بسم الله الرحمن الرحیم

تابع و مفاهیم آن

درسنامه جامع , نکات آموزشی و کنکوری

همراه با تست های سراسری داخل و خارج از کشور

سال های ۱۴۰۲–۱۳۸۰

مولف : سعید پناهی

دکتری مهندسی برق مخابرات

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس کنکور و دبیر دبیرستان های تهران

شماره تماس : ۰۹۲۱۴۶۲۹۲۰۰ – ۰۹۱۲۲۰۷۸۴۳۰

❋تابع

هر رابطه که هر عضو مجموعه ی A را دقیقا به یک عضو از مجموعه ی B نسبت دهد را یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B می نامند.

برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوهٔ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

❋روش های نمایش تابع

یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B , رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقا یک عضو از B نظیر می شود.

در این شرایط , مجموعه ی A را دامنه ی تابع(D_f) و مجموعه ی B را برد تابع (R_f) نامیده و به صورت زیر نمایش می دهند :

$$f : A \to B$$

❋نمایش پیکانی (نمودار ون)

تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقا یک پیکان خارج شود.

❋نمایش تابع به صورت زوج مرتب

هرگاه یک رابطه را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها نمایش دهیم , در این صورت زمانی این رابطه تابع خواهد بود که در این زوج مرتب ها هیچ مولفه ی اول یکسانی نداشته باشیم و در صورتی که دو زوج مرتب یافت شوند که مولفه ی اول یکسانی داشته باشند , مولفه ی دوم آنها نیز یکسان باید باشند.

تذکر : واضح است که در این شرایط هم , مولفه های اول زوج مرتب ها را اعضای دامنه و مولفه های دوم را برد تابع می نامند.

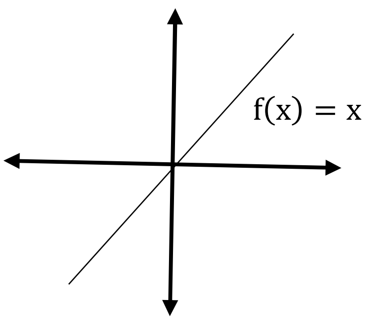
❋آزمون خط قائم : (برای تشخیص تابع)

از دیدگاه هندسی , زمانی یک منحنی نمایشگر یک تابع است که هر خطی موازی محور عرض ها (y ها) آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

❋تابع ثابت

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادلهٔ $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

❋تابع همانی : (نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات)



اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.
اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ درنظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادلهٔ $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

❋نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات

$$f(x) = y = -x$$

❋ تابع خطی

هر تابع که بین مولفه های اول و دوم تمام زوج مرتب های آن یک رابطه ی خطی یکسان وجود داشته باشد را تابع خطی می نامند.

$$f(x) = ax + b$$

که در آن a نمایش دهنده ی شیب خط و b عرض از مبدا تابع است.

☼دامنه ی توابع

☼دامنه توابع چندجمله ای

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

دامنه ی هر تابع چندجمله ای مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

☼دامنه توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$, $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

دامنه ی توابع کسری مجموعه ی اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج است.

☼دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج

مجموعه ی اعداد حقیقی که به ازای آنها عبارت زیر رادیکال منفی نباشد . یعنی برای تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج , باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

☼دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد

دامنه ی این توابع با دامنه ی عبارت زیر رادیکال یکی ست.

☼دامنه توابع مثلثاتی

دامنه ی توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس برابر با مجموعه ی اعداد حقیقی است.

اما برای تعیین دامنه ی توابع تانژانت و کتانژانت باید آنها را به صورت کسری نوشته و سپس مانند توابع کسری با آنها رفتار کنیم.

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

❋دامنه توابع لگاریتمی

همانطور که می دانیم با توجه به اینکه لگاریتم اعداد صفر و منفی تعریف نشده است و نیز لگاریتم اعداد در مبنای منفی تعریف نشده است می توان شرایط زیر را برای تعیین دامنه ی یک تابع لگاریتمی در نظر گرفت :

$$f(x) = \log_{g(x)} f(x) \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} f(x) > ۰ \ , \ g(x) > ۰ \text{ و } g(x) \neq ۱$$

❋تابع یک به یک

تابع را زمانی یک به یک می نامند که به ازای هر عضو از بردش , یک و فقط یک عضو از دامنه اش وجود داشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گوییم.

توجه داشته باشید که وارون هر تابع یک به یک خود یک تابع است!

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون‌پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

❋آزمون خط افقی برای یک به یک بودن تابع

از لحاظ نموداری تابعی یک به یک است که در آن هیچ خطی موازی محور x ها , نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

از لحاظ تعریف ضابطه ای :

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f \rightarrow \text{IF } f(x_۱) = f(x_۲) \rightarrow x_۱ = x_۲$$

❋شرط معکوس پذیری یک تابع :

شرط معکوس پذیری یک تابع آن است که یک به یک باشد.

*تابع معکوس(وارون)

دو تابع را معکوس(وارون) یکدیگر می نامند هرگاه با جابجا کردن مولفه ی اول و دوم زوج مرتب های یکی از آنها , تابع دیگری به دست آید. معکوس یک تابع را با f^{-1} نمایش می دهند و نمودار تابع معکوس با تابع اصلی نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را **وارون** تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

*نحوه ی تعیین معکوس یک تابع

در صورت یک به یک بودن تابع , برای پیدا کردن معکوس آن به صورت زیر عمل می کنیم :

به‌طور کلی :
برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

***برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی ست . . .** قرینه ی نمودار آن تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم.

*تبدیلات نموداری توابع

۱) $\mathbf{y = f(x) + k}$: (نمودار به اندازه ی $\mathbf{k}$ واحد بالا می رود.)

۲) $\mathbf{y = f(x) - k}$: (نمودار به اندازه ی $\mathbf{k}$ واحد پایین می رود.)

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k>0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

۳) $\mathbf{y = kf(x)}$: $\begin{cases} ۰ < k < ۱ \leftarrow \text{نمودار فشرده می شود .} \\ k > ۱ \leftarrow \text{نمودار کشیده می شود .} \end{cases}$

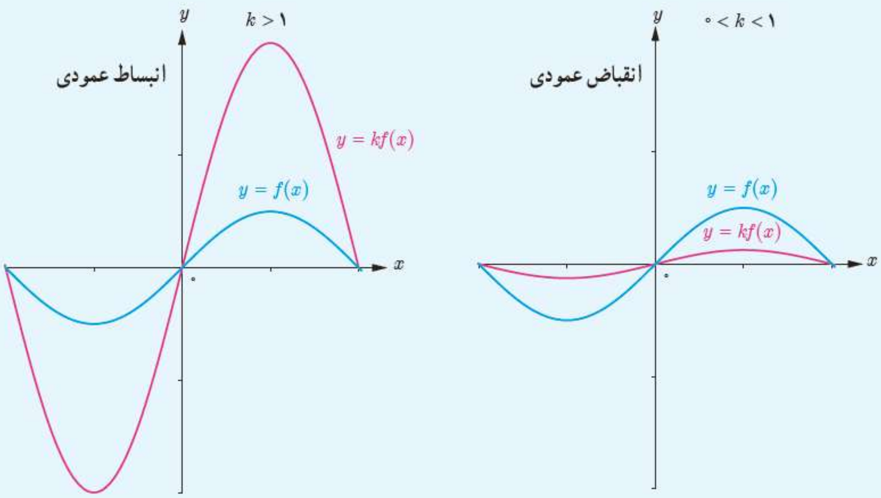
اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ تابع $y = kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y = f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

اگر $k > ۰$، نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور yها به دست آورد.

اگر $k < ۰$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $k > ۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

اگر $۰ < k < ۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

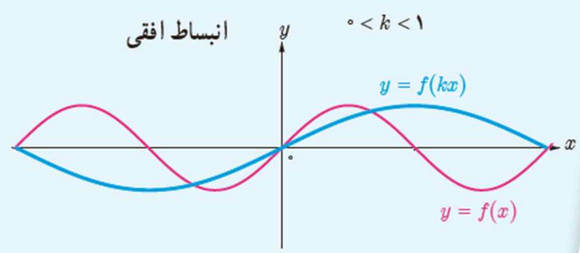
۴) $\mathbf{y = f(x+k)}$: (نمودار به اندازه ی $\mathbf{k}$ واحد به سمت چپ می رود.)

۵) $\mathbf{y = f(x-k)}$: (نمودار به اندازه ی $\mathbf{k}$ واحد به سمت راست می رود.)

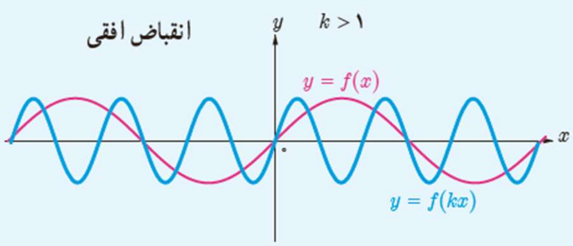
برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال درجهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۶) $\mathbf{y = f(kx)}$: $\begin{cases} 0 < \mathbf{k} < 1 & \leftarrow \text{نمودار فشرده می شود .} \\ \mathbf{k} > 1 & \leftarrow \text{نمودار کشیده می شود .} \end{cases}$

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد.
اگر $k<0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.



اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

❋ قرینه تابع نسبت به محور افقی

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

❋ قرینه تابع نسبت به محور قائم

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

❋تابع قدر مطلق

تابعی که هر مقدار در دامنه را به‌قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق رابا $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

❋مهم ترین ویژگی های تابع قدر مطلق

الف) $|x| \geq 0$

ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

پ) $|x| = a \iff x = a$ یا $x = -a$ $\quad (a \geq 0)$

ت) $|x| = |a| \iff x = a$ یا $x = -a$

ث) $|-x| = |x|$

ج) $|x|^2 = x^2$

$$|xy| = |x||y| \quad \text{و} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{و} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

❋رسم نمودار توابع قدرمطلق

$\boxed{۱}$ نمودار $y=-f(x)$ قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور x هاست.

$\boxed{۲}$ برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xهاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

❋تابع علامت

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

❋تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود.

جزء صحیح یک عدد حقیقی مانند x را با نماد $y = [x]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود :

$$y = [x] = \begin{cases} x \in Z \quad x \\ x \in Q \to \begin{cases} [+۱.۲] = ۱ \\ [-۱.۲] = -۲ \end{cases} \end{cases}$$

❋یادآوری

برای تعیین معادله ی خطی که از دو نقطه می گذرد , به صورت زیر عمل می کنیم :

$$(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲) \to m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} \quad , y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

❋تساوی دو تابع

دو تابع مانند f و g مساوی گویند , هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند :

الف – دامنه ی دو تابع یکسان باشند : $(D_f = D_g)$

ب – به ازای هر عضوی از دامنه , دو تابع مقادیر یکسانی داشته باشند : $\forall x \in D_{f,g} \rightarrow f(x) = g(x)$

❋اعمال روی توابع و تعیین دامنه ی آنها

الف – اعمال جمع و تفریق و ضرب :

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad , \quad (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

ب – عمل تقسیم :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x) = ۰\}$$

❋ترکیب توابع

هرگاه f و g دو تابع حقیقی باشند , در این صورت ترکیب این دو تابع را به صورت fog نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنند :

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) \quad \rightarrow \quad D_{fog} = \{x | x \in D_g \, , g(x) \in D_f\}$$

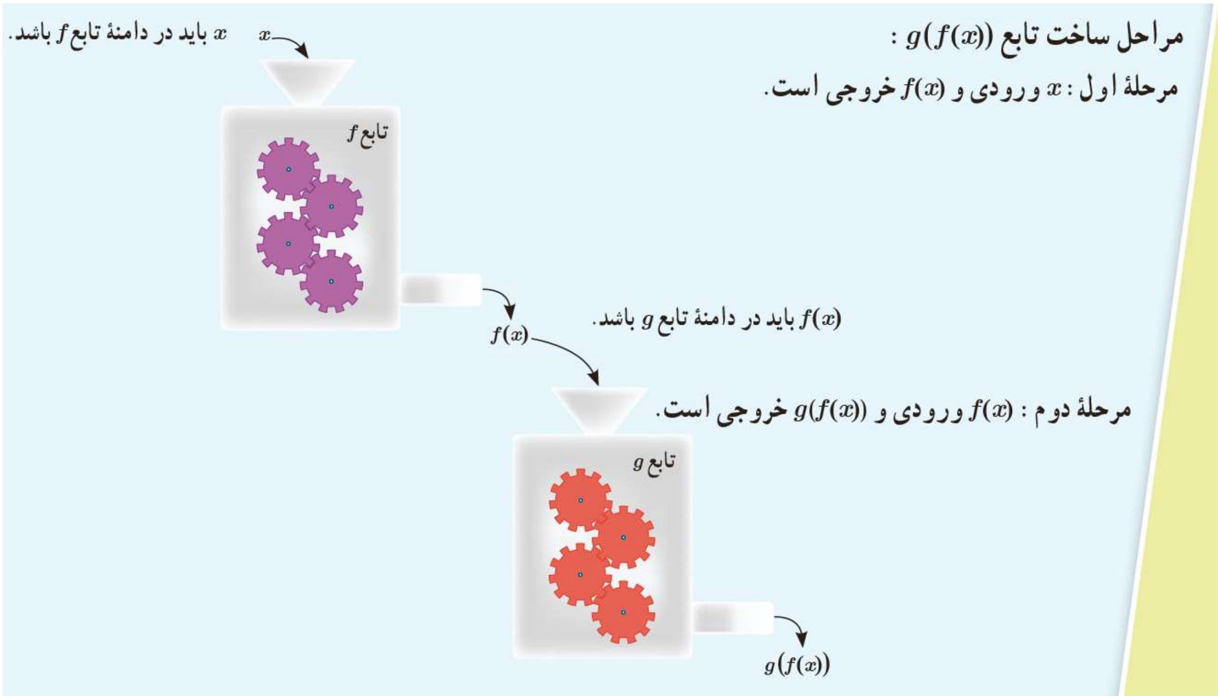
ترکیب توابع می تواند به سه صورت دیگر gog , fof , gof نیز بیان شود که در این صورت نیز به راحتی و با توجه به تعریف یاد شده ی فوق , می توان این توابع را تعریف و دامنه ی آنها را نیز مشخص نمود.

دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه‌ x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ـ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ـ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



❋تابع پله ای و جزء صحیح

هر تابع که بتوان دامنه ی آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد به طوری که این تابع روی هر کدام از بازه ها مقداری ثابت را داشته باشند , را تابع پله ای نامیده و تابع جزء صحیح(براکت) , شکل خاصی از تابع پله ای می باشد.

❋مهم ترین و پرکاربردترین ویژگی های تابع جزء صحیح در کنکور

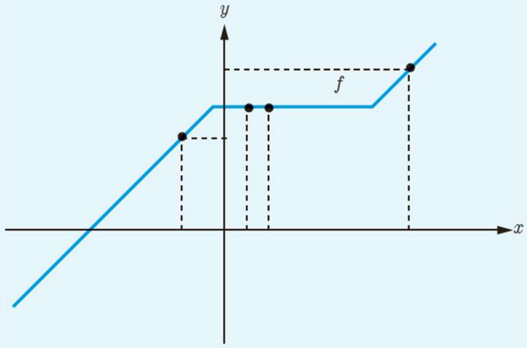
۱) $x - 1 < [x] \le x$　　　۲) $[x + k] = [x] + k$

۳) $x \in Z \rightarrow [x] + [-x] = 0 \quad , \quad x \notin Z \rightarrow [x] + [-x] = -1$

۴) $n \in N \rightarrow [nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots$

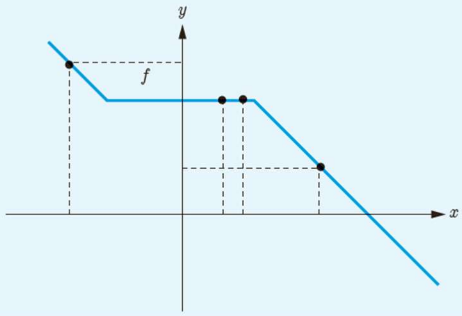
۵) $0 \le x - [x] < 1$

*توابع صعودی و نزولی



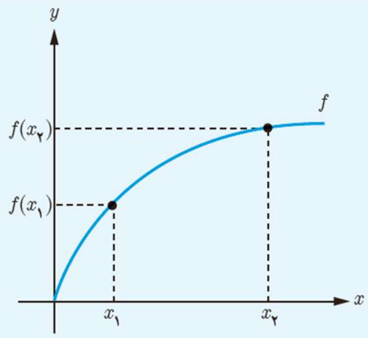
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



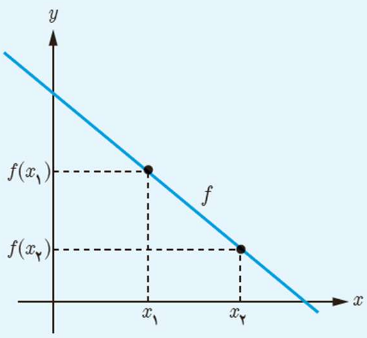
تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

***به تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد تابع اکیدا یکنوا گویند.**

***توابع اکیدا یکنوا , همواره یکنوا هستند , اما عکس این مطلب صادق نیست!**

***تابع متناوب**

تابع f را متناوب می گوییم هرگاه به ازای هر x داده شده در دامنه ی تعریف آن تابع داشته باشیم :

$f(x+T)=f(x)$:

به کوچکترین عدد مثبت T , دوره ی تناوب اصلی تابع می گویند.

۱) – دوره ی تناوب توابع جزء صحیح به فرم $f(x)=ax-[ax]$ به صورت $T=\frac{۱}{|a|}$ تعریف می شود.

۲) – تابع ثابت $f(x)=k$ متناوب است ولی دوره ی تناوب اصلی ندارد.

۳) – تابع جبری $f(x)=(-۱)^{[nx]}$ متناوب بوده و دوره ی تناوب اصلی آن $T=\frac{۲}{|n|}$ می باشد.

۴) – دوره ی تناوب اصلی توابع مثلثاتی :

$$\begin{cases} \sin^n ax , \cos^n ax \ , & n \text{ فرد} \to T=\frac{۲\pi}{|a|} \\ \sin^n ax , \cos^n ax \ , & n_{\text{زوج}} \to T=\frac{\pi}{|a|} \\ \tan^n ax , \cot^n ax \ , & \to T=\frac{\pi}{|a|} \\ |\sin ax|, |\cos ax|, |\tan ax|, |\cot ax| \to T=\frac{\pi}{|a|} \end{cases}$$

*** نکاتی مهم در حل تست های تابع**

نکته ی (۱) – دامنه ی تابع معکوس , برابر برد تابع است. $(D_{f^{-۱}}=R_f)$

نکته ی (۲) – برد تابع معکوس , برابر دامنه ی تابع است. $(R_{f^{-۱}}=D_f)$

نکته ی (۳) – نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول ها است.

نکته ی (۴) – نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.

نکته ی (۵)– همواره به یاد داشته باشیم که هرگاه یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم , جهت نامساوی عوض خواهد شد.

نکته ی (۶) – در تشخیص یک تابع از روی ضابطه , همیشه به یاد داشته باشید که هرگاه y دارای توان زوج یا داخل قدرمطلق باشد , آن ضابطه , ضابطه ی یک تابع نخواهد بود.

نکته ی (۷) – تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد , تابعی یک به یک است.

