پاسخ تشریحی سوالات درس ریاضی کنکور رشته ریاضی – تیرماه ۱۴۰۲

علـی آزاد

۱- اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

اگر جملات دنباله‌ی هندسی را نصف کنیم باز هم دنباله‌ی هندسی خواهد بود و تنها دنباله‌ای که هم هندسی است و هم حسابی، دنباله‌ی ثابت می‌باشد.

بنابراین $r=1$, $d=0$ $\Leftarrow$ $r+d=1$

روش دوم $\Rightarrow$ $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2} \xrightarrow{\text{حسابی}} 2\left(\frac{ar}{2}\right)=\frac{a}{2}+\frac{ar^2}{2} \Rightarrow \cancel{a}r=\frac{\cancel{a}}{2}+\frac{\cancel{a}r^2}{2}$

$\Rightarrow r^2-2r+1=0 \Rightarrow (r-1)^2=0 \Rightarrow \underline{r=1} \Rightarrow$ جملات دنباله: $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \Rightarrow \underline{d=0}$

۲- نقاط $A(3,y)$ و $B(-5,y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2+\beta^2=5$ باشد، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ✓ ۴) $\frac{2}{3}$

با توجه به نقاط $A(3,y)$ و $B(-5,y)$ می‌توان دریافت x رأس سهمی برابر با $\frac{-5+3}{2}=-1$ است.

رأس سهمی $S(-1,1) \Rightarrow y=k(x+1)^2+1=k(x^2+2x+1)+1=kx^2+2kx+k+1$

α , β ریشه‌های معادله $\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-2 \; , \; \alpha\beta=\frac{k+1}{k} \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\Rightarrow 5=(-2)^2-2\frac{k+1}{k} \Rightarrow 2\left(\frac{k+1}{k}\right)=-1 \Rightarrow 2k+2=-k \Rightarrow k=-\frac{2}{3}$

معادله سهمی $\Rightarrow y=-\frac{2}{3}(x+1)^2+1 \xrightarrow{x=0} y=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$

۵- اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ✓

β , α ریشه‌های معادله $\Rightarrow \alpha+\beta=1 \quad , \quad \alpha\beta=-\frac{b}{a}$

$$40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17 \Rightarrow 30\beta^2+10\beta^2+30\alpha^2-10\alpha^2-20\beta=17$$

$$\Rightarrow 30(\alpha^2+\beta^2)+10\underbrace{(\beta^2-\alpha^2)}_{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}-20\beta=17 \Rightarrow 30\left(1+\frac{2b}{a}\right)+\underbrace{10\beta-10\alpha-20\beta}_{-10(\alpha+\beta)}=17$$

$$\Rightarrow 30\left(1+\frac{2b}{a}\right)=27 \Rightarrow 1+\frac{2b}{a}=0/9 \Rightarrow \frac{2b}{a}=-0/1 \Rightarrow \frac{b}{a}=-\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{a^2+4ab}}{a}=\frac{\cancel{a}\sqrt{1+\frac{4b}{a}}}{\cancel{a}}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۶- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{160}{9}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲ ✓ ۴) ۲/۲۵

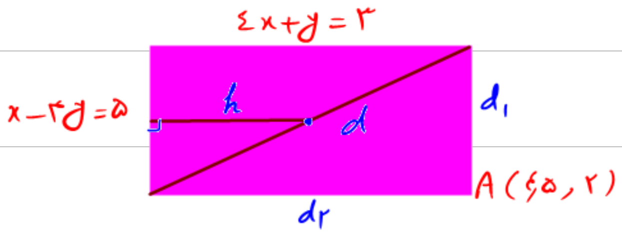
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{160}{9} \Rightarrow \frac{(x-1)^2+x^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2+1-2x}{x^2(x-1)^2}=\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2x(x-1)+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{160}{9} \Rightarrow x(x-1)=t \Rightarrow \frac{2t+1}{t^2}=\frac{160}{9} \Rightarrow 160t^2-18t-9=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=0/3 \\ t_2=-\frac{3}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x=0/3 \Rightarrow x^2-x-0/3=0 \Rightarrow S_1=-\frac{b}{a}=1 \\ x^2-x=-\frac{3}{16} \Rightarrow x^2-x+\frac{3}{16}=0 \Rightarrow S_2=-\frac{b}{a}=1 \end{cases} \Rightarrow 1+1=2$$

۷- نقطه $(۴/۵,۲)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $۴x+y=۳$ و $x-۴y=۵$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ✓ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$



نقطه‌ی $A(4.5,2)$ بر روی هیچ کدام از خطوط داده شده نمی باشد.

