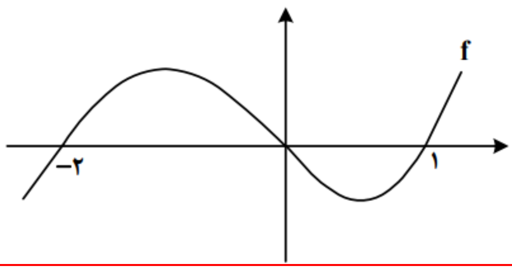
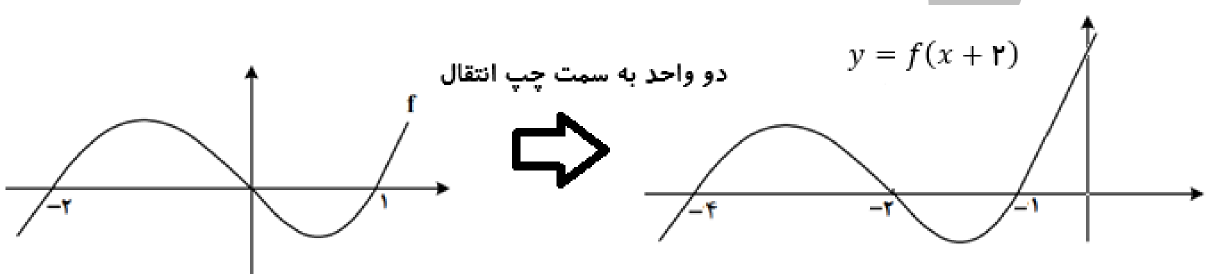
توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

حل: نمودار تابع $y=f(x+۲)$ همون نمودار $y=f(x)$ است که دو واحد به سمت چپ انتقال پیدا کرده.



حالا بریم جدول تعیین علامت رو بدست بیاریم:

x	$-\infty$		-٤		-۲		-۱		۰		۱		∞
y		−		+		−		−	0	+	0	−	

بازه $[۰,۱]\cup(-٤,-۲)$ دامنه تابع است که فقط شامل اعداد صحیحِ صفر، ۱ و ۳- هستند.

۱۱۲- اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۶- ۴) ۶

حل: اول عبارت $f([x+f(x)])$ رو ساده کنیم. پس:

$$[x+f(x)]=[x+۲[x]-x]=\big[۲[x]\big]=۲[x]$$

$$g(x)=f(۲[x])=۲\big[۲[x]\big]-۲[x]=٤[x]-۲[x]=۲[x]$$

حالا مقدار $f\left(-\frac{۵}{۳}\right)$ رو بدست بیاریم که برابر میشه با:

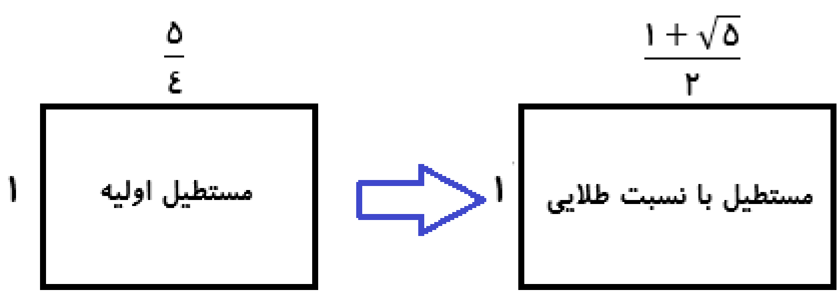
$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right) = ۲\left[-\frac{۵}{۳}\right] - \frac{۵}{۳} = ۲[-۱/۶۶] + \frac{۵}{۳} = ۲(-۲) + \frac{۵}{۳} = -۴ + \frac{۵}{۳} = -\frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow g\left(f\left(-\frac{۵}{۳}\right)\right) = g\left(-\frac{۷}{۳}\right) = ۲\left[-\frac{۷}{۳}\right] = ۲[-۲/۳] = ۲(-۳) = -۶$$

۱۱۳- نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

۱) $۰/۳ + \sqrt{۵}$ ۲) $۰/۲(۱+\sqrt{۵})$ ۳) $۰/۶ + ۰/۲\sqrt{۵}$ ۴) $۰/۴(۱+\sqrt{۵})$

حل: نسبت طلایی برابر است با $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ که در مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر با همین مقدار است. برای سادگی، عرض مستطیل رو ۱ واحد در نظر میگیریم. چون در مستطیل جدید نسبت طول به عرض برابر با نسبت طلایی است، طول این مستطیل برابر با $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ خواهد شد.



$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۵}{۴}} = \frac{۲}{۵}(۱+\sqrt{۵}) = ۰/۴(۱+\sqrt{۵})$$

۱۱۴- ریشه‌های معادله $۲x^۲ - ax + b = ۰$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $۲ax^۲ + ax - ۶ = ۰$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{۴}\right]$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

حل: اگر ریشه‌های معادله اول رو x فرض کنیم و ریشه‌های معادله دوم رو t، رابطه $x = t + \frac{۱}{۲}$ برقرار است. پس:

$$t = x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲ax\left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + a\left(x - \frac{۱}{۲}\right) - ۶ = ۲ax^۲ - ax - ۶$$

معادله بدست اومده رو با معادله اول متحد قرار میدیم. بنابراین:

$$۲ax^۲ - ax - ۶ \equiv ۲x^۲ - ax - ۶ \Rightarrow a = ۱, b = -۶ \Rightarrow \left[\frac{ab}{۴}\right] = \left[\frac{-۶}{۴}\right] = [-۱/۵] = -۲$$

۱۱۵- اگر $f(x)=(x+\log x)^{۵}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(fof)(x)<f(x^{۵})$ کدام است؟

۱) $(۰,۵)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(۵,+\infty)$ ۴) $(۱,+\infty)$

حل: چون تابع f اکیدا صعودی است، پس میتونیم نامعادله داده شده رو به صورت زیر ساده کنیم:

$$f(f(x))<f(x^{۵}) \Rightarrow f(x)<x^{۵} \Rightarrow (x+\log x)^{۵}<x^{۵} \Rightarrow x+\log x<x$$

$$\Rightarrow \log x<۰ \Rightarrow x<۱$$

از طرفی دامنه $\log x$ برابر با $x>۰$ میشه. پس جواب نهایی بازه $(۰,۱)$ خواهد بود.