نکته ی (۸) – هرگاه دو تابع f , g معکوس یکدیگر باشند آنگاه می توان نوشت :

$$fog(x) = x$$

نکته ی (۹) – اگر دو تابع $f \ , \ g$ معکوس پذیر باشند , می توان نوشت :

$$(fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$$

نکته ی (۱۰) – به ویژگی بسیار مهم زیر که در حل معادلات قدر مطلقی به آن اشاره شد نیز توجه داشته باشید :

$$x^۲ = a^۲ \rightarrow |x| = |a| \rightarrow x = \pm a$$

نکته ی (۱۱) – ویژگی بسیار مهم و پرکاربردی زیر را در مورد توابع معکوس , حتما به یاد داشته باشید :

$$(a , b) \in f \rightarrow (b , a) \in f^{-۱}$$

نکته ی (۱۲) – هرگاه تابعی به صورت زوج مرتب داده شود , شرط اینکه یک به یک باشد آن است که هم تابع باشد و هم یک به یک.یعنی نه مولفه ی دوم یکسان داشته باشند و نه اول.

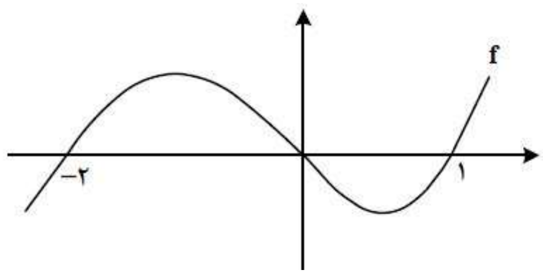
نکته ی (۱۳) – لطفا این نتیجه ی مهم را از این نامعادله که بیشتر در حل تست های مربوط به توابع جزء صحیح کاربرد زیادی دارد , به خاطر بسپارید :

$$x^۲ + x < ۰ \rightarrow -۱ < x < ۰ \rightarrow [x] = -۱$$

نکته ی (۱۴) – در طی سال های اخیر سوالات بی شماری در مورد تابع معکوس بدین شکل طرح شده است که تابعی داده شده و محل تلاقی تابع f با تابع معکوس $f^{-۱}$ خواسته شده است.برای پیدا کردن این جواب دیگر نیازی به پیدا کردن تابع معکوس نیست و شما کافیه فقط تابع داده شده را با نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y = x$ قطع دهیم.

البته به یاد داشته باشید که اگر و فقط اگر نقطه ی تلاقی دو تابع خواسته شود , می توان به این نکته بسنده کرد. اما اگر تعداد نقاط تلاقی خواسته شود , احتمال اینکه تابع با تابع معکوس خود نقاط تلاقی دیگری نیز داشته باشد وجود دارد.!

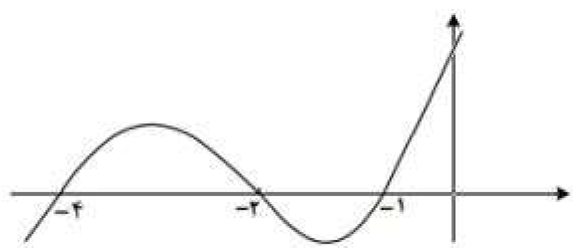
مثال ۱-نمودار زیر تابع f را نشان می دهد . دامنه تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۲)



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

با انتقال واحدی نمودار $f(x)$ به سمت چپ نمودار $f(۲+x)$ رسم می کنیم $-\frac{f(x)}{f(۲+x)}\geq ۰ \Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)}\leq ۰ \Rightarrow$



محدوده ای از اشتراک دو نمودار که مقادیردو تابع در آنها مختلف العلامه باشند پاسخ مطلوب تست خواهد بود.

این اتفاق در بازه های $[۰ و ۱]$ و $(-۱ و -۲)$ و $(-۲ و -۴)$ روی می دهد که شامل ۳ عدد صحیح ۰ و ۱ و ۳- است.

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند که به دلیل قرار گرفتن $f(۲+x)$ در مخرج مقادیر ۲- و ۱- و ۴- نمی توانند پاسخ مطلوب تست باشند!

مثال ۲-اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد $gof\left(-\frac{۵}{۳}\right)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۲)

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) ۶

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$۲\left[-\frac{۵}{۳}\right]+\frac{۵}{۳}=۲(-۲)+\frac{۵}{۳}=-\frac{۷}{۳}\Rightarrow \mathbf{f}\left(\left[-\frac{۷}{۳}+\mathbf{f}\left(-\frac{۷}{۳}\right)\right]\right)\xRightarrow{۲\left[-\frac{۷}{۳}\right]+\frac{۷}{۳}=۲(-۳)+\frac{۷}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}}$$

$$\mathbf{f}\left(\left[-\frac{۷}{۳}+-\frac{۱۱}{۳}\right]\right)=f(-۶)=۲(-۶)+۶=-۶$$

مثال ۳-تابع $f(x)=\begin{cases}2-3x & : 3+2x\le 0\\ 2+2mx-x^2 & : 3+2x>0\end{cases}$ **روی دامنه تعریف خود وارون پذیر است . اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد . مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۲)**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$3+2x\le 0 \Rightarrow x\le -\frac{3}{2} \xRightarrow{\times -3} -3x\ge\frac{9}{2} \xRightarrow{+2} -3x+2\ge\frac{13}{2} \text{ برد ضابطه اول } \xRightarrow{\text{در نتیجه}} \text{ برد ضابطه دوم } = (-\infty \text{ و } \frac{13}{2})$$

$$2+2mx-x^2<\frac{13}{2} \Rightarrow x^2-2mx+\frac{9}{2}>0 \xRightarrow{\text{شرط مثبت بودن عبارت درجه دوم}} \Delta<0 \Rightarrow 4m^2-18<0$$

$$\Rightarrow m^2<\frac{9}{2} \Rightarrow m=0 \text{ و } \pm1 \text{ و } \pm2 \quad \text{و} \quad \text{طول رأس سهمی} = x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2m}{2}=+m<-\frac{3}{2} \xRightarrow{\text{در نتیجه}} m=-2$$

$$\text{ضابطه تابع دوم} = -x^2-4x+2=-19 \Rightarrow x^2+4x-21=0 \Rightarrow (x+7)(x-3)=0 \Rightarrow x=-7,+3 \xRightarrow{x>-\frac{3}{2}} x=3$$

مثال ۴-حداقل چند عضو از مجموعه $f=\left\{(x,y)\,\middle|\, x,y\in Z,\, x=\frac{72}{y^2-1}\right\}$ **حذف شود تا f یک تابع باشد؟(سراسری تجربی ۱۴۰۲)**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$y^2-1 = \text{مضرب های } 72 = \pm1 \text{ و } \pm2 \text{ و } \pm3 \text{ و } \pm4 \text{ و } \pm6 \text{ و } \pm8 \text{ و } \pm9 \text{ و } \pm12 \text{ و } \pm18 \text{ و } \pm24 \text{ و } \pm36 \text{ و } \pm72$$

$$\left|\begin{array}{l} y^2-1=3 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm2 \\ y^2-1=8 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm3 \\ y^2-1=24 \Rightarrow y^2=25 \Rightarrow y=\pm5 \end{array}\right. \Leftarrow$$ به ازای هر مقدار x یک مقدار y برای آن به دست آید و y باید صحیح باشد

$$f=\{(24,2)-(24,-2)-(9,+3)-(9,-3)-(3,+5)-(3,-5)\}$$

باید حداقل ۳ عضو از مجموعه فوق حذف گردد تا f یک تابع شود.

مثال ۵-وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{mx-1}}$ **در دامنه محدود خط $y=12-x$ را در نقطه ای به عرض ۱۰ قطع می کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است

$$۱۲ - x = ۱۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow (۱۰,۲) \in f \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - ۲\sqrt{mx - ۱}} \Rightarrow ۲ = \sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱}} \Rightarrow$$

$$۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱} = ۴ \Rightarrow \sqrt{۱۰m - ۱} = ۳ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow f(m + ۴) = f(۵) = \sqrt{۵ - ۲\sqrt{۵ - ۱}} = ۱$$

مثال ۶-تابع f اکیدا نزولی و دامنه آن مجموعه ای از مقادیر منفی است . اگر $f(m^۲ - m - ۵) < f(-۳ + ۲m - m^۲)$ باشد m دارای چند مقدار صحیح است ؟(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است

$$\text{تابع } f \text{ اکیدا نزولی} \Rightarrow m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲ \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰ \Rightarrow$$

$$(۲m + ۱)(m - ۲) < ۰ \Rightarrow m < -\frac{۱}{۲} \cup m > ۲ \xRightarrow{\text{دامنه مجموعه مقادیر منفی}} m < -\frac{۱}{۲} \xRightarrow{\text{مقادیر صحیح } m} m = -۱$$

توجه داشته باشید که به ازای مقادیر صحیح منفی کوچکتر از ۱- تابع اکیدا نزولی می باشد . اما از محدوده ی دامنه ی منفی خارج می شود.مثلا

$$m = -۱ \Rightarrow f(۱) < f(-۱۱) \Rightarrow \text{۱ عددی مثبت است} \Rightarrow \text{پس } m = -۱ \text{ تنها عدد قابل قبول}$$

مثال ۷-حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{(x,y) \middle| x,y \in \mathbb{Z}, x = \frac{۳۰}{۱+|y|}\right\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟(خارج تجربی ۱۴۰۲)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$y^۲ - ۱ = ۳۰ \text{ مضرب های } = \pm ۱ \text{ و } \pm ۲ \text{ و } \pm ۳ \text{ و } \pm ۵ \text{ و } \pm ۶ \text{ و } \pm ۱۰ \text{ و } \pm ۱۵ \text{ و } \pm ۳۰$$

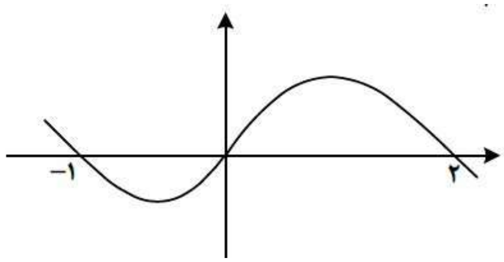
$$\left|\begin{array}{l} ۱ + |y| = ۲ \Rightarrow |y| = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱ \\ ۱ + |y| = ۳ \Rightarrow |y| = ۲ \Rightarrow y = \pm ۲ \\ ۱ + |y| = ۵ \Rightarrow |y| = ۴ \Rightarrow y = \pm ۴ \\ ۱ + |y| = ۶ \Rightarrow |y| = ۵ \Rightarrow y = \pm ۵ \\ ۱ + |y| = ۱۰ \Rightarrow |y| = ۹ \Rightarrow y = \pm ۹ \\ ۱ + |y| = ۱۵ \Rightarrow |y| = ۱۴ \Rightarrow y = \pm ۱۴ \\ ۱ + |y| = ۳۰ \Rightarrow |y| = ۲۹ \Rightarrow y = \pm ۲۹ \end{array}\right. \Rightarrow \text{به ازای هر مقدار } x \text{ یک مقدار } y \text{ برای آن به دست آید و } y \text{ باید صحیح باشد}$$

باید حداقل ۷ عضو از مجموعه فوق حذف گردد تا f یک تابع شود.

$$f=\left\{(۳۰,۰),\underbrace{\begin{matrix}(۱۵,۱)\\(۱۵,-۱)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۱۰,۲)\\(۱۰,-۲)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۶,۴)\\(۶,-۴)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۵,۵)\\(۵,-۵)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۳,۹)\\(۳,-۹)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۲,۱۴)\\(۲,-۱۴)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۱,۲۹)\\(۱,-۲۹)\end{matrix}}\right\}$$

مثال ۸-شکل زیر نمودار تابع $f(x-۲)$ را نشان می دهد . دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(۱+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(خارج تجربی ۱۴۰۲)



۱) ۴

۲) ۲

۳) صفر

۴) بیش از ۴

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}=\frac{a(۳-x)(۴-x)(۱-x)}{a(x+۳)(x+۴)(x+۱)}\ge ۰\to\boxed{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}=\frac{(۳-x)(۴-x)(۱-x)}{(x+۳)(x+۴)(x+۱)}\ge ۰}$$

تعیین علامت: $-\quad -۴\quad +\quad -۳\quad -\quad -۱\quad +\quad ۱\quad -\quad ۳\quad +\quad ۴\quad -$

تنها اعداد قابل قبول با توجه به بازه‌های مثبت و اعدادی که صفر می‌کنند عبارتند از: $\boxed{x=۰\ ,\ x=۱\ ,\ x=۳\ ,\ x=۴}$

روش تستی

$$x=۰\Rightarrow\frac{f(۱)}{f(۱)}\ge ۰\ \checkmark$$

$$x=۱\Rightarrow\frac{f(۰)}{f(۲)}\ge ۰\ \checkmark$$

$$\frac{f(۱-x)}{f(۱+x)}\ge ۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow\frac{f(-۱)}{f(۳)}\ge ۰\ \times$$

$$x=۳\Rightarrow\frac{f(-۲)}{f(۴)}\ge ۰\ \checkmark$$

$$x=۴\Rightarrow\frac{f(-۳)}{f(۵)}\ge ۰\ \checkmark$$

مثال ۹-اگر $f(x)=[x]+x$ و $g(x)=f([x-f(x)])$ باشد $fog\left(-\frac{۱}{۳}\right)$ کدام است؟(خارج تجربی ۱۴۰۲)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۴- ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

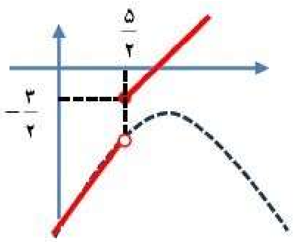
$$g\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\left[-\frac{1}{3}-f(-\frac{1}{3})\right]\right)=?$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left[-\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{3}=(-1)-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\Rightarrow f\left(\left[-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right]\right)=f(1)=[1]+1=2\Rightarrow f(2)=[2]+2=4$$

مثال ۱۰-تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & : \quad 2x-5\geq 0\\ -2x^2+ax-21 & : \quad 2x-5<0\end{cases}$ **روی دامنه تعریف خود وارون پذیر است . اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای بزرگترین مقدار صحیح a باشد . مقدار $f^{-1}(-3)$ کدام است؟(خارج تجربی ۱۴۰۲)**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.



توابع یک به یک وارون‌پذیر هستند. از طرفی طول رأس تابع درجه ۲ باید بعد از $x=\frac{5}{2}$ باشد تا تابع یک به یک شود.

$$x_A=-\frac{b'}{2a'}>\frac{5}{2}\Rightarrow-\frac{a}{-4}>\frac{5}{2}\Rightarrow a>10\ (1)$$

$$-2(\frac{5}{2})^2+\frac{5}{2}a-21<\frac{1}{2}(\frac{5}{2})-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{5}{2}a<32+\frac{5}{4}\Rightarrow a<13/3\xrightarrow{(1)}\boxed{a_{max}=13}$$

$$f^{-1}(-3)=\alpha\Rightarrow f(\alpha)=-3\Rightarrow-2\alpha^2+13\alpha-21=-3\Rightarrow 2\alpha^2-13\alpha+18=0\xrightarrow{\alpha<\frac{5}{2}}\begin{cases}\boxed{x=2}\\ x=4/5\end{cases}$$

مثال ۱۱-وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود خط $5y-10x=12$ را در نقطه ای به عرض ۷.۲ قطع می کند. مقدار $f(\frac{4}{m})$ کدام است؟(خارج ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{15}$ ۴) $2\sqrt{15}$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$۵y-۱۰x=۱۲ \xrightarrow{y=۷/۲} x=۲/۴ \Rightarrow A'(۲/۴,۷/۲)\in f^{-۱}(x) \Rightarrow A(۷/۲,۲/۴)\in f(x) \Rightarrow$$

$$۲/۴=\sqrt{۷/۲}\sqrt{۷/۲m-۱} \longrightarrow ۲/۴\times ۲/۴=۷/۲(۷/۲m-۱) \Rightarrow ۰/۸=۷/۲m-۱ \Rightarrow$$

$$\boxed{m=\frac{۱}{۴}} \longrightarrow f(\frac{۴}{m})=f(۱۶)=\sqrt{۱۶}\sqrt{\frac{۱}{۴}\times ۱۶-۱} \Rightarrow \boxed{f(۱۶)=۴\sqrt{۳}}$$

مثال ۱۲- تابع f اکیدا صعودی و دامنه آن مجموعه ای از مقادیر مثبت است . اگر $f(۲m^۲-۹m-۲)<f(m^۲-۴m+۴)$ باشد m دارای چند مقدار صحیح است ؟(خارج ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$۲m^۲-۹m-۲>۰ \Rightarrow \boxed{m<\frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴}, m>\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴}}\ (۱),\ m^۲-۴m+۴>۰ \Rightarrow (m-۲)^۲>۰ \Rightarrow \boxed{m\in \mathbb{R}-\{۲\}}\ (۲)$$

$$f(۲m^۲-۹m-۲)<f(m^۲-۴m+۴) \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} ۲m^۲-۹m-۲<m^۲-۴m+۴ \to m^۲-۵m-۶<۰ \to$$

$$(m+۱)(m-۶)<۰ \longrightarrow \boxed{m\in(-۱,۶)}\ (۳)\ ,$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳) \to \boxed{m\in(-۱,\frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴})\cup(\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴},۶)} \xrightarrow{m\in Z} \boxed{m=۵}$$

در بازهٔ بدست آمده، فقط عدد ۵ عددی صحیح است.

مثال ۱۳-تابع $f(x)=mx^۲-nx-k$ در هر بازه هم صعودی و هم نزولی است . اگر مجموعه زیر تابع باشد , مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟(سراسری تجربی دی ۱۴۰۱)

$$\{(m,n-۱),(۰,k),(n-۱,m^۲+۲m-۱),(۲k+۲,۲k+۱)\}$$

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $-\sqrt{۵}$ ۳) ۱- ۴) ۱

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

تابعی که هم صعودی باشد هم نزولی تابع ثابت است.

$$n-۱=k=۲m-۱=۲k+۱ \Rightarrow k=-۱ \quad \text{و} \quad n=۰ \quad \text{و} \quad m=۰$$

$$\{(\cdot,-۱),(\cdot,-۱),(-۱,-۱),(-۱,-۱)\} \Rightarrow f(\sqrt{۵})=-۱$$

مثال۱۴-نمودار $\frac{۱}{f}$ را در امتداد محور x ها , a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می نامیم . سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها , ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم . طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{۱}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است . اگر f تابع همانی باشد , اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=۳$ کدام است؟ (سراسری تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) $۲+\sqrt{۲}$　　۲) ۲　　۳) $۲-\sqrt{۲}$　　۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$\frac{۱}{f(x)} \xrightarrow{\text{a واحد به سمت راست}} \frac{۱}{f(x-a)}=g(x) \Rightarrow |g(x)| \xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت پایین}} |g(x)|-۲ \Rightarrow |g(x)|-۲=\frac{۱}{|f(x)|}$$

$$\text{تابع همانی } f \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow f(x+a)=x+a=۳$$

$$|g(x)|-۲=\frac{۱}{|f(x)|} \xRightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}} |g(x)|-۲=\frac{۱}{|x|} \Rightarrow \left|g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right|-۲=\frac{۱}{\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|}=\sqrt{۲} \Rightarrow \left|g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right|=۲+\sqrt{۲}$$

$$\frac{۱}{f(x-a)}=g(x) \Rightarrow \frac{۱}{x-a}=g(x) \xRightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a}=g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\pm(۲+\sqrt{۲}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=\frac{۱}{۲+\sqrt{۲}}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=\frac{-۱}{۲+\sqrt{۲}}=-۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\sqrt{۲}-۱ \Rightarrow x+a=۳ \Rightarrow x+\sqrt{۲}-۱=۳ \Rightarrow x=۴-\sqrt{۲}\\ a=۱ \Rightarrow x+a=۳ \Rightarrow x+۱=۳ \Rightarrow x=۲\end{cases}$$

$$\text{اختلاف مقادیر به دست آمده}=۴-\sqrt{۲}-۲=۲-\sqrt{۲}$$

یک سوال کاملا مزخرف که تنها هدفش تلف کردن وقت داوطلبان سر جلسه آزمون بوده!