حال می بایست فاصله‌ی نقطه‌ی A را تا هر کدام از خط‌ها محاسبه کرد تا طول و عرض مستطیل مشخص شود.

فاصله‌ی A تا خط $4x+y=3$: $d_1=\frac{|4(4.5)+2-3|}{\sqrt{16+1}}=\frac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

فاصله‌ی A تا خط $x-4y=5$: $d_2=\frac{|4.5-4\times 2-5|}{\sqrt{1+16}}=\frac{17/2}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$$\Rightarrow h=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

۸- وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنه محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۱ ✓

$$y=12-x \xrightarrow{y=10} 10=12-x \Rightarrow x=2 \qquad (2,10)\in f^{-1} \Rightarrow (10,2)\in f$$

$$2=\sqrt{10-2\sqrt{10m-1}} \Rightarrow 4=10-2\sqrt{10m-1} \Rightarrow \sqrt{10m-1}=3 \Rightarrow m=1$$

$$\Rightarrow f(m+4)=f(5)=\sqrt{5-2\sqrt{5-1}}=1$$

۹- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_۳^۵ = ۱/۴$ و $\log_۲^۵ = ۲/۴$)

۱) ۳۸۰ ✓ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۴۲۰

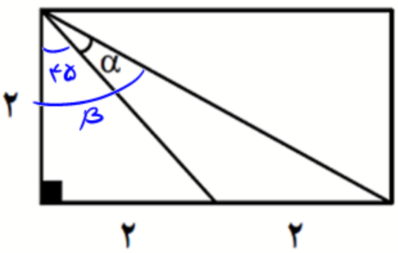
$$t_n = t_1\left(\frac{8}{9}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{6}t_1 = t_1\left(\frac{8}{9}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{6} = \left(\frac{8}{9}\right)^n \Rightarrow \log_5^{\frac{1}{6}} = \log_5^{\left(\frac{8}{9}\right)^n}$$

$$\Rightarrow -\log_5^6 = n\log_5^{\frac{8}{9}} \Rightarrow n = \frac{-\log_5^6}{\log_5^8 - \log_5^9} = \frac{-\log_5^2 - \log_5^3}{3\log_5^2 - 2\log_5^3} \quad (1)$$

$$\log_2^5 = 2.4 \Rightarrow \log_5^2 = \frac{1}{2.4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \qquad \log_3^5 = 1.4 \Rightarrow \log_5^3 = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$(1) \Rightarrow n = \frac{-\frac{5}{12} - \frac{5}{7}}{\frac{15}{12} - \frac{10}{7}} = \frac{-35-60}{105-120} = \frac{-95}{-15} = +\frac{19}{3} \text{ ساعت } = \frac{19}{3} \times 60 = 380 \text{ دقیقه}$$

۱۰- در شکل زیر، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۳ ✓

۳) $\frac{۱}{۲}$

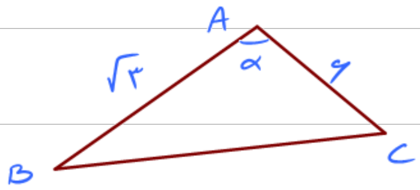
۴) $\frac{۱}{۳}$

$$\alpha + 45 = \beta \Rightarrow \alpha = \beta - 45 \qquad \tan\beta = \frac{4}{2} = 2$$

$$\tan\alpha = \tan(\beta - 45) = \frac{\tan\beta - \tan 45}{1 + \tan\beta \tan 45} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot\alpha = 3$$

۱۱- مثلث ABC، با اضلاع $\sqrt{۳}$ و ۶ و α (زاویه بین آنها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث ۴/۵ باشد، بیشترین مقدار α چند برابر کمترین مقدار α است؟

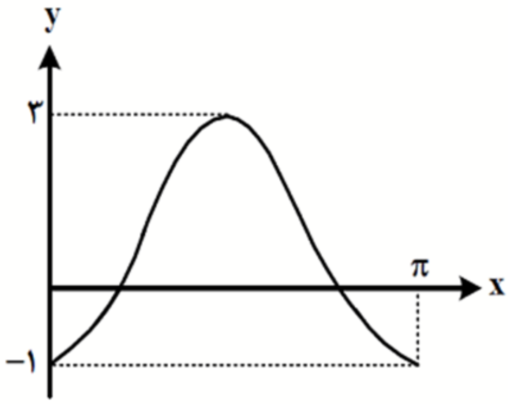
۱) ۲ ✓ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