۱۱۶- صفرهای تابع $y=۲x^{۲}-(m+۲)x+m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y=x^{۲}-mx+۱$ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

حل: طول قاعده مثلث ایجاد برابر با اختلاف ریشه‌ها (صفرهای تابع) است. ارتفاع این مثلث نیز برابر با عرض از مبدا این تابع، یعنی m خواهد شد. در ادامه سوال حاصل $\frac{m}{۲}$ خواسته شده است.

اختلاف ریشه‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ که در این مسئله برابر است با:

$$\text{قاعده مثلث}=\frac{\sqrt{(m+۲)^{۲}-٤(۲)(m)}}{۲}=\frac{\sqrt{m^{۲}+٤m+٤-۸m}}{۲}=\frac{\sqrt{m^{۲}-٤m+٤}}{۲}=\frac{\sqrt{(m-۲)^{۲}}}{۲}=\frac{|m-۲|}{۲}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{|m-۲|}{۲}\times|m|=\frac{|m(m-۲)|}{٤}=\frac{۳}{٤}\Rightarrow |m(m-۲)|=۳$$

پس:

$$\begin{cases} m(m-۲)=۳ \\ m(m-۲)=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^{۲}-۲m-۳=۰ \\ m^{۲}-۲m+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-۱\,,m=۳ \\ \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس طول رأس سهمی برابر با $\frac{۳}{۲}$ یا $-\frac{۱}{۲}$ میشه. پس گزینه ٤ درسته. اگه $\frac{۳}{۲}$ هم در گزینه‌ها بود، درست میشد، برای همین در صورت سوال گفته: " کدام می‌تواند باشد".

۱۱۷- تابع $f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & ۲x+۳\leq ۰ \\ ۲+۲mx-x^۲ & ۲x+۳>۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به‌ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

حل: برای اینکه این تابع معکوس‌پذیر باشد، اولا هر ضابطه باید روی دامنه خودش یک به یک باشه. ثانیا برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشه. برد ضابطه اول به صورت زیره:

$$۲x+۳\leq ۰ \Rightarrow x\leq -\frac{۳}{۲} \Rightarrow -۳x\geq \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲-۳x\geq \frac{۹}{۲}+۲=\frac{۱۳}{۲}$$

پس برد ضابطه دوم باید $\left(-\infty,\frac{۱۳}{۲}\right)$ باشه. طول رأس سهمی برابر با m میشه و عرضش:

$$۲+۲m^۲-m^۲=۲+m^۲$$

طول رأس سهمی باید کمتر از $-\frac{۳}{۲}$ باشد. پس:

$$\begin{cases} m<-\frac{۳}{۲} \\ ۲+m^۲<\frac{۱۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<-\frac{۳}{۲} \\ m^۲<\frac{۹}{۲}=۴/۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<-\frac{۳}{۲} \\ m=-۲,-۱,۰,۱,۲ \end{cases}$$

پس فقط $m=-۲$ قابل قبوله و ضابطه دوم به فرم $-x^۲-۴x+۲$ میشه. پس:

$$-x^۲-۴x+۲=-۱۹ \Rightarrow x^۲+۴x-۲۱=۰ \Rightarrow (x+۷)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=-۷\,,۳$$

چون $x>-\frac{۳}{۲}$ هست، پس ۳ قابل قبوله.

۱۱۸- اگر $\log ۲\simeq ۰/۳$ و $\log ۳\simeq ۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $x^۲(\log ۳۰)+۲x(\log ۶)-\log\frac{۵}{۶}=۰$ چقدر است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۴ ۴) ۱

حل: اختلاف ریشه‌های معادله درجه دوم میشه $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ که در این سوال به صورت زیر میشه:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۴(\log ۶)^۲+۴\log ۳۰\times\log\left(\frac{۵}{۶}\right)}}{\log ۳۰}=\frac{۲\sqrt{(\log ۶)^۲+(\log ۵+\log ۶)(\log ۵-\log ۶)}}{\log ۳۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sqrt{\cancel{(\log ۶)^۲}+(\log ۵)^۲-\cancel{(\log ۶)^۲}}}{\log ۳۰}=\frac{۲\log ۵}{\log ۳۰}=\frac{۲(۱-\log ۲)}{\log ۳+\log ۱۰}=\frac{۲(۰/۷)}{۰/۴+۱}=\frac{۱/۴}{۱/۴}=۱$$

۱۱۹- اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$
۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$
۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$
۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

حل: میدونیم که $\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$ میشه. مقدار زاویه هم در بازه $\frac{۳\pi}{٤} < x < \pi$ قرار داره. در این ناحیه $\sin x > ۰$ و $\cos x < ۰$. البته زورِ کسینوس بیشتره، پس حاصل کسر باید منفی بشه. یعنی گزینه‌های ۲ و ٤ درست نیستن.