مثال۱۵-اگر $g(x)$ وارون تابع $x\geq ۱ \;:\; f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$ باشد , $gog(۱)$ کدام است؟ (سراسری تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) ۱　　۲) ۴　　۳) ۹　　۴) صفر

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$gog(1) = f^{-1}of^{-1}(1) = f^{-1}[f^{-1}(1)] \Rightarrow 1 + \mathbf{x} - 2\sqrt{\mathbf{x}} = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) \Rightarrow$$

$$1 + \mathbf{x} - 2\sqrt{\mathbf{x}} = 4 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow gog(1) = 9$$

مثال ۱۶-دامنه $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (سراسری تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

عدد منفی که نمیتونیم بدیم! صفر هم که نمیشه! میمونه اعداد صحیح مثبت!

به ازای هیچ عدد صحیحی مثبت نمیشه $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x^1 = -\log_2 x$

مثال ۱۷-توابع $f(x) = \mathrm{Log}(2x-5)$ و $g(x) = x + \sqrt{2x-4}$ را درنظر بگیرید . اگر نمودار $y = g^{-1}of^{-1}(x)$ محور y ها را در α قطع کند , مقدار α کدام است؟ (سراسری ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) $4-\sqrt{2}$ ۲) $4-\sqrt{3}$ ۳) $4+\sqrt{2}$ ۴) $4+\sqrt{3}$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$g^{-1}of^{-1}(x) \xRightarrow{\text{تلاقی با محور y ها}} x = 0 \Rightarrow g^{-1}of^{-1}(0) = g^{-1}\big(f^{-1}(0)\big) \Rightarrow \mathrm{Log}(2x-5) = 0 \xRightarrow{\text{لگاریتم عدد در هر مبنایی صفر است}}$$

$$2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(3) = ? \Rightarrow \mathbf{x} + \sqrt{2x-4} = 3 \Rightarrow$$

$$3 = x + \sqrt{2x-4} \Rightarrow (3-x)^2 = (\sqrt{2x-4})^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 13 = 0 \to \begin{cases} \boxed{x = 4-\sqrt{3}}\,(2) \\ x = 4+\sqrt{3} \end{cases}$$

مثال ۱۸-نمودار $f(x) = 2 + 2^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x) = -x^2 - 3x + 8$ را در نقطه ای به طول ۱ قطع می کند . اگر $f^{-1}(10) = -1$ باشد مقدار $2b - a$ کدام است؟ (سراسری ریاضی دی ۱۴۰۱)

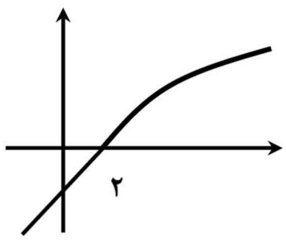
۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳-

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} f(۱)=g(۱) \to ۲+۲^{b-a}=-۱-۳+۸ \longrightarrow \boxed{b-a=۱} \\ f^{-۱}(۱۰)=-۱ \to ۱۰=۲+۲^{b+a} \longrightarrow \boxed{b+a=۳} \end{cases} \to \begin{cases} b=۲ \\ a=۱ \end{cases} \to \boxed{۲b-a=۳}$$

مثال ۱۹-اگر $f(x)=\left|\frac{۱}{۲}x-۱\right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد , معادله $g(f(g(x+۲)))=۰$ چند ریشه دارد؟

(سراسری ریاضی دی ۱۴۰۱)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

با توجه به نمودار $\Rightarrow g(۲)=۰ \Rightarrow f\big(g(x+۲)\big)=۲ \Rightarrow \left|\frac{۱}{۲}g(x+۲)-۱\right|=۲ \Rightarrow \begin{matrix} g(x+۲)=۶ \\ g(x+۲)=-۲ \end{matrix}$

مثال ۲۰-نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ را در راستای محور y ها , ۶ واحد به سمت پایین انتقال می دهیم . اگر A نقطه تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد , فاصله A از مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

۱) $۲\sqrt{۵}$		۲) $\sqrt{۵}$		۳) $۲\sqrt{۲}$		۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$y=\frac{x-۳}{۲} \Rightarrow ۲y=x-۳ \Rightarrow x=۲y+۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲x+۳ \xRightarrow{\text{۶ واحد رو به پایین}} ۲x+۳-۶=۲x-۳$$

$$\Rightarrow ۲x-۳=\frac{x-۳}{۲} \Rightarrow ۴x-۶=x-۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} A(۱,-۱) \\ O(۰,۰) \end{bmatrix} \Rightarrow OA=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

مثال۲۱-تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{(۲x+۵)^۲}-\sqrt{(۵x-۲)^۲}$ در یک بازه نزولی است . ضابطه $f^{-۱}$ در این بازه کدام است؟

(سراسری تجربی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

۱) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}\ ,\ x\le\frac{۲۹}{۵}$

۲) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}\ ,\ x\ge\frac{۲}{۵}$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x-\frac{۷}{۳}\ ,\ x\le\frac{۲۹}{۵}$

۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x-\frac{۷}{۳}\ ,\ x\ge\frac{۲}{۵}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$f(x)=\sqrt{(۲x+۵)^۲}-\sqrt{(۵x-۲)^۲}=|۲x+۵|-|۵x-۲| \Rightarrow$ ریشه های عبارت داخل قدرمطلق $= -\frac{۵}{۲}$ و $\frac{۲}{۵}$

بین دو ریشه تابع نزولی ست و ضابطه تابع به صورت زیر می باشد.

$$f(x)=۲x+۵-۵x+۲=-۳x+۷ \Rightarrow y=-۳x+۷ \Rightarrow y-۷=-۳x \Rightarrow x=\frac{y-۷}{-۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$$

$$-\frac{۵}{۲}<x<\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{۲۹}{۵}<y<\frac{۲۹}{۲} \Rightarrow D_{f^{-۱}}=R_f$$

مثال ۲۲-اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ باشد , حاصل $g\left(-\frac{۳}{۷}\right)+g(\frac{۵}{۹})$ کدام است؟ **(سراسری تجربی آزمون مجدد ۱۴۰۱)**

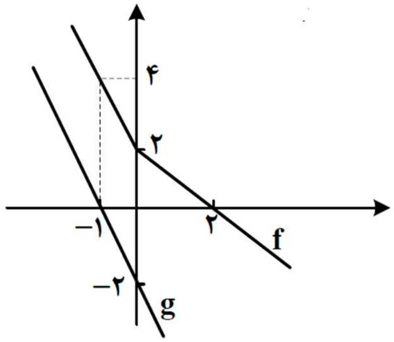
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲۰}$ ۳) $-\frac{۱۱}{۲۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} x>۰ \rightarrow y=\frac{x}{۱+x} \Rightarrow y+yx=x \Rightarrow y=x-xy \Rightarrow g(x)=\frac{x}{۱-x}\ ,\ x>۰ \\ x<۰ \rightarrow y=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow y-yx=x \Rightarrow y=x+xy \Rightarrow g(x)=\frac{x}{۱+x}\ ,\ x<۰ \end{cases}$$

$$g(-\frac{۳}{۷})+g(\frac{۵}{۹})=\frac{-\frac{۳}{۷}}{۱-\frac{۳}{۷}}+\frac{\frac{۵}{۹}}{۱-\frac{۵}{۹}}=\frac{-۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲۳-با توجه به نمودارهای f و g در شکل زیر حاصل $fof(-۲)+gof^{-۱}(-۲)$ چقدر است؟ (سراسری تجربی آزمون مجدد ۱۴۰۱)



۱) -۱۶

۲) -۱۴

۳) -۱۲

۴) -۱۰

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۲\ ;\ x\le ۰\\ -x+۲\ ;\ x\ge ۰\end{cases}\ ,\quad g(x)=-۲x-۲$$

$$fof(-۲)+gof^{-۱}(-۲)=f\big(f(-۲)\big)+g\big(f^{-۱}(-۲)\big)=f(۶)+g(۴)=-۴-۱۰=-۱۴$$

مثال ۲۴-تابع با ضابطه $f(x)=|۲x+۲|-\left|\frac{x}{۲}-۲\right|$ در یک بازه نزولی است . ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟

(سراسری ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۲}{۳}x-\frac{۸}{۳}\ ,\ x\ge -\frac{۵}{۲}$

۲) $-\frac{۲}{۳}x+\frac{۸}{۳}\ ,\ x\ge -\frac{۵}{۲}$

۳) $-\frac{۲}{۳}x-\frac{۸}{۳}\ ,\ x\ge -\frac{۳}{۲}$

۴) $-\frac{۲}{۳}x+\frac{۸}{۳}\ ,\ x\ge -\frac{۳}{۲}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\xrightarrow{x\le -۱} y=-۲x-۲+\frac{x}{۲}-۲\Rightarrow f(x)=-\frac{۳}{۲}x-۴\xrightarrow{y\ge -\frac{۵}{۲}}\boxed{f^{-۱}(x)=-\frac{۲}{۳}x-\frac{۸}{۳}\ ,\ x\ge -\frac{۵}{۲}}$$

مثال ۲۵-اگر $f(x)=\frac{x+۲}{۲x-۱}$ باشد حاصل $f^{-۱}of^{-۱}of^{-۱}(۴)$ کدام است؟(سراسری ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۲۳}{۴۱}$ ۴) ۳

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\frac{x+۲}{۲x-۱}=۴ \Rightarrow x+۲=۸x-۴ \Rightarrow x=\frac{۶}{۷} \Rightarrow \frac{x+۲}{۲x-۱}=\frac{۶}{۷} \Rightarrow ۷x+۱۴=۱۲x-۶ \Rightarrow x=۴$$

$$\Rightarrow \frac{x+۲}{۲x-۱}=۴ \Rightarrow x+۲=۸x-۴ \Rightarrow x=\frac{۶}{۷}$$

مثال ۲۶-دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند . اگر $f+g=۵$ حاصل bc چقدر است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۶ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

تابع ثابت $\Rightarrow$ ضریب x باید صفر باشد $\Rightarrow a=۰ , b=۱ \Rightarrow f+g=۵ \Rightarrow b+c=۵ \Rightarrow ۱+c=۵ \Rightarrow c=۴ \Rightarrow bc=۴$

مثال ۲۷-نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور x ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم . فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است ؟(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$۴x-x^۲=۴(x+۲)-(x+۲)^۲ \Rightarrow ۰=۸-۴-۴x \Rightarrow x=۱ \Rightarrow (۱,۳) \Rightarrow$ فاصله تا مبدأ مختصات $=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$

مثال ۲۸-وارون تابع $y=x^۳-x+۱$ از کدام نقطه عبور می کند؟(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) $(-۱,-۲)$ ۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۸}$$

مثال ۲۹-اگر $gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱$ و $f(x) = ۲x$ باشد , کمترین مقدار $g(x-۷)$ چقدر است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱ \Rightarrow ۲x = z \Rightarrow x = \frac{z}{۲} \Rightarrow g(z) = ۵\left(\frac{z^۲}{۴}\right) + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x-۷) = \frac{۵(x-۷)^۲}{۴} + ۱۱ \Rightarrow x = ۷ \text{ کمترین مقدار به ازای } \Rightarrow g(۰) = ۰ + ۱۱ = ۱۱$$

مثال ۳۰-تابع $f(x) = (-۹ + k^۲)x^۳ + ۵$ اکیدا نزولی است . مجموع مقادیر صحیح k کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\text{اکیدا نزولی} \Rightarrow -۹ + k^۲ < ۰ \Rightarrow k^۲ < ۹ \Rightarrow -۳ < k < ۳ \Rightarrow k \text{ مجموعه مقادیر صحیح} = -۲ - ۱ + ۰ + ۱ + ۲ = ۰$$

مثال ۳۱-تابع $f(x) = a + b\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ از مبداء مختصات عبور می کند . اگر $f^{-۱}(-۱) = -۱$ باشد , حاصل $a - b$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}(۰,۰) \Rightarrow a + b = ۰ \\ (-۱,-۱) \Rightarrow a + ۲b = -۱\end{array}\right\} \Rightarrow a = ۱, b = -۱$$

مثال ۳۲-تابع $f(x) = x^{۲}\sqrt{x^{۲}}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون این تابع در این بازه کدام است؟(سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt{x^{۳}}\,,\ x \le ۰$ ۲) $-\sqrt[۳]{x}\,,\ x \le ۰$ ۳) $-\sqrt{x^{۳}}\,,\ x \ge ۰$ ۴) $-\sqrt[۳]{x}\,,\ x \ge ۰$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$f(x) = x^{۲}\sqrt{x^{۲}} = x^{۲}|x| \Rightarrow x \le ۰ \text{ نزولی} \Rightarrow y = -x^{۳} \Rightarrow x = -\sqrt[۳]{y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt[۳]{x}$$

$$D_{f^{-۱}} = R_f = x \ge ۰$$

مثال ۳۳- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد حاصل $fofo\ \ (\sqrt{۲})$ کدام است ؟(سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$f(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow f\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{\sqrt{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۳\frac{۱}{\sqrt{۲}} - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

مثال ۳۴- تابع $f(x) = \sqrt{(x+۱)^{۲}} - |۳x-۶|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون این تابع در این بازه کدام است ؟

(خارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}x - ۷\,,\ x \ge ۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}\,,\ x \le ۳$

۳) $-۲x + ۱۴\,,\ x \le ۳$ ۴) $-۲x - \frac{۱۴}{۳}\,,\ x \ge ۲$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{(x+۱)^{۲}} - |۳x-۶| = |x+۱| - |۳x-۶| \xRightarrow{\text{بازه نزولی}} y = -۲x + ۷ \quad : \quad -۱ < x \le ۲$$

$$y = -۲x + ۷ \Rightarrow x = \frac{۷-y}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۷-x}{۲} \quad : \quad D_{f^{-۱}} = R_f = x \le ۳$$

مثال ۳۵- نمودارهای دو تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$ و $۳y+x=۱۷$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB کدام است؟(خارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است

$$|x+۲|+|x-۱|=\frac{۱۷-x}{۳}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\frac{۱۷-x}{۳}=۲x+۱\Rightarrow ۱۷-x=۶x+۳\Rightarrow x=۲\Rightarrow A(۲,۵)\\ \frac{۱۷-x}{۳}=-۲x-۱\Rightarrow ۱۷-x=-۶x-۳\Rightarrow x=-۴\Rightarrow B(-۴,۷)\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$AB=\sqrt{۶^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۱۰}$$

مثال ۳۶-فاصله نقطه تقاطع تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ با وارون خود از مبداء مختصات کدام است؟(خارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است

می دانیم که برای محاسبه نقطه تلاقی یک تابع با معکوس خود کافی ست آن را با خط $y=x$ قطع دهیم!

$$x^۳+۳x-۱۲=x\Rightarrow x^۳+۲x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+۲x+۶)=۰$$

$x^۲+۲x+۶=۰\Rightarrow\Delta=۴-۲۴=-۲۰<۰$ ریشه حقیقی ندارد $\Rightarrow x=۲$ تنها ریشه

نقطه تلاقی $\Rightarrow (۲,۲)\Rightarrow$ فاصله تا مبدأ مختصات $=۲\sqrt{۲}$

مثال ۳۷- اگر $f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲$ ضابطه یک تابع ثابت باشد , برد تابع f کدام است ؟(خارج تجربی ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است

$$f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲=abx-ax^۲+۲b-۲x-۷x^۲=(-a-۷)x^۲+(ab-۲)x+۲b$$

شرط ثابت بودن تابع $\Rightarrow a=-۷$ و $ab=۲\Rightarrow b=-\frac{۲}{۷}\Rightarrow f(x)=۲b=۲\times-\frac{۲}{۷}=-\frac{۴}{۷}$

مثال ۳۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم . فاصله نقطه های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است ؟

(خارج تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-1} \Rightarrow -\frac{1}{x-1}-2=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-2 \Rightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)}=-2 \Rightarrow -2x^2+2x=2x-1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow OA=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

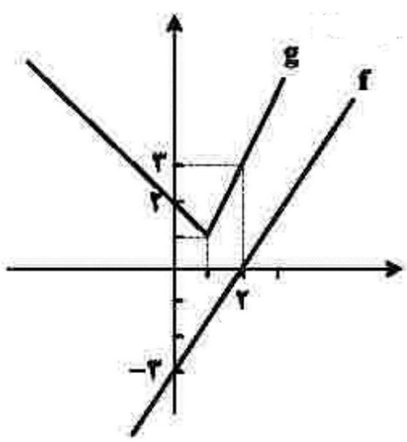
مثال ۳۹- وارون تابع $y=-3x^3+2x-11$ از کدام نقطه عبور می کند ؟(خارج تجربی ۱۴۰۱)

۱) $(9,-2)$ ۲) $(2,-31)$ ۳) $(-1,10)$ ۴) $(-12,-1)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است

$$f(-2)=-3(-2)^3+2(-2)-11=-3(-8)-4-11=24-15=9$$

مثال ۴۰- با توجه به نمودارهای f و g در شکل زیر حاصل $gog(0)\times gof^{-1}(-2)$ چقدر است ؟(خارج تجربی ۱۴۰۱)



۱) ۶
۲) ۴
۳) -۴
۴) -۶

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است

$$m_f = \frac{-۳-۰}{۰-۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳ \Rightarrow -۲ = \frac{۳}{۲}x - ۳ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(-۲) = \frac{۲}{۳}$$

$$\forall\ x < ۱ \quad : \quad m_g = \frac{۲-۱}{۰-۱} = -۱ \Rightarrow g(x) = -x + ۲ \Rightarrow g\left(\frac{۲}{۳}\right) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳}$$

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳ \quad \text{و} \quad gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۴}{۳}$$

$$gog(۰) \times gof^{-۱}(-۲) = ۳ \times \frac{۴}{۳} = ۴$$

مثال ۴۱- تابع f روی R اکیدا نزولی است . اگر $f(۳) = ۰$ باشد , دامنه $\sqrt{x^۲ f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است ؟

(خارج تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۳

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است

$$x^۲ f(x) \geq ۰ \xrightarrow{x^۲ \geq ۰} f(x) \geq ۰ \text{ باید } \xrightarrow{f(۳)=۰} f(x) \geq f(۳) \xrightarrow{\text{چون تابع } f \text{ اکیدا نزولی است}} x \leq ۳ \Rightarrow \text{اعداد صحیح نامنفی} = ۰\text{و}۱\text{و}۲\text{و}۳$$

مثال ۴۲- تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$ از نقطه ی $(۱ , \frac{۱}{۲})$ عبور می کند . اگر $f^{-۱}(۸) = ۵$ باشد , حاصل $a - b$ چقدر است ؟

(خارج تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است

$$۱ = \sqrt[۳]{۲^{a(\frac{۱}{۲})+b}} \Rightarrow ۲^{a(\frac{۱}{۲})+b} = ۱ \Rightarrow a\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = ۰ \Rightarrow a = -۲\,b$$

$$۸ = \sqrt[۳]{۲^{a(۵)+b}} \Rightarrow a(۵) + b = ۹ \Rightarrow b = -۱ \ , a = ۲ \Rightarrow a - b = ۲ - -۱ = ۳$$

مثال ۴۳- فرض کنید برد تابع $f(x) = ۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}} - ۲^{\sqrt[۳]{۱-۹\cos^۲ x}}$ به صورت $[a , b]$ باشد. مقدار $b - a$ کدام است ؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۹}{۴}$　　۲) $\frac{۱۵}{۴}$　　۳) $\frac{۹}{۲}$　　۴) $\frac{۲۱}{۴}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است

$$-۱\le \cos x \le ۱ \Rightarrow ۰\le \cos^۲ x\le ۱ \Rightarrow ۰\le ۹\cos^۲ x \le ۹ \Rightarrow -۱\le ۹\cos^۲ x-۱\le ۸ \Rightarrow -۱\le \sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}\le ۲$$

$$\Rightarrow ۲^{-۱}\le ۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}}\le ۲^۲$$

ضمناً:

$$۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}} = (۲^{\sqrt[۳]{۱-۹\cos^۲ x}})^{-۱}$$

پس با تغییر متغیر $۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}}$ باید برد تابع $\frac{۱}{۲}\le t\le ۴$; $y = t-\frac{۱}{t}$ را بیابیم. تابع پیوسته است و داریم: $y' = ۱+\frac{۱}{t^۲} > ۰$

پس تابع اکیداً صعودی است و داریم:

$$\begin{cases} y_{min} = y(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}-۲ = -\frac{۳}{۲} \\ y_{max} = y(۴) = ۴-\frac{۱}{۴} = \frac{۱۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow R_f = [-\frac{۳}{۲} , \frac{۱۵}{۴}] \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲} , b = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow b-a = \frac{۱۵}{۴}+\frac{۳}{۲} = \frac{۲۱}{۴}$$

مثال ۴۴- دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_۶ \frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}$ کدام است ؟(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $(-۹ , ۹)$　　۲) $(-۴ , ۹)$　　۳) $(۴ , ۹)$　　۴) $(-۴ , ۴)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

عدد صفر مشکلی ندارد $\Rightarrow \log_۶ \frac{۱}{۶} = \log_۶ \frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|} \Leftarrow x = ۰ \Leftarrow$ رد گزینه ۳

عدد ۴ مشکلی ندارد $\Rightarrow \log_۶ \frac{۱}{۴} = \log_۶ \frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|} \Leftarrow x = ۴ \Leftarrow$ رد گزینه ۴

عدد ۴ − مشکلی ندارد $\Rightarrow \log_۶ \frac{۱}{۴} = \log_۶ \frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|} \Leftarrow x = -۴ \Leftarrow$ رد گزینه ۲

مثال ۴۵- نمودار منحنی $y=\sqrt{۴-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-۲$ واحد در راستای افقی چنان انتقال می دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه ای به عرض ۱ قطع کند . سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می دهیم . طول نقطه برخورد منحنی حاصل با محور x ها کدام است ؟(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۴-　　۲) ۳-　　۳) ۱　　۴) ۲

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{۴-x} \xrightarrow{\text{تابع حاصل از انتقال های اولیه را } g(x) \text{ می نامیم}} g(x)=f(x)-۱$$

محل تلاقی یک تابع با معکوس خود روی منحنی $y=x$ قرار دارد $\Rightarrow f(۱)=۱ \Rightarrow g(۱)=f(۱)-۱ \Rightarrow g(۱)=۱-۱=۰$

پس تابع $g(x)$ محور طول ها را در نقطه ۱ قطع می کند.

