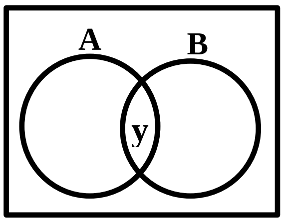
۱۱۱- مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m-k=۵$ و تعداد اعضای مجموعه $A\cup B$ برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینه ۳ صحیح است.

برای آن که تعداد عضو مجموعهٔ A کم‌ترین شود می‌بایست، اشتراک دو مجموعه یعنی y به حداقل یعنی صفر برسد. داریم:



$$n(A)=m\ ,\ n(B)=k$$

$$n(A\cup B)=۱۱\Rightarrow m+k-y=۱۱\xrightarrow{y=۰}m+k=۱۱$$

$$\begin{cases} m+k=۱۱ \\ m-k=۵ \end{cases}\Rightarrow \boxed{m=۸}$$

۱۱۲- در یک دنباله هندسی با جملهٔ اول a، تساوی $\frac{a_۶}{a_۲^۳}+\frac{a_۲}{a^۲}=۲$ برقرار است. نسبت $a^۲$ به جمله دوم کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{a_۶}{a_۲^۳}+\frac{a_۲}{a^۲}=۲\Rightarrow \frac{aq^۵}{a^۳q^۳}+\frac{aq}{a^۲}=۲\Rightarrow (\frac{q}{a})^۲+(\frac{q}{a})-۲=۰\Rightarrow \begin{cases} \frac{q}{a}=۱ \Rightarrow \frac{a}{q}=۱ \\ \frac{q}{a}=-۲\Rightarrow \boxed{\frac{a}{q}=-\frac{۱}{۲}} \end{cases}$$

$$\frac{a^۲}{a_۲}=?\longrightarrow \frac{a^۲}{a_۲}=\frac{a^۲}{aq}=\frac{a}{q}=?$$

با توجه به دو جواب بدست آمده، فقط گزینه ۴ صحیح است.

۱۱۳- اگر $A=\left\{\dfrac{۱}{\sqrt{\log_{۸} x+۴\log_{x^۳} ۲}} \ : \ x>۱\right\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۳}$

گزینه ۲ صحیح است.

برای دو عدد معکوس با ضرایب a و b که هر دو مثبت باشند رابطهٔ مهم $\boxed{ax+\dfrac{b}{x}\geq ۲\sqrt{ab}}$ را داریم. زیرا:

$$A=ax+\frac{b}{x}\Rightarrow A=\frac{ax^۲+b}{x}\Rightarrow A'=\circ\Rightarrow A'=\frac{۲ax^۲-ax^۲-b}{x^۲}=\circ\Rightarrow x=\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=۲\sqrt{ab}$$

از طرفی می‌دانیم $\log_m n$ و $\log_n m$ معکوس هم هستند. داریم:

$$K=\frac{۱}{\sqrt{\log_{۸} x+۴\log_{x^۳} ۲}}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲} x+\frac{۴}{۳}\log_{x} ۲}}\xrightarrow{(۱)}\boxed{K\leq\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\frac{۱}{۳}\log_{۲} x+\frac{۴}{۳}\log_{x} ۲\geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}}=\frac{۴}{۳}\longrightarrow\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲} x+\frac{۴}{۳}\log_{x} ۲}\geq\frac{۲}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲} x+\frac{۴}{۳}\log_{x} ۲}}\leq\frac{\sqrt{۳}}{۲}\quad(۱)$$

۱۱۴- حداقل چند عضو از مجموعه $f=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ x=\dfrac{۳\circ}{۱+|y|}\right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

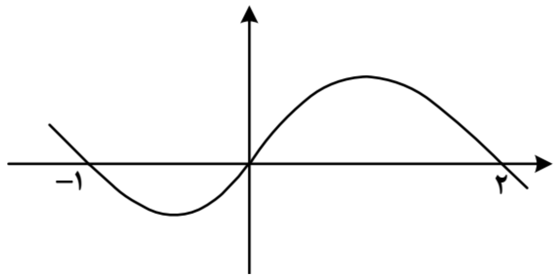
۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

گزینه ۱ صحیح است.

$$f=\left\{(۳\circ,\circ),\underbrace{\begin{matrix}(۱۵,۱)\\(۱۵,-۱)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۱\circ,۲)\\(۱\circ,-۲)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۶,۴)\\(۶,-۴)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۵,۵)\\(۵,-۵)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۳,۹)\\(۳,-۹)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۲,۱۴)\\(۲,-۱۴)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۱,۲۹)\\(۱,-۲۹)\end{matrix}}\right\}$$

می‌بایست حداقل ۷ عضو که عضوهای اولِ برابر دارند را حذف کنیم.