حالا بریم مقدارش رو بدست بیاریم.

$$\cos^۳ x + \sin^۳ x = (\cos x + sinx)^۳ - ۳ \sin x \cos x (\cos x + \sin x)$$

از طرفی $\frac{۱}{\sin x \cos x} = -۳ \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{۱}{۳}$ میشه. پس:

$$\cos^۳ x + \sin^۳ x = (\cos x + sinx)^۳ + (\cos x + \sin x) = (\cos x + \sin x)((\cos x + \sin x)^۲ + ۱)$$

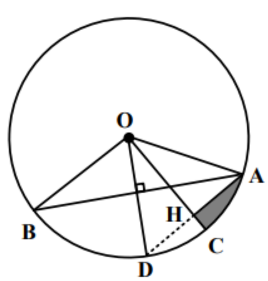
$$= (\cos x + \sin x)(۱ + ۲ \sin x \cos x + ۱) = (\cos x + \sin x)\left(۲ + ۲\left(-\frac{۱}{۳}\right)\right) = \frac{٤}{۳}(\cos x + \sin x)$$

حالا باید $\cos x + \sin x$ رو بدست بیاریم. برای اینکار یه بار به توان ۲ میرسونیم و یه بار جذر میگیریم. البته میدونیم که مقدارش منفیه‌ها! پس:

$$\sqrt{(\cos x + \sin x)^۲} = \sqrt{۱ + ۲ \sin x \cos x} = \sqrt{۱ - \frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس حاصل $\cos^۳ x + \sin^۳ x$ برابر میشه با $-\frac{٤}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و جواب مسئله برابر است با $-\frac{۳}{٤}\sqrt{۳}$ یا به عبارت دیگه $-۰/۷۵\sqrt{۳}$.

۱۲۰- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π، $A\hat{O}B = ۱۲۰^\circ$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده‌شده کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$
۲) $\sqrt{۲} - \frac{\pi}{۶}$
۳) $\pi - \sqrt{۳}$
۴) $\pi - \sqrt{۲}$

حل: مساحت دایره برابر با $\pi r^۲$ هست و در اینجا مساحت π شده. پس شعاع ۱ هست. محیط مثلث AOH برابر است با $OA + OH + AH$ میشه که در اینجا OA همون شعاع دایره‌اس، یعنی ۱. محیط ناحیه سایه زده هم برابر با $AH + HC + \widehat{AC}$ میشه. اختلاف این دو محیط میشه:

$$(۱ + OH + \cancel{AH}) - (\cancel{AH} + HC + \widehat{AC}) = ۱ + OH - HC - \widehat{AC} = ۱ + OH - (۱ - OH) - AC$$
$$= ۲OH - \widehat{AC}$$

زاویه $AOC = ۳۰^\circ$ میشه. پس $OH = OA \times \cos ۳۰ = ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. طول کمان $\widehat{AC}$ هم برابر میشه با حاصلضرب شعاع در زاویه (بر حسب رادیان). پس:

$$\widehat{AC} = r\theta = ۱ \times \frac{\pi}{٦} = \frac{\pi}{٦}$$

پس اختلاف دو محیط برابر است با:

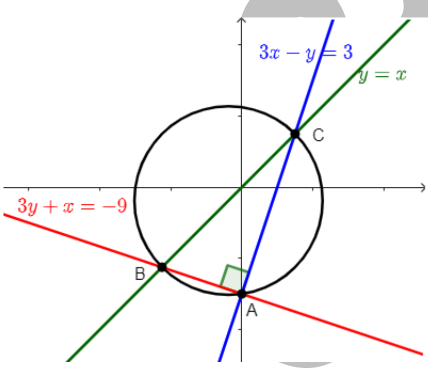
$$۲OH - \widehat{AC} = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{٦}$$

۱۲۱- خطوط $۳y + x = -۹$ و $ax - y = ۳$، یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = ۰$ را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

حل: قطر BC کمان دایره را به دو کمان مساوی (۱۸۰ درجه) تقسیم می‌کند. زاویه محاطی نصف کمان رو به رو است، پس زاویه A برابر با ۹۰ درجه خواهد شد. بنابراین خطوط $۳y + x = -۹$ و $ax - y = ۳$ بر هم عمود هستند. پس حاصل‌ضرب شیب این دو خط باید ۱- شود. لذا:

$$\left(-\frac{۱}{۳}\right)(a) = -۱ \Rightarrow a = ۳$$



برای محاسبه $\tan B$ و $\tan C$ نیاز داریم که طول اضلاع مثلث را بدست آوریم. برای همین مختصات نقاط A و B و C رو بدست میاوریم. با تلاقی این خطوط با هم مختصات این سه نقطه به ترتیب برابر با $(۰, -۳)$، $\left(-\frac{۹}{٤}, -\frac{۹}{٤}\right)$ و $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}\right)$ خواهد شد. پس:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲} = \sqrt{\left(\frac{۹}{٤}\right)^۲ + \left(\frac{۳}{٤}\right)^۲} = \frac{۳}{٤}\sqrt{۱۰}$$

$$AC = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲} = \sqrt{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۹}{۲}\right)^۲} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

در صورت سوال مقدار $\tan(B - C)$ خواسته شده که برابر است با $\tan(B - C) = \frac{\tan B - \tan C}{۱ + \tan B \tan C}$

