

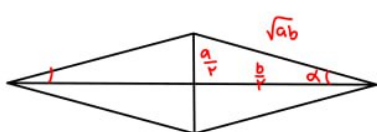
۲۵- در یک لوزی هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه کوچک تر در هر مثلث حاصل از رسم قطرهای این لوزی چند درجه است؟

۴۵ (۴)

۳۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)



$$\rightarrow \frac{a^2}{r} + \frac{b^2}{r} = ab \rightarrow a^2 + b^2 = rab \xrightarrow{\div ab} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4 \rightarrow t + \frac{1}{t} = 4$$

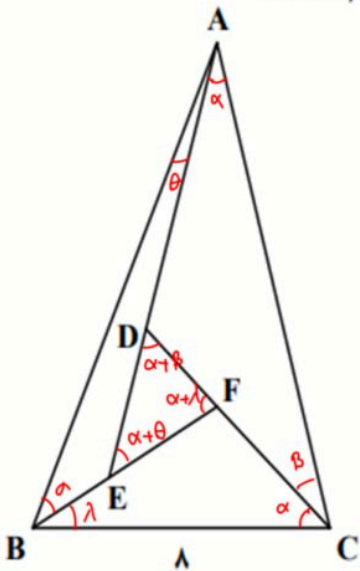
$$\rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

چون  $a$  را کوچک تر در نظر گرفتیم پس  $2 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \tan \alpha = 2 - \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 15^\circ$$

می توان با در نظر گرفتن حل کرارجون تانژانت کزینهای ریدر قطعاً  $2 - \sqrt{3}$  نمی شود

۲۶- در شکل زیر،  $\hat{A}BF = \hat{C}AE = \hat{B}CD$ ،  $DF = 2,5$  و  $EF = 3$  است. طول  $AB$  کدام است؟



اگر زاویه‌ها را اسم نذاریم نزدیک کنیم زاویه  $\hat{D}$  در مثل  $DEF$  زاویه خارجی مثلث  $ADC$  است پس سؤر  $\alpha + \beta$

بقیه زوایا هم به همین شکل نامگذاری کنیم. مشاهده می‌شود سؤر  $\alpha + \gamma$  در  $ABC$  با  $DEF$  برابرند پس تشابه داریم

(۱)  $8,6$

(۲)  $7,5$

(۳)  $10,5$

(۴)  $9,6$

$$\frac{2,5}{1} = \frac{EF}{AB} \rightarrow AB = \frac{2,5}{1} \times \frac{3}{1} = 7,5$$

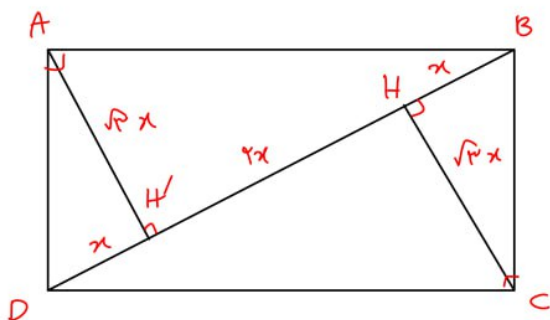
۲۷- در یک مستطیل، خط‌هایی از دو رأس مقابل بر یک قطر عمود می‌شوند و آن قطر به سه قسمت طوری تقسیم می‌شود که قسمت وسط دو برابر هریک از قسمت‌های کناری است. مساحت این مستطیل چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجادشده در مستطیل است؟

۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴ (۱)



$$AH = CH = \text{ارتفاع در مثلث قائم} = \sqrt{BH \times DI} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$$CD^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (2x)^2 = 13x^2 \rightarrow CD = 2\sqrt{13}x$$

$$BC^2 = (\sqrt{3}x)^2 + x^2 = 4x^2 \rightarrow BC = 2x$$

$$\rightarrow \frac{S_{\square}}{S_{\Delta}} = \frac{2\sqrt{13}x \times 2x}{\frac{2x \times \sqrt{3}x}{2}} = \frac{4\sqrt{13}x^2}{\sqrt{3}x^2} = 1$$