۱۱۵- شکل زیر، نمودار $f(x-۲)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) صفر
۴) بیش از ۴

گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x-۲)=ax(x+۱)(x-۲)\,,\,a<۰\Rightarrow\begin{cases}f(x)=a(x+۲)(x+۳)(x)\,,\,a<۰\\f(۱-x)=a(۳-x)(۴-x)(۱-x)\,,\,a<۰\\f(x+۱)=a(x+۳)(x+۴)(x+۱)\,,\,a<۰\end{cases}$$

$$\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}=\frac{a(۳-x)(۴-x)(۱-x)}{a(x+۳)(x+۴)(x+۱)}\geq ۰\to\boxed{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}=\frac{(۳-x)(۴-x)(۱-x)}{(x+۳)(x+۴)(x+۱)}\geq ۰}$$

تعیین علامت: $-\quad -۴\quad +\quad -۳\quad -\quad -۱\quad +\quad ۱\quad -\quad ۳\quad +\quad ۴\quad -$

تنها اعداد قابل قبول با توجه به بازه‌های مثبت و اعدادی که صفر می‌کنند عبارتند از: $\boxed{x=۰\,,\,x=۱\,,\,x=۳\,,\,x=۴}$

۱۱۶- اگر $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=f([x-f(x)])$ باشد، $fog(-\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

گزینه ۴ صحیح است.

$$f(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۳}+[-\frac{۱}{۳}]=-\frac{۱}{۳}-۱\Longrightarrow\boxed{f(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۴}{۳}}$$

$$g(-\frac{۱}{۳})=f([-\frac{۱}{۳}-f(-\frac{۱}{۳})]=f([-\frac{۱}{۳}-(-\frac{۴}{۳})])=f(۱)=۲$$

$$\boxed{f(g(-\frac{۱}{۳}))=f(۲)=۴}$$

۱۱۷- از تقسیم اندازه قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}$

گزینه ۳ صحیح است.

به $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ عدد طلایی گویند.

$$\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\xrightarrow{(\ )^۲}\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}\Rightarrow\frac{a^۲}{a^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow\boxed{\frac{a^۲}{b^۲}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}}$$

۱۱۸- ریشه‌های معادله $x^۲-(a+۱)x+a=۰$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله $x^۲-(۳a+۱)x+b=۰$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

گزینه ۲ صحیح است.

$$x^۲-(a+۱)x+a=۰\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=a\end{cases}\xrightarrow{\text{دو ریشه فردِ متوالی}}\boxed{a=۳}$$

$$x^۲-(۳a+۱)x+b=۰\xrightarrow{a=۳}x^۲-۱۰x+b=۰\xrightarrow[S=۱۰]{\text{دو ریشه زوجِ متوالی}}\begin{cases}y_۱=۴\\y_۲=۶\end{cases}$$

$$\boxed{y_۱\times y_۲-x_۱\times x_۲=۲۴-۳=۲۱}$$

۱۱۹- اگر $f(x)=\left((\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x\right)^۳$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(fof)(x)<f(۲^{-۳x})$ کدام است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۸})$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(\frac{۱}{۸},+\infty)$ ۴) $(۰,۱)$

گزینه ۴ صحیح است.

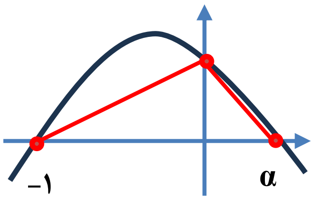
درون پرانتز مجموع دو تابع اکیداً نزولی است که به توان عدد فردِ ۳ می‌رسند، پس تابع f اکیداً نزولی می‌شود.

$$(fof)(x)<f(۲^{-۳x})\Rightarrow f(f(x))<f(۲^{-x})^۳\longrightarrow f(x)>(۲^{-x})^۳\Rightarrow$$

$$\left((\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x\right)^۳>\left((\frac{۱}{۲})^x\right)^۳\longrightarrow(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x>(\frac{۱}{۲})^x\longrightarrow\log_{۰/۵}x>۰\Rightarrow\boxed{x\in(۰,۱)}$$

۱۲۰- صفرهای تابع $y = mx^2 - 4x - (m+4)$ و نقطه تقاطع آن با محور yها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم‌شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{9}{2}$



گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به آن که مجموع ضریب جملهٔ درجه دوم و عدد ثابت با ضریب جملهٔ درجهٔ یک برابر است، از این رو یکی از ریشه‌ها ۱- و دیگری $\frac{m+4}{m}$ است و داریم:

$$f(0) = -(m+4)\ ;\ |\alpha-(-1)| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16+4m^2+16m}}{|m|} = \frac{2|m+2|}{|m|}$$