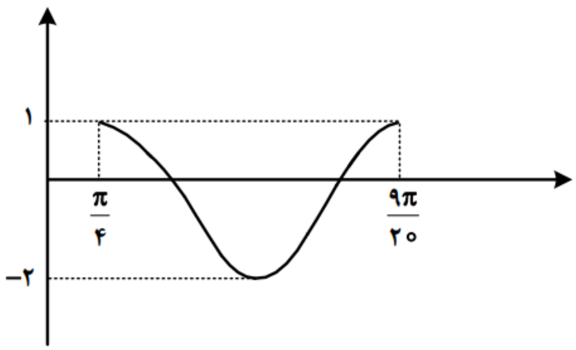
میدونیم که $B + C = ۹۰$، پس $\tan C = \cot B$. بنابراین:

$$\tan(B-C)=\frac{\tan B-\cot B}{۱+\tan B\cot B}=\frac{\tan B-\cot B}{۲}$$

پس، $\tan B=\frac{AC}{AB}=۲$ و $\cot B=\frac{۱}{۲}$. بنابراین:

$$\tan(B-C)=\frac{۲-\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۳}{٤}$$

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع $y=a\cos^۲(bx-\frac{\pi}{۴})+c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) ۱۵

۲) −۱۵

۳) ۷/۵

۴) −۷/۵

حل: دوره تناوب برابر است با $\frac{۹\pi}{۲۰}-\frac{\pi}{٤}=\frac{\pi}{۵}$. از طرفی میدونیم که دوره تناوب تابع $\cos^۲\alpha$ نصف دوره تناوب $\cos\alpha$ میشه. پس:

$$T=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۵}\Rightarrow b=\pm ۵$$

برد تابع $a\cos^۲\left(bx-\frac{\pi}{٤}\right)$ هم بازه $[۰,a]$ هست، پس c باید ۲- باشه. همچنین $a+c=۱$ باید باشه، پس $a=۳$ میشه. حالا ببینیم که b مثبته یا منفی؟! مقدار این تابع در $\frac{\pi}{٤}$ باید ۱ بشه. پس:

$$if\ b=-۵\Rightarrow y=۳\cos^۲\left(-۵\left(\frac{\pi}{٤}\right)-\frac{\pi}{٤}\right)-۲=۳\cos^۲\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)-۲=-۲\neq ۱$$

پس $b=۵$ میشه و $ab=۱۵$. البته اگه نمودار رو هم ادامه میدادی مشخصه که b مثبته!

۱۲۳- اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}+\frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})}=۰$ در بازه $[۰,\pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۳}$

حل: اول معادله رو ساده کنیم. میتونیم به جای $\sin\left(\frac{\pi+٤x}{۲}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۲}+۲x\right)=\cos ۲x$ و همچنین به جای $\cos\left(\frac{\pi+۸x}{۲}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}+٤x\right)=-\sin ٤x$ رو قرار بدیم. پس:

$$\frac{۱}{\cos ۲x}-\frac{۱}{\sin ٤x}=۰ \Rightarrow \cos ۲x=\sin ٤x \Rightarrow \cos ۲x=۲\sin ۲x\cos ۲x \Rightarrow$$

چون $\cos ۲x$ در مخرج کسر قرار گرفته و صفر نمیتونه باشه، پس از دو طرف معادله ساده‌اش می‌کنیم. بنابراین:

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{٦} \\ ۲x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{٦} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲} \\ x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

چون جواب‌های در بازه $(۰,\pi)$ رو خواسته، این دو جواب برابر با $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ میشه که اختلافشون برابر با $\frac{\pi}{۳}$ میشه. پس $\tan ۲\alpha=\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$

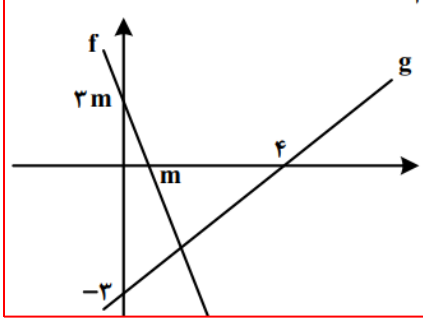
۱۲۴- مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۸}\frac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

حل: اگه به جای x مقدار ۸ رو بذاریم صفر میشه. پس مخرج هم قطعا صفر بوده که حاصل حد یه عدد حقیقی غیر صفر شده. پس مخرج هم باید به ازای این مقدار صفر بشه، یعنی $۸a-b=۰ \Rightarrow a=\frac{b}{۸}$. پس حد رو میتونیم به حد زیر تبدیل کنیم:

$$\lim_{x\to ۸}\frac{b\left(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲\right)}{\frac{b}{۸}x-b}=\lim_{x\to ۸}\frac{\cancel{b}\left(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲\right)}{\cancel{b}\left(\frac{۱}{۸}x-۱\right)} \Rightarrow hop: \lim_{x\to ۸}\frac{\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۲\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}}}{\frac{۱}{۸}}=\frac{\frac{\frac{۱}{۱۲}}{٤}}{\frac{۱}{۸}}=\frac{۱}{٦}$$

۱۲۵- شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۱) -۳
۲) ۳
۳) -۴
۴) ۴

حل: برای محاسبه حد در بی نهایت کافیه پرتوان صورت رو در نظر بگیریم و پرتوان مخرج. شیب تابع $g(x)$ برابر با $\frac{4}{3}$ میشه. در واقع ضابطه این تابع به صورت $g(x) = \frac{4}{3}x - 3$ میشه و ضابطه $f(x)$ هم به صورت $f(x) = -3x + 3m$. پس:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|-3x+3m|}{\frac{4}{3}x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|-3x|}{\frac{4}{3}x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{\frac{4}{3}x} = -4$$

۱۲۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x^2+(m-1)x+(m-4)}}{\left|x^3+((m-7)x+a)^2\right|} & x\neq a \\ \dfrac{2\sin b}{3\sqrt{x+2}} & x=a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{5\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