مثال ۴۶- دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{Log_۴(x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱}$ کدام است ؟(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$　　۲) $(-۱,۲)$

۳) $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$　　۴) $(-۲,۱)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

روش تشریحی

شرط معنی‌دار بودن لگاریتم و رادیکال را در نظر می‌گیریم:

$$x^۲-x-۲>۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)>۰ \Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۲ \qquad (۱)$$

$$x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq ۱ \qquad (۲)$$

توجه کنید که مخرج همواره مخالف صفر است. پس اشتراک (۱) و (۲) را می‌یابیم:

$$(۱)\cap(۲): x<-۱ \text{ یا } x>۲ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$$

روش تستی (رد گزینه)

تعریف نشده $\Leftarrow \sqrt{x^۲-۱}=\sqrt{-۱} \Leftarrow x=۰ \Leftarrow$ رد گزینه ۲و ۴

تعریف نشده $\Leftarrow Log_۴(x^۲-x-۲)=Log_۴(-۲) \Leftarrow x=۱ \Leftarrow$ رد گزینه ۳

مثال ۴۷- فاصله نقطه تلاقی منحنی های $۲y = x^۲$ و $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ با مبدأ مختصات کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$۲y = \left(\sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}\right)^۲ \Rightarrow ۲y = y + ۳ + y - ۳ - ۲\sqrt{y^۲ - ۹} \Rightarrow y^۲ = ۹ \Rightarrow y = \pm ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۶}$$

توجه کنید که $\begin{cases} x = -\sqrt{۶} \\ y = ۳ \end{cases}$ در رابطهٔ $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ صدق نمی‌کند ولی $\begin{cases} x = \sqrt{۶} \\ y = ۳ \end{cases}$ صدق می‌کند، پس نقطهٔ تلاقی دو منحنی نقطهٔ $A(\sqrt{۶}, ۳)$ است و داریم:

$$OA = \sqrt{۶ + ۹} = \sqrt{۱۵}$$

مثال ۴۸-نمودار تابع $y = ۲^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می دهیم . تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[۰, \pi]$ کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

تبدیل‌های گفته‌شده را بر روی تابع $y = ۲^{|\operatorname{Sin} x|}$ اعمال می‌کنیم:

$$y = ۲^{|\operatorname{Sin} x|} \xrightarrow[\text{به‌راست } \frac{\pi}{۲}]{x \to x - \frac{\pi}{۲}} y = ۲^{\left|\operatorname{Sin}(x - \frac{\pi}{۲})\right|} = ۲^{|\operatorname{Cos} x|} \xrightarrow{\text{به‌پایین } \frac{۳}{۲}} y = ۲^{|\operatorname{Cos} x|} - \frac{۳}{۲}$$

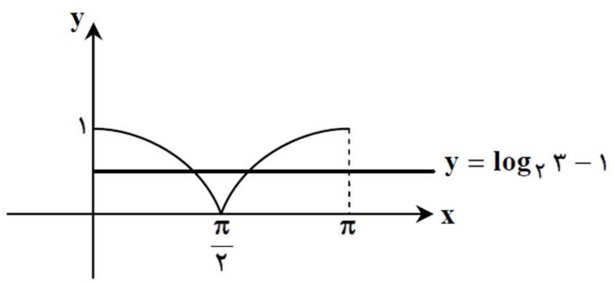
نقاط برخورد تابع حاصل با محور xها از حل معادلهٔ $y = ۰$ به‌دست می‌آید.

$$۲^{|\operatorname{Cos} x|} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲^{|\operatorname{Cos} x|} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |\operatorname{Cos} x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow |\operatorname{Cos} x| = \log_۲ ۳ - \log_۲ ۲ \Rightarrow |\operatorname{Cos} x| = \log_۲ ۳ - ۱$$

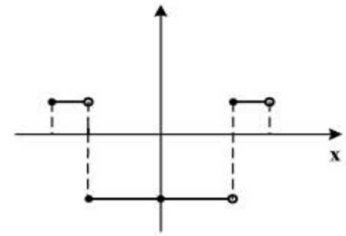
$\log_۲ ۳ - ۱$ عددی بین صفر تا ۱ است؛ زیرا:

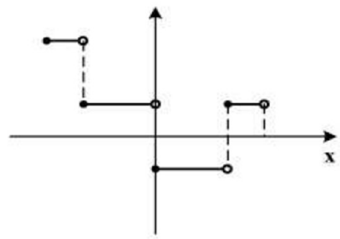
$$۲ < ۳ < ۲^۲ \Rightarrow ۱ < \log_۲ ۳ < ۲ \Rightarrow ۰ < \log_۲ ۳ - ۱ < ۱$$

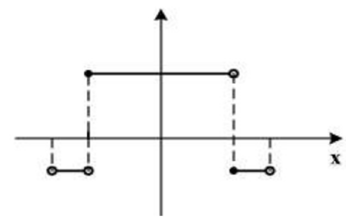


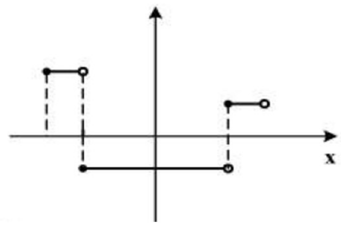
بنابراین تابع ثابت $y = \log_۲ ۳ - ۱$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ در دو نقطهٔ نمودار تابع $y = |\operatorname{Cos} x|$ را قطع می‌کند.

مثال ۴۹- نمودار تابع $y = 2|[3x]| - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ کدام است ؟(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

ابتدا حدود $3x$ را می‌یابیم:

$$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} -\frac{3}{2} \le 3x < \frac{3}{2}$$

بنابراین داریم:

$$-\frac{3}{2} \le 3x < -1 \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 2|-2| - 1 = 3 \ , \ -\frac{1}{2} \le x < -\frac{1}{3}$$

$$-1 \le 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 2|-1| - 1 = 1 \ , \ -\frac{1}{3} \le x < 0$$

$$0 \le 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = 2 \times 0 - 1 = -1 \ , \ 0 \le x < \frac{1}{3}$$

$$1 \le 3x < \frac{3}{2} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 2 \times 1 - 1 = 1 \ , \ \frac{1}{3} \le x < \frac{1}{2}$$

مثال ۵۰- قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x - 1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می دهیم و آن را $y = g(x)$ می نامیم . مقدار $g(4)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۳	۲) ۳-	۳) ۲-	۴) ۴-

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

قرینهٔ نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x-۱}$ نسبت به خط $y = x$ همان نمودار وارون این تابع می‌باشد، پس فاصلهٔ وارون آن را می‌یابیم:

$$y = ۲ + \sqrt{x-۱}$$

$$\sqrt{x-۱} = y-۲ \Rightarrow x-۱ = (y-۲)^۲ \Rightarrow x = ۱+(y-۲)^۲ \Rightarrow y = ۱+(x-۲)^۲$$

$$\xrightarrow[x \to x-۲]{\text{۲واحد به‌راست}} y = ۱+(x-۲-۲)^۲ = ۱+(x-۴)^۲ \xrightarrow{\text{۳واحد پایین}} y = ۱+(x-۴)^۲ - ۳$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-۴)^۲ - ۲ \Rightarrow g(۴) = ۰-۲ = -۲$$

مثال ۵۱- فرض کنید $[a\,,b]$ برد تابع $f(x) = ۲^{-\sqrt{۵\sin^۲x-۱}}$ باشد . مقدار $b+a$ کدام است ؟(خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \sin^۲x \le ۱ \overset{\times ۵}{\Rightarrow} ۰ \le ۵\sin^۲x \le ۵ \overset{-۱}{\Rightarrow} -۱ \le ۵\sin^۲x - ۱ \le ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۵\sin^۲x-۱} \le ۲$$

$$۰ \ge -\sqrt{۵\sin^۲x-۱} \ge -۲ \Rightarrow ۲^۰ \ge ۲^{-\sqrt{۵\sin^۲x-۱}} \ge ۲^{-۲} \Rightarrow ۱ \ge f(x) \ge \frac{۱}{۴} \Rightarrow a+b = ۱+\frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

مثال ۵۲- برد تابع $f(x) = \text{Log}_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-|x|}\right) - ۱$ برابر $(\log_۲ ۳\,,\log_۲ ۵)$ است . دامنه تابع f کدام است؟(خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $[۳\,,۹)$ ۲) $[۳\,,۸]$ ۳) $[۲\,,۹)$ ۴) $[۲\,,۸]$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\log_۲ ۳ < \text{Log}_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-|x|}\right) - ۱ < \log_۲ ۵ \overset{+۱}{\Rightarrow}$$

$$\log_۲ ۳ + \log_۲ ۲ < \text{Log}_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-|x|}\right) - ۱ + ۱ < \log_۲ ۵ + \log_۲ ۲ \Rightarrow$$

$$\log_۲ ۶ < -\text{Log}_۲\left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-|x|}\right) < \log_۲ ۱۰ \Rightarrow \log_۲ \frac{۱}{۶} > \text{Log}_۲\left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-|x|}\right) > \log_۲ \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۶} > \left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-|x|}\right) > \frac{۱}{۱۰} \xRightarrow{\text{رد گزینه}} \left| \begin{array}{l} x = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۶} > \left(\frac{۱}{۱۰+\sqrt{۲}}\right) > \frac{۱}{۱۰} \times \quad \text{رد گزینه های ۳ و ۴} \\ x = ۸.۵ \Rightarrow \frac{۱}{۶} > \left(\frac{۱}{۳.۵+\sqrt{۸}}\right) > \frac{۱}{۱۰} \checkmark \quad \text{رد گزینه ۲} \end{array} \right.$$

مثال ۵۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + ۳}$ را k واحد درراستای قائم چنان انتقال می دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه ای به عرض ۱ قطع کند . سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می دهیم . کدام یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده قرار دارد؟(خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $(۱-\sqrt{۵}, ۰)$　　۲) $(-\sqrt{۵}, ۰)$　　۳) $(۰, ۱-\sqrt{۵})$　　۴) $(۰, -\sqrt{۵})$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

تابع اکیداً صعودی است؛ پس منحنی وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند؛ بنـابراین منحنـی $y = \sqrt{\sqrt{x} + ۳} + k$ وارون خـود را در نقطهٔ $(۱, ۱)$ قطع می‌کند و این نقطه روی تابع نیز صدق می‌کند.

$$۱ = \sqrt{۱ + ۳} + k \Rightarrow k = -۱$$

بنابراین نمودار یک واحد به پایین منتقل شده است. این منحنی را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$y = -\sqrt{\sqrt{x} + ۳} + ۱$$

حال نمودار را ۴ واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y = -\sqrt{\sqrt{x + ۴} + ۳} + ۱$$

نقطهٔ $(۰, ۱-\sqrt{۵})$ روی این منحنی قرار دارد.

مثال ۵۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -۱ & x < -۱ \\ x & -۱ \le x \le ۱ \\ ۱ & x > ۱ \end{cases}$ و $g(x) = ۱ - x^۲$. **ماکزیمم مقدار تابع** $gof - f$ **کدام است؟**

(خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) -۱　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) صفر　　۴) ۱

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x < -۱ : gof(x) = g(-۱) = ۰ \\ -۱ \le x \le ۱ : gof(x) = g(x) = ۱ - x^۲ \\ x > ۱ : gof(x) = g(۱) = ۰ \end{cases}$$

$$fog = f(۱ - x^۲) = \begin{cases} -۱ & ۱ - x^۲ < -۱ \Rightarrow x^۲ > ۲ \Rightarrow x < -\sqrt{۲} \vee x > \sqrt{۲} \\ ۱ - x^۲ & -۱ \le ۱ - x^۲ \le ۱ \Rightarrow ۱ \ge x^۲ - ۱ \ge -۱ \ge -۱ \Rightarrow ۰ \le x^۲ \le \sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲} \\ ۱ & ۱ - x^۲ > ۱ \Rightarrow x^۲ < ۰ \Rightarrow x \in \varnothing \end{cases}$$

$$gof - fog = g(f(x)) - f(g(x)) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x < -\sqrt{۲} \\ x^۲ - ۱ & -۱ \le x \le ۱ \\ ۱ & x > \sqrt{۲} \end{cases}$$

مثال ۵۵- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \text{Log}_{۴}(|x^{۲} - ۲| - x)$ کدام است؟(خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty, -\sqrt{۲}) \cup (۲, +\infty)$ ۲) $(-\infty, ۱) \cup (\sqrt{۲}, +\infty)$

۳) $[-۱, ۱) \cup (\sqrt{۲}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, ۱) \cup (۲, +\infty)$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

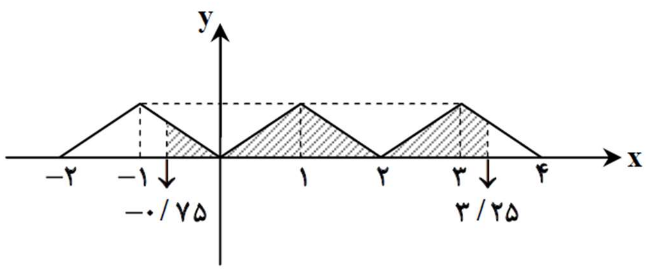
لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده $\times \quad \text{Log}_{۴}(۱-\sqrt{۳}) \Leftarrow x = \sqrt{۳} \Leftarrow$ رد گزینه ۲،۳

رد گزینه به خاطر نداشتن عدد صفر $\checkmark \quad \text{Log}_{۴}(۲) \Leftarrow x = ۰ \Leftarrow$ رد گزینه ۱

مثال ۵۶- تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۲ - x & ۱ < x \leq ۲ \end{cases}$ را که دوره تناوب آن ۲ است را در نظر بگیرید . مساحت ناحیه محصور به منحنی f و محور x ها در بازه $[-۰.۷۵, ۳.۲۵]$ کدام است؟(خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳.۵ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.



$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۲ - x & ۱ < x \leq ۲ \end{cases}$$

نمودار تابع را در بازهٔ $[۰, ۲]$ رسم می‌کنیم و با توجه به متناوب بودن آن، نمودار را در بازه‌های دیگر تکرار می‌کنیم.
با توجه به نمودار مشخص است که مساحت بین نمودار و محور xها در بازه‌های $[-۰/۷۵, ۰]$ و $[۳/۲۵, ۴]$ یکسان است، پس مساحت زیر نمودار و محصور xها در بازهٔ $[-۰/۷۵, ۳/۲۵]$ برابر با مساحت بین نمودار و محصور xها در بازهٔ $[۰, ۴]$ است. بنابراین داریم:

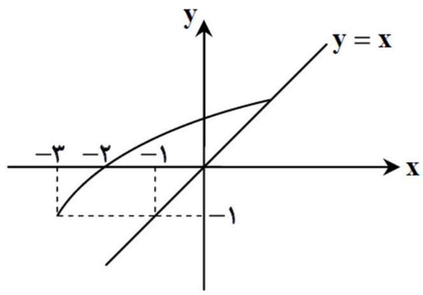
$$S = ۲ \times \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۲$$

مثال ۵۷- فرض کنید M نقطه برخورد منحنی $y = \sqrt{x+۳} - ۱$ با تابع وارون خود باشد . فاصله نقطه M از مبدأ مختصات کدام است؟(خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

نمودار تابع $y=\sqrt{x+3}-1$ به‌صورت مقابل است. قطعاً نقطهٔ برخورد تابع با وارونش روی خط $y=x$ قرار دارد، پس کافی است که تابع $y=\sqrt{x+3}-1$ را با $y=x$ قطع بدهیم.