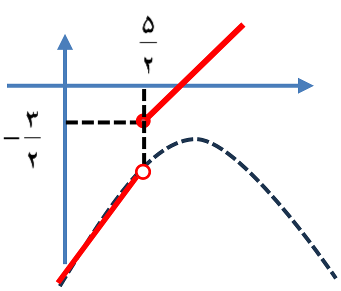
$$S = \frac{|\alpha-(-1)|\times|-(m+4)|}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\left|\frac{2(m+2)}{m}\times(m+4)\right|}{2} \Rightarrow m^2+6m+8 = 3|m| \xrightarrow{m<0} \begin{cases} m=-1 \\ m=-8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{y=mx^2-4x-(m+4)} \begin{cases} \xrightarrow{m=-1} y = -x^2-4x-3 \Rightarrow \boxed{x_A = -2} \\ \xrightarrow{m=-8} y = -8x^2-4x+4 \Rightarrow \boxed{x_A = -\frac{1}{4}} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\left|-2-(-\frac{1}{4})\right| = \frac{7}{4}}$$

۱۲۱- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & 2x-5 \geq 0 \\ -2x^2+ax-21 & 2x-5 < 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به‌ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-1}(-3)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

گزینه ۱ صحیح است.



توابع یک به یک وارون‌پذیر هستند. از طرفی طول رأس تابع درجه ۲ باید بعد از $x = \frac{5}{2}$ باشد تا تابع یک به یک شود.

$$x_A = -\frac{b'}{2a'} > \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{a}{-4} > \frac{5}{2} \Rightarrow a > 10\ (1)$$

$$-2(\frac{5}{2})^2 + \frac{5}{2}a - 21 < \frac{1}{2}(\frac{5}{2}) - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}a < 32 + \frac{5}{4} \Rightarrow a < 13.3 \xrightarrow{(1)} \boxed{a_{max} = 13}$$

$$f^{-1}(-3) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -3 \Rightarrow -2\alpha^2+13\alpha-21 = -3 \Rightarrow 2\alpha^2 - 13\alpha + 18 = 0 \xrightarrow{\alpha<\frac{5}{2}} \begin{cases} \boxed{x=2} \\ x = 4.5 \end{cases}$$

۱۲۲- اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $(\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲۶}{۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲۶}{۱۱}$

گزینه ۲ صحیح است.

$$\log ۵ = ۱ - \log ۲ = ۱ - ۰/۳ \Rightarrow \boxed{\log ۵ \simeq ۰/۷} \; , \; \log ۹ = \log ۳^۲ = ۲\log ۳ \Rightarrow \boxed{\log ۹ \simeq ۰/۸}$$

$$\log ۱۵ = \log ۵ \times ۳ = \log ۵ + \log ۳ = ۱/۱ \; , \; \log \frac{۵}{۳} = \log ۵ - \log ۳ = ۰/۳$$

$$(\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰ \Rightarrow ۰/۳x^۲ + ۰/۸x - ۱/۱ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = -\frac{۱/۱}{۰/۳} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_۱ - x_۲ = \frac{۱۴}{۳}}$$

۱۲۳- اگر $\tan x + \cot x = ۴$ و $۵\pi < ۴x < ۶\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۸\sqrt{۲}$ ۲) $۰/۸\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$

گزینه ۱ صحیح است.

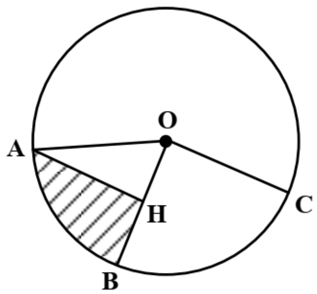
$$\tan x + \cot x = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{\cos x \sin x} = ۴ \Rightarrow \boxed{\cos x \sin x = \frac{۱}{۴}} \; ,$$

$$۵\pi < ۴x < ۶\pi \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sin x < \cos x < ۰ \longrightarrow \sin x - \cos x < ۰ \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{(۱)} \boxed{\sin x - \cos x = -\sqrt{۱ - ۲\cos x \sin x} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}}$$

$$\sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\cos^۲ x + \sin^۲ x + \cos x \sin x) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ + \frac{۱}{۴}) \Rightarrow \boxed{\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x} = -۰/۸\sqrt{۲}}$$

۱۲۴- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث OAH بزرگ‌تر است؟



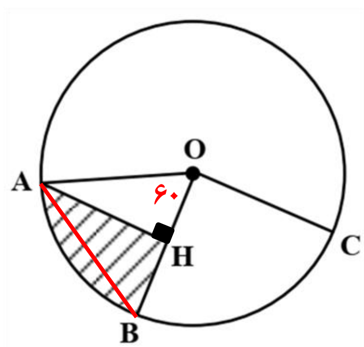
۱) $\frac{۲\pi-۱}{۳}$

۲) $\frac{۲\pi-۳}{۶}$

۳) $\frac{\pi-۱}{۶}$

۴) $\frac{\pi-۳}{۳}$

گزینه ۴ صحیح است.