حل: برای اینکه تابع در R پیوسته باشه، اولا هر ضابطه روی دامنه خودش باید پیوسته باشه. ثانیا باید شرط پیوستگی رو در نقطه (نقاط) تغییر ضابطه بررسی کنیم. در ضابطه اول عبارت زیر رادیکال یه ریشه ۱- داره. چون $m - 1 = m - 4 + 3$ میشه. ۱- ریه مخرج هم هست که در این صورت برای اینکه این تابع پیوسته باشه، باید این ریشه مضاعف باشه تا از زیر رادیکال بیاد بیرون و یه ریشه ساده به ما تحویل بده. در غیر اینصورت حاصل کسر بی نهایت میشه و تابع نمیتونه پیوسته باشه. پس عبارت زیر رادیکال به فرم $3(x+1)^2$ باید باشه یا $3x^2 + 6x + 3$. پس $m = 7$ میشه و تابع رو میتونیم به فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+a^2|} & x \neq a \\ \frac{2\sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$$

پس $a = -1$ میشه. حالا بریم حاصل حد این تابع در این نقطه رو بدست بیاریم:

$$\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+1|} = \sqrt{3} \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای پیوسته بودن باید مقدار این با مقدار تابع در این نقطه، یعنی $\frac{2}{3}\sin b = \frac{2\sin b}{3\sqrt{(-1)+2}}$ برابر باشه. پس:

$$\frac{2}{3}\sin b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

۱۲۷- اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

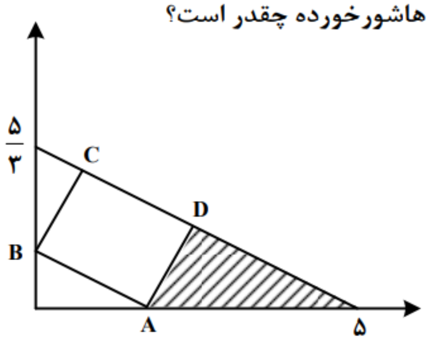
۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

حل: مقدار خواسته شده برابر است با $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$. پس میتونیم اول $fog(x)$ رو تشکیل بدیم، بعد ازش مشتق بزنیم. میدونیم که تابع g برای مقادیر مثبت تعریف نشده‌اس. چون مخرج صفر مطلق میشه، برای مقادیر منفی هم برابر با $\frac{1}{2x^3}$ میشه. تابع f هم فقط برای مقادیر منفی تعریف شده‌اس که به فرم $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$ تبدیل میشه. پس:

$$f\left(\frac{1}{2x^3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2\left(\frac{1}{2x^3}\right)}}=x \Rightarrow fog(x)=x \Rightarrow \left(f\left(g(x)\right)\right)'=1$$

پس مشتق تابع $fog(x)$ در هر نقطه‌ای برابر با ۱ میشه.

۱۲۸- در شکل زیر، مساحت مستطیل **ABCD** ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



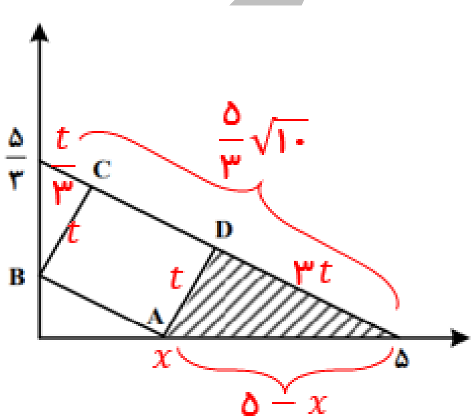
۱) $\frac{15}{8}$

۲) $\frac{15}{16}$

۳) $\frac{25}{12}$

۴) $\frac{25}{24}$

حل: مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=t\left(\frac{5}{3}\sqrt{10}-3t-\frac{t}{3}\right)=\frac{5}{3}\sqrt{10}t-\frac{10}{3}t^2 \Rightarrow$$

$$S'=\frac{5}{3}\sqrt{10}-\frac{20}{3}t=0 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}t(3t)=\frac{3}{2}t^2=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2=\frac{3}{2}\left(\frac{10}{16}\right)=\frac{15}{16}$$

۱۲۹- در یک دسته ۷تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف‌معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف‌معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

حل: اعداد دسته اول رو به صورت $a-٦, a-٤, a-٢, a, a+٢, a+٤, a+٦$ در نظر می‌گیریم.
انحراف معیار این اعداد برابر است با:

$$\sigma^٢ = \frac{٦^٢+٤^٢+٢^٢+٢^٢+٤^٢+٦^٢}{٧} = \frac{٢\times ٥٦}{٧} = ١٦ \Rightarrow \sigma = ٤$$

طبق اطلاعات صورت مسئله $\sigma = \frac{\overline{x}_١}{٢}$. پس میانگین دسته اول ۸ است، یعنی داده وسط. پس بزرگترین عدد این دسته ١٤ است.

انحراف معیار دسته آخر هم همین میشه، چون اعداد متوالی هستند. طبق اطلاعات صورت مسئله $\overline{x}_٢ = \sigma^٢$.
پس میانگین دسته آخر برابر است با ١٦. پس داده وسط این دسته ١٦ است و بزرگترین داده آن ٢٢ است.
پس اختلاف این دو عدد برابر است با $٢٢ - ١٤ = ٨$.