$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+3=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \text{یا} \\ x=1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار $x=1$ قابل‌قبول است و نقطهٔ تلاقی تابع و وارونش نقطهٔ $M(1,1)$ است. پس:

$$OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

مثال ۵۸- تابع $y=2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتدا محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم . منحنی حاصل محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟(خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$2^{x+|x|} \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|}-2=0 \Rightarrow x+3+|x+3|=1 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

مثال ۵۹-نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم . فاصله ی نقطه ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبداء مختصات کدام است؟(سراسری تجربی ۹۹)

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$\sqrt{x} \xRightarrow{\text{۱۲ واحد در مثبت محور x ها}} \sqrt{x-12} \xRightarrow{\text{۲ واحد در مثبت محور y ها}} \sqrt{x-12}+2=\sqrt{x} \to x=16$$

به این مرحله که رسیدید , میتونین با عددگذاری به راحتی عدد مورد قبول برای x را متوجه بشین!

$$(16,4) \text{ و } (0,0) \xRightarrow{\text{فاصله ی بین دو نقطه}} \sqrt{(16-0)^2+(4-0)^2} \xRightarrow{\text{در واقع فیثاغورس دو عدد ۱۶ و ۴ را باید حساب کنیم}}$$

$$\begin{cases} ۴ = ۱ \times ۴ \\ ۱۶ = ۴ \times ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{عدد مشترک رو بنویس بیرون رادیکال}} ۴\sqrt{۱^۲ + ۴^۲} = ۴\sqrt{۱۷}$$

مثال۶۰-اگر $f(x) = ۲x - [۲x]$ و $g(x) = -x^۲ + ۴x$ باشند , برد تابع gof کدام است؟(سراسری تجربی ۹۹)

۱) $[۰ و ۲)$ ۲) $[۰ و ۳)$ ۳) $[۰ و ۴)$ ۴) $[۱ و ۴)$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$g(x) = -x^۲ + ۴x = -(x^۲ - ۴x) = -(x^۲ - ۴x + ۴) + ۴ = -(x-۲)^۲ + ۴$$

$$۰ \le x - [x] < ۱ \to ۰ \le ۲x - ۲[x] < ۱ \to ۰ \le f(x) < ۱ \to \quad gof(x) = g(f(x)) = -(f(x) - ۲)^۲ + ۴$$

$$۰ \le f(x) < ۱ \overset{-۲}{\Rightarrow} -۲ \le f(x) - ۲ < -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱ < (f(x)-۲)^۲ \le ۴ \overset{\times -}{\Rightarrow} -۱ > -(f(x)-۲)^۲ \ge -۴$$

$$\overset{+۴}{\Rightarrow} ۳ > -(f(x)-۲)^۲ + ۴ \ge ۰ \to ۳ > gof \ge ۰$$

پاسخ تستی

به x مقادیری دلخواه می دهیم . آنگاه مجموعه ی مقادیر به دست آمده برای تابع تعریف شده همان برد تابع را به ما خواهد داد!

$$\begin{cases} x = ۰ \overset{f}{\Rightarrow} ۰ \overset{g}{\Rightarrow} ۰ \to \text{گزینه ی ۴رد میشه} \\ x = ۰.۹ \overset{f}{\Rightarrow} ۰.۸ \overset{g}{\Rightarrow} ۲.۵۶ \to \text{گزینه ی ۳و ۱رد میشه} \end{cases}$$

مثال۶۱-اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد , مقدار $g(۶) + g(۱۲)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$g(۶) + g(۱۲) = f^{-۱}(۶) + f^{-۱}(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

مثال۶۲-تابع f با ضابطه ی $f(x) = x - \frac{۲}{x}$ در دامنه ی $(-\infty , ۰)$ را در نظر بگیرید . نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیه ی چهارم را با کدام طول قطع می کند؟(سراسری تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$f^{-1}(x) = -x \to f(-x) = x \to -x + \frac{2}{x} = x \to \frac{2}{x} = 2x \to x^2 = 1 \to x = \pm 1 \xRightarrow{\text{ناحیه ی چهارم}} x = 1$$

پاسخ تستی

$$f^{-1}(x) = -x \to f(-x) = x \xRightarrow{\text{گزینه ها را امتحان کن}} f(-1) = 1 \to -1 + 2 = 1 \text{ درست}$$

مثال۶۳- نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = x^2 - 2x : x > 1$ مفروض است. قرینه ی نمودار آن نسبت به محور x ها را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می دهیم . فاصله ی نقطه ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبداء مختصات کدام است؟

(خارج تجربی ۹۹)

۱) $4\sqrt{5}$ **۲)** $6\sqrt{2}$ **۳)** $5\sqrt{2}$ **۴)** $2\sqrt{5}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$\sqrt{x^2 - 2x} \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} -x^2 + 2x \xRightarrow{\text{۱۶ واحد در مثبت محور } y \text{ ها}} -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \to \left| \begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array} \right. \xRightarrow{\text{با توجه به شرط مساله}} x = 4 \checkmark$$

$$(4,8) \text{ و } (0,0) \xRightarrow{\text{فاصله ی بین دو نقطه}} \sqrt{(4-0)^2 + (8-0)^2} \xRightarrow{\text{در واقع فیثاغورس دو عدد ۸ و ۴ را باید حساب کنیم}}$$

$$\begin{bmatrix} 4 = 1 \times 4 \\ 8 = 2 \times 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{عدد مشترک رو بنویس بیرون رادیکال}} 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}$$

مثال۶۴-اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند , برد تابع gof کدام است؟(خارج تجربی ۹۹)

۱) $[-1 \text{ و } 1)$ **۲)** $(-1 \text{ و } 1]$ **۳)** $[1 \text{ و } +\infty)$ **۴)** $(-\infty \text{ و } 1]$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$0 \le x - [x] < 1 \xRightarrow{\text{ضرب در } -1} 0 \ge [x] - x > -1 \Rightarrow 0 \ge f(x) > -1$$

$$g(x)=\frac{۱-۲\mathbf{x}}{\mathbf{x}+۱}=\frac{-۲(\mathbf{x}+۱)+۳}{\mathbf{x}+۱}=-۲+\frac{۳}{\mathbf{x}+۱}\ \Rightarrow\ gof(x)=g\big(f(x)\big)=-۲+\frac{۳}{f(x)+۱}$$

$$۰\geq f(x)>-۱\overset{+۱}{\Rightarrow}۱\geq f(x)+۱>۰\ \xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۱}{f(x)+۱}\geq ۱\overset{\times ۳}{\Rightarrow}\frac{۳}{f(x)+۱}\geq ۳$$

$$\overset{-۲}{\Rightarrow}\ -۲+\frac{۳}{f(x)+۱}\geq ۱\rightarrow\ gof\geq ۱\ \approx\ [۱\text{ و }+\infty)$$

پاسخ تستی

به x مقادیری دلخواه می دهیم . آنگاه مجموعه ی مقادیر به دست آمده برای تابع تعریف شده همان برد تابع را به ما خواهد داد!

$$\left[\begin{array}{l} x=۰\overset{f}{\Rightarrow}۰\overset{g}{\Rightarrow}۱\ \rightarrow \text{گزینه ی ۱رد میشه} \\ x=۰.۹\overset{f}{\Rightarrow}-۰.۹\overset{g}{\Rightarrow}۲۸\ \rightarrow \text{گزینه ی ۲و ۴رد میشه}\end{array}\right.$$

مثال۶۵-اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=\ x+۲\sqrt{x}$ باشد , مقدار $g(۳)+g(۱۵)$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

مثال۶۶-تابع f با ضابطه ی $f(x)=\ x-\frac{۱}{۲x}$ در دامنه ی $(۰,+\infty)$ را در نظر بگیرید . نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیه ی دوم را با کدام طول قطع می کند؟(خارج تجربی ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) -۱

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$f^{-۱}(x)=-x\ \rightarrow\ f(-x)=x\ \rightarrow -x+\frac{۱}{۲x}=x\rightarrow\frac{۱}{۲x}=۲x\ \rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۴}\rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}\ \xrightarrow{\text{ناحیه ی دوم}}\ x=-\frac{۱}{۲}$$

پاسخ تستی

$$f^{-۱}(x)=-x\rightarrow\ f(-x)=x\ \xrightarrow{\text{گزینه ها را امتحان کن}}\ x=-\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ f\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱}=-\frac{۱}{۲}\ \text{درست}$$

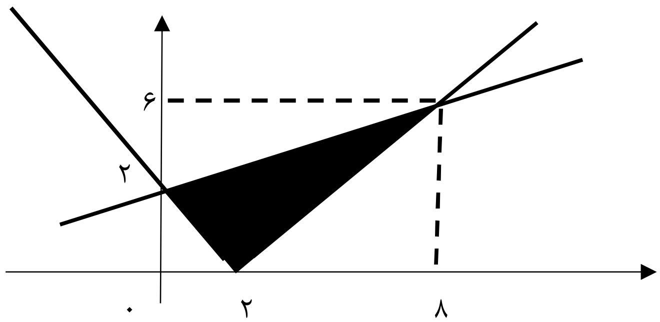
مثال۶۷-مساحت ناحیه ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۹)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$y=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^{۲}}=|x-۲|$$

با رسم نمودار دو تابع و مشخص شدن نقاط تلاقی دو نمودار



$$\text{مساحت قسمت هاشور زده}=\frac{۲\sqrt{۲}\times ۶\sqrt{۲}}{۲}=۱۲$$

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند که اعداد $۲\sqrt{۲}$ و $۶\sqrt{۲}$ که دو ضلع قائم مثلث هاشور خورده اند با استفاده از رابطه ی فیثاغورس به دست آمده اند!

مثال۶۸-اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۹x+۶}{۱-x}$ باشند , مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)=g^{-۱}\big(f^{-۱}(۲۰)\big)=g^{-۱}(۱۶)\Rightarrow \frac{۹x+۶}{۱-x}=۱۶\Rightarrow ۹x+۶=۱۶-۱۶x\Rightarrow ۲۵x=۱۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}$$

مثال۶۹-قرینه ی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده و سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست انتقال می دهیم . منحنی اخیر و منحنی حاصل نسبت به کدام خط متقارن هستند؟(سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $x=۱$ ۲) $x=۱.۵$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۲.۵$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

نقاط برخورد دو تابع با محور طول ها $\Rightarrow \sqrt{x}$ و $\sqrt{-(x-۴)} \xLeftarrow{\text{۴ واحد در مثبت محور x ها}} \sqrt{-x} \xLeftarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} \sqrt{x}$

$$\Rightarrow (x=۴) \text{ و } (x=۰) \xRightarrow{\text{خط متقارن}} x=\frac{۴+۰}{۲}=۲$$

مثال۷۰-نمودارهای دو تابع $y=|x-۲|+|x+۱|$ و $y=x+۷$ در دو نقطه ی A و B متقاطع هستند . اندازه ی پاره خط AB کدام است؟(خارج ریاضی ۹۹)

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$\left|\begin{array}{l} x+۷=۲x-۱ \rightarrow x=۸ ✓ \\ x+۷=-۲x+۱ \rightarrow x=-۲ ✓ \\ x+۷=-۳ \quad \rightarrow x=-۱۰ \times \\ x+۷=۳ \quad \rightarrow x=-۴ \times \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A(۸,۱۵) \\ B(-۲,۵) \end{array}\right. \Rightarrow AB=۱۰\sqrt{۲} = \text{فیثاغورس دو عدد ۱۰}$$

مثال۷۱-اگر $f(x)=x^۲-۴x+۹ \; : x\geq ۲$ و $g(x)=\frac{۳-x}{۲}$ باشند , مقدار $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$ کدام است؟(خارج ریاضی ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}\left(g^{-۱}(-۹)\right) \Rightarrow \frac{۳-x}{۲}=-۹ \Rightarrow x=۲۱ \Rightarrow f^{-۱}(۲۱) \Rightarrow x^۲-۴x+۹=۲۱ \Rightarrow$$

$$x^۲-۴x-۱۲=۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۶ \text{ ق ق}$$

مثال۷۲-قرینه ی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبداء مختصات تعیین کرده و سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می دهیم . طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟(خارج ریاضی ۹۹)

۱) ۲ و ۰ ۲) ۱ و ۱- ۳) ۲ و ۱- ۴) ۱ و ۲-

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$(x-۱)^۲ \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به مبداء}} -(-x-۱)^۲=-(x+۱)^۲ \xRightarrow{\text{۴ واحد بالا}} -(x+۱)^۲+۴=(x-۱)^۲ \Rightarrow ۲x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm ۱$$

مثال۷۳-تابع با ضابطه ی $f(x) = |x + ۲| + |x - ۱|$ در کدام بازه اکیدا نزولی است؟(سراسری تجربی ۹۸)

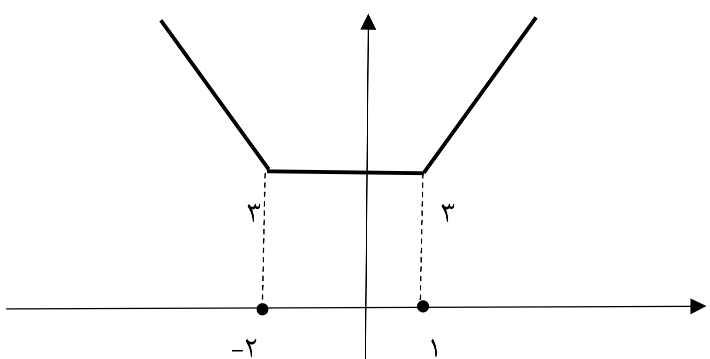
۱) $(-\infty , -۲)$　　۲) $(-\infty , ۱)$　　۳) $(-۲ , ۱)$　　۴) $(۱ , +\infty)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

روش اول

نمودار توابعی به فرم $|x + a| + |x + b|$ به صورت گلدانی است که از منفی بی نهایت تا ریشه ی کوچکتر اکیدا نزولی و از ریشه ی کوچکتر تا ریشه ی بزرگتر ثابت و از ریشه ی بزرگتر تا مثبت بی نهایت اکیدا صعودی است.

ریشه بزرگتر $x = +۱ \Leftarrow x - ۱ = ۰$　و　ریشه کوچکتر $x = -۲ \Leftarrow x + ۲ = ۰$



توجه داشته باشید توابعی به فرم $|x + a| + |x + b|$ فقط مینیمم دارند و کمترین مقدار آن ها برابر است با ...

$$\text{کمترین مقدار} = |a| + |b|$$

گرچه در حل تست اصلا نیازی به رسم نمودار نیست و با توجه نکته ای که ابتدای حل تست به آن اشاره شد , به راحتی می توانستید به تست پاسخ دهید!

$$\text{بازه ی اکیدا نزولی} = (-\infty \text{ و } -۲)$$

$$\text{بازه ی اکیدا صعودی} = (۱ \text{ و } +\infty)$$

حال اگر فرض رو بر این بپنداریم که اصلا دانش آموز نمیدونه توابعی به این فرم یا هر فرم دیگه چه شکلی هستند! به روش دوم توجه کنید که دیگه تو این روش ساده شما نیازی نیست بدونید هر تابع به چه فرمی هست که چگونگی اکیدا صعودی با اکیدا نزولی بودن آن را متوجه شوید!

روش دوم

$$f(x) = |x + ۲| + |x - ۱|$$

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
f(x)	$+۵$	۳	۳	۳	۳	۵

کاملا مشخصه که از عدد منفی ۲ تا مثبت ۱ تابع حالت اکیدا نزولی بودن خود را از داست داده است و ثابت است .

پس گزینه های ۲ و ۳ نادرست است . گزینه ی ۴ هم به علت اکیدا صعودی بودن نادرست است!

مثال۷۴-اگر $f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳ \ : x \geq ۱$ باشد , نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x) = \frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

(سراسری تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

روش تشریحی(اصلا توصیه نمی شود!)

$$f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳ = x^{۲} - ۲x + ۱ - ۴ = (x-۱)^{۲} - ۴ \Rightarrow y = (x-۱)^{۲} - ۴ \Rightarrow (x-۱)^{۲} = y + ۴$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \sqrt{y+۴} \Rightarrow x = \sqrt{y+۴} + ۱ \rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x+۴} + ۱$$

$$\sqrt{x+۴} + ۱ = \frac{x-۹}{۲} \Rightarrow \sqrt{x+۴} = \frac{x-۱۱}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{x+۴} = x - ۱۱ \xRightarrow{\text{به توان ۲}} ۴x + ۱۶ = x^{۲} - ۲۲x + ۱۲۱ \Rightarrow$$

$$x^{۲} - ۲۶x + ۱۰۵ = ۰ \Rightarrow (x-۲۱)(x-۵) = ۰ \ \left| \begin{array}{l} x = ۲۱ \checkmark \\ x = ۵ \end{array} \right.$$

خسته شدید؟!خوب با حل تشریحی و روش به دست آوردن معکوس توابع درجه ی دوم که در کتاب درسی هم به آن اشاره شده است یاد گرفتید!

به روش تستی حل سوال توجه کنید!

روش تستی

خوبی سوالات تستی مخصوصا در سوالات مربوط به تابع اینه که به راحتی می توانید با عدد گذاری و تست گزینه ها به جواب تست برسید!

$$f^{-۱}(x) = g(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{گزینه ی ۱} = x = ۱۲ \Rightarrow f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۱۲ \Rightarrow \frac{-۱۵}{۴} \neq ۱۲ \ \times \\ \text{گزینه ی ۲} = x = ۱۵ \Rightarrow f(۳) = ۱۵ \Rightarrow ۰ \neq ۱۵ \ \times \\ \text{گزینه ی ۳} = x = ۱۸ \Rightarrow f\left(\frac{۹}{۲}\right) = ۱۸ \Rightarrow \frac{۳۳}{۴} \neq ۱۸ \ \times \\ \text{گزینه ی ۴} = x = ۲۱ \Rightarrow f(۶) = ۲۱ \Rightarrow ۲۱ = ۲۱ \ \checkmark \end{array} \right.$$

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشید که لازم نیست تمام محاسبات را انتها انجام بدین!

مثلا در گزینه ی ۱ و ۳ وقتی عدد کسری میشه دیگه بیخیال ادامه ی محاسبات بشین . زیرا با توجه به ضابطه ی تعریف شده برای f امکان ندارد حاصل آن به ازای عدد کسری , عدد صحیح گزینه ها را نتیجه دهد!

مثال۷۵-تابع با ضابطه ی $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$ در کدام بازه اکیدا صعودی است؟(خارج تجربی ۹۸)

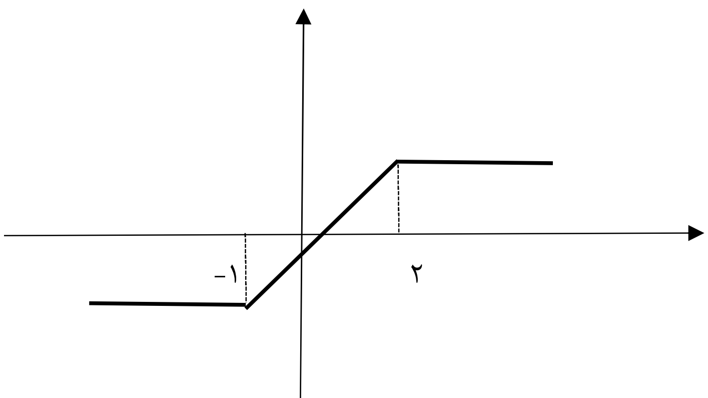
۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

روش اول

نمودار توابعی به فرم $|x+a|-|x+b|$ به صورت زیر است که فقط بین ریشه ی کوچکتر تا ریشه ی بزرگتر اکیدا صعودی است.

ریشه بزرگتر $x=+۲ \Leftarrow x-۲=۰$ و ریشه کوچکتر $x=-۱ \Leftarrow x+۱=۰$



بین دو ریشه ی کوچکتر و بزرگتر

بازه ی اکیدا صعودی = $(۲+$ و $-۱)$

روش دوم

$$f(x)=|x+۱|-|x-۲|$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
f(x)	-۳	-۳	-۱	۱	۳	۳

کاملا مشخصه که از عدد منفی ۱ تا مثبت ۲ تابع اکیدا صعودی است .

مثال۷۶- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند , مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۸)

۱) ۳   ۲) ۲.۵   ۳) ۲   ۴) ۱.۵

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(۸)\right)\Rightarrow \frac{۲}{۵}x-۴=۸\Rightarrow x=۳۰\Rightarrow g^{-۱}(۳۰)\Rightarrow x^۳+x=۳۰\Rightarrow x=۳$$

مثال۷۷- نمودار تابع $f(x) = -x^{۲} + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت و سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم . نمودار جدید در کدام بازه , بالای نیمساز ربع اول است؟(سراسری ریاضی ۹۸)

۱) $(۳, ۴)$ ۲) $(۲, ۵)$ ۳) $(۳, ۵)$ ۴) $(۲, ۶)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$-x^{۲} + ۲x + ۵ = -(x^{۲} - ۲x + ۱) + ۶ = -(x - ۱)^{۲} + ۶ \xrightarrow{\text{۳ واحد به سمت راست}} -(x - ۱)^{۲} + ۶ \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}}$$

$$-(x - ۱)^{۲} + ۴ > x \xrightarrow{\text{گزینه ها را تست کنید}}$$ عدد ۴ گزینه های دو و سه و چهار است $x = ۴ \Rightarrow -(۴ - ۱)^{۲} + ۴ > ۴ \Rightarrow -۵ > ۴ \times$

مثال۷۸-اگر $f = \{(۱,۲), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳), (۴,۲), (۵,۶), (۳,۱)\}$ باشند تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

۱) $\{(۴,۲), (۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲), (۳,۵)\}$ ۳) $\{(۲,۴), (۵,۲)\}$ ۴) $\{(۲,۴), (۳,۵)\}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$f^{-۱} = \{(۲,۱), (۵,۲), (۴,۳), (۶,۴)\} \Rightarrow gof^{-۱} = \{(۵,۳), (۶,۲), (۴,۱)\} \Rightarrow \frac{g}{gof^{-۱}} = \{(۵,۲), (۴,۲)\}$$

مثال۷۹- نمودار تابع $f(x) = x^{۲} - x - ۳$ را ۲ واحد به طرف x های منفی و سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم . نمودار جدید در کدام بازه , زیر محور x ها است؟(خارج ریاضی ۹۸)

۱) $(-۵, ۲)$ ۲) $(-۵, ۳)$ ۳) $(-۲, ۳)$ ۴) $(-۲, ۵)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$x^{۲} - x - ۳ = \left(x^{۲} - x + \frac{۱}{۴}\right) - \frac{۱۳}{۴} = \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱۳}{۴} \xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت چپ}} \left(x + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱۳}{۴} \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}}$$

$$\left(x + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} - \frac{۴۹}{۴} < ۰ \xrightarrow{\text{گزینه ها را تست کنید}}$$ عدد ۲ گزینه های دو و سه و چهار است $x = ۲ \Rightarrow ۰ < ۰ \times$

پس به ازای عدد ۲ نامساوی حاصل شده نادرست بوده و فقط گزینه ی ۱ که این عدد را شامل نمی شود صحیح است !

