① $\underset{هندسی}{a, ra, r^۲a} \rightarrow \underbrace{\frac{a}{۲}, \frac{ar}{۲}, \frac{ar^۲}{۲}}_{حسابی} \rightarrow \frac{ar}{۲} = \frac{ar^۲}{۲} + \frac{a}{۲}$

$\rightarrow r^۲+۱=۲r \rightarrow \boxed{r=۱}$

مهندس کامیاب مرادی

---

② $\begin{matrix}(۴, y)\\(-۵, y)\end{matrix} \rightarrow$ x راس وسط آنها برابر $\rightarrow x_{راس} = \frac{۴+(-۵)}{۲} = -۱ \rightarrow -\frac{b}{۲a} = -/۵ \rightarrow \boxed{b=۲a}$

$y_{راس} = ۱ \longrightarrow \frac{-\Delta}{۴a} = ۱ \rightarrow \boxed{-b^۲-۴ac=۴a}$

$\alpha^۲+\beta^۲=۵ \rightarrow S^۲-۲P=۵ \rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} - ۲\frac{c}{a} = ۵ \rightarrow \frac{۴a^۲}{a^۲} - \frac{۲c}{a} = ۵$

$\frac{۲c}{a} = -۱ \rightarrow \boxed{۲c=-a}$

$\Rightarrow -(۲a)^۲ - ۲a(-a) = ۴a \rightarrow -۴a^۲ - ۲a^۲ = ۴a \rightarrow$

$-۶a^۲ = ۴a \rightarrow -۶a^۲ - ۴a = ۰ \rightarrow \begin{matrix}a=۰ \times\\ \boxed{a=-\frac{۲}{۳}}\end{matrix} \rightarrow c = \frac{۱}{۳}$

---

⑤ $ax^۲-ax-b=۰ \rightarrow x^۲-x-\frac{b}{a}=۰ \Rightarrow \begin{matrix}S=۱\\P=-\frac{b}{a}\end{matrix}$

$۴۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta=۱۷ \rightarrow ۲\beta^۲+\alpha^۲-\beta=\frac{۱۷}{۲۰}$

$\Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲+\underbrace{\beta^۲-\beta}_{\frac{b}{a}=-P} = \frac{۱۷}{۲۰} \rightarrow S^۲-۲P-P=\frac{۱۷}{۲۰} \rightarrow ۱-۳P=\frac{۱۷}{۲۰}$

با توجه به معادله

$\rightarrow \boxed{P=\frac{۱}{۲۰}} \Rightarrow |\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$

⑥

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹} \to \frac{(۱-x)^۲+x^۲}{x^۲(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$$

مهندس کامیاب مرادی

$$\frac{۲x^۲-۲x+۱}{x^۴-۲x^۳+x^۲}=\frac{۱۶۰}{۹} \to \frac{۲x^۲-۲x+۱}{(x^۲-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$$

$$x^۲-x=t \to \frac{۲t+۱}{t^۲}=\frac{۱۶۰}{۹} \to ۱۶۰t^۲-۱۸t-۹=۰$$

$$\to \sqrt{\Delta}=۷۸ \to t_۱=\frac{۱۸+۷۸}{۳۲۰}=\frac{۹۶}{۳۲۰}$$

$$t_۲=\frac{۱۸-۷۸}{۳۲۰}=\frac{-۶۰}{۳۲۰}$$

لازم به محاسبه نبود

$$x^۲-x=\overset{\alpha}{\frac{۹۶}{۳۲۰}} \to S=۱$$

$$x^۲-x=\underset{\beta}{-\frac{۶۰}{۳۲۰}} \to S=۱$$

$$\to S_T=۲$$

---

⑦

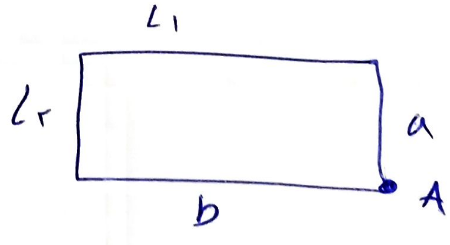
$$x-۴y=۵ \xrightarrow{(۴٫۵\,,\,۲)}$$ صدق نمی‌کند

$$۴x+y=۳ \longrightarrow$$ صدق نمی‌کند

$$l_۱:\ y=\frac{۱}{۴}x-\frac{۵}{۴}$$

$$\to l_۱ \perp l_۲$$

$$l_۲:\ y=-۴x+۳$$



بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع می‌شود نصف طول «b»