۱۳۰- چند عدد یازده‌رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ باشند؟

۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱ ۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

حل: چون عددمون باید مضرب ٦ باشه، پس هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشه و هم بر ۳. برای اینکه بر ۲ بخش‌پذیر باشه، رقم یکان باید صفر یا زوج باشه، که در این مسئله فقط میتونیم از ۲ استفاده کنیم. در ده رقم اول اگه n تا ۲ داشته باشیم، پس تعداد $١٠ - n$ تا ۱ داریم. در این صورت مجموع ارقام به صورت زیر میشه:

$٢n + ١٠ - n + ٢ = n + ١٢ \Rightarrow$ باید مضرب ۳ باشه

پس n میتونه صفر، ۳، ٦، ۹ باشه.

اگه $n = ٠$ باشه، یعنی عددمون ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۲ میشه که فقط یک حالته. اگه $n = ٣$ باشه، پس ۳ تا دو داریم که میتونن در جایگاه‌های ۱ تا ۱۰ قرار بگیرین که میشه انتخاب ۳ جایگاه از ۱۰ جایگاه، یعنی $\binom{١٠}{٣}$. پس کل حالات ممکن برابر میشه با:

$$١ + \binom{١٠}{٣} + \binom{١٠}{٦} + \binom{١٠}{٩} = ١ + ١٢٠ + ٢١٠ + ١٠ = ٣٤١$$

۱۳۱- یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار kاُم «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+۵}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

حل: اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم و بخواهیم که k امین "رو" را در آخرین پرتاب ببینیم، پس در $n-۱$ پرتاب اول، باید $k-۱$ "رو" مشاهده کنیم که به $\binom{n-۱}{k-۱}$ حالت ممکن است. کل فضای نمونه هم که برابر با ۲^n است که در مخرج قرار میگیره و با هم ساده میشن. از طرفی برای اینکه در n پرتاب k "رو" مشاهده شود، به $\binom{n}{k}$ حالت ممکن است. نسبت احتمال این دو حالت باید $\frac{k}{k+۵}$ شود. پس:

$$\frac{\binom{n-۱}{k-۱}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{k+۵} \Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{k}{k+۵} \Rightarrow n = k+۵ \Rightarrow n+k = k+۵+k = ۲k+۵$$

پس n می‌تواند، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ یا ... باشد. پس گزینه ۲ درست است.

۱۳۲- احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۱) ۲۰/۵۵ ۲) ۲۹/۵۵ ۳) ۲۰/۲۵ ۴) ۲۹/۲۵

حل: از قانون احتمال کل باید استفاده کنیم:

$$P(\text{قبولی پزشکی}) = P(A)P(\text{قبولی}|A) + P(B)P(\text{قبولی}|B) + P(C)P(\text{قبولی}|C) = (۰/۴ \times ۰/۲۵) + (۰/۳۵ \times ۰/۳) + (۰/۲۵ \times ۰/۳۵)$$

محاسبه عبارت فوق وقت‌گیره! چون جواب رو بر حسب درصد خواسته، کل عبارت رو باید در ۱۰۰ ضرب کنیم که به صورت زیر تبدیل میشه:

$$(۴۰ \times ۰/۲۵) + (۰/۳۵ \times ۳۰) + (۰/۲۵ \times ۳۵) = (۴۰ \times ۰/۲۵) + (۰/۲۵ \times ۳۰ + ۰/۱ \times ۳۰) + (۰/۲۵ \times ۳۵)$$

حالا میتونیم از ۰/۲۵ فاکتور بگیریم. پس:

$$۰/۲۵(۴۰+۳۰+۳۵)+۳ = ۰/۲۵(۱۰۵)+۳ = \frac{۱۰۵}{۴}+۳ = ۲۵+۱/۲۵+۳ = ۲۹/۲۵$$

۱۳۳- نقاط $A(-۱,۴)$، $B(۳,۱)$، $C(x,y)$ و $D(-۱-x,y+۳)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

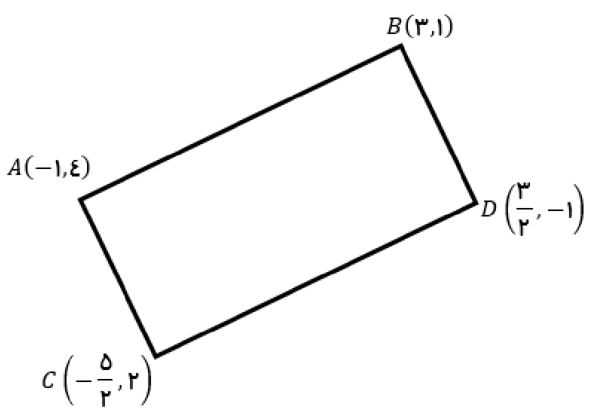
حل: میدونیم در هر مستطیل رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + x = 3 - 1 - x \\ 4 + y = 1 + y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ 4 + y = y + 4 \end{cases}$$

از رابطه دوم نمیتونیم مقدار y رو بدست بیاریم. ولی میدونیم که طول AB بر عرض BC عمود است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر با ۱- می‌شود. پس:

$$m_{AB} \times m_{BC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -1 \Rightarrow \frac{1-4}{3-(-1)} \times \frac{y-1}{\frac{3}{2} - 3} = \frac{-3}{4} \times \frac{y-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{y-1}{2}$$
$$= -1 \Rightarrow y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1$$

ساختار مستطیل به فرم زیر میشه:



پس طول مستطیل برابر است با:

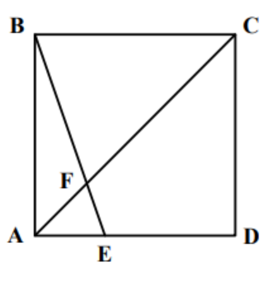
$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

عرض مستطیل هم برابر است با:

$$BC = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} =$$
$$\sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

پس محیط برابر است با $2\left(5 + \frac{5}{2}\right) = 10 + 5 = 15$.