حال اگه میخواستیم با ادامه ی حل به پاسخ تست برسیم!

$$\left(x+\frac{۳}{۲}\right)^{۲}-\frac{۴۹}{۴}<۰ \Rightarrow \left(x+\frac{۳}{۲}\right)^{۲}<\frac{۴۹}{۴} \Rightarrow \left|x+\frac{۳}{۲}\right|<\frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۷}{۲}<x+\frac{۳}{۲}<\frac{۷}{۲} \Rightarrow$$
$$-۵<x<۲$$

مثال۸۰- مجموع جواب های معادله ی $|۲x-۱|+|x+۲|=۳$ کدام است؟(خارج ریاضی ۹۸)

۱) $-\frac{۲}{۳}$　　۲) ۱　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۴}{۳}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$|۲x-۱|+|x+۲|=۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{هر دو مثبت} \Rightarrow ۳x+۱=۳ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \xRightarrow{\text{تست در عبارت داده شده}} \text{ق ق} \\ \text{هر دو منفی} \Rightarrow -۳x-۱=۳ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \xRightarrow{\text{تست در عبارت داده شده}} \text{غ ق ق} \\ \text{اولی مثبت دومی منفی} \Rightarrow x-۳=۳ \Rightarrow x=۶ \xRightarrow{\text{تست در عبارت داده شده}} \text{غ ق ق} \\ \text{اولی منفی دومی مثبت} \Rightarrow -x-۱=۳ \Rightarrow x=-۴ \xRightarrow{\text{تست در عبارت داده شده}} \text{غ ق ق} \end{cases} \xRightarrow{\text{مجموع جوابها}} \frac{۲}{۳}$$

مثال۸۱- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند برد تابع $(g^{-۱}of)-f$ کدام است؟

(خارج ریاضی ۹۸)

۱) $\{-۱,۴\}$　　۲) $\{۲,۳\}$　　۳) $\{۳,۴\}$　　۴) $\{۲,-۱\}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\} \Rightarrow g^{-۱}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\} \Rightarrow g^{-۱}of-f=\{(۱,۲),(۴,-۱)\} \Rightarrow$ برد تابع $= -۱$ و ۲

مثال۸۲- کدام یک از توابع زیر با تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ برابر است؟(خارج تجربی ۹۷)

۱) $\log(x-۲)-\log x$　　۲) $\log\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+۲x}$　　۳) $\frac{۱}{۲}\log\left(\frac{x-۲}{x}\right)^{۲}$　　۴) $۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

اولین شرط تساوی دو تابع برابر بودن دامنه های دو تابع است!

نادرستی گزینه ی ۱

در عبارت داده شده $\frac{x-۲}{x}$ مثلا ما مجاز به دادن عدد ۱- به x هستیم . یعنی با اختیار عدد ۱- مشکلی برای تعریف تابع پیش نخواهد آمد , در حالی که عدد ۱- در گزینه ی یک ایجاد مشکل می کند. زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده است!

نادرستی گزینه ی ۲

در عبارت داده شده $\frac{x-۲}{x}$ مثلا ما مجاز به دادن عدد ۲- به x هستیم . یعنی با اختیار عدد ۲- مشکلی برای تعریف تابع پیش نخواهد آمد , در حالی که عدد ۲- در گزینه ی دو ایجاد مشکل می کند. زیرا لگاریتم صفر تعریف نشده است!

نادرستی گزینه ی ۳

در عبارت داده شده $\frac{x-۲}{x}$ مثلا ما مجاز به دادن عدد ۱ به x نیستیم . یعنی با اختیار عدد ۱ مشکلی برای تعریف تابع پیش خواهد آمد , در حالی که عدد ۱ در گزینه ی سه ایجاد مشکل نمی کند. پس دامنه ی تابع داده شده با گزینه ی ۳ نیز یکسان نیست!

مثال۸۳- قرینه ی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می دهیم . نمودار حاصل نیمساز ناحیه ی اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟(خارج تجربی ۹۷)

۱) -۲ ۲) ۰.۵ ۳) ۱ ۴) ۱.۵

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$\sqrt{x} \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} \sqrt{-x} \xRightarrow{\text{۲ واحد راست}} \sqrt{-(x-۲)} = x \xRightarrow{\text{تست گزینه ها}} x = ۱$$

مثال۸۴- اگر $f(x) = \frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x) = x + ۴$ باشند , جواب معادله ی $(gof)(x) = (fog)(x)$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۷)

۱) ۷- و ۱- ۲) ۷- و ۱ ۳) ۷ و ۱- ۴) ۷ و ۱

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی(هرگز توصیه نمی شود)

$$(gof)(x) = (fog)(x) \Rightarrow \frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲} = \frac{۲x-۱}{x+۲} + ۴ \Rightarrow \frac{۲x+۷}{x+۶} = \frac{۶x+۷}{x+۲} \Rightarrow$$

$$(۲x+۷)(x+۲) = (۶x+۷)(x+۶) \Rightarrow ۲x^۲ + ۱۱x + ۱۴ = ۶x^۲ + ۴۳x + ۴۲ \Rightarrow ۴x^۲ + ۳۲x + ۲۸ = ۰$$

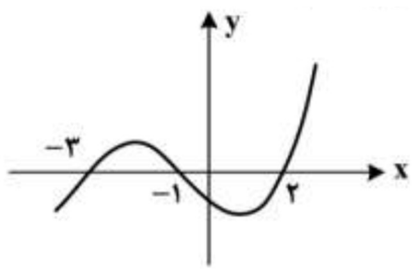
$$\Rightarrow x^۲ + ۸x + ۷ = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۷) = ۰ \Rightarrow x = -۱ , -۷$$

پاسخ تستی

گزینه ی ۲ و ۴ رد میشن ⇨ پس $x = -۱$ درست است ⇨ $\begin{cases} f(-۱) = -۳ \Rightarrow g(-۳) = ۱ \\ g(-۱) = +۳ \Rightarrow f(+۳) = ۱ \end{cases}$

گزینه ی ۳ رد میشن ⇨ پس $x = -۷$ درست است ⇨ $\begin{cases} f(-۷) = +۳ \Rightarrow g(+۳) = ۷ \\ g(-۷) = -۳ \Rightarrow f(-۳) = ۷ \end{cases}$

مثال۸۵- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)$ است . دامنه ی تابع $\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟(خارج ریاضی ۹۷)



۱) $[-۳,۲]$
۲) $[-۱,+\infty)$
۳) $(-\infty,-۱]$
۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

برای محاسبه ی دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج کافیست عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم!

گزینه ی ۴ صحیح است ⇨ $(x+۱)f(x) \geq ۰ \Rightarrow$
یا هر دو مثبت: $x \geq -۱$ و $f(x) \geq ۰$
یا هر دو منفی: $x \leq -۱$ و $f(x) \leq ۰$

از روی نمودار کاملا مشخص است که در بازه ی $[۲$ و $+\infty)$ طول نقاط بیشتر از منفی یک و خود نمودار بالای محور طول ها قرار دارد .

چنین شرایطی برای بازه ی $(-\infty$ و $-۳]$ نیز صادق است!

مثال۸۶- اگر $f(x) = ۲ - |x+۱|$ و $g(x) = x + |x|$, آن گاه برد تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟(خارج ریاضی ۹۷)

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$
۲) $(-۱,+\infty)$
۳) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$
۴) $(۰,+\infty)$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{۲ - |x+۱|}{x + |x|}$$

بی خیال حل تست به روش تشریحی می شویم و میزاریم به عهده ی خود شما!

(برای اینکه بخواین برد تابع رو به روش تشریحی جواب بدین باید تابع رو تعیین علامت کرده و در سه بازه برد تابع رو به دست بیارین که مشخصا کار سنگینی ست!

پاسخ تستی(دقت داشته باشین که مقادیری که برای $\mathbf{x}$ داده میشود به دلخواه است)

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{x}=۱ \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۱)=۰ \Rightarrow \text{رد گزینه ی ۴} \\ \mathbf{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{رد گزینه ی ۱} \\ \mathbf{x}=۲ \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۲)=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{مقدار تابع هرگز از } -\frac{۱}{۲} \text{ کمتر نمیشود} \end{array}\right.$$

مثال۸۷- قرینه ی خط به معادله ی $۳\mathbf{y}-۲\mathbf{x}=۴$ را نسبت به خط $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ خط $\mathbf{d}$ می نامیم , عرض از مبداء خط $\mathbf{d}$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۷)

۱) -۲ **۲)** -۱ **۳)** ۱ **۴)** ۲

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

نکته مهم

قرینه ی خط یا نقطه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($\mathbf{y}=\mathbf{x}$) جای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را جابجا می کند!

$$۳y-۲x=۴ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نیمساز اول و سوم}} ۳x-۲y=۴ \xrightarrow{\text{عرض از مبداء}} x=۰ \Rightarrow y=-۲$$

مثال۸۸- اگر $\mathbf{f}(۲\mathbf{x}-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد , ضابطه ی $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۷)

۱) $x^۲-x+۳$ **۲)** $x^۲-۲x-۱$ **۳)** $x^۲-۲x+۱$ **۴)** $x^۲-x+۱$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$۲x-۳=z \Rightarrow x=\frac{z+۳}{۲} \Rightarrow f(z)=۴\left(\frac{z+۳}{۲}\right)^۲-۱۴\left(\frac{z+۳}{۲}\right)+۱۳=(z+۳)^۲-۷(z+۳)+۱۳ \Rightarrow$$

$$f(z) = z^{۲} + ۶z + ۹ - ۷z - ۲۱ + ۱۳ = z^{۲} - z + ۱ \xrightarrow{\text{و نهایتا با تبدیل z به x}} f(x) = x^{۲} - x + ۱$$

پاسخ تستی

به x یک مقدار دلخواه بدین!

$x = ۰ \Rightarrow f(-۳) = +۱۳ \Rightarrow$ ۱۳ بدی جواب میشه -۳ , x در کدامیک از گزینه ها به $\Rightarrow$

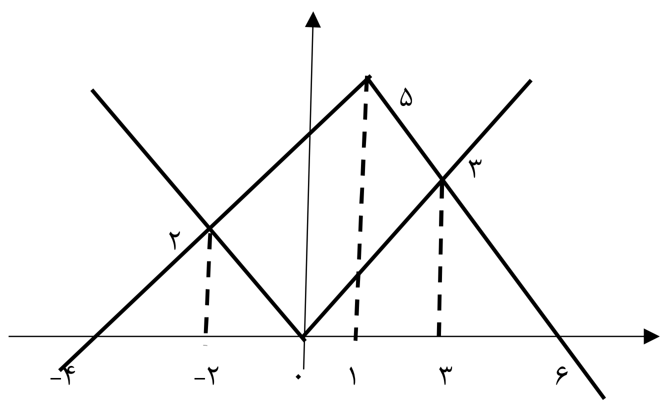
$$\begin{cases} \text{گزینه ی ۱} \Rightarrow f(-۳) = ۱۵ \times \\ \text{گزینه ی ۲} \Rightarrow f(-۳) = ۱۴ \times \\ \text{گزینه ی ۳} \Rightarrow f(-۳) = ۱۶ \times \\ \text{گزینه ی ۴} \Rightarrow f(-۳) = ۱۳ \checkmark \end{cases}$$

مثال۸۹- مساحت ناحیه ی محدود به نمودار های دو تابع $y = ۵ - |x - ۱|$ و $y = |x|$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۷)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

با رسم نمودار دو تابع و مشخص شدن نقاط تلاقی دو نمودار



$$\text{مساحت قسمت هاشور زده} = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

مثال۹۰- اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x + ۱| + ۱$, آن گاه برد تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۷)

۱) $[۰ , ۱)$ ۲) $[۰ , ۲)$ ۳) $[۰ , +\infty)$ ۴) $[۱ , +\infty)$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x + ۱| + ۱}$$

پاسخ تستی(دقت داشته باشین که مقادیری که برای $\mathbf{x}$ داده میشود به دلخواه است)

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{x}=۰ \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۰)=۰ \Rightarrow \text{رد گزینه ی ۴} \\ \mathbf{x}=۱۰ \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۱۰)=\frac{۵}{۳} \Rightarrow \text{رد گزینه ی ۱} \\ \mathbf{x}=۱۰۰ \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۱۰۰)=\frac{۲۵}{۱۴} \Rightarrow \text{مقدار تابع هرگز به ۲ نمیرسد} \end{array}\right.$$

مثال۹۱- کدام یک از تابع های زیر یک به یک است؟(سراسری ریاضی ۹۷)

۱) $\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}}$ ۲) $\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{x}}$ ۳) $۲\mathbf{x}+\frac{۱}{\mathbf{x}}$ ۴) $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^۲+۱}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

برای آن که تابعی یک به یک باشد باید

$$f(x_۲)=f(x_۱) \Rightarrow x_۲=x_۱$$

شاید که نه مطمئنا بررسی شرط یاد شده برای چهار گزینه ی داده شده فرایندی زمانبر و طولانی خواهد بود. به نکته ی مهم زیر توجه کنید!

***نکته ی بسیار مهم برای تشخیص یک به یک بودن تابع**

اگر تابعی در دامنه ی تعریف خود اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد , یک به یک خواهد بود.

با توجه به نکته ی گفته شده این شرایط فقط در تابع گزینه ی ۱ برقرار است.

$x+\sqrt{x}$ ⇦ چون به x فقط مقادیر مثبت میتونیم بدیم ⇦ مقدار تابع همواره در حال افزایش خواهد بود ⇦ یعنی اکیدا صعودی است

نادرست بودن سایر گزینه ها به وضوح مشخصه ! خودتون بررسی شون کنین حتما

مثال۹۲- اگر $\mathbf{f(x)}=\frac{\mathbf{x}^۲+۱}{۱-\mathbf{x}^۲}$ و $\mathbf{g(x)}=\sqrt{\mathbf{x}-\mathbf{x}^۲}$ باشند دامنه ی تابع $\mathbf{gof}$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۶)

۱) $[۰ \text{ و } ۱)$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $(-۱ \text{ و } ۱)$ ۴) $\mathbf{R}-\{-۱,۱\}$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

روش تشریحی

ضابطهٔ $g(f(x))$ را تشکیل داده و دامنهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow g(f(x))=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}\left(1-\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}\left(\frac{-2x^2}{1-x^2}\right)}=\sqrt{\frac{(1+x^2)(-2x^2)}{(1-x^2)^2}} \Rightarrow \frac{\overbrace{(1+x^2)}^{\text{همواره مثبت}}(-2x^2)}{\underbrace{(1-x^2)^2}_{\text{همواره مثبت}}}\geq 0$$

$$\Rightarrow -2x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 0 \Rightarrow x=0$$

روش تستی

با اختیار $x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{3}\overset{g}{\Rightarrow} g\left(\frac{5}{3}\right)=\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{25}{9}}=-\frac{10}{9}$$

عبارت زیر رادیکال منفی شد و همانطور که می دانیم توابع رادیکالی با فرجه ی زوج برای مقادیر منفی تعریف نشده اند . پس عدد اختیار شده در دامنه ی تابع نمی تواند باشد و گزینه های ۱ و ۳ و ۴ هر سه به خاطر داشتن این عدد رد میشوند!

مثال۹۳- دو تابع $f=\{(6,3),(2,5),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ **و** $g(x)=\frac{x}{x-1}$ **مفروض اند . اگر** $f^{-1}(g(2a))=6$ **باشد ,** a **کدام است؟(سراسری تجربی ۹۶)**

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$f^{-1}(g(2a))=6 \Rightarrow g(2a)=f(6)=3=\frac{2a}{2a-1} \Rightarrow 2a=6a-3 \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

مثال۹۴- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ **و** $g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$ **باشند , ضابطه ی تابع** $g(f(x))$ **کدام است؟(سراسری تجربی ۹۶)**

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی

برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $gof(x)=g(f(x))$ باید به‌جای x در تابع $g(x)$، $f(x)$ را قرار دهیم. داریم:

$$g(f(x))=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-(\frac{۲x-۱}{x+۱})}=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{\frac{۶x}{x+۱}}{\frac{۳}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

پاسخ تستی

$$x=۲ \Rightarrow f(۲)=۱ \Rightarrow g(f(۲))=g(۱)=۴$$

حال توی کدوم گزینه به $x=۲$ بدهیم میشود ۴؟ درسته! گزینه ی ۴!

مثال۹۵- ضابطه ی وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & : x\geq ۰\\ -\sqrt{x} & : x<۰\end{cases}$ **کدام است؟(سراسری تجربی ۹۶)**

۱) $-x^۲$ ۲) $x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

از عددگذاری استفاده می‌کنیم:

$x=۱ \Rightarrow f(۱)=۱ \Rightarrow (۱,۱)\in f \Rightarrow (۱,۱)\in f^{-۱} \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) یا (۳) درست است.

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۱ \Rightarrow (-۱,-۱)\in f \Rightarrow (-۱,-۱)\in f^{-۱} \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

مثال۹۶- اگر $f(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ **و** $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ **باشند دامنه ی تابع gof کدام است؟(خارج ریاضی ۹۶)**

۱) $[۰ , ۱]$ ۲) $[-۱ , ۱]$ ۳) R ۴) $R-(-۱ , ۱)$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$g(x)=\sqrt{x-x^{۲}}\ ,\ x-x^{۲}\ge ۰ \Rightarrow ۰\le x\le ۱ \Rightarrow D_g=[۰,۱]$$

لذا برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof می‌توان نوشت:

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\in[۰,۱]\right\}$$

$$\begin{cases} ۰\le \dfrac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}} \xrightarrow{۱+x^{۲}>۰} ۱-x^{۲}\ge ۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۱ \\ \dfrac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\le ۱ \Rightarrow \dfrac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}-۱\le ۰ \Rightarrow \dfrac{۱-x^{۲}-۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\le ۰ \xrightarrow{۱+x^{۲}>۰} -۲x^{۲}\le ۰ \text{ همواره برقرار است.} \end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع gof برابر است با $[-۱,۱]$.

پاسخ تستی

$$f(۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } -۱)=۰ \overset{g}{\Rightarrow} g(۰)=\sqrt{۰}$$

یعنی این اعداد هیچ کدام مشکلی برای دامنه ی تابع به وجود نمی آورند. پس گزینه ی ۱ به علت نداشتن منفی یک و گزینه ی چهارم به علت نداشتن عدد صفر رد میشوند!

حال از بین دو گزینه ی باقیمانده ی ۲ و ۳ به x ۲ می دهیم.

$$f(۲)=-\frac{۳}{۵} \overset{g}{\Rightarrow} g\left(-\frac{۳}{۵}\right)=\sqrt{-\frac{۳}{۵}-\frac{۹}{۲۵}}$$

خوب عبارت زیر رادیکال منفی شد . پس گزینه ی ۳ نیز نادرست است!