$$P=۲\pi r \Rightarrow ۲\pi=۲\pi r \Rightarrow \boxed{r=۱}\ ,\ OH=\frac{۱}{۲}OA \Rightarrow O\hat{A}H=۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B=۶۰^\circ$$

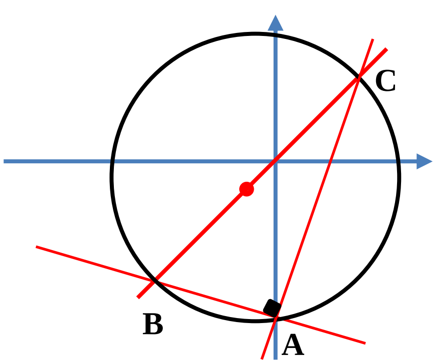
$$OA=OB=AB=۱ \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ;\ \overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۶}(۲\pi)=\frac{\pi}{۳}$$

$$(\cancel{AH}+\cancel{BH}+\overset{\frown}{AB})-(OA+\cancel{OH}+\cancel{AH})=\frac{\pi}{۳}-۱=\frac{\pi-۳}{۳}$$

۱۲۵- خطوط $x+۲y=۳$ و $۲x+ay=۶$، یکدیگر را در نقطه A و خط $x+y=۰$ را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B-C)$ در مثلث ABC کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

گزینه ۲ صحیح است.



چون مرکز روی خط $y=-x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس زاویهٔ A قائمه بوده و دو خط اولیه بر هم عمود هستند و داریم:

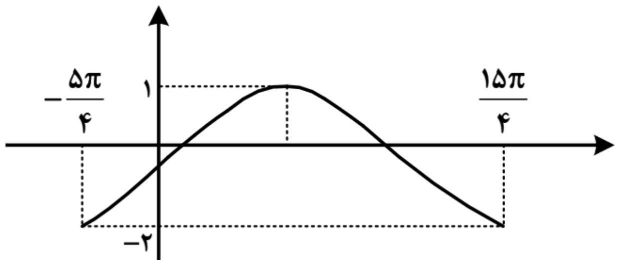
$$m=-\frac{۱}{۲}\ ,\ m'=\frac{-۲}{a}\ ,\ mm'=-۱ \Rightarrow \boxed{a=-۱}\ ;\ \begin{cases}x+۲y=۳\\ ۲x-y=۶\end{cases} \Rightarrow \boxed{A(۳,۰)}$$

$$\begin{cases}۲y+x=۳\\ y+x=۰\end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-۳,۳)}\ ;\ \begin{cases}۲x-y=۳\\ y+x=۰\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(۱,-۱)}$$

$$AC=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}\ ,\ AB=\sqrt{۳۶+۹}=\sqrt{۴۵}$$

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۱}{۳},\ \tan C=۳\ ;\ \tan(B-C)=\frac{\tan B-\tan C}{۱+\tan B\tan C}=\frac{\frac{۱}{۳}-۳}{۱+\frac{۱}{۳}\times ۳}=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{\cot(B-C)=-\frac{۳}{۴}}$$

۱۲۶- شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin^2(\frac{\pi}{4}-bx)+c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) $-0/3$

۲) $0/3$

۳) $-0/6$

۴) $0/6$

گزینه ۳ صحیح است.

از نمودار مشخص است که $a(-b)>0 \longrightarrow \boxed{ab<0}$ است.

$$\sin^2(\frac{\pi}{4}-bx)=\frac{1}{2}(1-\cos 2(\frac{\pi}{4}-bx))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2bx \Rightarrow \boxed{y=-\frac{a}{2}\sin 2bx+\frac{a}{2}+c}$$

$$\left.\begin{cases} y_{max}=\left|-\frac{a}{2}\right|+\frac{a}{2}+c=1 \\ y_{min}=-\left|-\frac{a}{2}\right|+\frac{a}{2}+c=-2 \xrightarrow{\times -1} \end{cases}\right\} \Rightarrow 2\left|\frac{a}{2}\right|=3 \longrightarrow \boxed{a=\pm 3}\ ,$$

$$T=\frac{15\pi}{4}-(-\frac{5\pi}{4})=5\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|}=5\pi \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{1}{5}} \xrightarrow{ab<0} \boxed{ab=-\frac{3}{5}=-0/6}$$

۱۲۷- اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادله $\cot(\frac{\pi+4x}{2})=\cos(\frac{\pi+8x}{2})$ در بازه $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(3\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