۱۳۴- در مربع شکل زیر، اندازه **ED** دو برابر **AE** است. طول **EF** چند برابر **AF** است؟



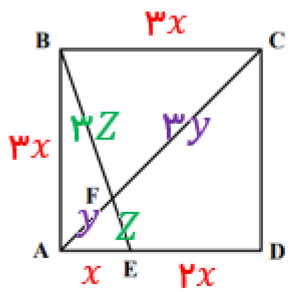
۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

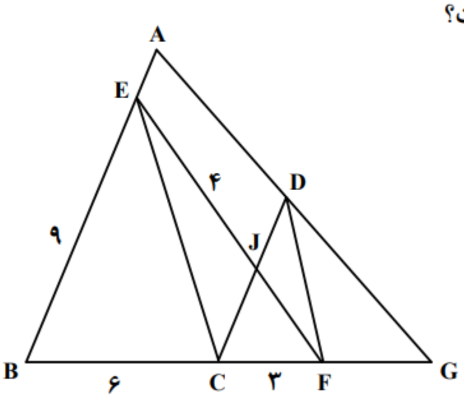
حل: اندازه AE رو برابر با x در نظر میگیریم. در اینصورت ED برابر با $2x$ خواهد بود. یعنی عرض مربع برابر با $3x$ میشه. همچنین دو مثلث AFE و BFC متشابه هستن با نسبت تشابه ۳. پس:



طول BE برابر است با $\sqrt{۳^۲+۱^۲}\,x=\sqrt{۱۰}\,x$. پس EF برابر است با $\frac{۱}{٤}\sqrt{۱۰}\,x$.
همچنین طول قطر مربع، یعنی AC برابر است با $۳\sqrt{۲}\,x$. پس طول AF برابر است با $\frac{۱}{٤}\times ۳\sqrt{۲}\,x$. بنابراین:

$$\frac{EF}{AF}=\frac{\frac{۱}{٤}\sqrt{۱۰}\,\cancel{x}}{\frac{۱}{٤}\times ۳\sqrt{۲}\,\cancel{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

۱۳۵- در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و $DF \parallel EC$ است. اندازه DF چقدر است؟



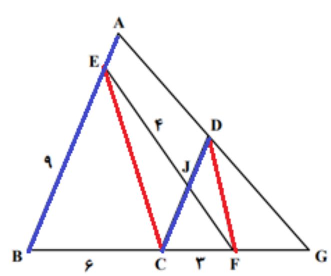
۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۴}$

۲) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$

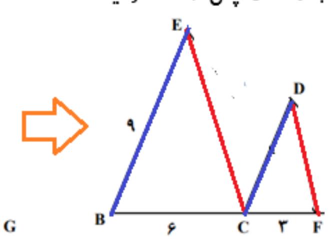
۳) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$

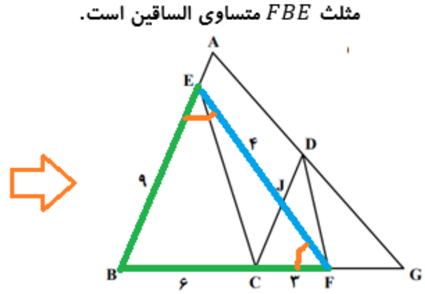
حل:

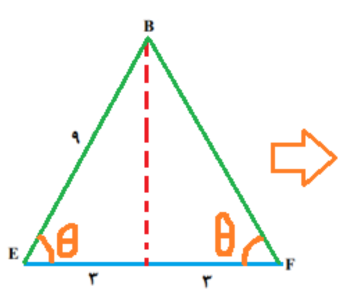


این دو مثلث با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ متشابه هستند. پس $JF=۲$ میشه.

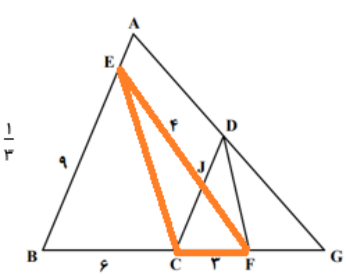


مثلث FBE متساوی الساقین است.





$\cos\theta=\frac{۱}{۳}$



طبق قضیه کسینوس‌ها:

$$CE^۲=٦^۲+۳^۲-۲\times۳\times٦\times\cos\theta=۳٦+۹-۲\times\cancel{۳}\times٦\times\frac{۱}{\cancel{۳}}=۳۳\ \Rightarrow CE=\sqrt{۳۳}$$

میدونیم EC دو برابر DF است (به علت تشابه). پس:

$$\Rightarrow DF = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

۱۳۶- طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-۱,۲/۵)$ در دایره $۲x^۲+۲y^۲-۶x-۱۰y+۱=۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

حل: طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه به مختصات M در دایره از رابطه $۲\sqrt{|C(M)|}$ بدست می‌آید. پس در ابتدا باید مختصات نقطه داده شده رو در معادله دایره جایگذاری کنیم. البته باید معادله دایره رو به فرم استاندارد تبدیل کنیم. یعنی ضریب $x^۲$ و $y^۲$ برابر با ۱ باشد. پس کل معادله رو گسترده رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