مثال۹۷- دو تابع $f=\{(۷,۳),(۵,۲),(۳,۶),(۹,۱),(۱,۴)\}$ **و** $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ **مفروض اند . اگر** $g^{-۱}\left(f^{-۱}(a)\right)=۸$ **باشد ,** a **کدام است؟(خارج تجربی ۹۶)**

۱) ۲　　　۲) ۳　　　۳) ۶　　　۴) ۷

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$g^{-۱}\left(f^{-۱}(a)\right)=۸ \;\Rightarrow\; f^{-۱}(a)=g(۸)=۷ \;\Rightarrow\; a=f(۷)=۳$$

مثال۹۸- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}+\sqrt[۳]{۲x-x^۲}$ عدد حقیقی باشد مجموعه ی مقادیر x در کدام بازه است؟(خارج تجربی ۹۶)

۱) $[\frac{۲}{۳} و ۲]$ ۲) $[-\frac{۲}{۳} و \frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۲}{۳} و ۰)\cup(۰ و ۲]$ ۴) $[-\frac{۲}{۳} و ۰)\cup(۰ و \frac{۲}{۳}]$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

راه حل اول:

$x=۰$ مخرج کسر $\frac{۲}{x^۲}$ را صفر می‌کند. پس نباید در دامنه باشد، لذا گزینهٔ «۲» غلط است. از طرفی $x=۲$ زیـر رادیکـال بـا فرجـهٔ ۴ را منفـی می‌کند، پس نباید در دامنه باشد. لذا گزینه‌های (۱) و (۳) غلط و در نتیجه گزینهٔ ۴ درست است.

راه حل دوم:

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\ge ۰ \Rightarrow \frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲}\ge ۰ \xrightarrow{۲x^۲>۰} ۴-۹x^۲\ge ۰ \Rightarrow ۹x^۲\le ۴ \Rightarrow x^۲\le\frac{۴}{۹} \Rightarrow -\frac{۲}{۳}\le x\le\frac{۲}{۳}$$

از طرفی عدد صفر مخرج کسر عبارت $\frac{۲}{x^۲}$ را صفر می‌کند، پس در دامنهٔ این تابع نیست. بنابراین دامنهٔ ایـن تـابع بـه‌صـورت $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$ است.

مثال۹۹- اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{۲+x}$ باشند , ضابطه ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۶)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-۱$ ۴) $x+۱$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$g(f(x))=\frac{۱-۳\left(\frac{۲x+۳}{۲-x}\right)}{۲+\left(\frac{۲x+۳}{۲-x}\right)}=\frac{\frac{-۷x-۷}{۲-x}}{\frac{۷}{۲-x}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=-x-۱$$

پاسخ تستی

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=۵ \Rightarrow g(f(۱))=g(۵)=-۲$$

حال توی کدوم گزینه به $x=۱$ بدهیم میشود ۲-؟ درسته! گزینه ی ۳

مثال۱۰۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$ با دامنه ی $R-\{۲\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟(خارج تجربی ۹۶)

۱) ۴- و ۱- ۲) ۴ و ۱- ۳) ۴- و ۱ ۴) ۴ و ۱

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

برای محاسبه ی نقاط تلاقی یک تابع با معکوس خود دیگر نیازی به محاسبه ی معکوس تابع که ممکن است فرایندی زمانبر و طولانی باشد , نیست!

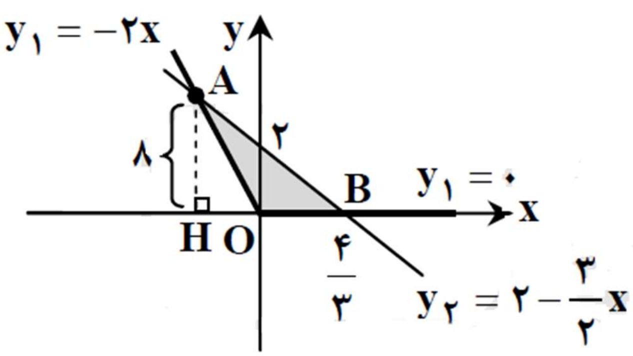
کافیست تابع داده شده را مساوی x قرار دهید!

$$\frac{x+۴}{x-۲}=x \xRightarrow{\text{گزینه ها را تست کنین}} ۴ \text{ و } -۱ \Rightarrow$$ فقط این دو عدد در تساوی داده شده صدق میکنند

مثال۱۰۱- مساحت ناحیه ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۳}$　　۲) ۴　　۳) $\frac{۱۶}{۳}$　　۴) ۶

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.



$$y_۱=|x|-x=\begin{cases}۰ & : \ x\ge ۰\\ -۲x & : \ x<۰\end{cases} \quad \text{و} \quad -۲x=۲-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow y=AH=۸$$

$$y=۲-\frac{۳}{۲}x=۰ \Rightarrow ۲=\frac{۳}{۲}x \Rightarrow x=\frac{۴}{۳} \Rightarrow B(\frac{۴}{۳},۰) \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{OB\times AH}{۲}=\frac{\frac{۴}{۳}\times ۸}{۲}=\frac{۱۶}{۳}$$

مثال۱۰۲- اگر $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^۲+۶x+۵$ باشند تابع $f(x)$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۵)

۱) $۲x^۲+۳x+۱$　　۲) $۲x^۲-۲x+۳$　　۳) $۲x^۲-x+۴$　　۴) $۲x^۲+x+۳$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f\big(g(x)\big) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow 2x + 1 = z$$

$$\Rightarrow x = \frac{z-1}{2} \Rightarrow f(z) = 8\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-1}{2}\right) + 5 = 2(z-1)^2 + 3(z-1) + 5 = 2z^2 - z + 4 \xrightarrow{x \to z}$$

$$f(x) = 2x^2 - x + 4$$

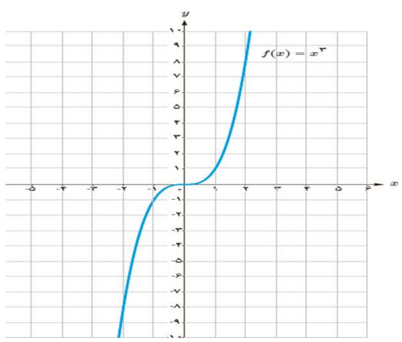
پاسخ تستی

$$x = 0 \Rightarrow f\big(g(0)\big) = +5 \xRightarrow{g(0)=1} f(1) = +5 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \text{گزینه ی ۱} \Rightarrow f(1) = +6 \quad \times \\ \text{گزینه ی ۲} \Rightarrow f(1) = +3 \quad \times \\ \text{گزینه ی ۳} \Rightarrow f(1) = +5 \quad \checkmark \\ \text{گزینه ی ۴} \Rightarrow f(1) = +6 \quad \times \end{array}\right.$$

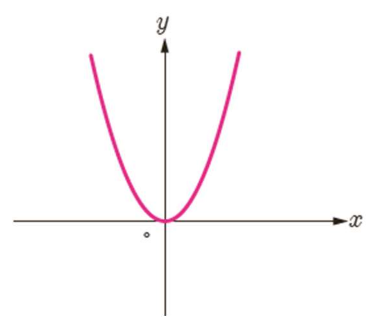
مثال۱۰۳- تابع با ضابطه ی $f(x) = |x^3|$ با دامنه ی $\mathbf{R}$ چگونه است؟(خارج تجربی ۹۵)

۱) نزولی **۲) صعودی** **۳) وارون ناپذیر** **۴) یک به یک**

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.



اکه ببری داخل قدرمطلق



همانطور که مشاهده میکنید هر خطی موازی محور افقی رسم کنیم نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع میکند . پس تابع یک به یک نیست و وارون ناپذیر خواهد بود!

مثال۱۰۴- نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = A(۲)^{Bx}$ و خط به معادله ی $۴y = ۵x$ در دو نقطه به طول های ۲ و ۴ متقاطع هستند . مقدار $f^{-۱}(۱۰)$ کدام است؟(خارج ریاضی ۹۵)

۱) ۳　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۸

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

با فرض $f(x) = A(۲)^{Bx}$ و $g(x) = \frac{۵}{۴}x$ داریم:

$$\begin{cases} f(۲) = g(۲) \Rightarrow A \times ۲^{۲B} = \frac{۵}{۲} \\ f(۴) = g(۴) \Rightarrow A \times ۲^{۴B} = ۵ \end{cases} \xrightarrow{\div} ۲^{۲B} = ۲ \Rightarrow B = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A = \frac{۵}{۴}$$

$$f(x) = \frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{۱}{۲}x} \xRightarrow{f^{-۱}(۱۰)} \frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{۱}{۲}x} = ۱۰ \Rightarrow (۲)^{\frac{۱}{۲}x} = ۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۳ \Rightarrow x = ۶$$

مثال۱۰۵- اگر $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ و $g(x) = \log(x^۲ - ۱۵x)$ باشند , دامنه ی تابع fog کدام است؟(خارج ریاضی ۹۵)

۱) $(۲۰, ۲۵] \cup [۵ و ۰)$　　۲) $[-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$　　۳) $(۱۵, ۲۰]$　　۴) $[-۵, ۰)$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی

$$f(x) = \sqrt{۲ - x} \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$
$$g(x) = \log(x^۲ - ۱۵x) \Rightarrow x^۲ - ۱۵x > ۰ \Rightarrow D_g : x < ۰ \text{ یا } x > ۱۵$$

بنابراین:

$$D_{fog}(x) = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} = \{x < ۰ \text{ یا } x > ۱۵ \,|\, \log(x^۲ - ۱۵x) \le ۲\} = \{x < ۰ \text{ یا } x > ۱۵ \,|\, x^۲ - ۱۵x \le ۱۰۰\}$$
$$= \{x < ۰ \text{ یا } x > ۱۵ \,|\, (x - ۲۰)(x + ۵) \le ۰\} = \{x < ۰ \text{ یا } x > ۱۵ \,|\, -۵ \le x \le ۲۰\} = [-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$$

پاسخ تستی

رد گزینه ی ۱

$x = ۵ \Rightarrow g(۵) = \log(-۵۰)$ لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده

رد گزینه ی ۳

$x = -۵ \Rightarrow g(-۵) = \log(۱۰۰) = ۱ \Rightarrow f(g(-۵)) = f(۱) = \sqrt{۲-۱} \Rightarrow$ پس عدد ۵ − مشکلی ندارد

گزینه ی ۳ به خاطر نداشتن این عدد رد میشود!

رد گزینه ی ۴

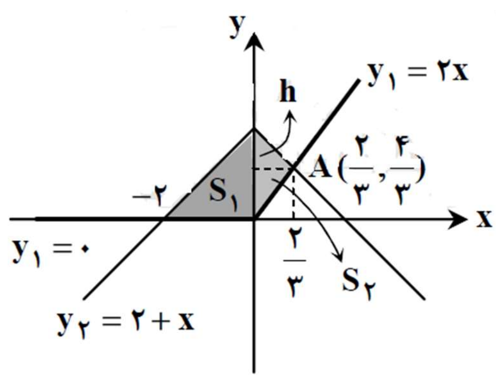
$x = ۲۰ \Rightarrow g(۲۰) = \log(۱۰۰) = ۱ \Rightarrow f(g(۲۰)) = f(۱) = \sqrt{۲-۱} \Rightarrow$ پس عدد ۲۰مشکلی ندارد

گزینه ی ۴ به خاطر نداشتن این عدد رد میشود!

مثال۱۰۶- مساحت ناحیه ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| + x$ و $y = ۲ - |x|$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) ۳

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.



$$y_۱ = |x| + x = \begin{cases} ۲x & : \quad x \geq ۰ \\ ۰ & : \quad x < ۰ \end{cases} \quad و \quad y_۲ = ۲ - |x| = \begin{cases} ۲ - x & : \quad x \geq ۰ \\ ۲ + x & : \quad x < ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

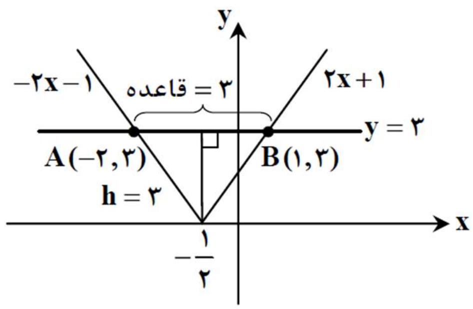
$$۲ - x = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \quad , \quad y = \frac{۴}{۳}$$

$$S_۱ = \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲ \ , \ S_۲ = \frac{۲ \times \frac{۲}{۳}}{۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow S_{کل} = S_۱ + S_۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

مثال۱۰۷- اگر $f(x) = x^۲ + x$ و $g(x) = \sqrt{۴x + ۱}$ باشند , مساحت ناحیه ی محدود به نمودارهای دو تابع gof و $y = ۳$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۵)

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۴.۵　　۴) ۶

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.



$$f(x) = x^۲ + x \quad , \quad g(x) = \sqrt{۴x+۱} \Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{۴f(x)+۱}$$

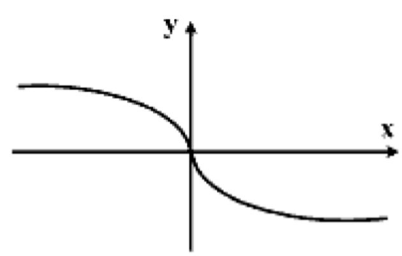
$$\Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{۴(x^۲ + x) + ۱}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{\underbrace{۴x^۲ + ۴x + ۱}_{(۲x+۱)^۲}} = |۲x+۱| = \begin{cases} ۲x+۱ & x \geq -\frac{۱}{۲} \\ -(۲x+۱) & x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

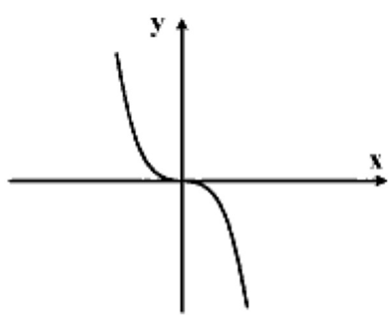
$$S = \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

مثال۱۰۸- اگر $f(x) = x|x|$ باشد , نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۵)

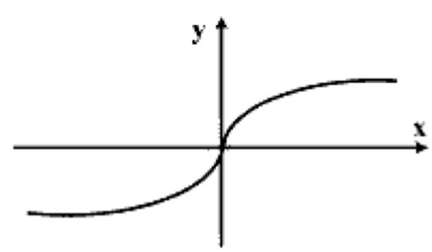
۱)



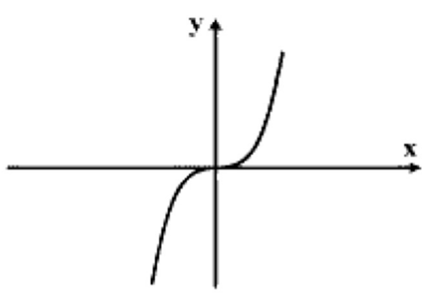
۲)



۳)

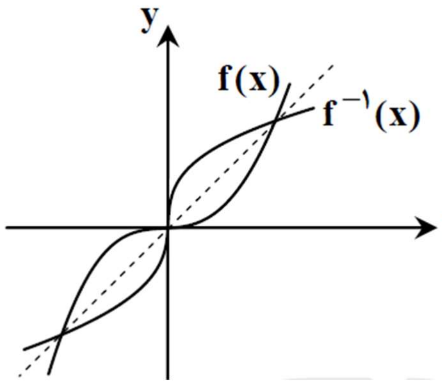


۴)



جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی



ابتدا تابع $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ را بـرای $x\geq 0$ و $x<0$ رسـم مـی‌کنـیم و سپس آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.

پاسخ تستی

طول نقطه بیشتر از عرض نقطه در تابع معکوس است $(2,4)\in f \Rightarrow (4,2)\in f^{-1}$

فقط گزینه ی ۳ اینگونه است!

مثال۱۰۹- نمودارهای دو تابع $f(x)=3^{ax+b}$ و $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع هستند . اگر $f(2)=\frac{1}{3}$ باشد , مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۵)

۱) ۳-　　۲) ۲-　　۳) ۱　　۴) ۳

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} 3^{-a+b}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \Rightarrow 3^{-a+b}=9 \Rightarrow -a+b=2 \\ 3^{-2a+b}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-2a+b}=3^{-1} \Rightarrow 2a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} -2a+2b=4 \\ 2a+b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow b=1 \ , \ a=-1$$

$$f(x)=3^{ax+b}=3^{-x+1} \xRightarrow{f^{-1}(27)} 3^{-x+1}=27 \Rightarrow -x+1=3 \Rightarrow x=-2$$

مثال۱۱۰- دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ به کدام صورت بازه ها است؟(سراسری ریاضی ۹۵)

۱) $[-2,0)\cup(3,5]$　　۲) $[-2,0]\cup(3,5)$　　۳) $[-2,3)$　　۴) $(0,5]$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

روش تشریحی

نکته: دامنهٔ تابع $\log u(x)$ برابر است با: $\{x \in D_{u(x)} \mid u(x) > 0\}$

اولاً:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < 0 \text{ یا } x > 3$$

ثانیاً:

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 3x \leq 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq x \leq 5$$

اشتراک دو حالت بالا به‌صورت $[-2,0) \cup (3,5]$ است.

رد گزینه ی ۲ و ۳

$$x = 5 \ \Rightarrow \ f(5) = \sqrt{1 - \log(10)} = 1 - 1 \ \Rightarrow$$ پس عدد ۵ مشکلی ندارد

گزینه ی ۲ و ۳ به خاطر نداشتن این عدد رد میشوند!

رد گزینه ی ۴

$$x = -2 \ \Rightarrow \ f(-2) = \sqrt{1 - \log(10)} = 1 - 1 \ \Rightarrow$$ پس عدد ۲ − مشکلی ندارد

گزینه ی ۴ به خاطر نداشتن این عدد رد میشود!

مثال۱۱۱- اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد , حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۵)

۱) $2x$　　۲) $\frac{2}{x}$　　۳) $x^2 - 1$　　۴) صفر

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، ابتدا x و y را جابه‌جا می‌کنیم. سپس مقدار y را بر حسب x به‌دست می‌آوریم. مقدار y جدید، ضابطهٔ تابع وارون است.

ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم:

$$x = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4}) \Rightarrow 2x = y + \sqrt{y^2 + 4} \Rightarrow 2x - y = \sqrt{y^2 + 4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x^2 - 4xy + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 4$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4 = 4xy \Rightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}$ است، پس:

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x}) = (x - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x} - x) = 0$$

روش تستی

رد گزینه ی ۱ و ۲ $f(۰) = ۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱) = ۰ \overset{\text{حال}}{\Rightarrow} f^{-۱}(۱) + f^{-۱}\left(\frac{۱}{۱}\right) = ۲f^{-۱}(۱) = ۲ \times ۰ = ۲$

رد گزینه ی ۳ $\left[\begin{array}{l} f\left(-\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۳}{۲} \\ f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = \frac{۳}{۲} \end{array}\right. \overset{\text{حال}}{\Rightarrow} f^{-۱}(۲) + f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

توجه داشته باشید که گزینه ی ۳ با قرار دادن **x** ۳ میشود نه صفر!

مثال۱۱۲- نمودار تابع $y = |۲x - ۶| - |x + ۴| + x$ در یک بازه اکیدا نزولی است . ضابطه ی معکوس آن در این بازه کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $-x + ۶ : x < -۴$

۲) $-x + ۵ : x > ۲$

۳) $-\frac{۱}{۲}x + ۱ : -۴ < x < ۳$

۴) $-\frac{۱}{۲}x + ۱ : -۴ < x < ۱۰$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی

اکیدا نزولی یعنی باید پس از تعیین علامت عبارات داخل قدرمطلق ضریب **x** منفی شود!