$S = \frac{1}{۲} \times ۶ \times \sqrt{۳} \times \sin\alpha = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = ۶۰^\circ \\ \alpha_۲ = ۱۲۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۶۰} = ۲$

۱۲- اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin(cx - \frac{۳\pi}{۴})\cos(cx - \frac{۳\pi}{۴})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازهٔ $[0,\pi]$، کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{۲\pi}{۳}$ ✓

$f(x) = a + \frac{b}{۲}\sin(۲cx - \frac{۳\pi}{۲}) = a + \frac{b}{۲}\cos(۲cx)$

$T = \pi \Rightarrow \frac{۲\cancel{\pi}}{|۲c|} = \cancel{\pi} \Rightarrow |۲c| = ۲ \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow c = 1$

$x = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = -1 \qquad x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow a - \frac{b}{۲} = ۳$

$\begin{cases} a + \cancel{\frac{b}{۲}} = -1 \\ a - \cancel{\frac{b}{۲}} = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -۴ \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 - ۲\cos(۲x) = 0$

$\cos ۲x = \frac{1}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{۶} \\ x_۲ = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow x_۲ - x_1 = \frac{۲\pi}{۳}$

۱۳- در معادله مثلثاتی $m(\cos x-\sin x)-۳\sqrt{۶}\sin(۲x)=\sqrt{۶}$ اگر $\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) ۶ ✓ ۴) ۳

$$\cos(x+\tfrac{\pi}{۴})=\cos x\cos\tfrac{\pi}{۴}-\sin x\sin\tfrac{\pi}{۴}=\tfrac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)=\tfrac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow \cos x-\sin x=\tfrac{۲}{\sqrt{۶}}=\tfrac{\sqrt{۶}}{۳}\quad (*)$$

$$\Rightarrow m(\tfrac{\sqrt{۶}}{۳})-۳\sqrt{۶}\sin۲x=\sqrt{۶}\Rightarrow \sqrt{۶}(\tfrac{m}{۳}-۳\sin۲x)=\sqrt{۶}\Rightarrow \tfrac{m}{۳}-۳\sin۲x=۱\quad (\mathrm{I})$$

$$(*)\quad (\cos x-\sin x)^۲=۱-\sin۲x=\tfrac{۲}{۳}\Rightarrow \sin۲x=\tfrac{۱}{۳}$$

$$(\mathrm{I})\Rightarrow \tfrac{m}{۳}-۳\times\tfrac{۱}{۳}=۱\Rightarrow \tfrac{m}{۳}=۲\Rightarrow \underline{m=۶}$$

۱۴- تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

f اکیداً نزولی $\Rightarrow f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)\Rightarrow m^۲-m-۵>-۳+۲m-m^۲$

$\Rightarrow ۲m^۲-۳m-۲>۰\Rightarrow (m-۲)(۲m+۱)>۰\Rightarrow$

		$-\frac{۱}{۲}$		۲	
$۲m^۲-۳m-۲$	+	۰	−	۰	+
	ج				غقق

$\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}\quad (\mathrm{I})$

$m^۲-m-۵<۰\Rightarrow \frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}<m<\frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲}\quad (\mathrm{II})$

$-۳+۲m-m^۲<۰\Rightarrow m^۲-۲m+۳>۰\Rightarrow \Delta<۰$ ریشه ندارد.

$(\mathrm{I}),(\mathrm{II})\Rightarrow m=-۱$

۱۵- f تابع هموگرافیک، $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ۱ ✓ ۴) ۲

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a} \qquad g(x)=\frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\frac{a/c}{-b/a}=-\frac{a^2}{bc} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\frac{-b/a}{c/a}=-b/c$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{b\cancel{c}}=-\frac{b}{\cancel{c}} \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x)=-b/a=\pm 1$$

۱۶- برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[-x]| & \text{زوج } [x]\\ x-[x]+k & \text{فرد } [x]\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد درخصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) n زوج ۲) n فرد ✓

۳) برای جمیع مقادیر n پیوسته است. ۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

با مثال عددی برای n مسئله را حل می‌کنیم. اگر n = ۱ در نظر بگیریم می‌بایست پیوستگی را در نقاط x = ±1 بررسی کنیم.

$$x=1 \Rightarrow f(1)=k \qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=k \qquad \lim_{x\to1^-}f(x)=2 \Rightarrow k=2$$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=k \qquad \lim_{x\to-1^+}f(x)=k \qquad \lim_{x\to-1^-}f(x)=2 \Rightarrow k=2$$

$\Rightarrow$ پیوسته

حال برای n=۲ بررسی می‌کنیم.

$$x=2 \Rightarrow f(2)=4 \ ,\quad \lim_{x\to2^+}f(x)=5 \ ,\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=k+1$$

مشاهده می‌شود به ازای هیچ مقداری از k پیوسته نمی‌باشد.

