



# حلج سنج

آزمون حلی سنج ۳

۱۰ شهریور ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم – رشته ریاضی

دفترچه شماره ۱

مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

تعداد سوال: ۴۰

ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه	<p>حسابان: حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده</p> <p>هندس: صبا مهدوی با همکاری: محمد مهدی توکلی یاران رزمی امیررضا یارمحمدی</p> <p>گسسته: احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی</p>

@helli\_sanj



محل انجام محاسبات

۱- با فرض  $A = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x} - x^2$  و  $B = \sqrt[6]{x^2}$ ، به ازای کدام مقدار  $x$  تساوی  $\frac{1}{A} = \frac{1}{B}$  برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- حاصل عبارت  $A = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x + 2} - (x+1)^2$  به ازای  $x = \sqrt[3]{2}$  چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $2\sqrt[3]{2}$  (۴)  $2\sqrt[3]{4}$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt[3]{\sqrt{4}-1} + \sqrt[3]{\sqrt{16}-\sqrt{4}} - \sqrt[3]{4}$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{3}$  (۲)  $\sqrt{7}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$

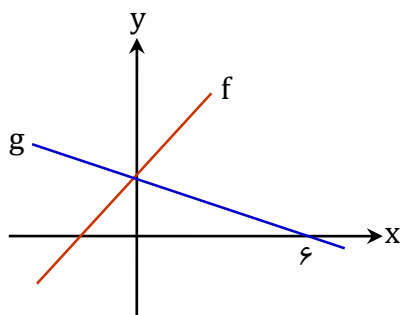
۴- فرض کنید  $f(x+1) = \frac{1}{x-1}$  و  $g(x-1) = \frac{x+c}{x^2+ax+b}$  باشد، اگر دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  برابر باشند، حاصل  $a-b+c$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) -۹ (۴) -۱۸

۵- تابع  $f(x) = \left[ \frac{a}{9}(x^2 - 3x) \right]$  با دامنه  $[0, 3]$  مفروض است. اگر برد تابع  $f$  به صورت  $\{b\}$  باشد، مجموع اعداد صحیح قابل قبول برای  $a$  کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۱۰ (۲) -۱۵ (۳) -۶ (۴) -۴

۶- نمودار توابع خطی  $f$  و  $g$  به صورت زیر است. اگر تابع  $f+g$  ثابت و  $f-g$  همانی باشد، حاصل  $f(4)$  کدام است؟



(۱) ۳

(۲) ۳/۵

(۳) ۵/۵

(۴) ۵

۷- تابع  $f(x) = 3x - |x|$  مفروض است. اگر تابع  $y = mf(x) + f^{-1}(nx)$  با دامنه  $\mathbb{R}$  خطی باشد، حاصل  $\frac{n}{m}$  کدام است؟ ( $nm \neq 0$ )

- (۱)  $\pm 8$  (۲)  $\pm 4$  (۳)  $\pm 2$  (۴)  $\pm 1$

۸- اگر  $f(x) = x + [-x]$  و  $g(x) = x + [f(x)]$  باشد، آنگاه  $g^{-1}(x)$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $g(-x)$  (۲)  $-g(x)$  (۳)  $-g(-x)$  (۴)  $g(x)$

محل انجام محاسبات

۹- طول نقاط نمودار  $y = x^2 - 12x + 5$  را نصف می‌کنیم و سپس منحنی جدید را  $a$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا تابع  $g$  به دست آید. اگر تابع  $y = \frac{b+g(x)}{4x}$  همانی باشد،

حاصل  $a+b$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

۱۰- نمودار تابع  $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$  را نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم و سپس یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا تابع  $g$  به دست آید. دامنه تابع  $f \circ g$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$  (۲)  $\mathbb{R}$  (۳)  $[1, 3]$  (۴)  $\{1\}$

۱۱- تابع  $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$  را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا تابع جدید  $g(x)$  به دست آید. برد تابع  $y = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $[1, 3]$  (۲)  $[1, 10]$  (۳)  $(-\infty, 10]$  (۴)  $[1, +\infty)$

۱۲- فرض کنید  $g^{-1}(x)$  وارون تابع  $g(x)$  باشد. با کدام تبدیلات زیر می‌توان از تابع  $f(x)$  به وارون تابع  $\frac{1}{2}f^{-1}(3x)$  رسید؟

- (۱) انبساط افقی و انقباض عمودی (۲) انبساط عمودی و انقباض افقی  
(۳) انقباض افقی و انقباض عمودی (۴) انبساط عمودی و انبساط افقی

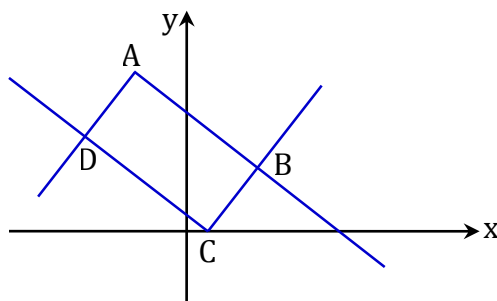
۱۳- نقطه  $A(\alpha, 2)$  روی نمودار تابع  $y = 2 - 3f\left(\frac{-x}{4}\right)$  با نقطه  $A'\left(\beta, -\frac{\alpha}{4}\right)$  واقع بر وارون تابع  $y = 3f(2x+1)$  متناظر است. حاصل  $\alpha + \beta$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۴- سهمی  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $g(x) = a + 4f\left(b - \frac{x}{4}\right)$  بر نمودار  $f(x)$  منطبق باشد، حاصل  $a+b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۵- نمودار تابع  $y = |x-1|$  را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و  $k$  واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. مطابق شکل زیر مستطیل ABCD با مساحت ۱۶ به وجود می‌آید. مقدار  $k$  چقدر است؟



- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۶

## محل انجام محاسبات

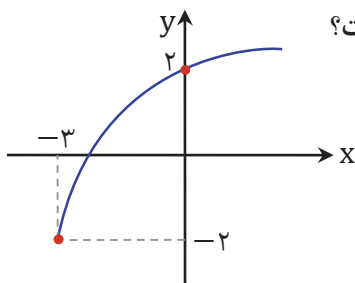
۱۶- تابع  $f(x) = \sqrt{x-3}$  را یک بار ۳ واحد به راست انتقال داده و وارون آن را به دست می آوریم. بار دیگر ابتدا وارون آن را به دست آورده و سپس یک واحد به چپ انتقال می دهیم. دو تابع به دست آمده در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع اند؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۴

۱۷- تابع  $f(x) = \frac{2x}{x+a}$  را نسبت به خط  $y=x$  قرینه سپس تابع حاصل را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می کنیم تا تابع  $g$  به دست آید. به ازای کدام مقدار  $a$  توابع  $f$  و  $g$  در نقطه‌ای به عرض یک متقاطع اند؟

- (۱) ۱ یا -۲ (۲) ۱ یا -۲  
(۳) ۳ یا -۱ (۴) ۳ یا -۱

۱۸- نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. اگر نمودار  $y = a - 2f\left(\frac{x-b}{3}\right)$  محورهای مختصات را قطع نکند، حدود  $a$  و  $b$  برابر با کدام گزینه است؟

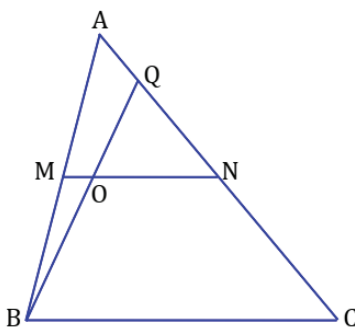


- (۱)  $a < -4$   
(۲)  $b > 3$  و  $a < -1$   
(۳)  $b < -9$  و  $a < 4$   
(۴)  $b > 9$  و  $a < -4$

۱۹- از بین پنج تکه چوب با طول‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ واحد به چند طریق می توان سه تکه انتخاب کرد و یک مثلث ساخت؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰

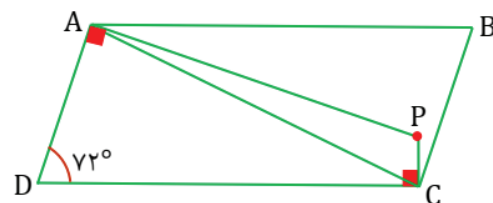
۲۰- در مثلث  $ABC$ ، مطابق شکل پاره خط  $MN$  موازی ضلع  $BC$  رسم شده است. اگر



چقدر است  $\frac{MO}{ON}$ ، باشد  $AQ = \frac{NQ}{2} = \frac{NC}{3}$ ؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$   
(۲)  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{1}{5}$   
(۴)  $\frac{2}{5}$

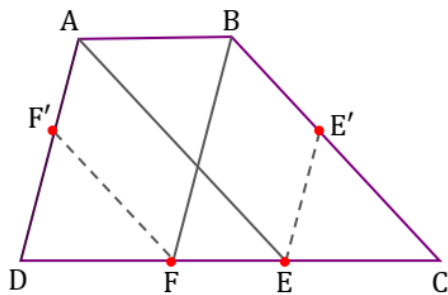
۲۱- در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  می دانیم  $AD < CD$ ،  $\hat{D} = 72^\circ$  است و قطر  $AC$ ، زاویه  $\hat{C}$  را با نسبت ۱ به ۳ تقسیم می کند. عمودی که در نقطه  $A$  از ضلع  $AD$  خارج می شود، عمود خارج شده از نقطه  $C$  بر ضلع  $CD$  را در نقطه  $P$  قطع می کند. زاویه  $\hat{CBP}$  چقدر است؟



- (۱)  $63^\circ$   
(۲)  $9^\circ$   
(۳)  $18^\circ$   
(۴)  $12/5^\circ$

محل انجام محاسبات

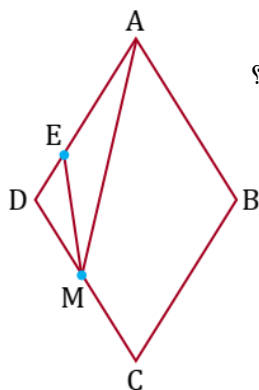
۲۲- در ذوزنقه ABCD می دانیم  $AB=3$  و  $CD=8$  است. اگر  $FF' \parallel AE \parallel BC$  و  $EE' \parallel BF \parallel AD$  باشد، طول  $E'F'$  چقدر است؟



- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳)  $\frac{19}{3}$   
(۴)  $\frac{14}{3}$

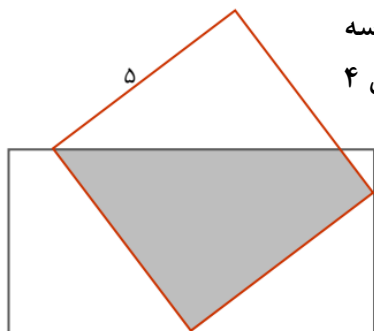
۲۳- در لوزی زیر M وسط ضلع CD است.

اگر  $AM=10$  و  $DE=2$  و  $AE=6$  باشد، طول ME چقدر است؟



- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

۲۴- مطابق شکل، مربعی به ضلع ۵ طوری قرار گرفته که سه تا از رئوسش هر کدام روی مستطیلی به طول ۸ و عرض ۴ قرار دارد. مساحت ناحیه رنگ شده کدام است؟



- (۱)  $\frac{121}{8}$   
(۲)  $\frac{123}{8}$   
(۳)  $\frac{125}{8}$   
(۴)  $\frac{127}{8}$

۲۵- ماتریس مربعی A از مرتبه ۲ مفروض است. اگر درایه های این ماتریس،  $0, 1, 2, 4$  باشد و این درایه ها طوری چیده شده باشند که دترمینان ماتریس A کمترین مقدار ممکن باشد، آنگاه  $|4A^{-1}|$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲)  $-\frac{1}{2}$   
(۳) ۱  
(۴) ۲

۲۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$  باشد، به طوری که  $x+y+z > 0$ ،  $xyz=2$  و  $A^T = I$  باشد،

آنگاه مقدار  $x^3 + y^3 + z^3$  کدام است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۷  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۲

۲۷- دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}$  مفروضند. اگر  $AB = B$  و  $a+d=1403$  باشد، آنگاه مقدار  $ad-bc$  کدام است؟

- (۱) ۱۴۰۰  
(۲) ۱۴۰۱  
(۳) ۱۴۰۲  
(۴) ۱۴۰۳

محل انجام محاسبات

۲۸- اگر برای ماتریس مربعی  $A$  رابطه  $A^3 = 2A^2 - 2A + 5I$  برقرار باشد، از تساوی  $(A^2 + 2I)^{-1} = \alpha A + \beta I$  حاصل  $\alpha + \beta$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

۲۹- فرض کنید  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ بوده و  $2|A^2 + I| = 3|A + I| = 6$  و  $(A - I)^3 = 0$  باشد. دترمینان ماتریس  $A^2 + 2I$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۴/۵ (۳) ۱۳/۵ (۴) ۴۰/۵

۳۰- به ازای چند عدد سه رقمی برای  $n$ ، حاصل  $n^3 - n$  مضرب ۲۴ می‌باشد؟

- (۱) ۴۵۰ (۲) ۵۱۲ (۳) ۵۴۸ (۴) ۵۶۲

۳۱- اگر  $a, b$  اعداد صحیح باشند حاصل عبارت  $(a, (a, b)) \times [a, (a, b)]$  کدام است؟

- (۱)  $(a, b)$  (۲)  $|ab|$   
(۳)  $|a|(a, b)$  (۴)  $(a, b)^2$

۳۲- اگر  $a, b$  عددی فرد باشند و  $abc = 2k$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  باشد، باقی‌مانده  $a^{11} + b^{11} + c^{11}$  بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۷

۳۳- عدد  $2^{32} - 1$  چند مقسوم علیه بزرگ‌تر از ۱۰ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۳۰ (۴) ۶۴

۳۴- اگر  $(n^2, 480) = 96$  باشد، چند مقدار متفاوت برای  $(n^3, 210^{11})$  قابل قبول است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

۳۵- اگر  $a$  عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد، حاصل  $[8a^2 - 8, a^2 + 1]$  برابر است با .....

