta(G) = p-1} \delta(\bar{G}) = 4$$

$$q(\bar{G}) + \delta(\bar{G}) = 23$$