A فاصله از $l_۱$: $a=\frac{|۴٫۵-۸-۵|}{\sqrt{۱+۱۶}}=\frac{۸٫۵}{\sqrt{۱۷}}$

A فاصله از $l_۲$: $b=\frac{|۴(۴٫۵)+۲-۳|}{\sqrt{۴^۲+۱^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۱۷}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}}$

⑧ $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$

$y=۱۲-x \xrightarrow[y=۵x]{} x=۲ \Rightarrow (۲,۱۰) \to f(۱۰)=۲ \to m=۱$

$f(m+۴)=f(۵)=\sqrt{۵-۲\sqrt{۵-۱}}=۱$

---

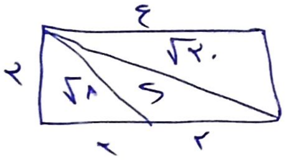
⑨ $A_۲=A_۱(۱-\frac{۱}{۹})^{\frac{t}{۱}} \to \frac{۱}{۶}=(\frac{۸}{۹})^t \to ۶=(\frac{۹}{۸})^t$

$\to \log_۵ \Rightarrow \log_۵^۶=t(\log_۵^۹-\log_۵^۸)$

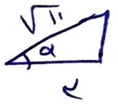
$\Rightarrow \log_۵^۲+\log_۵^۳=t(۲\log_۵^۳-۳\log_۵^۲)$

$\Rightarrow \frac{۱}{\log_۲^۵}+\frac{۱}{\log_۳^۵}=t(\frac{۲}{\log_۳^۵}-\frac{۳}{\log_۲^۵})$

---

⑩ 

$s=۸-۲-۴=۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸}\times\sqrt{۲۰}\times\sin\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \to$ 

$\to \boxed{\cot\alpha=۳}$

---

⑪ $s=۴{,}۵=\frac{۹}{۲}=\frac{۱}{۲}\times ۶\times\sqrt{۳}\sin\alpha \to \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \alpha=۱۲۰, ۶۰$

$\frac{۱۲۰}{۶۰}=$ ②

---

⑫ $f(x)=a+\frac{b}{۲}\sin(۲c(x-\frac{۳\pi}{۴}))=a+\frac{b}{۲}\cos ۲cx$

با توجه به نمودار، $\frac{b}{۲}=-۲$ و $a=۱$ و $c=۱$

$f(x)=۱-۲\cos۲x=۰ \to \cos۲x=\frac{۱}{۲} \to x=\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$

---

⑬ $[\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x \Rightarrow \cos x-\sin x=\sqrt{\frac{۲}{۳}}]$

$\cos x-\sin x=t \to t^۲=۱-\sin۲x \Rightarrow \quad mt-۲\sqrt{۶}(۱-t^۲)=\sqrt{۶}$

$\Rightarrow ۲\sqrt{۶}t^۲+mt-۴\sqrt{۶} \xrightarrow[t=\sqrt{\frac{۲}{۳}}]{\text{صورت اصل}} ۲\sqrt{۶}+m\sqrt{\frac{۲}{۳}}-۴\sqrt{۶}=۰ \to \boxed{m=۶}$

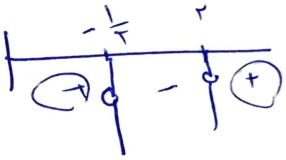
مهندس کامیاب مرادی

⑭

دامنه تابع $(-\infty , 0)$ است

اکیدا نزولی → $\underbrace{-m^2+2m-4 < m^2-5m-5}_{} < 0$

→ $(2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow$



$m^2-m-5<0 \rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ ↘ $\cap$

$\boxed{m=-1}$ عدد صحیح $\Leftarrow \left(2 , \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2} , -\frac{1}{2}\right)$

۱۵

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

مهندس کامیاب مرادی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}\Rightarrow\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\rightarrow a^{۲}=b^{۲}\Rightarrow a=\pm b$$

$$\lim_{x\to ۰^+}f^{-1}(x)=-\frac{b}{a}=\pm ۱$$

۱۶

$$f(x)=\begin{cases}\left|x-[-x]\right| & \text{زوج } [x]\\ x-[x]+k & \text{فرد } [x]\end{cases}$$