۱۷- اگر $f(x)=\left(\dfrac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^{2}$ و $f(x)=xg(x)+1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ کدام است؟

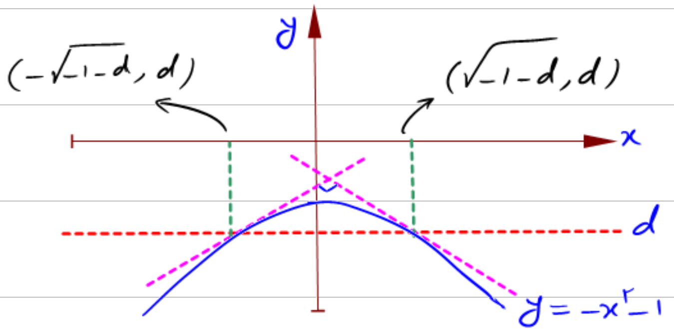
۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -4 ✓ ۴) -2

$$g(x)=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2-1}{x}=\frac{\cancel{1}+\cancel{\sin^2 x}-2\sin x-\cancel{1}-\cancel{\sin^2 x}-2\sin x}{x(1+\sin x)^2}=\frac{-4\sin x}{x(1+\sin x)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x}{x(1+\sin x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x}{x}=-4$$

۱۸- خط d موازی محور xها، قرینه سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ✓ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۲/۷۵



$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2-1 \\ y=d \end{array}\right\} \Rightarrow d=-x^2-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1-d}$$

$$y'=-2x \Rightarrow (-2\sqrt{-1-d})(2\sqrt{-1-d})=-1$$

$$\Rightarrow 4(-1-d)=1 \Rightarrow d+1=-\frac{1}{4} \Rightarrow d=-\frac{5}{4}=-1/25$$

۱۹- به‌ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطه عطف منحنی $y=kx^3+(k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیش از ۲ ۴) صفر ✓

$$y'=3kx^2+2(k+1)x \Rightarrow y''=6kx+2(k+1) \xrightarrow{k<0} x=\frac{-2(k+1)}{6k}=\frac{-(k+1)}{3k}$$

برای اینکه نقطه‌ی عطف در ناحیه دوم قرار بگیرد باید $x<0$, $y>0$ باشد.

$$x = \frac{-(k+1)}{3k} < 0 \Rightarrow$$

k		-1		0	
$-(k+1)$	$+$	0	$-$		$-$
$3k$	$-$		$-$		$+$
	$-$	0	$+$	ت ن	$-$

$\Rightarrow k < -1$ یا $k > 0$ (I)

ق ق   غ ق ق

$$y = kx^3 + (k+1)x^2 = k\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^3 + (k+1)\left(-\frac{(k+1)}{3k}\right)^2 = \frac{-(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^3}{9k^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(k+1)^3}{27k^2} > 0 \Rightarrow k+1 > 0 \Rightarrow k \in (-1, \infty) - \{0\} \quad (II)$$

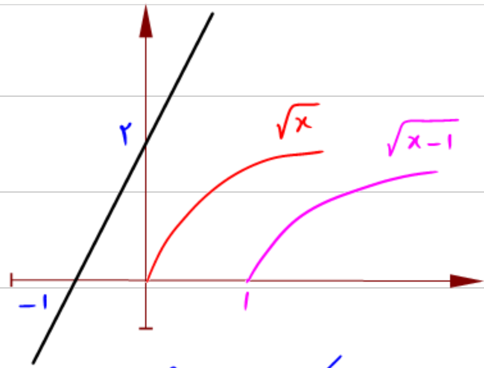
$(I), (II) \Rightarrow \varnothing$ ش

۲۰- کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ ✓   ۳) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ۴) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

$0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow y = \sqrt{x}$

$1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x-1}$



با توجه به شکل نمودار مشخص است نمودار $\sqrt{x}$ کمترین فاصله را تا خط داده شده، خواهد داشت.

فاصله‌ی نقاط تابع $\sqrt{x}$ تا خط $2x - y + 2 = 0$: $d = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{مشتق}} d' = \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{5}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}, \quad y = \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{\frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$