- (۱)  $8(a^2 + 1)$  (۲)  $8(a - 1)(a^2 + 1)$   
(۳)  $8(a^2 - 1)(a^2 + 1)$  (۴)  $8(a + 1)(a^2 - 1)$

۳۶- در تقسیم عدد ۱۰۰۰ بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج قسمت برابر ۲۳ می‌باشد، بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای باقی‌مانده این تقسیم کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۳۴

۳۷- باقی‌مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۷ و ۱۱ به ترتیب برابر ۴ و ۵ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم عدد  $3a$  بر ۷۷ کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۹ (۳) ۳۶ (۴) ۴۲

محل انجام محاسبات

۳۸- باقی مانده‌ی تقسیم  $5a+11b$  بر ۴۷ برابر ۲۱ می‌باشد. باقیمانده تقسیم  $3a+16b$  بر ۴۷ کدام است؟

۲۰ (۱)                                  ۲۱ (۲)                                  ۲۲ (۳)                                  ۲۳ (۴)

۳۹- در تجزیه عدد  $\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$  توان عامل اول ۳ کدام است؟

۱ (۱)                                  ۱۲ (۲)                                  ۲۷ (۳)                                  ۴۸ (۴)

۴۰- اگر سه مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 7k - 1\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 7k + 2\}$  و  $C$  مجموعه  $\mathbb{Z}$  را افزاز کنند، کدام دو عدد عضو یک زیرمجموعه از افزاز هستند؟

۱۷ و ۱۰۰ (۱)                                  ۱ و -۵ (۲)

۱۷- و ۱۱ (۳)                                  ۲۰ و صفر (۴)





# حلج سنج

آزمون حلی سنج ۳

۱۰ شهریور ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم – رشته ریاضی

دفترچه شماره ۲

مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

تعداد سوال: ۴۵

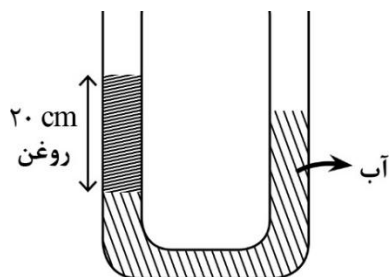
ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان
۱	فیزیک	۲۵	۴۱	۶۵	۴۵ دقیقه	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری امیرحسین محمدپور با همکاری: ابوالفضل علیدوست
۲	شیمی	۲۰	۶۶	۸۵	۳۰ دقیقه	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمدرضا زهره‌وند سیدصمد صفوی

 @helli\_sanj



## محل انجام محاسبات

۴۱- در یک لوله U شکل مانند شکل زیر، آب و روغن در حالت تعادل قرار دارند. مایع دیگری با چگالی  $\frac{0.5}{\text{cm}^3} \rho$  به شاخه سمت راست اضافه می‌کنیم تا سطح آزاد مایعات در دو شاخه در یک ارتفاع قرار بگیرند. اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه در حالت جدید چند سانتی‌متر است؟ (چگالی آب و روغن به ترتیب برابر  $\frac{1}{\text{cm}^3} \rho$  و  $\frac{0.8}{\text{cm}^3} \rho$  و سطح مقطع شاخه‌ها یکسان است.)



است.)

۱۴ (۱)

۱۲ (۲)

۱۰ (۳)

۸ (۴)

۴۲- دو مایع مخلوط‌نشده در ظرف زیر به حال تعادل قرار دارند. کدام‌یک از گزاره‌های

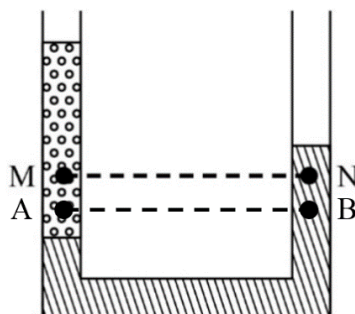
زیر نادرست است؟

$$P_A > P_B \quad (1)$$

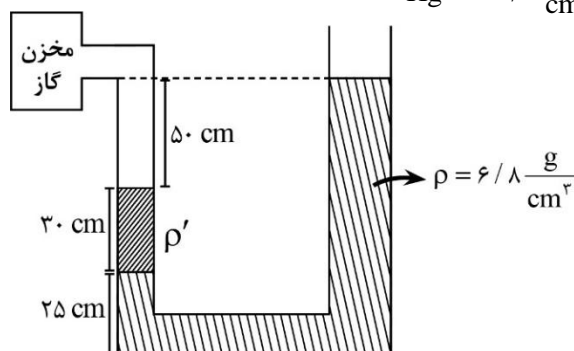
$$P_A + P_M > P_B + P_N \quad (2)$$

$$P_A - P_M > P_B - P_N \quad (3)$$

$$|P_A - P_B| < |P_M - P_N| \quad (4)$$



۴۳- در شکل زیر، شعاع مقطع شاخه سمت راست دو برابر شعاع مقطع شاخه سمت چپ است. فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن چند سانتی‌متر جیوه کاهش یابد تا سطح مایع در شاخه

سمت راست ۸cm پایین بیاید؟ ( $\rho_{\text{Hg}} = \frac{13.6}{\text{cm}^3} \rho$ )

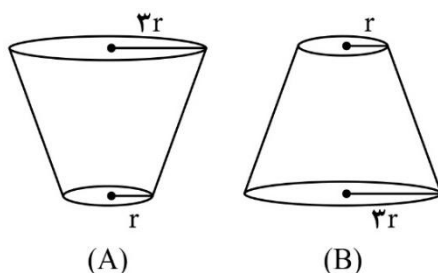
۴۰ (۱)

۲۰ (۲)

۱۰ (۳)

۵ (۴)

۴۴- ظرف‌های A و B با ارتفاع یکسان پر از آب هستند. نیروی وارد بر یکای سطح از طرف مایع به کف ظرف A، چند برابر نیروی وارد بر یکای سطح از طرف مایع به کف ظرف B است؟

 $\frac{1}{3}$  (۱)

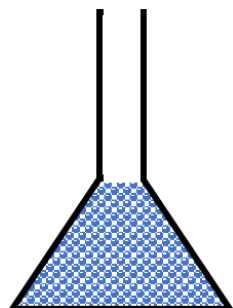
۳ (۲)

۹ (۳)

۱ (۴)

محل انجام محاسبات

۴۵- ظرفی به شکل مخروط ناقص با سطح مقطع بزرگ  $500 \text{ cm}^2$  و سطح مقطع کوچک  $40 \text{ cm}^2$  در اختیار داریم که پر از آب است. دهانه این ظرف را به لوله‌ای با سطح مقطع  $40 \text{ cm}^2$  وصل کرده و محل اتصال را به خوبی آب‌بندی می‌کنیم. اکنون چند گرم آب درون این لوله بریزیم تا نیروی وارد بر کف ظرف از طرف آب  $60$  نیوتون افزایش یابد؟



$$(\rho_w = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$

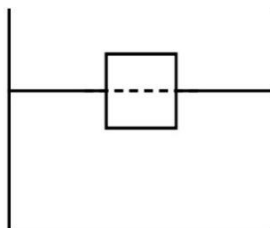
۴۸۰ (۱)

۶۰۰ (۲)

۴۸۰۰ (۳)

۶۰۰۰ (۴)

۴۶- مکعبی مطابق شکل روی سطح مایعی شناور است. اگر مایع دیگری که چگالی آن کمتر از مایع اول است را در ظرف بریزیم به طوری که کاملاً سطح بالای مکعب را بپوشاند، میزان حجمی از مکعب که درون مایع اول قرار داشته است، چگونه تغییر می‌کند؟



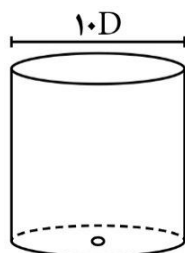
(۱) تغییر نمی‌کند.

(۲) کمتر می‌شود.

(۳) بیشتر می‌شود.

(۴) بستگی به چگالی مایع دوم دارد.

۴۷- مخزنی به شکل استوانه پر از آب است. در انتهای مخزن سوراخی به قطر  $D$  ایجاد می‌کنیم. اگر تندی متوسط خروج آب از سوراخ کف ظرف  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا ارتفاع آب داخل استوانه  $20 \text{ cm}$  کاهش یابد؟



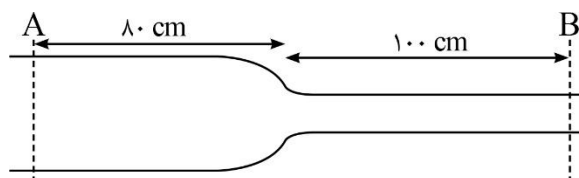
۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

۲۵ (۴)

۴۸- در لوله افقی زیر، شعاع قسمت باریک  $4 \text{ cm}$  است. اگر از این لوله برای پر کردن یک مخزن  $144$  لیتری استفاده کنیم،  $5$  دقیقه طول می‌کشد تا مخزن کاملاً پر شود. جریان آب در هر قسمت لایه‌ای است و یک ذره فاصله مقطع  $A$  تا  $B$  را در مدت یک دقیقه طی می‌کند. شعاع قسمت پهن لوله (مقطع  $A$ ) چند سانتی‌متر است؟ ( $\pi = 3$ )



۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

۱۵ (۳)

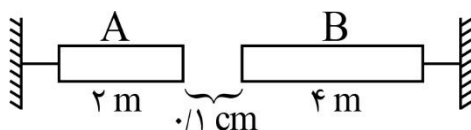
۳۰ (۴)

## محل انجام محاسبات

۴۹- دماسنجی با درجه‌بندی خطی، دمای ذوب یخ در فشار یک اتمسفر را ۴۰ درجه و دمای جوش آب در فشار یک اتمسفر را ۲۰۰ درجه نشان می‌دهد. در چه دمایی بر حسب درجه سانتی‌گراد، عددی که این دماسنج نشان می‌دهد از دو برابر عددی که دماسنج سلسیوس نشان می‌دهد، ۱۲ درجه بیشتر است؟

- (۱) ۱۵۲  
(۲) ۱۳۰  
(۳)  $\frac{۱۴۰}{۳}$   
(۴) ۷۰

۵۰- دو میله فلزی A و B را مطابق شکل در مقابل هم قرار داده‌ایم. طول اولیه میله‌ها به ترتیب ۲ و ۴ متر و ضریب انبساط طولی آن‌ها  $\alpha_A = 3 \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$  و  $\alpha_B = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$  است. دمای هر دو میله را به اندازه  $\Delta T$  افزایش می‌دهیم تا این دو میله به هم برسند.  $\Delta T$  چند درجه فارنهایت است؟



- (۱) ۹  
(۲) ۱۰  
(۳) ۱۸  
(۴) ۵

۵۱- مایعی که برای دماسنجی به کار می‌رود، بهتر است گرمای ویژه ..... و ضریب انبساط حجمی ..... داشته باشد.

- (۱) بالا، پایین  
(۲) پایین، پایین  
(۳) بالا، بالا  
(۴) پایین، بالا

۵۲- یک ظرف شیشه‌ای کوچک به حجم  $40 \text{ cm}^3$  در اختیار داریم. در این ظرف چند سانتی‌متر مکعب جیوه بریزیم تا حجم قسمت خالی ظرف با افزایش دما تغییر نکند؟ (ضریب انبساط حجمی جیوه  $10^{-4} \times 1/8$  و ضریب انبساط طولی شیشه  $10^{-6} \times 9$  است.)