گزینه ۲ صحیح است.

$$\cot(\frac{\pi+4x}{2})=\cot(\frac{\pi}{2}+2x)=-\tan 2x\ ,\ \cos(\frac{\pi+8x}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}+4x)=-\sin 4x$$

$$-\tan 2x=-\sin 4x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=2\sin 2x\cos 2x \Rightarrow \frac{\sin 2x(1-2\cos^2 2x)}{\cos 2x}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x=0 \\ \boxed{\cos^2 2x=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{8} \\ 2x=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2=-\frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha=x_1-x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}\ ;\ \boxed{\cos(3\alpha)=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{جوابی در بازهٔ داده شده برای این حالت وجود ندارد.} \end{cases}$$

۱۲۸- مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۶}$ ۴) $\dfrac{۱}{۶}$

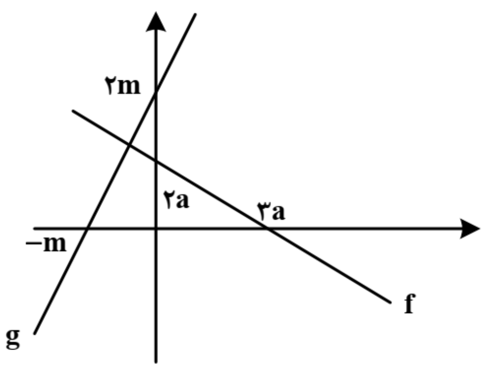
گزینه ۴ صحیح است.

چون صورت به ازای $x=۱$ صفر است پس باید مخرج هم صفر باشد تا جواب غیرصفر داشته باشد.

$$a+b=۰\to \boxed{b=-a}$$

$$\lim\limits_{x\to ۸}\frac{-a\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+a}{ax-a}=\lim\limits_{x\to ۸}\frac{-\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to ۸}\frac{-۱\times\dfrac{\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۲\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}}}{۱}=\frac{۱}{۶}$$

۱۲۹- شکل زیر، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $\dfrac{۱}{۳}$

۲) $-\dfrac{۱}{۳}$

۳) -۳

۴) ۳

گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases}(۰,۲a)\in f\\(۳a,۰)\in f\end{cases}\Rightarrow a'=\frac{۲a}{-۳a}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow\boxed{f(x)=-\frac{۲}{۳}x+۲a}\ ,\ \begin{cases}(۰,۲m)\in g\\(-m,۰)\in g\end{cases}\Rightarrow a''=\frac{۲m}{m}=۲\Rightarrow\boxed{g(x)=۲x-m}$$

$$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۲x-m}{\left|-\frac{۲}{۳}x+۲a\right|}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۲x}{-\frac{۲}{۳}x}=-۳$$

۱۳۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\dfrac{m}{۲}}}{|۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲|} & x\neq a\\ \dfrac{۲\tan b}{\sqrt{-x}} & x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار b باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

گزینه ۱ صحیح است.

عدد a می‌بایست تنها ریشه زیر رادیکال باشد و از طرفی مخرج را هم صفر کند.

آنجا که تابع پیوسته است پس باید ۱- ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد تا زیر رادیکال در R تعریف‌پذیر شود. داریم:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m+۳)^۲-۱۲m=۰\Rightarrow(m-۳)^۲=۰\Rightarrow\boxed{m=۳}\ ;\ x=a=\frac{-(m+۳)}{۲(۶)}\xrightarrow{m=۳}\boxed{x=a=\frac{-۱}{۲}}$$

$$\lim_{x\to-\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۶(x+\frac{۱}{۲})^۲}}{|۲x^۳+\frac{۱}{۴}|}=\lim_{x\to-\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳+\frac{۱}{۸}|}=\lim_{x\to-\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۶}\cancel{|x+\frac{۱}{۲}|}}{۲\cancel{|x+\frac{۱}{۲}|}|x^۲-\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۴}|}=\frac{\sqrt{۶}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\tan b}{\sqrt{-(-\frac{۱}{۲})}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}\Rightarrow\sqrt{۲}\tan b=\frac{\sqrt{۶}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\longrightarrow\boxed{b=\frac{\pi}{۶}}$$

۱۳۱- اگر $f(x)=-\dfrac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x^۵+|x^۵|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) -۱ ۴) ۱

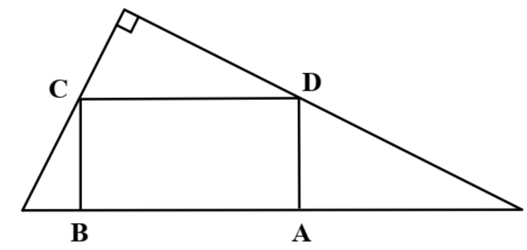
گزینه ۳ صحیح است.

