www.konkur.in

فصل ۱

تحلیل و تشریح دروس ریاضی کنکور ۱۴۰۲

«صفی شاهی‌فرد»

۱.۱ پاسخ درس ریاضی کنکور تجربی ۱۴۰۲ «صفی شاهی‌فرد»

۱) **تست:** نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+۲)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ

$$-\frac{f(x)}{f(۲+x)}\geq ۰ \Longrightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)}\leq ۰$$

$$f(x)=۰ \Longrightarrow x=-۲,۰,۱,\ f(۲+x)=۰ \Longrightarrow x=-۴,-۲,-۱$$

x	$-\infty$		-۴		-۲		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(۲+x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$\frac{f(x)}{f(۲+x)}$		$+$	ت‌ن	$-$	ت‌ن	$-$	ت‌ن	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس $\mathcal{D}_g=(-۴,-۲)\cup(-۲,-۱)\cup[۰,۱]$ که شامل ۳ عدد صحیح است.

۲) **تست:** اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $(gof)(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) ۶

پاسخ

$$(gof)(-\tfrac{۵}{۳})=(g(f(-\tfrac{۵}{۳}))=g(-\tfrac{۷}{۳})=f([-\tfrac{۷}{۳}+f(-\tfrac{۷}{۳})])=f([-\tfrac{۷}{۳}-\tfrac{۱۱}{۳}])=f(-۶)=-۲$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۳) **تست:** نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه، کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $0/3+\sqrt{5}$ ۲) $0/2(1+\sqrt{5})$ ۳) $0/6+0/2\sqrt{5}$ ۴) $0/4(1+\sqrt{5})$

پاسخ ابعاد مستطیل را $5x$ و $4x$ در نظر می‌گیریم و افزایش طول را y می‌نامیم:

$$\frac{5x+y}{4x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Longrightarrow 5x+y=2x(1+\sqrt{5})$$
$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{2x(1+\sqrt{5})(4x)}{5x\times 4x}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{5}=0/4(1+\sqrt{5})$$

۴) **تست:** ریشه‌های معادله $2x^2-ax+b=0$ نیم واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2+ax-6=0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $2ax^2-ax-6=0$ باشند، آن‌گاه $\alpha+0/5$ و $\beta+0/5$ ریشه‌های معادله $2x^2-ax+b=0$ است پس داریم:

$$\begin{cases} s=\alpha+\beta=-\frac{1}{2} \\ p=\alpha\beta=-\frac{3}{a}\end{cases}$$
$$\begin{cases} S=(\alpha+0/5)+(\beta+0/5)=\frac{a}{2}\Longrightarrow \alpha+\beta+1=\frac{a}{2}\Longrightarrow -\frac{1}{2}+1=\frac{a}{2}\Longrightarrow a=1 \\ P=(\alpha+0/5)(\beta+0/5)=\frac{b}{2}\Longrightarrow \alpha\beta+0/5(\alpha+\beta)+0/25=\frac{b}{2} \\ \Longrightarrow -\frac{3}{a}+0/5\left(-\frac{1}{2}\right)+0/25=\frac{b}{2}\Longrightarrow b=-6\Longrightarrow\left[\frac{ab}{4}\right]=-2\end{cases}$$

۵) **تست:** اگر $f(x)=(x+\log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(fof)(x)<f(x^5)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $(0,5)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(5,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

پاسخ

$$(fof)(x)<f(x^5)\Longrightarrow\left((x+\log x)^5+\log(x+\log)^5\right)^5<(x^5+\log x^5)^5$$
$$\Longrightarrow\left((x+\log x)^5+5\log(x+\log x)\right)^5<(x^5+5\log x)^5$$

$x=1$ در نامعادله اخیر صدق نمی‌کند پس گزینه (۱) رد می‌شود و $x=10$ نیز در نامعادله اخیر صدق نمی‌کند پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

روش دوم: تابع f اکیداً صعودی است پس داریم:

$$f(x)<x^5\Longrightarrow(x+\log x)^5<x^5\Longrightarrow x+\log x<x\Longrightarrow\log x<0\Longrightarrow x\in(0,1)$$