- (۱) ۴  
(۲) ۶  
(۳) ۸  
(۴) ۱۰

۵۳- درون ظرفی m گرم آب  $^\circ\text{C}$   $\theta$  موجود است. یک گوی فلزی با دمای  $64^\circ\text{C}$  درون آب می‌اندازیم. دمای تعادل مجموعه  $40^\circ\text{C}$  می‌شود. پس از آن مقدار ۳m گرم آب با دمای  $^\circ\text{C}$   $\frac{\theta}{2}$  به مجموعه اضافه می‌کنیم. دمای نهایی مجموعه  $20^\circ\text{C}$  می‌شود.  $\theta$  بر حسب درجه سانتی‌گراد کدام است؟

- (از تبادل گرما با ظرف و محیط صرف نظر شود و  $C_w = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$  است.)  
(۱) ۱۸  
(۲) ۱۵  
(۳) ۱۰  
(۴) ۵

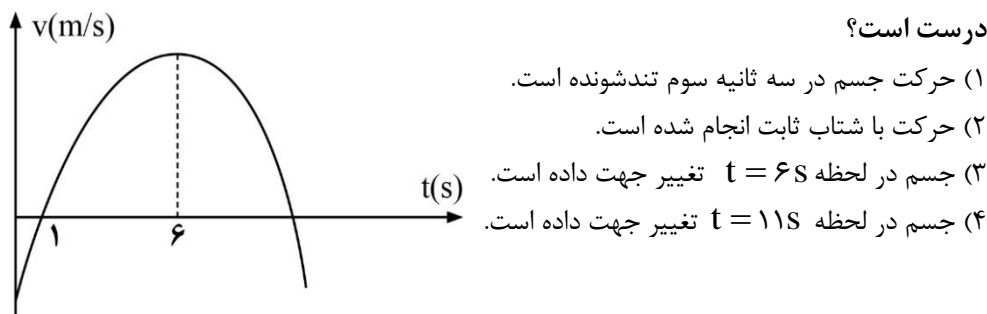
محل انجام محاسبات

۵۴- در شرایطی که دمای هوا  $0^{\circ}\text{C}$  است، در ظرف کوچکی مقداری آب  $0^{\circ}\text{C}$  می‌ریزیم. بر اثر تبخیر سطحی مقداری از آب موجود در ظرف تبخیر می‌شود و بقیه یخ می‌بندد. چه کسری از جرم آب اولیه به صورت یخ در ظرف باقی مانده است؟ ( $c_w$  گرمای ویژه آب،  $L_F$  گرمای نهان ذوب و  $L_V$  گرمای نهان تبخیر است.)

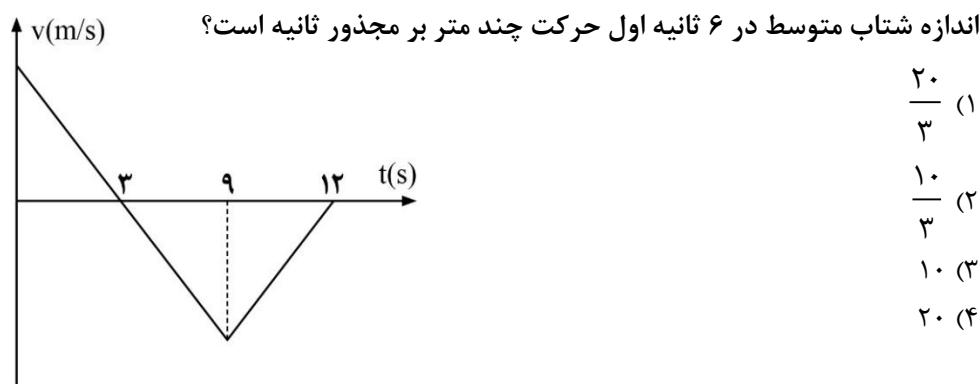
$$\frac{L_V + 100 \cdot c_w}{L_F + L_V + 100 \cdot c_w} \quad (2) \qquad \frac{L_F}{L_F + L_V} \quad (1)$$

$$\frac{L_F}{L_V + 100 \cdot c_w} \quad (4) \qquad \frac{L_V}{L_F + L_V} \quad (3)$$

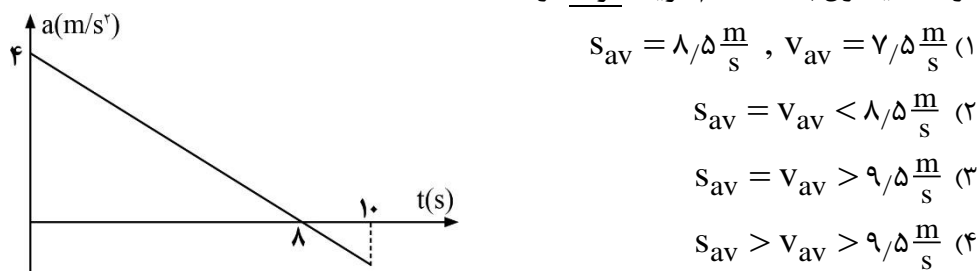
۵۵- نمودار سرعت - زمان متحرکی مطابق سهمی زیر است. کدام گزینه درباره این حرکت درست است؟



۵۶- در نمودار  $v - t$  زیر، اندازه سرعت متوسط در ۱۲ ثانیه اول حرکت،  $\frac{6}{25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است.



۵۷- نمودار شتاب - زمان متحرکی که بدون سرعت اولیه روی محور  $x$  شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر  $v_{av}$  سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول و  $s_{av}$  تندی متوسط در ۱۰ ثانیه اول باشد، کدام گزینه الزاماً درست است؟



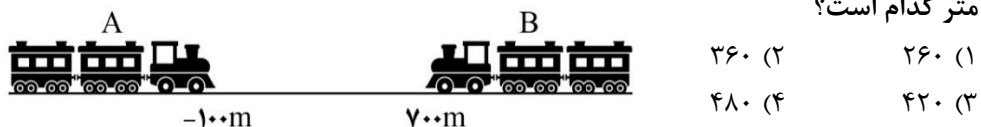
۵۸- دو جسم A و B در مکان‌های  $x_A = 10\text{m}$  و  $x_B = 90\text{m}$  روی محور  $x$  قرار دارند. اگر هر دو همزمان با سرعت ثابت در جهت محور  $x$  حرکت کنند، در مکان  $x = 130\text{m}$  به

محل انجام محاسبات

هم می‌رسند. حال اگر این دو جسم از همان مکان‌های اولیه در خلاف جهت هم و هریک با همان اندازه سرعت قبلی خود حرکت کنند، در چه مکانی بر حسب متر به هم می‌رسند؟

(۱) ۶۰ (۲) ۲۰ (۳) ۷۰ (۴) ۵۰

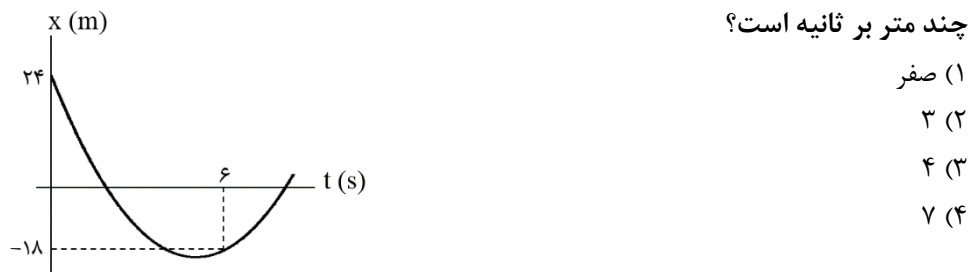
۵۹- قطارهای A و B با طول‌های ۱۰۰ متر و ۲۰۰ متر به ترتیب با تندی‌های ثابت  $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  و  $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  به سمت یکدیگر روی محور X حرکت می‌کنند. در یک لحظه مکان جلوی قطارها مطابق شکل زیر است. پس از عبور کامل قطارها از کنار یکدیگر، مکان جلوی قطار B بر حسب متر کدام است؟



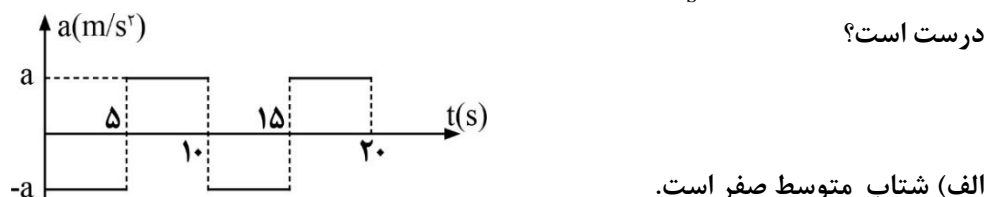
۶۰- معادله مکان - زمان حرکت جسمی به صورت  $x = 4(t-2)(t-5)$  در SI داده شده است. بردارهای شتاب متوسط و سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا ۱۰ s به ترتیب کدام است؟

- (۱)  $4\vec{i}$  و  $12\vec{i}$                       (۲)  $8\vec{i}$  و  $20\vec{i}$
- (۳)  $4\vec{i}$  و  $20\vec{i}$                       (۴)  $8\vec{i}$  و  $12\vec{i}$

۶۱- نمودار مکان - زمان جسمی، مانند سهمی شکل زیر است. تندی جسم در لحظه  $t = 3$  S چند متر بر ثانیه است؟



۶۲- نمودار شتاب زمان متحرکی که روی محور X در حرکت است، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت اولیه متحرک  $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  باشد، کدام یک از جملات زیر در مورد ۲۰ ثانیه اول حرکت درست است؟



(ب) اگر جهت حرکت تغییر کرده باشد، تعداد تغییر جهت حرکت ۳ بار است.

(ج) اگر جهت حرکت تغییر کرده باشد، سرعت متوسط صفر است.

(د) حرکت متحرک ۱۰ ثانیه تندشونده بوده است.

- (۱) ب و ج                      (۲) الف و د                      (۳) الف و ج                      (۴) ب و د

محل انجام محاسبات

۶۳- اتومبیلی در یک مسیر مستقیم با تندی  $24 \frac{m}{s}$  در حرکت است. از ۲۰ متر جلوتر، موتورسواری از حال سکون با شتاب ثابت  $8 \frac{m}{s^2}$  در جهت حرکت اتومبیل به راه می‌افتد. اگر این دو متحرک دو بار از هم سبقت بگیرند، فاصله مکانی این دو نقطه سبقت چند متر است؟

(۱) ۷۲ (۲) ۱۰۸ (۳) ۴۸ (۴) ۹۶

۶۴- دو متحرک با تندی‌های  $25 \frac{m}{s}$  و  $40 \frac{m}{s}$  در یک خط به طرف یکدیگر در حال حرکت هستند. این دو متحرک از لحظه‌ای که ۴۴۵ متر از هم فاصله دارند، با شتاب ثابت و برابر حرکت خود را کند می‌کنند. اگر این دو متحرک دقیقاً در نقطه توقف خودشان به هم برسند، شتاب حرکت آن‌ها چند متر بر مجذور ثانیه بوده است؟

(۱) ۲/۵ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۵- جسم کوچکی در سیاره‌ای از ارتفاع H رها می‌شود. اگر این گلوله ۴۸ متر پایانی مسیر را در ۸۰ درصد زمان کل سقوط طی کند، ارتفاع H چند متر است؟

(۱) ۱۲۵ (۲) ۸۰ (۳) ۵۰ (۴) ۳۵





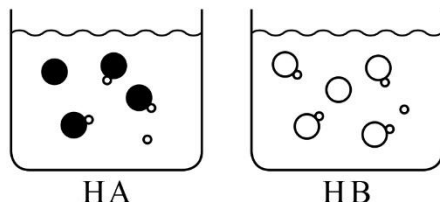
## محل انجام محاسبات

۷۲- چنانچه درصد یونش اسید ضعیف HA در محلول ۰/۰۴ مولار آن برابر ۲۵٪ باشد، ثابت یونش این اسید کدام است؟

$$(۱) ۰/۳۳ \quad (۲) ۳/۳ \times ۱۰^{-۳}$$

$$(۳) ۲/۵ \times ۱۰^{-۳} \quad (۴) ۶/۶ \times ۱۰^{-۳}$$

۷۳- با توجه به دو ظرف اسیدهای HA و HB که حاوی یک لیتر محلول هستند کدام مقایسه درست انجام شده است؟ (هر ذره را معادل ۰/۱ مول در نظر بگیرید.)



$$(۱) \text{pH}_{\text{HA}} < \text{pH}_{\text{HB}}$$

$$(۲) \text{HA} < \text{HB} \text{ : میزان رسانایی الکتریکی محلول}$$

$$(۳) \text{HA} = \text{HB} \text{ : درجه یونش}$$

$$(۴) \text{HA} > \text{HB} \text{ : ثابت یونش}$$

۷۴- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

(۱) با ورود اسید در آب مقدار یون هیدرونیوم افزایش و مقدار یون هیدروکسید به همان مقدار کاهش می یابد.