$$\boxed{g'(x)\times f'(g(x))=(fog)'(x)}$$

$$\boxed{x>۰\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲x^۵}}\ ,\ \boxed{x>۰\Rightarrow f(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}}};\xrightarrow{x>۰}(fog)(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^۵})}}\Rightarrow\boxed{(fog)(x)=-x}$$

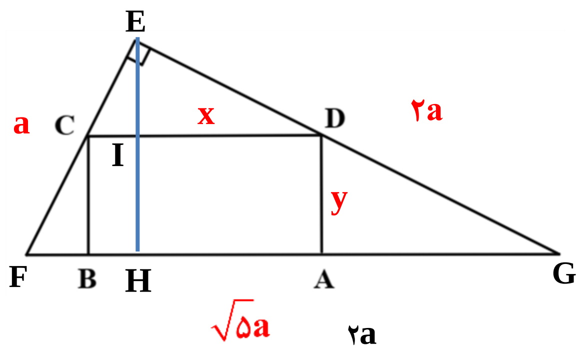
$$(fog)'(x)=-۱\Rightarrow\boxed{(fog)'(\sqrt[۵]{۳})=-۱}$$

۱۳۲- در شکل زیر، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

گزینه ۴ صحیح است.



$$FG=\sqrt{4a^2+a^2}\Rightarrow \boxed{FG=\sqrt{5}a}$$

$$EF\times EG=EH\times FG\Rightarrow EH=\frac{a\times 2a}{\sqrt{5}a}\Rightarrow \boxed{EH=\frac{2a}{\sqrt{5}}}$$

با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{CD}{FG}=\frac{EI}{EH}\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5}a}=\frac{\frac{2a}{\sqrt{5}}-y}{\frac{2a}{\sqrt{5}}}\Rightarrow \frac{2x}{5}=\frac{2a}{\sqrt{5}}-y\Rightarrow \boxed{y=\frac{2a}{\sqrt{5}}-\frac{2x}{5}}\ (1)$$

$$S=xy\Rightarrow S=x\times\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}-\frac{2x}{5}\right)=\frac{2ax}{\sqrt{5}}-\frac{2x^2}{5}\longrightarrow S'=0\Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{5}}-\frac{4x}{5}=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{5}}{2}a}\xrightarrow{(1)}\boxed{b=\frac{a}{\sqrt{5}}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{a}{\sqrt{5}}}=\frac{5}{2}\Rightarrow \boxed{\frac{a}{b}=2/5}$$

۱۳۳- در یک دسته ۷تایی از اعداد طبیعی متوالی (دسته اول)، انحراف‌معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد طبیعی دیگری را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین دسته آخر، مکعب انحراف‌معیار باشد. اختلاف کوچک‌ترین عضو دسته اول و دسته آخر، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم که انحراف معیار n جمله دنباله حسابی با قدر نسبت d چنین است: $\boxed{\sigma = d\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}}$

بنابراین انحراف معیار برای ۷ داده از دنباله حسابی با قدر نسبت ۱ برابر است با: $\sigma = d\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}} = ۱\times\sqrt{\frac{۷^۲-۱}{۱۲}} \Rightarrow \boxed{\sigma = ۲}$

اگر ۷ دادهٔ اول را ۷ ، ۶ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ فرض کنیم، میانگینی برابر با ۴ دارند که با انحراف معیار ۲، برابر با نصف آن است.

حال باید ۷ داده‌ای را در نظر بگیریم که میانگین آنها طبق فرض برابر $۸ = ۲^۳$ شود که داریم: ۱۱ ، ۱۰ ، ۹ ، ۸ ، ۷ ، ۶ ، ۵

اختلاف دو جملهٔ آخر این دو دنباله چنین است: $\boxed{۱۱-۵=۶}$

۱۳۴- چند عدد چهارده‌رقمی با ارقام ۷ و ۸ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ بوده و از هر دو طرف (سمت چپ و راست) یکسان خوانده شوند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینه ۱ صحیح است.

رقم یکان باید ۸ باشد تا زوج بوده و بر ۶ بخش‌پذیر شود. از طرفی چون متقارن باید باشد، پس رقم چهاردهم نیز باید ۸ باشد.