۶) **تست:** صفرهای تابع $y=2x^2-(m+2)x+m$ و نقطه تقاطع با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام عدد می‌تواند رأس سهمی $y=x^2-mx+1$ باشد؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

forum.konkur.in

www.konkur.in

پاسخ ارتفاع مثلث حاصل برابر $y(۰)=m$ و قاعده آن اختلاف صفرهای تابع است:

$$\alpha-\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(m+۲)^۲-۸m}}{۲}=\frac{\sqrt{(m-۲)^۲}}{۲}=\frac{|m-۲|}{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{|m-۲|}{۲}m=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow|m-۲|m=۳\Longrightarrow(m-۲)m=\pm۳\Longrightarrow m=۱\text{ یا }m=-۵$$

$$\begin{cases}(m-۲)m=۳\Longrightarrow m=-۱\text{ یا }m=۳\\(m-۲)m=-۳\text{ ریشه حقیقی ندارد.}\end{cases}$$

طول رأس سهمی $y=x^۲+x+۱$ برای $m=-۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

۷) **تست:** تابع $f(x)=\begin{cases}۲-۳x & ۲x+۳\le ۰\\ ۲+۲mx-x^۲ & ۲x+۳>۰\end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به‌ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ برد ضابطه اول برابر $[\frac{۱۳}{۲},+\infty)$ است. رأس سهمی ضابطه دوم $y=-(x-m)^۲+۲+m^۲$ باید در بازه $۲x+۳>۰$ یعنی $x>-\frac{۳}{۲}$ نباشد پس $m<-\frac{۳}{۲}$ و $۲+m^۲<\frac{۱۳}{۲}$ لذا $m=-۲$ درنتیجه $y=-(x+۲)^۲+۶$.

برای محاسبه $f^{-۱}(-۱۹)=x$ داریم $f(x)=-۱۹$ یعنی

$$y=-(x+۲)^۲+۶=-۱۹\Longrightarrow(x+۲)^۲=۲۵\Longrightarrow x+۲=\pm۵$$

$$\begin{cases}x=۳\\ x=-۷\text{ غ ق ق}\end{cases}$$

۸) **تست:** اگر $\log۲\simeq۰/۳$ و $\log۳\simeq۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله چقدر است؟ تجربی ۱۴۰۲

$$x^۲(\log۳۰)+۲x(\log۶)-\log\frac{۵}{۶}=۰$$

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۴ ۴) ۱

پاسخ

$$|\alpha-\beta|=\frac{۲\sqrt{\Delta'}}{|a|}=\frac{۲\sqrt{(\log۶)^۲+\log۳۰\log\frac{۵}{۶}}}{|\log۳۰|}$$

$$\log۶=\log۲+\log۳\simeq۰/۳+۰/۴=۰/۷,\log۵=\log۱۰-\log۲\simeq۰/۷$$

$$\log\frac{۵}{۶}=\log۵-\log۶\simeq۰\ ,\ \log۳۰=\log۵+\log۶\simeq۱/۴$$

$$|\alpha-\beta|\simeq\frac{۲\sqrt{(۰/۷)^۲+۰}}{۱/۴}=۱$$

روش تستی: $a+c=b$ پس $x_۱=-۱$ و $x_۲=-\frac{c}{a}=\frac{\log\frac{۵}{۶}}{\log۳۰}\simeq۰$ بنابراین $|x_۱-x_۲|\simeq|-۱-۰|=۱$

روش طلایی: چون $\log\frac{۵}{۶}=\log۵-\log۶\simeq۰$ پس داریم:

$$x^۲(۱/۴)+۲x(۰/۷)\simeq۰\Longrightarrow۱/۴x(x+۱)\Longrightarrow\begin{cases}x_۱\simeq۰\\ \text{یا}\\ x_۲\simeq-۱\end{cases}$$

بنابراین $|x_۱-x_۲|\simeq|۰+۱|=۱$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۹) **تست:** اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۴\pi < ۴x < ۳\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x + \cos^۳ x}$ کدام است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) $-۰/۵\sqrt{۳}$ ۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$ ۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$ ۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

پاسخ

$$\tan x + \cot x = -۳ \Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -۳ \Longrightarrow \sin x \cos x = -\frac{۱}{۳}$$

$$(\sin x + \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow \sin x + \cos x = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{\sin^۳ x + \cos^۳ x} = \frac{۱}{(\sin x + \cos x)(\sin^۲ x - \sin x \cos x + \cos^۲ x)} = \frac{۱}{-\frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱ + \frac{۱}{۳})} = \frac{۳}{۴}\sqrt{۳}$$