(۲) pH آب خالص در دمای  $70^{\circ}\text{C}$  از دمای  $25^{\circ}\text{C}$  بیشتر است.

(۳) اگر مقدار  $\text{OH}^-$  داخل آب  $\frac{1}{100}$  برابر مقدار اولیه شود مقدار pH آب ۲ واحد کمتر می شود.

(۴) اگر غلظت مولار اسید خیلی ضعیف ۴ برابر رقیق شود درجه یونش آن ۲ واحد کاهش می یابد.

۷۵- یک لیتر محلول ۲ مولار از دو اسید HA و HB در دمای یکسان و ثابت یونش زیر موجود است. چه تعداد از موارد زیر نادرست هستند؟

HA	HB	
$3/2 \times 10^{-5}$	$8 \times 10^{-6}$	$K_a$

(الف) نسبت  $\frac{\alpha_{\text{HA}}}{\alpha_{\text{HB}}}$  تقریباً برابر ۲ است.

(ب) با این اطلاعات نمی توان غلظت آنیون های موجود در دو اسید را مقایسه کرد.

(ج) رسانایی الکتریکی محلول HA از HB بیشتر است.

(ت) pH محلول HA از pH محلول HB کمتر است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- چه تعداد از مطالب زیر درست هستند؟

(الف) آلاینده ها موادی هستند که بیش از مقدار طبیعی در یک محیط، نمونه ماده یا یک جسم وجود دارد.

(ب) اسید چرب و صابون به ترتیب با آب امکان ایجاد جاذبه هیدروژنی و یون - دوقطبی دارند.

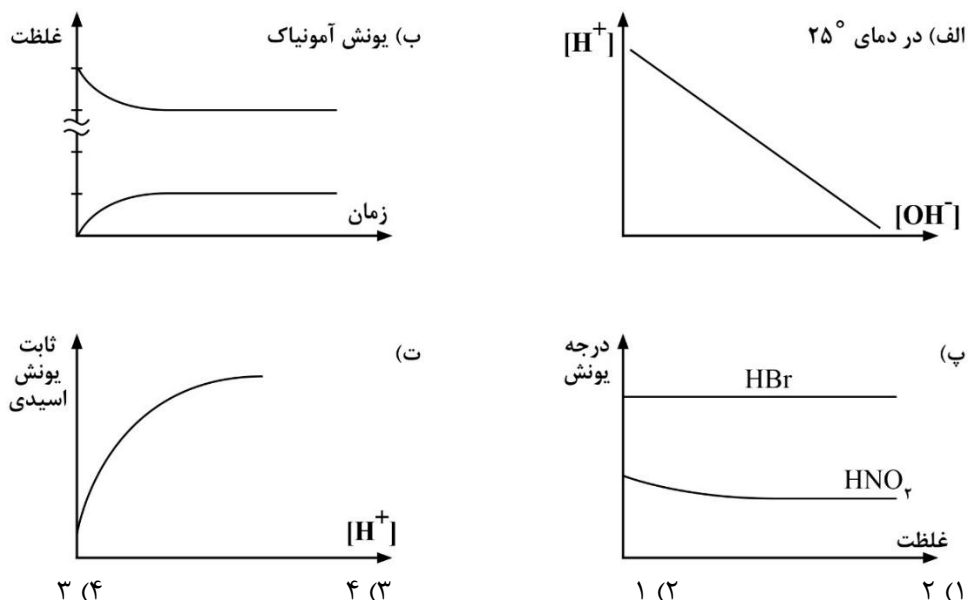
(پ) شوینده غیرصابونی قادر است که وازلین را به صورت ذره های ریز ماده با اندازه های متفاوت در آب حل کند.

(ت) تمام کربن های موجود در شوینده غیرصابونی در بخش ناقطبی آن قرار دارند.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۷۷- چه تعداد از نمودارهای زیر درست رسم شده‌اند؟

۷۸- در ظرف A یک لیتر محلول  $\text{CH}_3\text{COOH}$  با  $\text{pH} = 5$  و در ظرف B یک لیتر محلول $\text{HNO}_3$  با  $\text{pH} = 5$  موجود است. کدام نتیجه‌گیری در مورد این دو اسید درست است؟(۱) اگر هر دو اسید با مقدار کافی Mg واکنش دهند، در انتهای واکنش در ظرف A گاز  $\text{H}_2$  بیشتری تولید می‌شود.

(۲) رسانایی الکتریکی در ظرف B از A بیشتر است.

(۳) سرعت واکنش در ظرف A با فلز Mg در ابتدای واکنش از ظرف B بیشتر است.

(۴) مجموع غلظت کل گونه‌ها در دو ظرف A, B برابر است.

۷۹- اگر در اسید HA غلظت یون هیدرونیوم  $4 \times 10^{-8}$  برابر غلظت یون هیدروکسید باشد و

غلظت اولیه اسید ۰/۱ مولار باشد، ثابت یونش این اسید به تقریب کدام است؟

(دما  $25^\circ \text{C}$ )(۱)  $5 \times 10^{-5}$ (۲)  $4 \times 10^{-5}$ (۳)  $2/5 \times 10^{-5}$ (۴)  $5 \times 10^{-4}$ 

۸۰- اگر غلظت مولکول یونیده نشده در یک ماده با غلظت یون‌ها در ماده دیگر مقایسه شود،

در کدام گزینه این اختلاف بیشترین است؟ (غلظت اولیه همه مواد برابر است)

(۱) سولفوریک اسید با هیدروکلریک اسید

(۲) هیدروسیانیک اسید با نیترو اسید ( $\text{HNO}_3$ )

(۳) آمونیاک با اتیل آمین

(۴) فرمیک اسید با هیدروبرومیک اسید

۸۱- درصد یونش محلول ۱ مولار BOH برابر ۳/۵٪ است. اگر ۲۰۰ مولکول BOH در مقدار

کافی آب وارد شود، تعداد ذره‌های کل موجود بعد از حل شدن این ماده کدام است؟

۲۰۰ (۱) ۲۰۷ (۲) ۱۹۳ (۳) ۲۱۴ (۴)

محل انجام محاسبات

۸۲- کدامیک از موارد زیر درست است؟

الف) اغلب میوه‌ها دارای اسیدند.

ب) برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن  $\text{CaCO}_3$  اضافه می‌کنند.

پ) همه فلزها با اسیدها واکنش می‌دهند.

ت) اغلب داروها ترکیب‌هایی با خاصیت اسیدی یا بازی هستند.

(۱) الف - ب

(۲) ب - پ

(۳) پ - ت

(۴) الف - ت

۸۳- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

(۱) هر واکنش تعادلی، الزاماً برگشت پذیر است.

(۲) در حالت تعادل سرعت تولید همه‌ی فراورده‌ها و واکنش دهنده‌ها برابر هستند.

(۳) در سامانه‌ی تعادلی همه‌ی مواد در واکنش حضور دارند.

(۴) مقدار عددی ثابت تعادل برای هر واکنش فقط تابع دماست.

۸۴- اختلاف تعداد اتم هیدروژن در پاک‌کننده‌ی صابونی دارای ۱۸ اتم کربن با

زنجیره‌ی هیدروکربنی دارای یک پیوند دوگانه کربن - کربن با پاک‌کننده‌ی غیرصابونی با زنجیر

الکیل ۱۲ کربنه کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۳

(۲) ۸

(۱) ۴

۸۵- مخلوطی به جرم ۳۰۰ گرم از پاک‌کننده‌های  $\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{O}_2\text{Na}$  (با جرم مولی = ۳۰۶) و $\text{C}_{17}\text{H}_{33}\text{SO}_2\text{Na}$  (با جرم مولی = ۳۳۸) را به ۱۰ لیتر آب حاوی یون  $\text{Ca}^{2+}$  وارد می‌کنیم و

۱۲۱/۲ گرم رسوب تشکیل می‌شود. به ترتیب چند درصد جرمی از مخلوط اولیه را

پاک‌کننده‌ی غیرصابونی تشکیل می‌دهد و غلظت یون  $\text{Ca}^{2+}$  در آب اولیه چند ppm بودهاست؟ (چگالی آب را  $1 \frac{\text{g}}{\text{ml}}$  در نظر بگیرید) $(\text{C} = 12, \text{H} = 1, \text{Ca} = 40, \text{O} = 16, \text{Na} = 23, \text{S} = 32 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$ 

(۲) ۸۰۰ - ۵۹/۲

(۱) ۴۰۰ - ۵۹/۲

(۴) ۸۰۰ - ۴۰/۲

(۳) ۴۰۰ - ۴۰/۲




## پاسخنامه حلی سنج ۳

۱۰ شهریور ماه ۱۴۰۲

### پایه دوازدهم – رشته ریاضی

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سوال	موارد امتحانی	ردیف
۷۰ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات	۱
۴۵ دقیقه	۶۵	۴۱	۲۵	فیزیک	۲
۳۰ دقیقه	۸۵	۶۶	۲۰	شیمی	۳

طراحان (حروف الفبا)	نام درس
حسین شفیع زاده، علیرضا نداف زاده	ریاضی و حسابان
صبا مهدوی با همکاری: محمدمهدی توکلی، یاران رزمی، امیررضا یارمحمدی	هندسه
احسان ایزدپناه، محمد پیشنماز، علیرضا شریف خطیبی	آمار و احتمال و گسسته
محمد جواد حیدری، پوریا دیار کجوری، امیر حسن محمدپور با همکاری: ابوالفضل علیدوست	فیزیک
علیرضا رفیعی، کیان کریمی خراسانی	شیمی

 @helli\_sanj

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین به هر مقررات رفتار می شود.

Telegram: @konkur\_in

عبارت A فقط به ازای  $x > 0$  تعریف شده است. (کتاب ریاضی ۱ صفحه ۵۹) و در ضمن به ازای  $x > 0$  داریم  $x^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{x}$  پس:

$$A = \sqrt[r]{\sqrt[r]{x} - x^r}, \quad B = \sqrt[r]{x^r} = \sqrt[r]{|x|}$$

حال می نویسیم: (با فرض  $x > 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[r]{\sqrt[r]{x} - x^r}} &= \frac{1}{\sqrt[r]{|x|}} = \frac{1}{\sqrt[r]{x}} \\ \Rightarrow \sqrt[r]{\sqrt[r]{x} - x^r} &= \sqrt[r]{x} \Rightarrow \sqrt[r]{x} = x^r \Rightarrow x = x^r \\ \Rightarrow x^r &= 1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^r + 4 + 4x^r - 4x^r &= (x^r + 2)^r - 4x^r \\ &= (x^r + 2 + 2x)(x^r + 2 - 2x) \end{aligned}$$

حال می نویسیم:

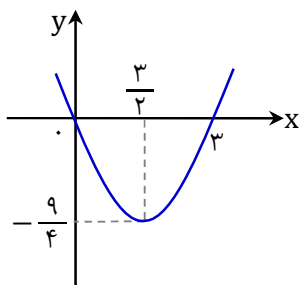
$$\begin{aligned} A &= \frac{(x^r + 2x + 2)(x^r - 2x + 2)}{x^r - 2x + 2} - x^r - 2x - 1 \\ A &= x^r + 2x + 2 - x^r - 2x - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{4} - 1} + \sqrt{\sqrt{4}(\sqrt{4} - 1)} &= A \\ \Rightarrow \sqrt{4} - 1 + \sqrt{4}(\sqrt{4} - 1) + 2\sqrt{\sqrt{4}(\sqrt{4} - 1)^2} &= A^r \\ \Rightarrow -1 + \sqrt{16} + 2\sqrt{4}(\sqrt{4} - 1) &= A^r \\ \Rightarrow -1 + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{4}(\sqrt{4} - 1) &= A^r \\ \Rightarrow -1 + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{4} - 2\sqrt{4} &= -1 + 4 = 3 = A^r \\ \Rightarrow A &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} \\ f(x) &= g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} \\ &\Rightarrow g(x-1) = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{x^2-4x+4} \\ &\Rightarrow c = -3, a = -6, b = 9 \\ &\Rightarrow a - b + c = -18 \end{aligned}$$

۵- گزینه ۳

$y = 0$  عضو برد است، پس نباید عضو دیگری داشته باشد.



$$-\frac{9}{4} \leq x^2 - 3x \leq 0$$

$$a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{a}{4}(x^2 - 3x) \leq -\frac{9a}{4 \times 9}$$

$$0 \leq \frac{-9a}{4 \times 9} < 1 \Rightarrow -4 < a \leq 0$$

به شرطی برد  $f$  تک‌عضوی است که:

$$a = 0, -1, -2, -3 \text{ پس}$$

۶- گزینه ۲

عرض از مبدأ خطوط را  $a$  فرض کنید.