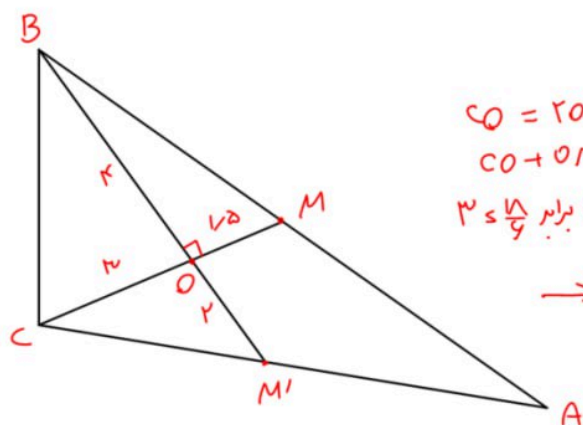
۲۸- در مثلث  $ABC$ ، میانه‌های رسم شده از رأس‌های  $B$  و  $C$  بر هم عمودند. اگر طول میانه رسم شده از رأس  $C$  برابر  $\frac{4}{5}$  و مساحت این مثلث برابر ۱۸ باشد، نسبت طول میانه‌های رسم شده از دو رأس  $B$  و  $C$  کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{19}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{17}{9} \quad (۱)$$



$$\left. \begin{aligned} CO &= 2OM \\ CO + OM &= 3.5 \end{aligned} \right\} CO = 3 \text{ و } OM = 1.5$$

مساحت مثلث = ۱۸، پس مساحت  $BOM$  برابر  $\frac{18}{3} = 6$

$$\rightarrow \frac{1.5 \times BO}{2} = 6 \rightarrow BO = 9 \times \frac{2}{1.5} = 12 \rightarrow OM = 2$$

$$\rightarrow \frac{BM'}{CM} = \frac{9}{1.5} = \frac{12}{2} = \frac{4}{1}$$

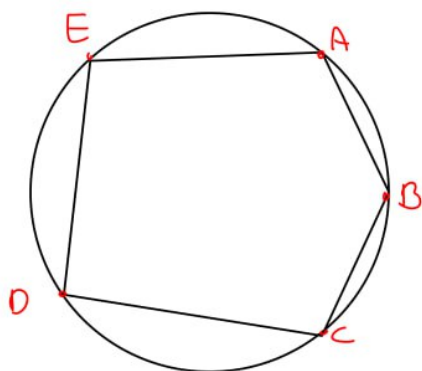
۲۹- یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۵۴۰ (۱)



$$\begin{aligned} \text{مجموع زوایای محاطی} &= \frac{\text{مجموع کمان‌ها}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA}}{2} \\ &= \frac{360}{2} = 180^\circ \end{aligned}$$

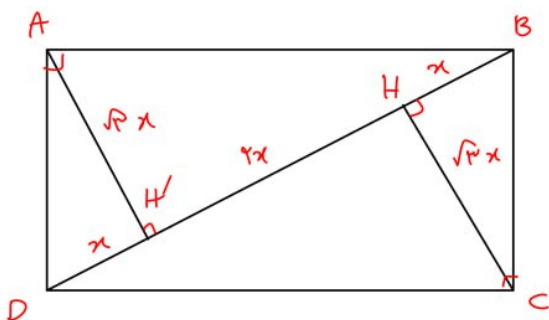
۲۷- در یک مستطیل، خط‌هایی از دو رأس مقابل بر یک قطر عمود می‌شوند و آن قطر به سه قسمت طوری تقسیم می‌شود که قسمت وسط دو برابر هریک از قسمت‌های کناری است. مساحت این مستطیل چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجادشده در مستطیل است؟

۱ (۴)

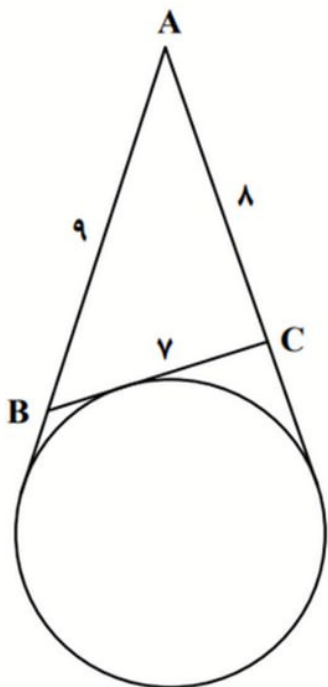
۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴ (۱)



$$\begin{aligned}
 AH = CH &= \text{ارتفاع در مثلث قائم} = \sqrt{BH \times DI} = \sqrt{3x^2} \\
 &= \sqrt{3}x \\
 CD^2 &= (\sqrt{3}x)^2 + (2x)^2 = 13x^2 \rightarrow CD = 2\sqrt{13}x \\
 BC^2 &= (\sqrt{3}x)^2 + x^2 = 4x^2 \rightarrow BC = 2x \\
 \rightarrow \frac{S_{\square}}{S_{\Delta}} &= \frac{2\sqrt{13}x \times 2x}{\frac{2x \times \sqrt{13}x}{2}} = \frac{4\sqrt{13}x^2}{\sqrt{13}} = 4
 \end{aligned}$$