فرض $n=۱$, $n=۲$ $\longrightarrow$ $x=\pm ۱$, $x=\pm ۲$

$x=-۱:$ $\lim_{x\to-۱^+}f(x)=f(-۱)=k$, $\lim_{x\to-۱^-}f(x)=\left|-۱-[-(-۱^-)]\right|=۲$

$$\boxed{k=۲}$$

$x=۲:$ $\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\left|۲-[-(۲^+)]\right|=۵$

$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\left(x-[x]+k\right)=۱+k$

$f(۲)=۴$

پیوسته نمی‌شود

⇐ فقط برای مقادیر فرد n

۱۷

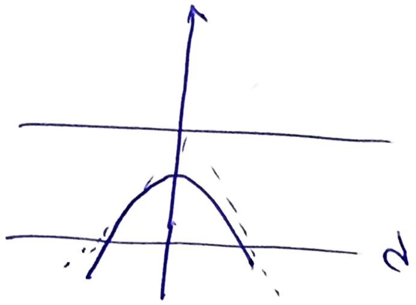
$$f(x)=xg(x)+۱\rightarrow g(x)=\frac{f(x)-۱}{x}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}g(x)=\lim\frac{f(۰)-۱}{۰}=\text{HOP}$$

باید ۰ شود

$$\lim_{x\to ۰}g(x)=f'(۰)\left\{f'(x)=۲\left(\frac{\sin x-۱}{\sin x+۱}\right)\left(\frac{\cos x(\sin x+۱-\sin x+۱)}{(\sin x+۱)^{۲}}\right)\right.$$

$$\boxed{f'(۰)=-۴}$$

۱۸



خط d سهمی $y=-x^2-1$ را در ۲ نقطه قطع می‌کند

مهندس کامیاب مرادی

برای عمود بودن ۲ مماس باید شیب‌ها ۱+ و ۱- باشند چون نسبت به خط $x=0$ متقارن هستند

$f'(x)=\pm ۱ \to -۲x=۱ \to x=-\frac{۱}{۲}$

$-۲x=-۱ \to x=\frac{۱}{۲} \to y=-\frac{۵}{۴} \to (\frac{۱}{۲}, -\frac{۵}{۸})$

این همان عرض خط d است

فاصله $=۱,۲۵$

---

۱۹ $y=ax^3+bx^2 \xrightarrow[\text{نقطه عطف}]{} \left(-\frac{b}{۳a}, \frac{۲}{۲۷}\frac{b^3}{a^2}\right) \to$ ربع دوم

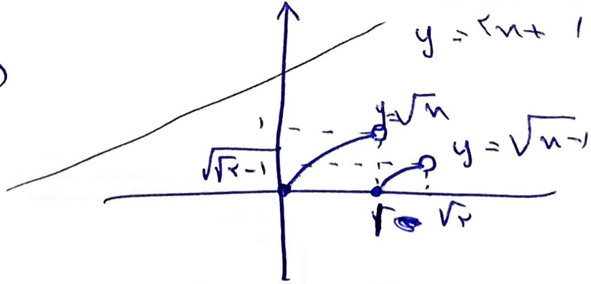
$-\frac{b}{a}<۰$

$\frac{b^3}{a^2}>۰ \to \underset{k^2}{a}, \underset{k+1}{b}>۰ \Rightarrow k>۰, \; k+1>۰ \to k>-۱$

در این بازه هیچ مقدار k صحیح منفی نداریم

---

۲۰ $y=\sqrt{x-[x^2]} \Rightarrow$



کمترین فاصله بر روی نمودار $y=\sqrt{x}$ به ازای $۱>x>۰$ است

$\Rightarrow A(a, \sqrt{a}) \to d(a)=\frac{|۲a-\sqrt{a}+۲|}{\sqrt{۴+۱}} \to d'(a)=۰ \to ۲-\frac{۱}{۲\sqrt{a}}=۰$

$\Rightarrow a=\frac{۱}{۱۶} \to d_{min}=\frac{|\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}+۲|}{\sqrt{۵}}=۳\frac{\sqrt{۵}}{۸}$