۱۰) **تست:** مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π، $\widehat{AOB}$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $\sqrt{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۳) $\pi - \sqrt{۳}$ ۴) $\pi - \sqrt{۲}$

پاسخ

$$S = \pi \Longrightarrow r = ۱ \Longrightarrow OA = ۱$$

$$\widehat{AOD} = ۶۰^\circ \Longrightarrow \widehat{AOC} = ۳۰^\circ \Longrightarrow AC = \frac{۱}{۲}, OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کمان AC روبه‌روی زاویه مرکزی ۳۰ درجه است پس برابر $\frac{\pi}{۶}$ است.

$$P_{AOH} - P_{AHC} = \left(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}\right) - \left(\frac{۱}{۲} + ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$$

۱۱) **تست:** خطوط $۳y + x = -۹$ و $ax - y = ۳$، یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = ۰$ را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(\widehat{B} - \widehat{C})$ کدام است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ چون رأس A روبه‌روی قطر دایره است پس $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ یعنی AB و AC برهم عمودند و چون شیب $۳y + x = -۹$ برابر $-\frac{۱}{۳}$ است پس شیب $ax - y = ۳$ برابر $a = ۳$ است. حال چون زاویه $y - x = ۰$ برابر ۴۵ درجه است پس شیب زاویه $۴۵^\circ + \widehat{C}$ (خط $۳x - y = ۳$) برابر ۳ خواهد بود.

$$\tan(۴۵^\circ + \widehat{C}) = ۳ \Longrightarrow \tan(۹۰^\circ + ۲\widehat{C}) = \frac{۲(۳)}{۱ - ۳^۲} = -\frac{۶}{۸} = -\frac{۳}{۴}$$

$$-\cot(۲\widehat{C}) = -\frac{۴}{۳} \Longrightarrow \cot(۲\widehat{C}) = \frac{۴}{۳}$$

$$\tan(\widehat{B} - \widehat{C}) = \tan(۹۰^\circ - \widehat{C} - \widehat{C}) = \tan(۹۰^\circ - ۲\widehat{C}) = \cot(۲\widehat{C}) = \frac{۴}{۳}$$

۱۲) **تست:** شکل زیر، نمودار تابع $y = a\cos^۲(bx - \frac{\pi}{۴}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) ۱۵ ۲) -۱۵ ۳) $۷/۵$ ۴) $-۷/۵$

پاسخ

$$\frac{\pi}{|b|} = \frac{۹\pi}{۲۰} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۵} \Longrightarrow b = ۵$$

$$y_{\min} = c = -۲ \ , \ f(\tfrac{\pi}{۴}) = ۱ \Longrightarrow a + c = ۱ \Longrightarrow a = ۳ \Longrightarrow ab = ۳(۵) = ۱۵$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۳) **تست:** اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}+\frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})}=۰$ در بازه $[۰,\pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(۲\alpha)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

پاسخ

$$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)}+\frac{۱}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)}=۰\Longrightarrow\frac{۱}{\cos(۲x)}+\frac{۱}{-\sin(۴x)}=۰$$

$$\frac{-\sin(۴x)+\cos(۲x)}{-\sin(۴x)\cos(۲x)}=۰\Longrightarrow-۲\sin(۲x)\cos(۲x)+\cos(۲x)=۰$$

$$۲\sin(۲x)\cos(۲x)=\cos(۲x)\Longrightarrow۲\sin(۲x)=۱\Longrightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}\end{cases}\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}\Longrightarrow\tan(۲\alpha)=\tan(\frac{۲\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$$

۱۴) **تست:** مقدار حد غیر صفر $\lim_{x\to۸}\frac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ باید حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ باشد پس $۸a-b=۰\Longrightarrow b=۸a$

لذا داریم:

$$\lim_{x\to۸}\frac{۸a\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۱۶a}{ax-۸a}=\lim_{x\to۸}\frac{۸\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۱۶}{x-۸}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to۸}\frac{۸\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}}{۲\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}}=\frac{۴\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^{۲}}}}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{۸}}}=\frac{۱}{۶}$$

۱۵) **تست:** شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) ۴

پاسخ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-x+۳m|}{\frac{۳}{۴}(x-۴)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+۳m}{\frac{۳}{۴}x-۳}\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳}{\frac{۳}{۴}}=-۴$$

۱۶) **تست:** اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۳x^{۲}+(m-۱)x+(m-۴)}}{|x^{۳}+((m-۷)x+a)^{۲}|} & x\neq a\\ \frac{۲\sin b}{۳\sqrt{x+۲}} & x=a\end{cases}$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