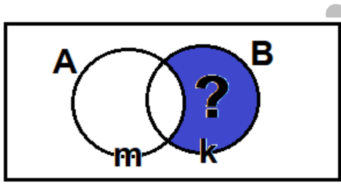
$$C(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۳x - ۵y + \frac{۱}{۲} \Rightarrow C(M) = (-۱)^۲ + \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ - ۳(-۱) - ۵\left(\frac{۵}{۲}\right) + \frac{۱}{۲} = -\frac{۷}{٤}$$

$$\text{طول کوتاه ترین وتر} = ۲\sqrt{\left|-\frac{۷}{٤}\right|} = \sqrt{۷}$$

۱۳۷- مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m-k=۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

حل: نمودار ون صورت مسئله به صورت زیر است:



میدونیم که $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = m + k - n(A\cap B)$

همچنین طبق اطلاعات صورت مسئله داریم:

$$n(A\cup B) - n(A\cap B) = m + k - n(A\cap B) - n(A\cap B) = m + k - ۲n(A\cap B) = ۲۰$$

هدف مسئله یافتن $n(B-A)$ است که برابر است با $n(B) - n(A\cap B) = k - n(A\cap B)$. پس:

$$\begin{cases} m + k - ۲n(A\cap B) = ۲۰ \\ m - k = ۱٤ \Rightarrow m = k + ۱٤ \end{cases} \Rightarrow k + ۱٤ + k - ۲n(A\cap B) = ۲۰ \Rightarrow$$

$$۲k - ۲n(A\cap B) = ۲۰ - ۱٤ = ٦ \Rightarrow ۲\big(k - n(A\cap B)\big) = ٦ \Rightarrow k - n(A\cap B) = ۳$$

۱۳۸- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۲^۲ = ۵a_۳a + ۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

حل: در رابطه داده شده، به جای جملات دوم و سوم به ترتیب $a+d$ و $a+۲d$ را قرار می‌دهیم. پس:

$$۶(a+d)^۲ = ۵(a+۲d)a + ۳(a+d)a \Rightarrow ۶a^۲ + ۱۲ad + ۶d^۲ = ۵a^۲ + ۱۰ad + ۳a^۲ + ۳ad$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ + ad - ۶d^۲ = ۰ \quad I \text{ رابطه}$$

هدف محاسبه $\frac{a_۴}{d}$ است، یعنی $\frac{a+۳d}{d} = \frac{a}{d} + ۳$. برای بدست آوردن $\frac{a}{d}$، رابطه I رابر $d^۲$ تقسیم می‌کنیم. پس:

$$۲\left(\frac{a}{d}\right)^۲ + \frac{a}{d} - ۶ = ۰ \Rightarrow ۲t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = -۲, t = \frac{۳}{۲}$$

پس $\frac{a}{d} + ۳$ می‌تواند برابر با ۱ یا برابر با ۴/۵ باشد. لذا گزینه ۱ درست است.

۱۳۹- اگر $A = \{\log_۹ x + ۳\log_{x^۲} ۳ : x > ۱\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۳}$

حل (راه اول): اگه رابطه مجموعه رو ساده کنیم به عبارت زیر میرسیم:

$$\log_۹ x + \frac{۳}{۲}\log_x ۳ = \log_۹ x + \log_x ۳^{\frac{۳}{۲}}$$

اگه این دو جمله رو در هم ضرب کنیم، طبق خاصیت $\log_c a \times \log_b a = \log_b a$ داریم:

$$\log_۹ x \times \log_x ۳^{\frac{۳}{۲}} = \log_۹ ۳^{\frac{۳}{۲}} = \log_{۳^۲} ۳^{\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{۲}\log_۳ ۳ = \frac{۳}{۴}$$

چون حاصل‌ضرب این دو جمله عدد ثابت $\frac{۳}{۴}$ است، مینیمم این مجموعه زمانی اتفاق میفته که هر دو جمله برابر با هم برابر باشن، یعنی برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشند. پس مینیمم این مجموعه برابر است با $\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲$.

راه دوم:

$$\log_{۳^۲} x + \frac{۳}{۲}\log_x ۳ = \frac{۱}{۲}\left(\log_۳ x + \frac{۳}{\log_۳ x}\right)$$

با تغییر متغیر $\log_{۳} x = t$ تابع تبدیل به $\frac{۱}{۲}\left(t+\frac{۳}{t}\right)$ میشه که برای محاسبه کمترین مقدار از این تابع مشتق میزنیم. پس:

$$\left(۱-\frac{۳}{t^{۲}}\right)t' = ۰ \Rightarrow ۱-\frac{۳}{t^{۲}} = ۰ \Rightarrow t=\sqrt{۳} \Rightarrow min = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۳}+\frac{۳}{\sqrt{۳}}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۲\sqrt{۳}\right) = \sqrt{۳}$$

۱۴۰- حداقل چند عضو از مجموعه $f=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ x=\frac{۷۲}{y^{۲}-۱}\right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل: باید اعضای مجموعه f را بدست آوریم. عبارت داده شده رو میتونیم به فرم $y^{۲} = \frac{۷۲}{x} + ۱$ تبدیل کنیم. $y^{۲}$ می‌تواند صفر، ٤، ۹ یا ۲۵ باشد که در اینصورت x ها برابر هستند با ۷۲-، ۲٤، ۹ یا ۳. پس مجموعه f به صورت زیر است:

$$f = \{(-۷۲,۰),(۲٤,\pm۲),(۹,\pm۳),(۳,\pm۵)\}$$

برای اینکه مجموعه f بیانگر یک تابع باشد، باید به ازای یک ورودی مشخص، فقط یک خروجی داشته باشیم. پس سه عضو باید حذف گردد.

مهندس سید امید شفیعی
دانش آموخته مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران
در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد
مدرس کنکور و دانشگاه
ایمیل: seyedomid.shafiei@gmail.com