$$g(x) = -\frac{a}{6}x + a$$

$$f(x) - g(x) = x \Rightarrow f(x) = x - \frac{a}{6}x + a$$

$$f(x) + g(x) = k \Rightarrow x - \frac{a}{6}x + a - \frac{a}{6}x + a = k$$

$$(1 - \frac{a}{3})x + 2a = k$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x + 3 \\ g(x) = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases} \Rightarrow fog(4) = f(1) = 3/5$$

۷- گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \geq 0 \\ \frac{1}{4}x & x < 0 \end{cases}$$

با فرض  $n > 0$  داریم:

$$y = mf(x) + f^{-1}(nx) = \begin{cases} 2mx + \frac{n}{2}x & x \geq 0 \\ 4mx + \frac{n}{4}x & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع  $y$  خطی است، داریم:

$$\Rightarrow 2m + \frac{n}{2} = 4m + \frac{n}{4} \Rightarrow 2m = \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{n}{m} = 8$$

با فرض  $n < 0$  داریم:

$$y = mf(x) + f^{-1}(nx) = \begin{cases} 2mx + \frac{n}{4}x & x \geq 0 \\ 4mx + \frac{n}{2}x & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع  $y$  خطی است، داریم:

$$\Rightarrow 2m + \frac{n}{4} = 4m + \frac{n}{2} \Rightarrow 2m = -\frac{n}{4} \Rightarrow \frac{n}{m} = -8$$

۸- گزینه ۳

اگر  $k$  عددی صحیح باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
 [x+k] &= [x] + k \\
 g(x) &= x + [x + [-x]] = x + [x] + [-x] \\
 g(x) &= \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x+1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \\
 g(-x) &= \begin{cases} -x & x \in \mathbb{Z} \\ -x-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow -g(-x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x+1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \\
 \Rightarrow g^{-1}(x) &= -g(-x)
 \end{aligned}$$

۹- گزینه ۳

با توجه به اینکه  $y$  همانی است، بنابراین داریم:

$$y = \frac{b+g(x)}{4x} = x \Rightarrow g(x) = 4x^2 - b$$

$$\text{طول نقاط نصف } y = (2x)^2 - 12(2x) + 5 = 4x^2 - 24x + 5$$

رأس سهمی  $x = 3$  است و همچنین رأس سهمی  $g(x)$  به صورت  $x = 0$  است، پس باید نمودار به دست آمده را ۳ واحد به سمت چپ انتقال دهیم در واقع  $a = 3$  است.

$$\begin{aligned}
 g(x) = 4x^2 - b &= 4(x+3)^2 - 24(x+3) + 5 \\
 &= 4x^2 + 24x + 36 - 24x - 72 + 5 \\
 &= 4x^2 - 31
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 31$$

$$\Rightarrow a + b = 34$$

۱۰- گزینه ۱

$$f(x) = 2 + \sqrt{3-x} \quad \text{دامنه: } x \leq 3$$

$$\text{بردار: } y \geq 2$$

$$y = x \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3-y} \quad x \geq 2$$

$$\Rightarrow y = 3 - (x-2)^2 \quad x \geq 2$$

$$\text{یک واحد به سمت چپ } g(x) = 3 - (x+1-2)^2 \quad x \geq 1$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 2 \quad x \geq 1$$

$$\begin{aligned}
 D_{f \circ g} &= \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \\
 &= \{x \geq 1 : -x^2 + 2x + 2 \leq 3\} \\
 &= \{x \geq 1 : x^2 - 2x + 1 \geq 0\} \\
 &= [1, +\infty)
 \end{aligned}$$



۱۱- گزینه ۲

$$\begin{aligned} \text{دو واحد به سمت چپ: } y &= 2 - \sqrt{x+2-1} = 2 - \sqrt{x+1} \\ \text{یک واحد به سمت پایین: } y &= 2 - \sqrt{x+1} - 1 = 1 - \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

برد تابع  $f^{-1} \circ g^{-1}$  همان دامنه تابع  $g \circ f$  است.

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \geq 1 : 2 - \sqrt{x-1} \geq -1\} \\ &= \{x \geq 1 : \sqrt{x-1} \leq 3\} \\ &= \{x \geq 1 : x \leq 10\} \\ &= [1, 10] \end{aligned}$$

۱۲- گزینه ۳

وارون تابع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{r} f^{-1}(rx) \xrightarrow{\text{وارون}} x = \frac{1}{r} f^{-1}(ry) \\ &\Rightarrow f^{-1}(ry) = rx \\ &\Rightarrow ry = f(rx) \Rightarrow y = \frac{1}{r} f(rx) \end{aligned}$$

برای تبدیل  $f(x)$  به  $\frac{1}{r} f(rx)$  یک انقباض افقی و یک انقباض عمودی لازم است.

۱۳- گزینه ۴

مختصات نقاط را در ضابطه توابع، جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} r = 2 - rf(-\frac{\alpha}{r}) \\ \beta = rf(\frac{-\alpha}{r} + 1) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(-\frac{\alpha}{r}) = \cdot \\ f(\frac{-\alpha}{r} + 1) = \frac{\beta}{r} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{r} + 1 \\ \frac{\beta}{r} = \cdot \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = r \\ \beta = \cdot \end{cases} \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۴

کافی است سهمی  $f$  بر سهمی جدید منطبق باشد، در واقع نقاط متناظر از هر دو تابع را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} S_f = (r, -1) &\Rightarrow f(r) = g(r) = -1 \\ g(r) = a + rf(b - \frac{r}{r}) &\Rightarrow \begin{cases} \frac{-1-a}{r} = -1 \\ b-1 = r \end{cases} \\ \Rightarrow a = 3, b = 3 &\Rightarrow a + b = 6 \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ۲

$$\begin{aligned} y &= |x-1| \\ \text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات: } y &= -|-x-1| = -|x+1| \\ \text{انتقال } k \text{ واحد به سمت بالا: } y &= k - |x+1| \\ A(-1, k), c(1, 0) \\ B: \begin{cases} y = k - x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} &\Rightarrow B(\frac{k}{2}, -1 + \frac{k}{2}) \\ S &= AB \cdot BC \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k}{r} + 1\right)^2 + \left(\frac{k}{r} + 1\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{r} - 1\right)^2 + \left(\frac{k}{r} - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow 2 \left| \frac{k}{r} + 1 \right| \cdot \left| \frac{k}{r} - 1 \right| = 16$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{r} - 1 = 8 \Rightarrow k = 6$$

۱۶- گزینه ۱

بار اول:

$$\text{واحد راست } 3 \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = \sqrt{x-3} - 3 = \sqrt{x-6}$$

$$\text{وارون } \Rightarrow x = \sqrt{y-6} \Rightarrow y = x^2 + 6, x \geq 0$$

بار دوم:

$$\text{وارون } \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow y = x^2 + 3, x \geq 0$$

$$\text{واحد چپ } 1 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = (x+1)^2 + 3, x \geq 0$$

حال محل تقاطع دو تابع را حساب می‌کنیم:

$$\text{تقاطع: } x^2 + 6 = (x+1)^2 + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 6 = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x = 1$$

۱۷- گزینه ۲

$$y = x \text{ به نسبت به } x = \frac{2y}{y+a} \Rightarrow y = \frac{-ax}{x-2}$$

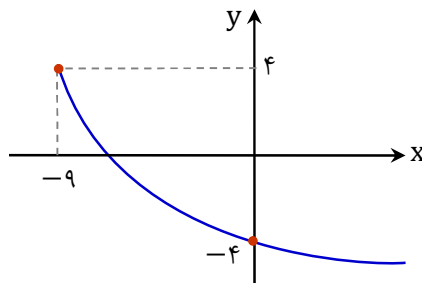
$$\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات } y = -\frac{-a(-x)}{-x-2} = \frac{ax}{x+2}$$

$$\text{تقاطع: } \frac{ax}{x+2} = \frac{2x}{x+a} \Rightarrow ax + a^2 = 2x + 4$$

از طرفی  $y = 1$  است، پس  $\frac{2x}{x+a} = 1$  و در نتیجه  $x = a$  است.

$$\begin{cases} ax + a^2 = 2x + 4 \\ x = a \end{cases} \Rightarrow 2a^2 = 2a + 4 \Rightarrow a = -1, 2$$

۱۸- گزینه ۴

ابتدا نمودار  $y = -2f\left(\frac{x}{2}\right)$  را رسم می‌کنیم.

اگر نمودار جدید بخواهد، محورها را قطع نکند، باید آن را بیش از ۹ واحد به سمت راست و بیش از ۴ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

$$\Rightarrow b > 9, a < -4$$

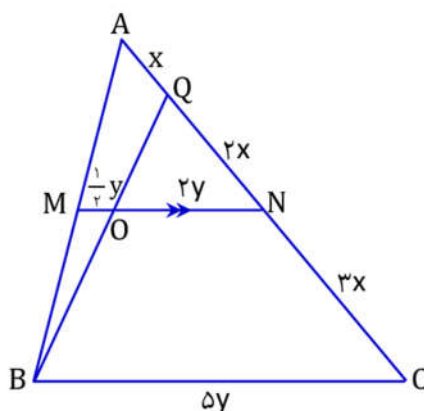
۱۹- گزینه ۲

از بین این پنج تکه چوب به  $\binom{5}{3} = 10$  طریق می توان سه تکه انتخاب کرد، اما طبق نامساوی مثلث باید مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر باشد، پس اگر ۲ و ۳ طول دو ضلع کوچک باشند، ۵ و ۶ نمی توانند طول ضلع بزرگ باشند و همچنین اگر ۲ و ۴ طول دو ضلع کوچک باشند، ۶ نمی تواند طول ضلع بزرگ باشد پس به  $10 - 3 = 7$  حالت می توانیم سه تکه انتخاب کنیم که اضلاع یک مثلث باشند.

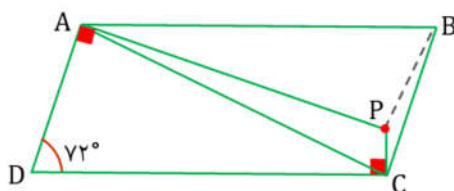
۲۰- گزینه ۲

با توجه به رابطه داده شده می توان نوشت:

$$\begin{aligned} AQ &= \frac{NQ}{2} = \frac{NC}{3} \\ \Rightarrow AQ &= x, NQ = 2x, NC = 3x \\ \triangle BQC: ON \parallel BC &\Rightarrow \frac{ON}{BC} = \frac{QN}{QC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow ON &= 2y, BC = 5y \\ \triangle ABC: MN \parallel BC &\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2x}{6x} = \frac{2}{6} \\ \Rightarrow MN &= \frac{BC}{3} = \frac{5}{3}y \\ MO &= MN - ON = \frac{1}{3}y \\ \frac{MO}{ON} &= \frac{\frac{1}{3}y}{2y} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



۲۱- گزینه ۲



$$\triangle ACD: AD < CD \Rightarrow \widehat{ACD} < \widehat{DAC}$$

و چون:

$$\widehat{DAC} = \widehat{BCA}, \widehat{ACD} < \widehat{BCA}$$

از طرفی می دانیم  $\widehat{AC}$  زاویه  $\widehat{C}$  را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده، پس  $\widehat{BCA} = 3\widehat{ACD}$  است و چون  $\widehat{C} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ ، پس  $\widehat{BCA} = 81^\circ$  از طرفی داریم:

$AD \parallel BC$ ، پس امتداد  $AP$  بر  $BC$  نیز عمود است. به همین شکل  $AB \parallel CD$ ، پس امتداد  $CP$  بر  $AB$  نیز عمود است. لذا  $AP$  و  $CP$  در مثلث  $ABC$  قسمتی از ارتفاع هستند. چون ارتفاعها همسایه اند، و تمام زاویه های مثلث  $ABC$  تند هستند. امتداد  $BP$  نیز در این مثلث ارتفاع است.  $BP$  را امتداد می دهیم، داریم:

$$\widehat{CBP} = 90^\circ - \widehat{BCA} = 9^\circ$$

$$AB \parallel CE, AE \parallel BC$$

$$\Rightarrow ABCE \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow CE = AB = ۳ \quad (۱)$$

$$AB \parallel DF, BF \parallel AD$$

$$\Rightarrow ABFD \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow DF = AB = ۳ \quad (۲)$$

$$DC = ۸ : (۱), (۲) \Rightarrow EF = ۲$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BCF: EE' \parallel BF \Rightarrow \frac{BE'}{CE'} = \frac{EF}{CE} = \frac{۲}{۳} \\ \triangle ADE: FF' \parallel AE \Rightarrow \frac{AF'}{DF'} = \frac{EF}{DF} = \frac{۲}{۳} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AF'}{DF'} = \frac{BE'}{CE'} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{عکس تالسی در دوزنقه}} E'F' \parallel AB \parallel CD$$