پاسخ باید صفر صورت $۳x^{۲}+(m-۱)x+(m-۴)=(x+۱)(۳x+m-۴)$ مضاعف باشد پس $\frac{m-۴}{۳}=-۱\Longrightarrow m=۷$ لذا داریم:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{(x+۱)(۳x+m-۴)}}{|x^{۳}+a^{۲}|}$$

از طرفی $x=a$ باید عامل صفر کننده باشد پس $a=-۱$ لذا داریم:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۳(x+۱)^{۲}}}{|x^{۳}+۱|}=\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۳}|x+۱|}{|(x+۱)(x^{۲}-x+۱)|}=\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۳}}{|x^{۲}-x+۱|}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

$$f(a)=f(-۱)=\frac{۲\sin b}{۳\sqrt{-۱+۲}}=\frac{۲\sin b}{۳}\Longrightarrow\frac{۲\sin b}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Longrightarrow\sin b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\begin{cases} b=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ b=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۷) **تست:** اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۳-|x^۳|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ برای x منفی داریم: $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}}$ و $g(x)=\frac{۱}{۲x^۳}$ پس کافی است مشتق تابع مرکب را در نقطه داده شده به‌دست آوریم:

$$f(g(x))=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲g}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲\times\frac{۱}{۲x^۳}}}=x\Longrightarrow(fog)'(x)=۱$$

۱۸) **تست:** در شکل زیر، مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشور خورده چقدر است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

پاسخ سه مثلث قائم‌الزاویه متشابه هستند که نسبت اضلاع قائمه ۱ به ۳ است. اگر $BC=x$، آن‌گاه $CE=\frac{x}{۳}$ و $DF=۳x$ که در آن $E(۰,\frac{۵}{۳})$ و $F(۵,۰)$. از طرفی $EF^۲=۵^۲+(\frac{۵}{۳})^۲$ پس $EF=\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}$.

$$S=x\left(\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{x}{۳}-۳x\right)=\frac{۱}{۳}\left(۵\sqrt{۱۰}x-۱۰x^۲\right)$$

$$S'=\frac{۱}{۳}\left(۵\sqrt{۱۰}-۲۰x\right)=۰\Longrightarrow۵\sqrt{۱۰}-۲۰x=۰\Longrightarrow۲۰x=۵\sqrt{۱۰}\Longrightarrow x=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

مساحت مثلث هاشور خورده برابر است با: $\frac{۱}{۲}x(۳x)=\frac{۳}{۲}x^۲=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$

۱۹) **تست:** در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ یعنی میشه دسته اول را $۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴$ در نظر گرفت پس $\overline{x}_۱=۸$ و با استفاده از فرمول $\sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}d^۲$ داریم: $\sigma_۱^۲=\frac{۷^۲-۱}{۱۲}(۲^۲)=۱۶\Longrightarrow\sigma_۱=۴$

حال چون در تمامی دسته‌های ذکر شده، واریانس برابر ۱۶ بوده پس دسته‌ها را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین (داده وسطی) آنها ۱۶ باشد یعنی $۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰,۲۲$ که اختلاف بزرگ‌ترین عضوها برابر است با: $۲۲-۱۴=۸$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۲۰) **تست:** چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ باشند؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱ ۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

پاسخ برای اینکه مضرب ۶ باشد اولاً باید زوج باشد ثانیاً مجموع ارقام بر ۳ نیز بخش‌پذیر باشد. حال اگر از ۱۰ رقم باقی‌مانده n تا ۱ باشد $10-n$ تا ۲ خواهد بود پس باید مجموع ارقام $n+2(10-n)+n=22-n$ بر ۳ نیز بخش‌پذیر باشد که n می‌تواند اعدا ۱، ۴، ۷ و ۱۰ باشد بنابراین

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{4}+\binom{10}{7}+\binom{10}{10}=10+210+120+1=341$$

۲۱) **تست:** یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار k ام «رو» ظاهر شود. احتمال آن‌که دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+5}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیابید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ احتمال اینکه k پیروزی در n آزمایش (با احتمال p) حاصل شود برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{k}{k+5}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\Longrightarrow\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{k+5}\binom{n}{k}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{k}{k+5}\times\frac{n!}{k!(n-k)!}\Longrightarrow\frac{(n-1)!}{(k-1)!}=\frac{k}{k+5}\times\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!}$$

$$1=\frac{n}{k+5}\Longrightarrow n=k+5\Longrightarrow n+k=2k+5$$

برای $k>0$ عدد ۹ می‌تونه باشه.