تعداد ارقام ۷ باید زوج باشد تا تقارن حفظ شود. تنها حالاتی که می‌تواند قبول باشد داشتن ۴ رقم ۷ و ۱۰ رقم ۷ است. داریم:

الف) در حالتی که ۴ رقم ۷ داریم، می‌توان ۱۲ رقم وسط را نصف کرده و در هر ۶ رقم، دو رقم را ۷ قرار دهیم، پس داریم:

$\boxed{۸}\ \underbrace{\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۷}\boxed{۷}}\ \underbrace{\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}}\ \boxed{۸} \longrightarrow \binom{۶}{۲} = ۱۵$

ب) در حالتی که ۱۰ رقم ۷ داریم، می‌توان ۱۲ رقم وسط را نصف کرده و در هر ۶ رقم، ۵ رقم را ۷ قرار دهیم، پس داریم:

$\boxed{۸}\ \underbrace{\boxed{۸}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}}\ \underbrace{\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۸}}\ \boxed{۸} \longrightarrow \binom{۶}{۵} = ۶$

بنابراین در مجموع ۲۱ عدد با چنین شرایط می‌توان ساخت.

۱۳۵- یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار mاُم «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{m}{m+۳}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب m بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند nm باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵

گزینه ۳ صحیح است.

اگر بخواهیم در پرتاب n اُم، m اُمین «رو» ظاهر شود، باید در $n-۱$ پرتاب قبل، $m-۱$ «رو» ظاهر شود. با توجه به فرض داریم:

$$\frac{\binom{n-۱}{m-۱}}{\cancel{۲^n}}=\frac{m}{m+۳}\times\frac{\binom{n}{m}}{\cancel{۲^n}}\Rightarrow\frac{(n-۱)!}{(m-۱)!\times\cancel{(n-۱-m+۱)!}}=\frac{m}{m+۳}\times\frac{(n)!}{(m)!\times\cancel{(n-m)!}}\Rightarrow$$

$$۱=\frac{m}{m+۳}\times\frac{n}{m}\Rightarrow\boxed{n=m+۳}\longrightarrow n\times m=?\longrightarrow(m+۳)\times m=?\Rightarrow m^۲+۳m=?\xrightarrow{m=۵}\boxed{۴۰}$$

۱۳۶- احتمال اینکه پارسا یکی از سه رشته A، B و C را در دانشگاه انتخاب کند، به‌ترتیب، ۰/۴۵، ۰/۲ و ۰/۳۵ است. اگر او یکی از سه رشته A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، با احتمال ۰/۲، ۰/۲۵ و ۰/۳ در آن رشته پذیرفته می‌شود. پارسا با کدام احتمال در رشته موردعلاقه‌اش پذیرفته می‌شود؟

۱) ۰/۲۴۵ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۱۹۵ ۴) ۰/۱۹

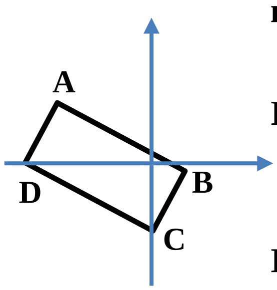
گزینه ۱ صحیح است.

$$P=\frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰}\times\frac{۳۰}{۱۰۰}=\frac{۲۴۵۰}{۱۰۰۰۰}\longrightarrow\boxed{۰/۲۴۵}$$

۱۳۷- نقاط $A(x,y)$، $B(-۱-x,y-۳)$، $C(۰,-۳)$ و $D(-۴,۰)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲/۵

گزینه ۳ صحیح است.

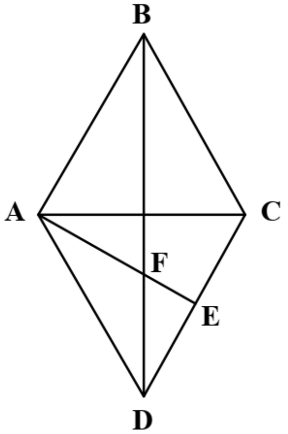


$$m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow\frac{y-y+۳}{x+۱+x}=\frac{-۳-۰}{۰-(-۴)}\Rightarrow ۲x+۱=-۴\longrightarrow\boxed{x=-\frac{۵}{۲}}$$

$$BC\perp CD\Rightarrow m_{BC}\times m_{CD}=-۱\Rightarrow\frac{y}{-۱+\frac{۵}{۲}}\times\frac{-۳}{۴}=-۱\Rightarrow\boxed{y=۲}\Rightarrow A(-\frac{۵}{۲},۲),B(\frac{۳}{۲},-۱)$$

$$BC=\sqrt{(\frac{۳}{۲})^۲+(-۳+۱)^۲}=\frac{۵}{۲}\ ,\ AB=\sqrt{(\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲})^۲+(-۱-۲)^۲}=۵\ ;\ \text{محیط}=۲(\frac{۵}{۲}+۵)=۱۵$$

۱۳۸- در لوزی شکل زیر، E وسط ضلع CD است. اگر قطر بزرگ لوزی ۳ برابر قطر کوچک باشد، طول EF چند برابر AB است؟