۳۰- در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟

$$P = \frac{12}{4} = 12$$

$$S = \sqrt{12 \times 5 \times 12 \times 12} = 12\sqrt{5} \rightarrow R = \frac{S}{P-v} = \frac{12\sqrt{5}}{12-4} = \frac{12}{8}\sqrt{5}$$

(۱)  $7,2\sqrt{2}$

(۲)  $4,8\sqrt{5}$

(۳)  $3,6\sqrt{2}$

(۴)  $2,4\sqrt{5}$

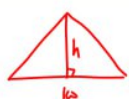
۳۱- در بین مثلث‌هایی با مساحت ۳۰ واحد مربع که در ضلعی به اندازه ۱۵ واحد مشترک هستند، کمترین مقدار محیط کدام است؟

۳۰ (۱)

۳۲ (۲)

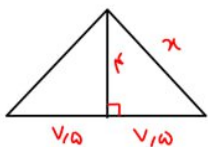
۳۴ (۳)

۳۶ (۴)



$$S = 30 \rightarrow h = \frac{2 \times 30}{15} = 4$$

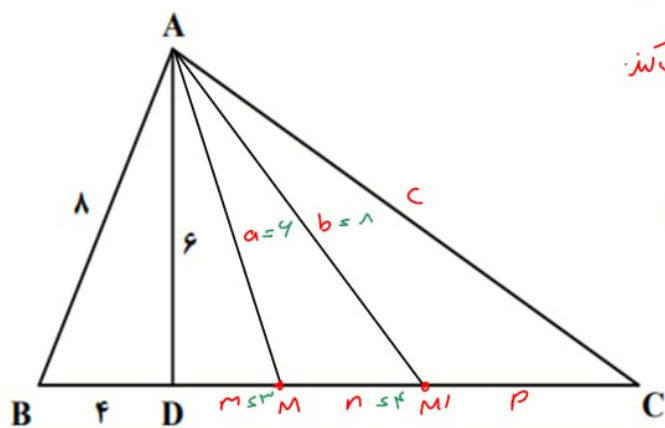
برای کمترین محیط راس سم باید وسط باشد



$$x = \sqrt{4^2 + 7.5^2} = \frac{17}{2} \rightarrow \text{محیط} = \frac{17}{2} + \frac{17}{2} + 15 = 32$$



۳۲- در شکل زیر، اگر  $\hat{D}AC = 3\hat{B}AD$  باشد، طول ضلع AC کدام است؟



دو خط AM و AN را طوری می‌کشیم که زاویه DAC را ۳ قسمت کند.

طبق قضیه نیسانها داریم:

(۳ بار استفاده می‌کنیم)

(۱)  $19/2$

(۲)  $16/8$

(۳)  $18/6$

(۴)  $15/4$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{m} = \frac{a}{f} = 4 \\ 4a - fm = 3f \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m = 4 \\ a = 4 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{n} = \frac{b}{f} = 1 \\ 4b - fn = 3f \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n = 4 \\ b = 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{m} = \frac{1}{n} = \frac{f}{p} \rightarrow 4c = 3p \\ 4c - 3p = 4f \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p = \frac{4f}{3} \\ c = \frac{4f}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4f}{3} = 19/2 \end{aligned}$$

۳۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} \log_6^3 & \log_6^2 \\ \log_6^2 & \log_6^3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{bmatrix}$  باشد، مقدار دترمینان  $B$ ، کدام است؟

$$\frac{15}{8} \quad (14)$$

$$\frac{9}{8} \quad (13)$$

$$\frac{15}{4} \quad (12)$$

$$\frac{9}{4} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |A| &= (\log_6^3)^2 - (\log_6^2)^2 = [\log_6^3 - \log_6^2] \times [\log_6^3 + \log_6^2] \\ &= \log_6 \frac{3}{4} \rightarrow 6^{|A|} = \frac{3}{4} \rightarrow |B| = 6^{|A|} \times 36^{|A|} - 3^{|A|} \times 2^{|A|} \\ &= (6^{|A|})^3 - 6^{|A|} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{4} = \frac{27}{64} - \frac{12}{64} = \frac{15}{64} \end{aligned}$$