۲۲) **تست:** احتمال این‌که امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) ۲۰/۵۵ ۲) ۲۹/۵۵ ۳) ۲۰/۲۵ ۴) ۲۹/۲۵

پاسخ با استفاده از فرمول احتمال کل داریم:

$$\frac{4}{10}\times\frac{25}{100}+\frac{35}{100}\times\frac{3}{10}+\frac{25}{100}\times\frac{35}{100}=\frac{250}{1000}+\frac{105}{1000}+\frac{875}{10000}=\frac{2925}{10000}=29/25$$

۲۳) **تست:** نقاط $A(-1,4)$، $B(3,1)$، $C(x,y)$ و $D(-1-x,y+3)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های C و D مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

forum.konkur.in

www.konkur.in

پاسخ

$$DC||AB \Longrightarrow m_{CD}=m_{AB} \Longrightarrow \frac{-۳}{۱+۲x}=\frac{-۳}{۴} \Longrightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$AB \perp BC \Longrightarrow m_{AB}m_{BC}=-۱ \Longrightarrow -\frac{۳}{۴}\times\frac{y-۱}{-\frac{۳}{۲}}=-۱ \Longrightarrow y=-۱$$

$$AB=۵, CD=\frac{۵}{۲} \Longrightarrow P=۲(AB+CD)=۲\left(۵+\frac{۵}{۲}\right)=۱۵$$

۲۴) **تست:** در مربع شکل زیر، اندازه ED دو برابر AE است. طول EF چند برابر AF است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

پاسخ اگر $AE=۱$، آن‌گاه $DE=۲$ پس در مثلث قائم‌الزاویه ADC داریم: $AC=۳\sqrt{۲}$ و در مثلث قائم‌الزاویه ABE داریم: $BE=\sqrt{۱۰}$. از طرفی دو مثلث AFE و CFB متشابه‌اند (دو زاویه برابر دارند.) پس

$$\frac{AF}{CF}=\frac{EF}{BF}=\frac{AE}{BC}=\frac{۱}{۳}$$

$$AF=x \Longrightarrow x+۳x=۳\sqrt{۲} \Longrightarrow x=\frac{۳}{۴}\sqrt{۲}$$

$$EF=y \Longrightarrow y+۳y=\sqrt{۱۰} \Longrightarrow y=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

روش طلایی: با اطلاعات روش قبل داریم: $\frac{x}{y}=\frac{۴x}{۴y}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۲۵) **تست:** در شکل زیر، $AB||CD$ و $EC||DF$ است. اندازه DF چقدر است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$

پاسخ

$$BEC \sim CDF, k=۲ \ , \ EJC \sim FJD, k=۲ \Longrightarrow JF=۲$$

مساحت مثلث متساوی‌الساقین BEF برابر است با: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=۱۸\sqrt{۲}$

یا

$$S=\frac{۱}{۲}۹h=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\sqrt{۲} \Longrightarrow h=۴\sqrt{۲}$$

$$BH=\sqrt{۹^۲+(۴\sqrt{۲})^۲}=۷ \Longrightarrow CH=۱$$

$$EC=\sqrt{۱^۲+(۴\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۳} \Longrightarrow DF=\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

۲۶) **تست:** طول کوتاه‌ترین وتری که از نقطه $(-۱,۲/۵)$ در دایره $۲x^۲+۲y^۲-۶x-۱۰y+۱=۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

تجربی ۱۴۰۲

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

پاسخ چون $x^۲+y^۲-۳x-۵y+\frac{۱}{۲}=۰$ پس $(x-\frac{۳}{۴})^۲+(y-\frac{۵}{۴})^۲=۸$ لذا $O(\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴})$ مرکز و $r=\sqrt{۸}$ شعاع دایره است. وتر را AB و $H(-۱,۲/۵)$ بنامیم پس $OH=\frac{۵}{۲}$ لذا $AH=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ بنابراین $AB=\sqrt{۷}$.

forum.konkur.in

www.konkur.in

روش طلایی:[1] با جایگذاری نقطه $(-۱, \frac{۵}{۲})$ در دایره $x^۲ + y^۲ - ۳x - ۵y + \frac{۱}{۲} = ۰$ داریم:
$-\frac{۷}{۴} = \frac{۱}{۴} + ۵(\frac{۵}{۲}) - ۳(-۱) + (\frac{۵}{۲})^۲ + (-۱)^۲ = d$ بنابراین $\sqrt{۷} = ۲\sqrt{-\frac{-۷}{۴}} = AB$.