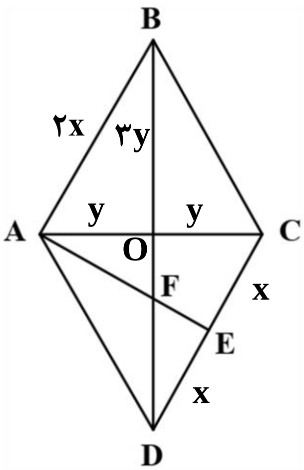


۱) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۳) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

۴) $\frac{\sqrt{10}}{10}$



گزینه ۴ صحیح است.

$$\Delta ABO : (2x)^2 = y^2 + (3y)^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{10}}{2} y} \quad (1)$$

در هر مثلث برای طول میانهٔ m_a با اضلاع a، b و c داریم: $2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$

از طرفی میانه‌ها به نسبت ۱ به دو همدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه: $EF = \frac{1}{3} AE$

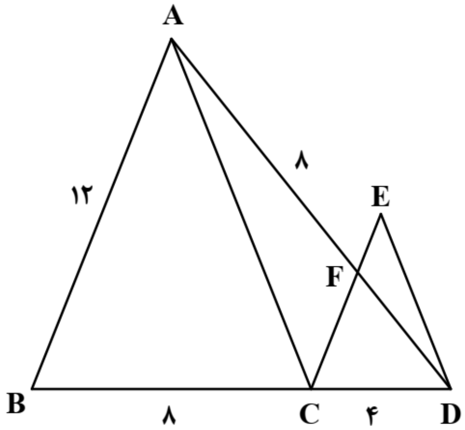
در مثلث ACD، AE میانه بوده و داریم:

$$2AE^2 + \frac{DC^2}{2} = AC^2 + AD^2 \Rightarrow 2AE^2 + \frac{4x^2}{2} = 4y^2 + 4x^2 \longrightarrow$$

$$2AE^2 = 4y^2 + 2x^2 \xrightarrow{(1)} AE = 3y \xrightarrow{EF = \frac{1}{3}AE} \boxed{EF = y}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{y}{2x} = \frac{y}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} y} \longrightarrow \boxed{\frac{EF}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{10}}$$

۱۳۹- در شکل زیر، $CE \parallel AB$ و $ED \parallel AC$ است. اندازه ED چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲۹}$

۲) $\sqrt{۳۳}$

۳) $۲\sqrt{۷}$

۴) $۳\sqrt{۵}$

گزینه ۳ صحیح است.

$$CF||AB \Rightarrow \frac{CF}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{DF}{DF+۸} \Rightarrow \boxed{CF=۴}, \boxed{DF=۴} \Rightarrow \begin{cases} \Delta ABD \ \text{متساوی‌الاضلاع} \\ \Delta FCD \ \text{متساوی‌الاضلاع} \end{cases}$$

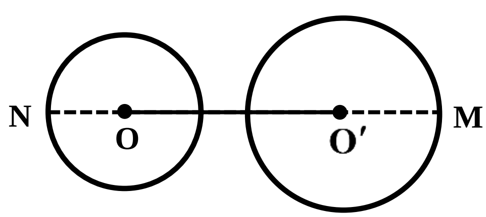
قضیه کسینوسها: $AC^۲ = AB^۲ + CB^۲ - ۲\times AB \times CB \times \cos ۶۰ \Rightarrow AC^۲ = ۱۲^۲ + ۸^۲ - ۲\times ۱۲\times ۸\times \frac{۱}{۲} = ۱۱۲ \Rightarrow \boxed{AC = ۴\sqrt{۷}}$

$$\Delta ACF \sim \Delta DFE \longrightarrow \frac{ED}{AC}=\frac{FD}{AF} \Rightarrow \frac{ED}{۴\sqrt{۷}}=\frac{۴}{۸} \longrightarrow \boxed{ED = ۲\sqrt{۷}}$$

۱۴۰- نقطه‌های M و N به‌ترتیب روی دو دایره متخارج $x^۲+y^۲-۲x+۲y=a$ و $x^۲+y^۲+۴x-۶y+۶a=۰$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصله M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۱

گزینه ۲ صحیح است.



$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-a=۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(۱,-۱) \\ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۴a} = \sqrt{۲+a} \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲+۴x-۶y+۶a=۰ \Rightarrow \begin{cases} O(-۲,۳) \\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۲۴a} = \sqrt{۱۳-۶a} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(۱+۲)^۲+(-۱-۳)^۲} = ۵$$

$$MN = \sqrt{۲+a} + \sqrt{۱۳-۶a} + ۵ = ۸ \longrightarrow \boxed{a=۲}$$

۱۴۰- حداقل چند عضو از مجموعه $f=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ x=\frac{۷۲}{y^{۲}-۱}\right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