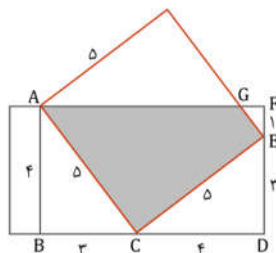
$$E'F' \parallel ED, E'E \parallel F'D \Rightarrow$$

$$E'EDF' \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow E'F' = ED = EF + FD = ۵$$

$$MD = \frac{AD}{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{DE}{MD} = \frac{۱}{۲} \left. \begin{array}{l} \\ \widehat{MDE} = \widehat{MDA} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AMD \sim \triangle MED$$

$$\frac{ME}{AM} = \text{نسبت تشابه} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ME = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ = ۵$$

عمود AB برابر ضلع FD می باشد و در نتیجه مثلث قائم الزاویه ABC مثلث ۳-۴-۵ می باشد. از طرفی  $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{DCE}$  پس  $\widehat{ACB} = \widehat{CED}$  و در نتیجه چون  $AC = CE = ۵$  است، به حالت وتر و یک زاویه حاده  $\triangle ABC \cong \triangle CDE$  می باشد. و طبق اجزای متناظر  $ED = BC = ۳$



همچنین داریم  $\widehat{CED} = \widehat{EGF}$  پس  $\triangle EFG \sim \triangle CDE$  و با توجه به نسبت اجزای متناظر:

$$\frac{EF}{CD} = \frac{GF}{ED} \Rightarrow GF = \frac{۳}{۴}$$

با استفاده از این اطلاعات مساحت قسمت رنگی را حساب کنید.

$$S_{ACEG} = S_{ABDF} - S_{ABC} - S_{CDE} - S_{EFG}$$

$$= ۲۸ - ۶ - ۶ - \frac{۳}{۸} = \frac{۱۲۵}{۸}$$

اگر فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان A به صورت  $ad - bc$  است. برای کمینه کردن دترمینان باید بخش ad را کمینه و بخش bc را بیشینه کنیم. چون تمامی درایه ها نامنفی است کمینه ad برابر صفر و بیشینه bc در حالی رخ می دهد که c و b بزرگترین مقادیر ممکن یعنی ۲ و ۴ باشند پس کمترین مقدار دترمینان A برابر ۸- است در نتیجه:

$$|4A^{-1}| = 4^2 \times \frac{1}{|A|} = -۲$$

$$A^r = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^r + y^r + z^r & xy + yz + zx & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^r + y^r + z^r = 1 \quad \text{و} \quad xy + yx + zy = \cdot$$

$$(x + y + z)^r = x^r + y^r + z^r + r(xy + zx + zy)$$

$$= 1 + r \times \cdot = 1 \Rightarrow x + y + z = \pm 1$$

$$\xrightarrow{x+y+z>\cdot} x + y + z = 1$$

از طرفی می‌دانیم:

$$x^r + y^r + z^r - rxyz$$

$$= (x + y + z)(x^r + y^r + z^r - (xy + xz + yz))$$

پس:

$$x^r + y^r + z^r = \left( \underbrace{x + y + z}_1 \right) \left( \underbrace{x^r + y^r + z^r}_1 - \left( \underbrace{xy + xz + yz}_\cdot \right) \right) + r \underbrace{xyz}_\cdot = 1$$

$$AB = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha + b\beta = \alpha \Rightarrow (1 - a)\alpha = b\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{1-a} \\ c\alpha + d\beta = \beta \Rightarrow \beta(1 - d) = c\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1-d}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{1-a} = \frac{1-d}{c} \Rightarrow bc = 1 - (a + d) + ad$$

$$\Rightarrow ad - bc = \underbrace{(a + d)}_{14.3} - 1 = 14.2$$

رابطه داده شده را به صورت زیر مرتب کرده و به روش دسته‌بندی تجزیه می‌کنیم:

$$A^r - rA^r + rA - rI = I \rightarrow (A^r + rI)(A - rI) = I$$

$$\Rightarrow (A^r + rI)^{-1} = A - rI$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = -r \Rightarrow \alpha + \beta = -1$$

$$|A^r + I| = |(A + I)(A^r - A + I)| = |A + I| |A^r - A + I| = r$$

$$\xrightarrow{|A+I|=r} |A^r - A + I| = \frac{r}{r}$$

$$(A - I)^r = r \Rightarrow A^r - rA^r + rA - I = r$$

$$\Rightarrow A^r + rI = rA^r - rA + rI$$

$$\Rightarrow |A^r + rI| = |r(A^r - A + I)|$$

$$= r^r |A^r - A + I| = r^r \left( \frac{r}{r} \right) = \frac{r^r}{r}$$

۳۰- گزینه ۴

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$$

حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ می باشد.

پس لازم است مضرب ۸ بودن حاصل عبارت بررسی گردد.

در حالتی که  $n$  فرد باشد هر دو مقدار  $n-1, n+1$  زوج هستند و یکی از آن ها مضرب ۴ نیز هست. پس به ازای تمام  $n$  های فرد حاصل  $n^3 - n$  مضرب ۲۴ خواهد بود.

برای  $n$  های زوج چون هر دو مقدار  $n-1, n+1$  فرد خواهند بود، به ناچار خود  $n$  بایستی مضرب ۸ باشد.

در میان ۹۰۰ عدد سه رقمی ۴۵۰ تا فرد و ۱۱۲ تا مضرب ۸ هستند.

$$100 \leq 8k < 1000 \Rightarrow 13 \leq k < 125 \rightarrow 112 \text{ مقدار}$$

پس در کل ۵۶۲ مقدار شرایط مساله را تامین می نماید.

۳۱- گزینه ۳

$$\left[ \begin{array}{l} a, \overbrace{(a, b)}^d \\ a, \overbrace{(a, d)}^d \end{array} \right] = |a| \Rightarrow [a, (a, b)] \times (a, (a, d)) = |a|d = |a|(a, b)$$

۳۲- گزینه ۲

می دانیم مربع هر عدد فرد به شکل  $8k+1$  نوشته می شود پس:

$$a^{2r} + b^{2r} + c^{2r} = 8k+1 + 8k'+1 + \underbrace{(2k'')^{2r}}_{8q} = 8(k+k'+q) + 2 \Rightarrow r=2$$

۳۳- گزینه ۳

$$2^{32} - 1 = (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^1 + 1)(2^1 - 1)$$

با توجه به مطالب کتاب درسی تمام عددهای  $2^1 + 1$  تا  $2^{16} + 1$  عددهایی اول هستند و  $2^{32} - 1$  حاصل ضرب ۵ عدد اول متمایز می باشد. پس دارای ۳۲ مقسوم علیه طبیعی است که دو تا از آن ها ۳ و ۵ هستند.

۳۴- گزینه ۳

$$(n^4, 480) = 96 \Rightarrow (n^4, 2^5 \times 3 \times 5) = 2^5 \times 3$$

از تساوی آخر نتیجه می شود عدد  $n$  مضرب ۵ نیست. مضرب ۳ است و حداقل دارای ۲ تا عامل ۲ است. (مضرب ۴ است)

$$d = (n^4, 2^{10} \cdot 3^5) = (n^4, 2^{10} \times 3^{10} \times 5^{10} \times 7^{10})$$

در این صورت با توجه به موارد ذکر شده داریم.

$$d = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$$

که در آن  $X$  می تواند یکی از مقادیر ۶ یا ۹ یا ۱۰ باشد. (سه حالت)

$Y$  می تواند ۳ یا ۶ یا ۹ یا ۱۰ باشد. (چهار حالت)

$Z$  به طور حتم صفر است. (یک حالت)

$t$  می تواند ۰ یا ۳ یا ۶ یا ۹ یا ۱۰ باشد. (۵ حالت)

پس در کل ۶۰ حالت برای عدد  $d$  موجود است.

۳۵- گزینه ۲

$$[\lambda a^r - \lambda, a^r + 1] = [\lambda(a-1)(a+1), (a+1)(a^r - a + 1)]$$

$$= (a+1) [\lambda(a-1), (a^r - a + 1)]$$

$$= (a+1) \times \lambda(a-1) \times (a^r - a + 1) = \lambda(a-1)(a^r + 1)$$

دقت کنید که  $a^r - a + 1$  همواره فرد است و نسبت به  $\lambda$  اول است هم چنین از  $a$  برابر  $(a-1)$  یک واحد بیش تر است و نسبت به  $(a-1)$  هم اول است. پس نسبت به  $\lambda(a-1)$  اول است پس:

$$[\lambda(a-1), (a^r - a + 1)] = \lambda(a-1) \times (a^r - a + 1)$$

۳۶- گزینه ۴

خارج قسمت تقسیم عدد  $a$  بر  $b$  همیشه  $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$  می باشد. پس

$$\left\lfloor \frac{1000}{b} \right\rfloor = 23 \Rightarrow 23 \leq \frac{1000}{b} < 24 \Rightarrow \frac{1000}{24} < b \leq \frac{1000}{23} \Rightarrow b = 42 \text{ یا } 43$$

که مقدار  $b = 42$  باقی مانده ی بزرگ تری تولید می نماید.

$$1000 = 42(23) + 34$$

۳۷- گزینه ۱

$$\begin{cases} a = 7q + 4 \\ a = 11q' + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11a = 77q + 44 \\ 7a = 77q' + 35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a = 77t + 9 = 77(t+1) - 68 \Rightarrow a = 77k - 17$$

$$\Rightarrow 3a = 77k' - 51 \Rightarrow 3a = 77(k'-1) + 26$$

۳۸- گزینه ۳

$$5a + 11b = 47q + 21 \Rightarrow 5a + 11b = 47(10q) + 210$$

$$3a + 16b = 47(10q - a - 2b + 4) + 22$$

۳۹- گزینه ۱

$$\binom{200}{100} = \frac{200!}{100! \times 100!}$$

توان عدد ۳ در تجزیه ی  $200!$  (صورت کسر) برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{81} \right\rfloor = 66 + 22 + 7 + 2 = 97$$

توان عدد ۳ در تجزیه ی  $100!$  برابر است با:  $33 + 11 + 3 + 1 = 48$

پس در  $100! \times 100!$  (مخرج کسر) توان ۳ برابر  $48 \times 2 = 96$  می باشد.

پس حاصل عبارت نهایی فقط یک عامل ۳ در تجزیه ی خود دارد.

۴۰- گزینه ۳

فرم کلی مجموعه C بنابه قضیه تقسیم به شکل های زیر است:

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = vk, x = vk + 1, x = vk + 3, x = vk + 4, x = vk + 5\}$$

در گزینه «۱» داریم:

$$17 = 7(2) + 3 \Rightarrow 17 \in C$$

$$100 = 7(14) + 2 \Rightarrow 100 \in B$$

در گزینه «۲» داریم:

$$-5 = 7(-1) + 2 \Rightarrow -5 \in B$$

$$1 = 7(0) + 1 \Rightarrow 1 \in C$$

در گزینه «۳» داریم:

$$-17 = 7(-3) + 4 \Rightarrow -17 \in C$$

$$11 = 7(1) + 4 \Rightarrow 11 \in C$$

پس  $-17$  و  $11$  هر دو عضو یک افراز هستند.

در گزینه «۴» داریم:

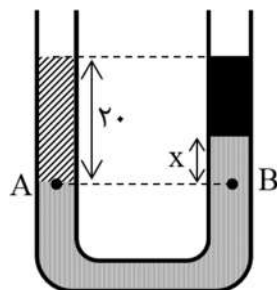
$$0 = 7(0) + 0 \Rightarrow 0 \in C$$

$$20 = 7(2) + 6 \Rightarrow 20 \in A$$



## ۴۱ (دیارکجوری) - گزینه ۲

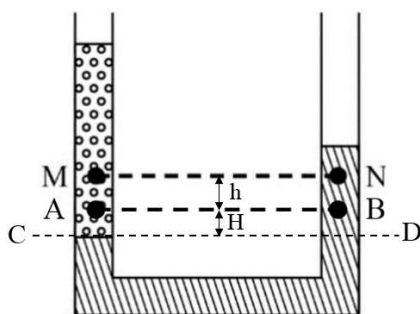
شکل ظرف پس از اضافه کردن مایع سوم به صورت زیر است. اگر در این حالت اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه را  $X$  بنامیم، داریم:



$$x \times 1 + (20 - x) \times 0.5 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

## ۴۲ (دیارکجوری) - گزینه ۳

گزینه (۱) درست است؛ زیرا چگالی  $\rho'$  کمتر از  $\rho$  است؛ و اگر از مرز مشترک (خط چین CD) به یک اندازه در دو مایع  $\rho$  و  $\rho'$  بالا برویم، کاهش فشار در شاخه سمت راست (چگالی  $\rho$ ) بیشتر است.