۲۷) **تست:** مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = ۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ اگر $n(A - B) = x$، $n(B - A) = y$ و $n(A \cap B) = z$ باشد، آن‌گاه $x - y = ۱۴$ و $x + y = ۲۰$ پس $y = ۳$.

۲۸) **تست:** در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۴^۲ = ۵a_۳a + ۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

پاسخ $۶(a+d)^۲ = ۵(a+۲d)a + ۳(a+d)a \Longrightarrow ۶a^۲ + ۱۲ad + ۶d^۲ = ۵a^۲ + ۱۰ad + ۳a^۲ + ۳ad$

$$۲a^۲ + ad - ۶d^۲ = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} a = -۲d \Longrightarrow \frac{a_۴}{d} = \frac{a+۳d}{d} = ۱ \\ a = \frac{۳}{۲}d \end{cases}$$

۲۹) **تست:** اگر $A = \{\log_۹ x + ۳\log_{x^۲} ۳ : x > ۱\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ $\log_{۳^۲} x + ۳\log_{x^۲} ۳ = \frac{۱}{۲}\log_۳ x + \frac{۳}{۲}\log_x ۳$

حال چون حاصل‌ضرب $\frac{۳}{۲}\log_x ۳$ در $a = \frac{۱}{۲}\log_۳ x, b = \frac{۳}{۲}\log_x ۳$ برابر $\frac{۳}{۴}$ است.[2] پس $a = b = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بنابراین $a + b = \sqrt{۳}$.

۳۰) **تست:** حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{(x,y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{۷۲}{y^۲ - ۱}\right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ برای این‌که $x, y \in \mathbb{Z}$ باشد، باید ۷۲ بر $y^۲ - ۱$ بخش‌پذیر بوده و مضربش مربع کامل مانند $۰, ۴, ۹, ۲۵$ باشد پس $y^۲ = ۰, \pm۲, \pm۳, \pm۵$ بنابراین از رابطه $f = \{(-۷۲, ۰), (۲۴, \pm۲), (۹, \pm۳), (۳, \pm۵)\}$ حداقل ۳ عضو باید حذف شود تا تابع باشد.

---

[1] **نکته:** برای محاسبه طول کوتاه‌ترین وتر در دایره از یک نقطه مشخص، ابتدا نقطه داده شده را در معادله دایره جایگذاری کرده و سپس عدد به‌دست آمده را d می‌نامیم در نهایت طول کوتاه‌ترین وتر برابر $AB = ۲\sqrt{-d}$ است.

[2] **نکته:** الف) اگر $a + b = c$ باشد، آن‌گاه ab زمانی بیشترین مقدار را دارد که $a = b = \frac{c}{۲}$.

ب) اگر $ab = c$ باشد، آن‌گاه $a + b$ زمانی کمترین مقدار را دارد که $a = b = \sqrt{c}$.

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱.۱.۱ بودجه‌بندی دروس ریاضی رشته ریاضی و فیزیک کنکور ۱۴۰۲

کتاب	تعداد سوالات
ریاضی (۱)	۵
ریاضی (۲)	۱۳
ریاضی (۳)	۱۲

۲.۱.۱ موضوعات دروس ریاضی، رشته ریاضی و فیزیک کنکور ۱۴۰۲

مجموعه	دنباله	معادله درجه ۲	سهمی	معادله گویا	تابع	مثلثات
۱	۱	۱	۱	۱	۲	۴

شمارش	احتمال	لگاریتم	هندسه تحلیلی	تالس و تشابه	حد	پیوستگی
۱	۲	۲	۱	۲	۲	۱

انحراف معیار	وارون	ترکیب	مشتق	بهینه‌سازی	دایره و فیثاغورس	
۱	۱	۲	۱	۱	۲	

صفی شاهی‌فرد

«مدرس دانشگاه فنی و حرفه‌ای و آزاد اسلامی»

«مولف کتب درسی دانشگاهی»

«دبیر آموزش و کنکور حسابان مدارس نمونه دولتی»
۰۹۳۵۸۶۴۷۱۱۷

forum.konkur.in