۳۴- نمودار سهمی با مختصات رأس  $(-1, -1)$ ، از نقطه  $(1, 1)$  می‌گذرد. اگر از دو سر وتر و تری که از کانون بر محور سهمی عمود است، دو خط موازی با محور سهمی بر خط هادی عمود کنیم، یک مستطیل رسم می‌شود. قطر مستطیل حاصل کدام است؟

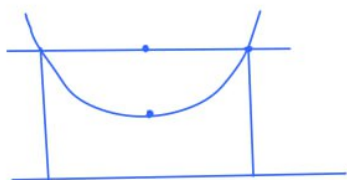
$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$5\sqrt{2} \quad (1)$$

$$(x+1)^2 \leq 4a(y+1) \xrightarrow{(1,1)} (2)^2 \leq 4a(2) \rightarrow a=1$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{قطر مستطیل} = \text{وتر کانونی} = 4a = 2 \\ \text{مربع مستطیل} = 4a = 1 \end{array} \right\} \text{قطر} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

۳۵- فرض کنید  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آنها،  $-\frac{3}{5}$  حاصل ضرب اندازه‌های دو بردار است.

مساحت مثلثی را که توسط بردارهای  $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$  و  $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$  ساخته می‌شود، کدام است؟

۱/۶ (۴)

۳/۲ (۳)

۴/۸ (۲)

۶/۴ (۱)

$$a \cdot b = \frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \xrightarrow{0 < \theta < 180^\circ} \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow S_{\Delta} = \left| \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right| = \left| 0 - \frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} + \frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \vec{b} \times \vec{a} + 0 \right|$$

$$= \left| \frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 4 \sin \theta = \frac{4 \times 4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\rightarrow S_{\Delta} = \frac{16}{5} = 3,2$$

۳۶- خط  $d$  به معادله  $y - x = 0$ ، عمود منصف خط المרכזین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط  $d$  بر

دایره کوچک تر به معادله  $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$  مماس باشد، حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

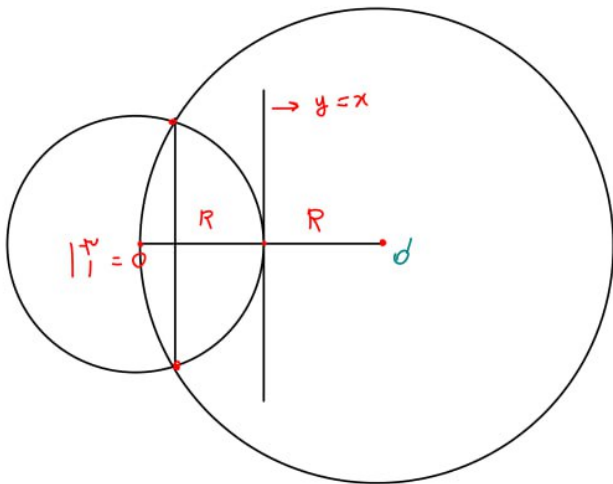
$$\frac{65}{64} \quad (4)$$

$$\frac{65}{32} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &0 \mid \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \\ &R = \sqrt{9+1+r} \\ &= \sqrt{10+r} \end{aligned}$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$



در نهایت برضوخ دو دایره را حساب می‌کنیم

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 9 + 1 - 1 = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 + 9 - 32$$

$$4x - 2y - 1 = 4y - 2x - 32 \rightarrow 1x - 1y = -24$$

$$\rightarrow y - x = 3 \rightarrow y = x + 3$$

$$x^2 + 4x + (x+3)^2 - 2x - 9 + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0$$

$$\rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

نامبر ۵ تا حفظ  $x$  و  $y$  می‌شود شعاع

$$\Rightarrow r = \frac{13+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \sqrt{10+r} \rightarrow r = 2$$

$$\rightarrow \text{دایره کوچکتر} = (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

معادله خط المکزین را به دست می‌آوریم: می‌دانیم از  $(-3, 1)$  می‌گذرد و شیب آن  $1$  و  $3$  معکوس شیب  $d$  است پس  $d$  عمود بر آن می‌شود

$$y = -x + 2$$

روی خط  $-x - 2$  از نقطه  $(-3, 1)$  طوری به سمت راست می‌رویم که

فاصله آن  $2\sqrt{2}$  یا  $2\sqrt{2}$  شود تا به  $d$  برسیم

$(-3, 1)$



$$\rightarrow 2x = 2y = 2 \rightarrow d = (1, -3)$$

$$\text{دایره بزرگ} = (x-1)^2 + (y+3)^2 = 32$$