گزینه (۲) درست است؛ زیرا با همان استدلال بالا، هم  $P_A > P_B$  است و هم  $P_M > P_N$  است. بنابراین  $P_A + P_M > P_B + P_N$  است.

گزینه (۳) نادرست است؛ زیرا فاصله  $\overline{AM}$  با فاصله  $\overline{BN}$  برابر است، ولی  $\rho' < \rho$  است و این یعنی بین A و M اختلاف فشار کمتری نسبت به دو نقطه B و N داریم.

گزینه (۴) درست است؛ زیرا:

$$\left. \begin{aligned} |P_A - P_B| &= |\rho - \rho'|gH \\ |P_M - P_N| &= |\rho - \rho'|g(H+h) \end{aligned} \right\} \Rightarrow |P_A - P_B| < |P_M - P_N|$$

## ۴۳ (علیدوست) - گزینه ۲

مساحت شاخه سمت راست، ۴ برابر شاخه سمت چپ است. پس اگر سطح مایع در شاخه راست ۸ cm پایین بیاید، در شاخه سمت چپ ۳۲ cm بالا می‌رود و اختلاف سطح مایع با چگالی  $\rho = 6/8 \frac{g}{cm^3}$  در دو شاخه ۴۰ cm کاهش می‌یابد. یعنی فشار پیمانه‌ای مخزن به اندازه

$$40 \text{ cm} \text{ از مایعی با چگالی } 6/8 \frac{g}{cm^3} \text{ کاهش یافته است که معادل } 20 \text{ cm} \text{ جیوه با چگالی } 13/6 \frac{g}{cm^3} \text{ است.}$$

## ۴۴ (محمدپور) - گزینه ۴

نیروی وارد بر یکای سطح در کف ظرف، همان فشار در کف ظرف است (تعریف فشار است). با توجه به این که جنس مایع و ارتفاع آن در دو ظرف یکسان است، پس فشار در کف ظرف‌ها برابر است.

۴۵ (دیار کجوری) - گزینه ۱

اگر مساحت کف ظرف را  $A_1$  و سطح مقطع لوله را  $A_2$  فرض کنیم، داریم:

$$\Delta F = \rho g (\Delta h) A_1$$

$$60 = 10^3 \times 10 \times \Delta h \times 500 \times 10^{-4} \Rightarrow \Delta h = 0.12 \text{ m}$$

$$V = \Delta h \cdot A_2 = 0.12 \times 40 \times 10^{-4} = 48 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \Rightarrow M = 48 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.48 \text{ kg}$$

۴۶ (حیدری) - گزینه ۲

با اضافه کردن مایع جدید و فرو رفتن بقیه حجم مکعب در آن، یک نیروی ارشمیدس دیگر نیز به جسم وارد می‌شود که جهت آن هم رو به بالا است. بنابراین چون مجموع دو نیروی ارشمیدس باید برابر وزن جسم شود، نیروی ارشمیدس اولیه کمتر شده و حجم جسم داخل مایع اول کاهش می‌یابد.

۴۷ (محمدپور) - گزینه ۲

حاصلضرب آهنگ شارش خروجی از روزنه ( $Av$ ) در مدت زمان، باید برابر حجم مایع خارج شده ( $V_{\text{out}}$ ) باشد. پس:

$$Av \cdot \Delta t = V_{\text{out}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} D^2 \times 2 \times \Delta t = 0.2 \times \frac{\pi}{4} (10 \cdot D)^2 \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ s}$$

۴۸ (علیدوست) - گزینه ۱

آهنگ شارش آب در لوله‌ها برابر  $480 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = \frac{144 \times 10^3 \text{ cm}^3}{300 \text{ s}}$  است.

$$480 = A_2 v_2 = (3 \times 4^2) \times v_2 \Rightarrow v_2 = 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

تندی حرکت آب در قسمت باریک را  $v_2$  بنامیم، داریم:

بنابراین یک ذره طول قسمت باریک در لوله را طی مدت  $10 \text{ s} = \frac{100}{10}$  می‌پیماید، و این یعنی قسمت پهن را در مدت  $50 \text{ s}$  طی می‌کند. اکنون

اگر تندی حرکت آب در قسمت پهن را  $v_1$  بنامیم، داریم:  $v_1 = \frac{10 \text{ cm}}{50 \text{ s}} = 1/6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  و از آنجا:

$$480 = A_1 v_1 = (3 \times r_1^2) \times 1/6 \Rightarrow r_1 = 10 \text{ cm}$$

۴۹ (علیدوست) - گزینه ۴

ابتدا رابطه خطی بین دماهای دو دماسنج را به دست می‌آوریم:

$$x - 40 = \frac{160}{100} (\theta - 0) \Rightarrow x = 1.6\theta + 40$$

$$x = 2\theta + 12 \Rightarrow 2\theta + 12 = 1.6\theta + 40 \Rightarrow 0.4\theta = 28 \Rightarrow \theta = 70^\circ \text{ C}$$

۵۰ (حیدری) - گزینه ۳

$$\Delta l_A + \Delta l_B = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow 2 \times 3 \times 10^{-5} \Delta \theta + 4 \times 10^{-5} \Delta \theta = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = 10^\circ \text{ C} \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5} \times 10 = 18^\circ \text{ F}$$

۵۱ (دیار کجوری) - گزینه ۴

مایع دماسنجی باید گرمای ویژه پایینی داشته باشد تا هم سریع‌تر با جسم مورد نظر هم‌دما شود و هم برای رسیدن به دمای تعادل، دمای جسم مورد نظر را کمتر تغییر دهد. از طرفی خوب است مایع دماسنجی ضریب انبساط حجمی بالایی داشته باشد تا با افزایش دما، در لوله دماسنج مقدار قابل توجهی بالا برود.

۵۲ (دیار کجوری) - گزینه ۲

فرض کنید  $V_1$  حجم اولیه جیوه موجود در ظرف است. برای این که حجم فضای خالی ثابت بماند، باید تغییر حجم ظرف و تغییر حجم جیوه با هم برابر باشد:

$$\Delta V_{\text{Hg}} = \Delta V_{\text{glass}} \Rightarrow V_1 \times 1/8 \times 10^{-4} \times \Delta T = 40 \times 3 \times 9 \times 10^{-6} \times \Delta T \Rightarrow V_1 = 6 \text{ cm}^3$$

۵۳ (علیدوست) - گزینه ۳

فرض کنید ظرفیت گرمایی گوی  $C$  و گرمای ویژه آب  $c_w$  است. برای حالت اول داریم:

$$(I): \quad C(40 - 64) - mc_w(40 - \theta) = 0 \Rightarrow \frac{C}{mc_w} = \frac{40 - \theta}{24}$$

و پس از اضافه کردن  $3m$  گرم آب  $\frac{\theta}{2}^\circ \text{C}$  به مجموعه و رسیدن به دمای تعادل  $20^\circ \text{C}$  داریم:

$$(II): \quad C(20 - 40) + mc_w(20 - 40) + 3mc_w(20 - \frac{\theta}{2}) = 0$$

$$mc_w(20 - 40) + 3mc_w(20 - \frac{\theta}{2}) = 20C \Rightarrow -20 + 3(20 - \frac{\theta}{2}) = 20 \frac{C}{mc_w}$$

با جایگذاری  $\frac{C}{mc_w}$  از معادله (I) خواهیم داشت:

$$-20 + 3(20 - \frac{\theta}{2}) = 20 \times \frac{40 - \theta}{24} \Rightarrow 40 - \frac{3\theta}{2} = \frac{5}{6}(40 - \theta) \Rightarrow \theta = 10^\circ \text{ C}$$

۵۴ (دیار کجوری) - گزینه ۳

فرض کنید  $M$  جرم اولیه آب در ظرف، و  $m$  جرم نهایی یخ در ظرف باشد. در این صورت  $(M - m)$  گرم از آب دچار تبخیر سطحی شده است (دقت کنید که در حین رخ دادن تبخیر سطحی آب در این محیط، دمای آب تغییر نمی‌کند). گرمایی که صرف تبخیر سطحی این مقدار آب شده است، از بقیه آب گرفته شده و باعث یخ زدن آن‌ها شده است. پس داریم:

$$(M - m)L_V = mL_F \Rightarrow ML_V = m(L_F + L_V) \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{L_V}{L_F + L_V}$$

## ۵۵ (حیدری) - گزینه ۴

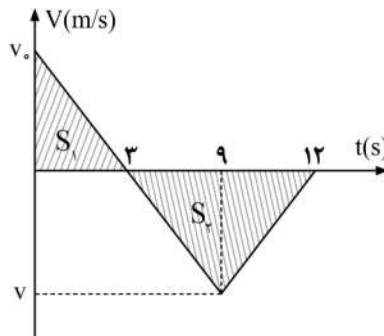
چون نمودار سرعت زمان است، تغییر جهت حرکت در نقاط تقاطع نمودار با محور زمان رخ می‌دهد و با توجه به سهمی بودن شکل نمودار و تقارن ریشه‌ها نسبت به رأس سهمی، ریشه دوم  $t = 11s$  است.

## ۵۶ (حیدری) - گزینه ۲

$$\frac{v_1}{v} = \frac{3}{9-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 2v_1$$

$$S_1 = \frac{3 \times v_1}{2}$$

$$S_2 = \frac{9 \times v}{2} = \frac{9 \times 2v_1}{2} = 9v_1$$

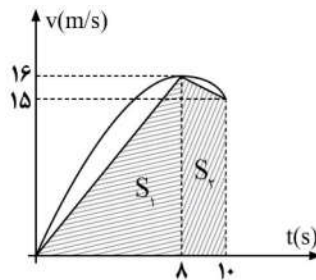


$$\Delta x = v_{av} \cdot \Delta t \Rightarrow S_2 - S_1 = 6/25 \times 12 \Rightarrow 9v_1 - 1/5v_1 = 75 \Rightarrow v_1 = 10 \frac{m}{s}$$

$$a_{av, \rightarrow 6} = a_{av, \rightarrow 9} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-20 - 10}{9} = -\frac{10}{3} \frac{m}{s^2}$$

## ۵۷ (علیدوست، دیارکجوری) - گزینه ۳

نمودار سرعت - زمان این حرکت، یک سهمی محدب است که رأس آن در لحظه  $t = 8s$  قرار دارد. تغییرات سرعت، مساحت زیر نمودار  $a-t$  است؛ که از  $t = 0$  تا  $t = 8s$  برابر  $16 \frac{m}{s}$  و از  $t = 8s$  تا  $t = 10s$  برابر  $1 \frac{m}{s}$  است. پس نمودار سرعت - زمان، مانند شکل زیر است:



در این نمودار دو نکته مشهود است. اول این که علامت سرعت تغییر نمی‌کند؛ این یعنی جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند و بنابراین  $S_{av} = V_{av}$  است. دوم این که نمودار محدب است، پس مساحت زیر آن حتماً از مساحت قسمت هاشورخورده بیشتر است. مساحت قسمت هاشورخورده عبارت است از:

$$S_1 + S_2 = \frac{8 \times 16}{2} + \frac{16 + 15}{2} \times 2 = 64 + 31 = 95 m$$

بنابراین جابه‌جایی متحرک در این ۱۰ ثانیه حتماً از ۹۵ متر بیشتر است. یعنی:  $S_{av} = V_{av} > 9.5 \frac{m}{s}$

در حالت اول داریم:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \\ v_B &= \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{120 - 10}{130 - 90} = \frac{120}{40} = 3$$

اکنون اگر دو متحرک با همین تندها در خلاف جهت هم حرکت کنند، فاصله ۸۰ متری بین خود را به نسبت ۳ به ۱ طی می‌کنند تا به هم برسند. یعنی متحرک A به اندازه ۶۰ متر در جهت مثبت محور و متحرک B به اندازه ۲۰ متر در جهت منفی محور جابه‌جا می‌شوند و در مکان ۷۰ متر به هم می‌رسند.

## ۵۹ (محمدپور) - گزینه ۱

اگر  $l_1$  و  $l_2$  طول قطارها و  $d$  فاصله اولیه جلوی آن‌ها از هم باشد، مدت زمانی که از این لحظه طول می‌کشد تا قطارها به‌طور کامل از کنار هم عبور کنند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta t = \frac{l_1 + l_2 + d}{|v_1| + |v_2|} = \frac{100 + 200 + 800}{30 + 20} = 22 \text{ s}$$

$$x_{B_r} = 700 - 20 \times 22 = 260 \text{ m}$$

## ۶۰ (دیار کجوری) - گزینه ۴

با مرتب کردن معادله به صورت  $x = 4t^2 - 28t + 40$  و تطبیق آن با معادله  $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$  معلوم می‌شود که حرکت جسم با شتاب ثابت ۸ انجام شده است. پس شتاب متوسط در تمام بازه‌ها ۸ است. برای سرعت متوسط داریم:

$$v_{av. \rightarrow 10} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{160 - 40}{10 - 0} = 12$$

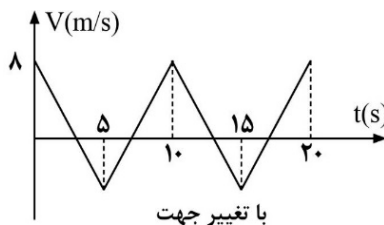
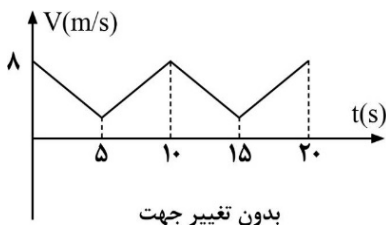
## ۶۱ (دیار کجوری) - گزینه ۴

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط هر بازه، برابر سرعت لحظه وسط بازه است. پس:

$$v_3 = v_{av. \rightarrow 6} = \frac{x_6 - x_0}{6} = \frac{-18 - 24}{6} = -7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## ۶۲ (علیدوست) - گزینه ۲

از روی نمودار شتاب - زمان، فقط تغییرات سرعت بر حسب زمان به دست می‌آید. بسته به این که سرعت اولیه متحرک چند باشد، نمودار سرعت - زمان می‌تواند محور زمان را قطع کند یا نکند:



با توجه به دو حالت نمودار:

الف درست است، زیرا شتاب متوسط حتماً صفر است، زیرا  $V_1 = V_2$ .

ب نادرست است، زیرا در صورت تغییر جهت حرکت، ۴ بار جهت حرکت تغییر کرده است. در واقع یا تغییر جهتی نداریم یا حتماً ۴ بار تغییر جهت داریم.

ج نادرست است، زیرا سرعت اولیه معلوم نیست و مساحت‌های بالا و پایین محور زمان لزوماً با هم برابر نیستند. پس سرعت متوسط الزاماً صفر نیست.

د درست است، زیرا با توجه به تقارن شیب‌ها، متحرک در هر صورت نیمی از زمان حرکت را تندشونده و نیمی کندشونده طی می‌کند.

### ۶۳ (حیدری) - گزینه ۴

اگر اتومبیل را با اندیس (۱) و موتورسوار را با اندیس (۲) نشان دهیم، با نوشتن معادلات مکان - زمان آن‌ها داریم:

$$x_1 = 24t$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 + 20 = 4t^2 + 20$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 4t^2 + 20 = 24t \Rightarrow t^2 + 5 = 6t \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1s \\ t = 5s \end{cases}$$

اختلاف زمانی این دو سبقت ۴ ثانیه است. فاصله مکانی این دو سبقت را به راحتی از جابجایی اتومبیل به دست می‌آوریم:

$$\Delta t = 4s \Rightarrow \Delta x = 4 \times 24 = 96m$$

### ۶۴ (حیدری) - گزینه ۱

ابتدا از طریق معادله مستقل از زمان، مسافت طی شده توسط هر متحرک را بر حسب شتاب به دست می‌آوریم:

$$0 - 25^2 = 2a \Delta x_1 \Rightarrow |\Delta x_1| = \frac{625}{2|a|}$$

$$0 - 40^2 = 2a \Delta x_2 \Rightarrow |\Delta x_2| = \frac{1600}{2|a|}$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 445 \Rightarrow \frac{625}{2|a|} + \frac{1600}{2|a|} = 445 \Rightarrow |a| = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

### ۶۵ (محمدپور) - گزینه ۳

شتاب سطح سیاره را  $g$  فرض می‌کنیم (که البته برابر ۱۰ نیست!!).

$$\left. \begin{aligned} H - 48 &= \frac{1}{2}g(\cdot/2t)^2 \\ H &= \frac{1}{2}g(t)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{H - 48}{H} = \left(\frac{\cdot/2t}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{H - 48}{H} = \frac{4}{100} \Rightarrow H = 50m$$

## ۶۶- گزینه ۳

- الف) نادرست: الکلها (ROH) گروه OH دارند ولی باز محسوب نمی شوند.  
 ب) نادرست: ۳۰ گرم استیک اسید معادل ۰/۵ مول است ولی این اسید، ضعیف است و نمی تواند ۰/۵ مول یون  $H^+$  تولید کند.  
 پ) درست: با توجه به فرمول فرمیک اسید (HCOOH) نصف H آن خاصیت اسیدی دارند.  
 ت) نادرست: یکی از نقاط ضعف آرنیوس این بود که: در مورد میزان اسیدی بودن محلول ها نمی توان اظهار نظر کرد.

## ۶۷- گزینه ۱

برای مقایسه رسانایی محلول ها باید غلظت یون های موجود در محلول ها را مقایسه کرد:

$$\text{محلول A: NaOH} : 0/5 \times 2 = 1M$$

$$\text{محلول B: HF} : 2 \times 0/1 \times 2 = 0/4 M$$

$$\text{محلول C: CaO} : 0/5 \times 3 = 1/5 M$$

$$\text{محلول D: NH}_4 : 4 \times 0/1 \times 2 = 0/8 M$$

در نتیجه رسانایی محلول ها به صورت زیر می باشد.  $C > A > D > B$

## ۶۸- گزینه ۲

موارد اول و دوم و سوم درست بیان شده اند.  
 دلیل نادرستی عبارت آخر: شیب غلظت زمان  $SO_3$  قرینه  $SO_2$  است.

## ۶۹- گزینه ۳

pH آب برابر ۷ است. با تغییر ۲/۷ واحدی به  $pH = 4/3$  تغییر می کند.

$$[H^+] = 10^{-4/3}$$

$$[H^+] = 5 \times 10^{-5} \quad 10L \times \frac{5 \times 10^{-5} \text{ molH}^+}{1L} \times \frac{1 \text{ molN}_2\text{O}_5}{2 \text{ molH}^+} \times \frac{108 \text{ g}}{1 \text{ mol}} \times \frac{100}{54} = 0/05 \text{ g}$$

## ۷۰- گزینه ۱

موارد ذکر شده در صورت سوال نشان دهنده باز ضعیف است که در بین مواد ذکر شده فقط آمونیاک و متیل آمین باز ضعیف هستند.

## ۷۱- گزینه ۳

ابتدا مول  $H^+$  موجود در محلول HA را محاسبه می کنیم.

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{10^{-5} \times 0/4} = 2 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{L}$$

$$\text{mol HA} : 2 \times 10^{-3} \times 2 = 4 \times 10^{-3}$$

در ادامه مول آنیون موجود در محلول HCl را محاسبه می کنیم.

$$20 \text{ g} \times \frac{36/5}{100} \times \frac{1 \text{ molCl}^-}{36/5 \text{ gHCl}} = 0/2 \text{ molCl}^-$$

$$\frac{4 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-1}} = 0/02 \text{ در نهایت}$$

۷۲- گزینه ۲

$$k_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{4 \times 10^{-2} \times \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \times 10^{-2} = 3/3 \times 10^{-2}$$

۷۳- گزینه ۴

بررسی گزینه ها

(۱) pH دو محلول برابر است

(۲) رسانایی الکتریکی دو محلول برابر است.

(۳) درجه یونش HA بزرگتر است.

۷۴- گزینه ۳

بررسی گزینه ها

(۱) تغییرات  $H^+$ ,  $OH^-$  با ورود اسید به یک نسبت رخ می دهد.(۲) با افزایش دما غلظت  $H^+$  آب افزایش می یابد در نتیجه pH کاهش می یابد.(۳) اگر غلظت  $OH^-$  ۰/۰۱ مقدار اولیه شود یعنی  $[OH^-] = 10^{-9}$  در نتیجه  $[H^+] = 10^{-5}$  می شود و pH = ۵ می شود.

(۴) اگر غلظت یک اسید خیلی ضعیف ۴ برابر رقیق شود درجه یونش ۲ واحد افزایش می یابد.

۷۵- گزینه ۱

فقط عبارت دوم نادرست هست.

بررسی عبارت ها

$$\frac{\alpha_{HA}}{\alpha_{HB}} = \sqrt{\frac{K_{HA}}{K_{HB}}} = \sqrt{\frac{3/2 \times 10^{-5}}{0/8 \times 10^{-5}}} = 2 \text{ : عبارت اول درست}$$

عبارت دوم نادرست: اسید HA نسبت به HB قوی تر است در نتیجه غلظت آنیون ها در ظرف HA از HB بیشتر است.

عبارت سوم درست: غلظت یون ها در ظرف HA بیشتر است در نتیجه میزان رسانایی آن نیز بیشتر است.

عبارت چهارم درست:

۷۶- گزینه ۳

موارد الف، ب و ت درست هستند.

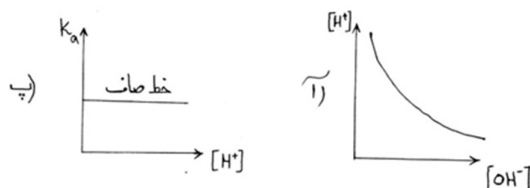
بررسی عبارت پ:

شوینده ها آلاینده ها و موادی نظیر وازلین را در آب پخش می کنند.

۷۷- گزینه ۱

نمودارهای ب و پ درست رسم شده اند.

شکل صحیح نمودارهای الف و ت به صورت روبرو است.





## ۷۸- گزینه ۱

بررسی گزینه ها

- (۱) درست: غلظت اسید در A بیشتر است و در اثر واکنش با منیزیم گاز  $H_2$  بیشتری تولید می کند.  
 (۲) نادرست: رسانایی الکتریکی دو ظرف برابر است.  
 (۳) نادرست: سرعت واکنش در دو ظرف برابر است.  
 (۴) نادرست: مجموع غلظت گونه ها در ظرف A بیشتر است.

## ۷۹- گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} [H^+][OH^-] &= 1 \cdot 10^{-14} \\ \frac{[H^+]}{[OH^-]} &= 4 \times 10^8 \end{aligned} \right\} [H^+] = 2 \times 10^{-3}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} = \frac{4 \times 10^{-6}}{0.1} = 4 \times 10^{-5} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

## ۸۰- گزینه ۱

غلظت مولکول های یونیده نشده در یک اسید قوی کمترین مقدار ممکن و غلظت یون های حاصل از یونش یک اسید قوی بیشترین مقدار ممکن است. پس گزینه ای درست است که در آن دو اسید قوی داشته باشیم.

## ۸۱- گزینه ۲

به ازای یونش هر BOH به تعداد  $B^+$  و  $OH^-$  ایجاد می شود. ابتدا تعداد BOH های یونیده شده را محاسبه می کنیم:

$$BOH \text{ تعداد یونیده شده} = 7 = 200 \times 3 / 5 \times 10^{-3}$$

پس کل ذرات موجود در آب را محاسبه می کنیم:

$$\text{تعداد کل} = \underbrace{(200 - 7)}_{BOH} + \underbrace{7}_{B^+} + \underbrace{7}_{OH^-} = 200$$

## ۸۲- گزینه ۴

نادرستی عبارت (ب): برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک (CaO) اضافه می کنند.  
 نادرستی عبارت (پ): اغلب فلزها با اسیدها واکنش می دهند.

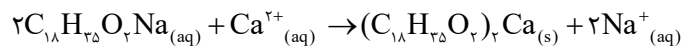
## ۸۳- گزینه ۲

در حالت تعادل سرعت واکنش رفت و برگشت برابر است، اما سرعت مواد موجود در واکنش می توانند متفاوت باشد.

## ۸۴- گزینه ۱

فرمول پاک کننده ی صابونی با زنجیر هیدروکربنی دارای یک پیوند دوگانه:  $C_n H_{2n-2} O_2 Na$ ,  $C_{18} H_{34} O_2 Na$

فرمول پاک کننده ی غیر صابونی با زنجیر الکیل:  $C_n H_{2n+1} C_6 H_5 SO_2 Na$ ,  $C_{17} H_{35} C_6 H_5 SO_2 Na$



$$121/2g(C_{18}H_{35}O_2)_2Ca \times \frac{1mol(C_{18}H_{35}O_2)_2Ca}{60.6g(C_{18}H_{35}O_2)_2Ca} \times \frac{2mol}{1mol} \times \frac{30.6}{1mol} = 122/4g$$

$$غیرصابون + صابون = 30.0g \Rightarrow غیرصابون = 177/6g$$

$$\% \text{ غیرصابون} = \frac{177/6}{30.0} \times 100 = 59/2\%$$

$$121/2g_{\text{رسوب}} \times \frac{1mol_{\text{رسوب}}}{60.6g_{\text{رسوب}}} \times \frac{1molCa^{2+}}{1mol_{\text{رسوب}}} \times \frac{40gCa^{2+}}{1molCa^{2+}} = 8gCa^{2+}$$

$$ppm Ca^{2+} = \frac{8g}{10000} \times 10^6 = 800 \text{ ppm}$$