این اتفاق در بازه ای بین ریشه های داخل قدرمطلق روی می دهد. یعنی در بازه ی (۳ و ۴−)

$$y = |۲x - ۶| - |x + ۴| + x = -۲x + ۶ - x - ۴ + x = -۲x + ۲$$

$$y = -۲x + ۲ \Rightarrow x = \frac{y - ۲}{-۲} \Rightarrow y^{-۱} = -\frac{۱}{۲}x + ۱$$

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی $y^{-۱}$ کافی است برد y را محاسبه کنیم:

$$-۴ < x < ۳ \Rightarrow -۴ < -۲x + ۲ < ۱۰ \Rightarrow -۴ < y < ۱۰$$

بنابراین معکوس y در این بازه به صورت زیر است:

$$-\frac{۱}{۲}x + ۱ \ , \ -۴ < x < ۱۰$$

پاسخ تستی

در بازه ی (۳ و ۴−) یک عدد اختیار کنید. مثلا صفر!

رد گزینه ی ۱ و ۲ $f(۰) = ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = ۰ \Rightarrow$

با توجه به اینکه برد تابع اصلی دامنه ی تابع معکوس است ...

پس برد تابع بین ۴ − و ۱۰ است $\Rightarrow$ $f(۳) = -۴$ و $f(-۴) = ۱۰$

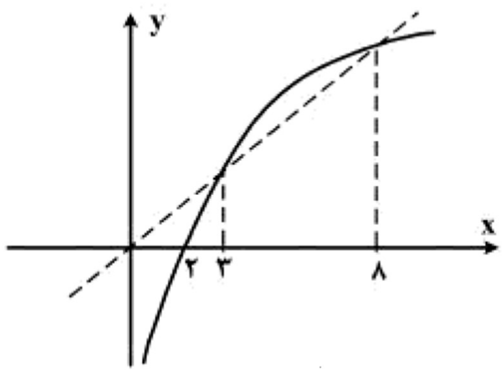
مثال۱۱۳- شکل روبه رو نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه ی اول و سوم است . دامنه ی تابع با ضابطه ی $\sqrt{x - f^{-۱}(x)}$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $(۰ , ۲]$

۲) $[۲ , ۳]$

۳) $[۲ , ۸]$

۴) $[۳ , ۸]$

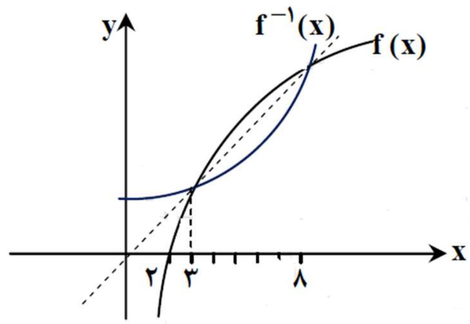


جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

برای رسم نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ کافیست نمودار تابع را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم .

همانطور که می دانیم برای محاسبه ی دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج کافیست عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x - f^{-۱}(x) \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x \geq f^{-۱}(x)$$



همانطور که مشاهده میشود قسمت هایی که نمودار $f^{-۱}(x)$ زیر نمودار $y = x$ قرار می گیرد فقط در بازه ی $[۳ , ۸]$ است.

مثال۱۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند , دامنه ی تابع fog کدام است؟(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی

نکته: دامنه‌ی تابع $y=\log_a x$ به‌صورت مقابل است: $x>۰\,,\,a>۰\,,\,a\neq ۱$

ابتدا ضابطه‌ی $fog(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$fog(x)=\sqrt{۳-\log_۲(x^۲+۲x)}$$

$$D_{fog}:\begin{cases} x^۲+۲x>۰ \\ ۳-\log_۲(x^۲+۲x)\geq ۰ \Rightarrow \log_۲(x^۲+۲x)\leq ۳ \Rightarrow x^۲+۲x\leq ۸ \Rightarrow x^۲+۲x-۸\leq ۰\end{cases}$$

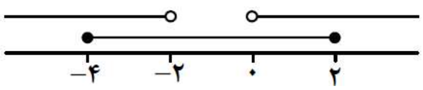
x		−۲		۰	
$x^۲+۲x$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow x\in(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)$ (۱)

x		−۴		۲	
$x^۲+۲x-۸$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow x\in[-۴,۲]$ (۲)

از اشتراک (۱) و (۲) داریم:



$[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

پاسخ تستی

رد گزینه ی ۱ و ۲

$x=۰ \Rightarrow g(۰)=\log_۲\big((۰)^۲+۲(۰)\big) \Rightarrow$ لگاریتم عدد صفر تعریف نشده است

گزینه ی ۱ و ۲ به خاطر داشتن این عدد رد میشوند!

رد گزینه ی ۳

$x=۱ \Rightarrow g(۱)=\log_۲\big((۱)^۲+۲(۱)\big)=\log_۲ ۳ \Rightarrow$ مشکلی ندارد

گزینه ی ۳ به خاطر نداشتن این عدد رد میشود!

مثال۱۱۵-تابع با ضابطه ی $y = x|x-2|$ در یک بازه نزولی است . ضابطه ی معکوس آن در این بازه کدام است؟(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $1-\sqrt{1+x}\ ;\ x<0$
۲) $1-\sqrt{1-x}\ ;\ x<1$
۳) $1+\sqrt{1-x}\ ;\ 0<x<1$
۴) $1-\sqrt{1-x}\ ;\ 0<x<1$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تستی

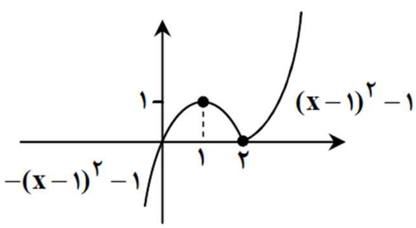
فقط گزینه ی ۳ $(0,2)\in f^{-1}$ ⇦ $(2,0)\in f$ ⇦ $y=-x^2+2x$ ⇦ نزولی بودن تابع

پاسخ تشریحی

ابتدا تابع y را بازه‌بندی می‌کنیم:

$$y=\begin{cases} x(x-2)=x^2-2x & ; \quad x\geq 2 \\ -x(x-2)=-x^2+2x & ; \quad x<2 \end{cases}$$

حال نمودار تابع y را رسم می‌کنیم تا مشخص شود در کدام بازه این تابع نزولی است.



$$y=\begin{cases} (x-1)^2-1 & ; \quad x\geq 2 \\ -(x-1)^2+1 & ; \quad x<2 \end{cases}$$

همان‌طور که از نمودار مشخص است تابع در بازه‌ی $(1,2)$ نزولی است.

مطابق شکل چون برد تابع در بازه‌ی $x\in(1,2)$ برابر $(0,1)$ می‌باشد، پس دامنه‌ی معکـوس برابر این بازه خواهد شد.

کافیست معکوس ضابطه‌ی دوم تابع را به دست آوریم:

$$y=-(x-1)^2+1 \Rightarrow y-1=-(x-1)^2 \Rightarrow 1-y=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{1-y}=|x-1| \xlongequal{x>1} x-1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-y}+1=x \Rightarrow y^{-1}=\sqrt{1-x}+1$$

مثال۱۱۶-تابع با ضابطه ی $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است . اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند , آنگاه نمودار تابع fog محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟(خارج ریاضی ۹۴)

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$
۲) ۹ و $\frac{1}{4}$
۳) ۴ و $\frac{1}{4}$
۴) ۴ و ۹

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$f(۶) = f(-\frac{۱}{۴}) = ۰$$

$$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = ۶ \\ x - \sqrt{x} = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حال هر یک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۳ \xrightarrow{x=t^۲} x = ۹ \checkmark$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow (t-\frac{۱}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=t^۲} x = \frac{۱}{۴} \checkmark$$

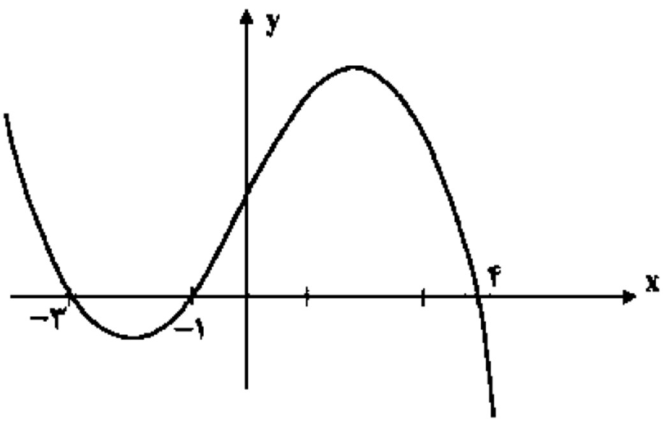
مثال۱۱۷-شکل روبه رو نمودار تابع $y = f(x-۲)$ است . دامنه ی تابع با ضابطه ی $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟(خارج تجربی ۹۴)

۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$



جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

ابتدا نمودار را باید ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا نمودار تابع **f** به دست آید.

$$x.f(x) \geq ۰$$

کاملا بدیهی ست پس از این انتقال باید نقاطی از نمودار که همزمان دارای طول مثبت بوده و نمودار بالای محور طول ها باشد یا نقاطی از نمودار که دارای طول منفی بوده و نمودار پایین محور طول ها باشد را به عنوان پاسخ تست درنظر گرفت.

این اتفاق فقط در بازه ی داده شده در گزینه ی ۴ رخ می دهد!

مثال۱۱۸-اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x)=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ باشند , دامنه ی تابع fog کدام است؟(خارج تجربی ۹۴)

۱) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تستی

رد گزینه ی ۳ و ۲

عدد صفر برای تابع مشکلی ایجاد نمی کند $x=۰ \;\Rightarrow\; g(۰)=۱ \;\Rightarrow\; f(۰)=۰$

گزینه ی ۲ و ۳به خاطر نداشتن این عدد رد میشوند!

رد گزینه ی ۴

$x=-\frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; g\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۲ \;\Rightarrow\; f(۲)=$ مخرج کسر صفر میشه

پاسخ تشریحی

$D_f : -x^۲+x+۲>۰ \Rightarrow$

		-۱		۲	
$-x^۲+x+۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow D_f=(-۱,۲)$

$D_g=\mathbb{R}$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{(\tfrac{۱}{۴})^x\in(-۱,۲)}_{(*)}\right\}$$

$$(*): \underbrace{-۱<(\tfrac{۱}{۴})^x}_{\text{همواره برقرار است}}<۲ \Rightarrow ۲^{-۲x}<۲^۱ \Rightarrow -۲x<۱ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین: $D_{fog}=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$

مثال۱۱۹-تابع با ضابطه ی $f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۱|$ در یک بازه صعودی است . ضابطه ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

(خارج تجربی ۹۴)

۱) $-x + ۷ \ ; x > ۸$ ۲) $\frac{۱}{۳}x + ۲ \ ; x > ۳$ ۳) $x + ۷ \ ; x > -۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}x - ۱ \ ; -۴ < x < ۸$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی

ابتدا به کمک بازه‌بندی، ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۱| = \begin{cases} -(۲x-۶)+(x+۱) & x \le -۱ \\ -(۲x-۶)-(x+۱) & -۱ < x < ۳ \\ (۲x-۶)-(x+۱) & x \ge ۳ \end{cases} = \begin{cases} -x+۷ & x \le -۱ \\ -۳x+۵ & -۱ < x < ۳ \\ x-۷ & x \ge ۳ \end{cases}$$

تنها ضابطه‌ی سوم شیب مثبت دارد. پس تابع به ازای $x \ge ۳$ ، صعودی است.

$$f(x) = x - ۷ \qquad (x \ge ۳, y \ge -۴)$$

$$\Rightarrow \ y = x - ۷ \ \Rightarrow \ y + ۷ = x \ \Rightarrow \ f^{-۱}(x) = x + ۷ \qquad (x \ge -۴, y \ge ۳)$$

دقت داریم که دامنه و برد تابع معکوس به ترتیب برد و دامنه‌ی تابع اولیه هستند.

پاسخ تستی

صعودی بودن تابع $\Rightarrow x > ۳ \Rightarrow y = x - ۷ \Rightarrow (۷, ۰) \in f \Rightarrow (۰, ۷) \in f^{-۱}$ گزینه ی ۳

مثال۱۲۰- نمودار تابع $y = \left|\frac{۱}{۲}x\right| - ۲$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟(سراسری تجربی ۹۳)

۱) -۳.۵ ۲) -۳ ۳) -۲.۵ ۴) -۲

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

طبق نکات گفته شده در متن درس , نمودار تابع به اندازه ی ۴ واحد به طولش افزوده و یک واحد از عرضش کاسته خواهد شد و چون نقطه ی تلاقی این نمودار مطلوب مساله است , می توان نوشت :

$$y = \left|\frac{۱}{۲}x\right| - ۲ \xrightarrow{\text{انتقال}} y - ۱ = \left|\frac{۱}{۲}(x + ۴)\right| - ۲ \ : \quad y = \left|\frac{۱}{۲}(x + ۴)\right| - ۱$$

حال با یکسان قرار دادن مقدار y دو نمودار خواهیم داشت :

$$\left|\frac{۱}{۲}x\right|-۲=\left|\frac{۱}{۲}(x+۴)\right|-۱\overset{\times ۲}{\Rightarrow}|x|-۴=|(x+۴)|-۲\rightarrow |(x+۴)|=|x|-۲$$

یادآوری :

$$|u|=|a|\quad\rightarrow\quad u=\pm a$$

$$|(x+۴)|=|x|-۲\quad:\quad x+۴=\pm(|x|-۲)\rightarrow\begin{cases}x+۴=|x|-۲ & : \quad |x|=x+۶\rightarrow x=\pm(x+۶)\\ x+۴=-|x|+۲ & : \quad |x|=-x-۲\rightarrow x=\pm(-x-۲)\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲x=-۶\rightarrow x=-۳\\ ۲x=-۲\rightarrow x=-۱\end{cases}\quad \text{ق ق} -۳$$

پاسخ تستی :

مطمئنا سر جلسه ی کنکور به هیچ عنوان این روش توصیه نمی شود و فقط با بازی با اعداد و رد گزینه ها به آسانی می توان به پاسخ مطلوب تست رسید.

نمودار تابع داده شده در صورت انتقال به صورت $y-۱=\frac{۱}{۲}|x+۴|-۲$ در خواهد آمد که فقط به ازای $x=-۳$ می باشد که مقدار دو تابع یکسان و برابر $-\frac{۱}{۲}$ می شود.

$$\begin{cases}y=\left|\frac{۱}{۲}x\right|-۲\\ y=\frac{۱}{۲}|x+۴|-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{امتحان گزینه ها}}\begin{bmatrix}\text{گزینه ی ۱} & : & x=-۳.۵ & : & -۰.۲۵=-۰.۷۵ & \times\\ \text{گزینه ی ۲} & : & x=-۳ & : & -۰.۵=-۰.۵ & \checkmark\\ \text{گزینه ی ۳} & : & x=-۲.۵ & : & -۰.۷۵=-۰.۲۵ & \times\\ \text{گزینه ی ۴} & : & x=-۲ & : & -۱=۰ & \times\end{bmatrix}$$

مثال۱۲۱- اگر نمودار تابع $f(x)=a(b^x)-۱$ از دو نقطه ی $B(۱,۱۱)$ ، $A\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ بگذرد , آن گاه $f(-۱)$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(۱)=۱۱\rightarrow ۱۱=ab-۱\rightarrow ab=۱۲\quad(۱)$$

$$f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}}-۱\rightarrow\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{۳}{۲}\rightarrow ۹b=۴a^۲\rightarrow b=\frac{۴a^۲}{۹}\quad(۲)$$

با جاگذاری نتیجه ی به دست آمده ی ۲ در ۱ خواهیم داشت :

$$ab = ۱۲ \quad \to a\left(\frac{۴a^{۲}}{۹}\right) = ۱۲ \to a^{۳} = ۲۷ \to a = ۳ \quad , \quad b = ۴$$

$$f(-۱) = \frac{a}{b} - ۱ = \frac{۳}{۴} - ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

پاسخ تستی :

$$f(۱) = ۱۱ \to ۱۱ = ab - ۱ \to ab = ۱۲$$

با این بخش از حل تست که مشکل ندارین؟

با توجه به اینکه مساله دو مجهول داره , من نمیخام از معلومات داده شده ی $A\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ استفاده کنم. چون حل مساله رو تا حدودی زمان گیر می کنه!

میام تمام جفت اعداد صحیح رو که ضربشون ۱۲ می شه رو درنظر میگیرم. (۱ و ۱۲ ‎ ‎ ۱- و ۱۲- ‎ ‎ ۲ و ۶ ‎ ‎ ۲- و ۶- ‎ ‎ ۳ و ۴ ‎ ‎ ۳- و ۴-)

خودتون اعداد داده شده در گزینه ها رو چک کنین , متوجه میشین چرا فقط صحیح؟و با یک نگاه سریع به راحتی می توانین بفهمین فقط دو عدد ۳ و ۴ چنین شرایطی رو دارن و سایر اعداد ما رو به هیچکدام از گزینه ها نزدیکتر نمی کنند!

$$\left(\begin{array}{l} a = ۴ \;, b = ۳ \;:\; f(-۱) = \frac{a}{b} - ۱ = \frac{۴}{۳} - ۱ = -\frac{۱}{۳} \\ a = ۳ \,, b = ۴ \;:\; f(-۱) = \frac{a}{b} - ۱ = \frac{۳}{۴} - ۱ = -\frac{۱}{۴} \end{array}\right. \to -\frac{۱}{۴} \;\checkmark$$

قبل از اینکه به سراغ تست بعدی بریم , باید اشاره کنم که این روش در توابع با ضابطه ی سخت خیلی مقرون به صرفه تر هستش و در این مساله شاید از نظر برخی از شما دوستان ,لزومی به استفاده ازش نباشه!

مثال۱۲۲- حاصل عبارت $\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right).\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ **کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۳)**

۱) $\sqrt{۳}$ ‎ ‎ ‎ **۲) ۲** ‎ ‎ ‎ **۳) ۱+$\sqrt{۳}$** ‎ ‎ ‎ **۴) $۲\sqrt{۳}$**

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی و تستی :

به یاد داشته باشید که در تست های به این شکل و برای محاسبه ی مقدار عبارات جبری , همواره سعی کنید توانی از عبارت جبری داده شده را محاسبه کنید که از تعداد رادیکال ها کاسته شود.

$$\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right).\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}} = \left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right).\sqrt[۳]{۲^{\frac{۳}{۲}}} = \left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right).\sqrt{۲} = ?$$

برای اینکه به پاسخ تست برسید می توانید با محاسبه ی توان دوم عبارت اولی حاصل آن را به دست آورده و سپس ازش جذر بگیرید.

$$\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right)^{۲}=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=۴+۲\sqrt{۴-۳}=۴+۲=۶\xRightarrow{\text{جذر}}\sqrt{۶}$$

$$\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right).\sqrt{۲}=\sqrt{۶}.\sqrt{۲}=\sqrt{۱۲=۴\times۳}=۲\sqrt{۳}$$

مثال۱۲۳- دو تابع با ضابطه های $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$ مفروض اند. اگر $(f^{-۱}og)(a)=۶$ باشد , a کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی:

$$(f^{-۱}og)(a)=۶\to f^{-۱}\big(g(a)\big)=۶\to g(a)=۲(۶)-۵=۱۲-۵=۷\to g(a)=۷\to a=۴$$

پاسخ تستی :

واقعا اصلا نیازی به دست به قلم بردن هست تواین تست؟

$$f^{-۱}\big(g(a)\big)=۶$$

یعنی چی؟یعنی اینکه اولا به ازای عدد ۶ مقدار تابع f میشه چند ؟ میشه ۷...بعد به ازای چه طولی از تابع g مقدار آن میشه ۷؟ ۴

مثال۱۲۴ - اگر $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^{x}$ باشد , دامنه ی تابع $y=\sqrt{x.f(x)}$ کدام بازه است؟(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(-\infty,\infty)$ ۴) $(۰,\infty)$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی و تستی :

تستی کاملا مشابه تست پارسال که البته تست سال گذشته در قالب نمودار مطرح گردیده بود.

همانطور که می دانیم برای محاسبه ی دامنه ی توابع رادیکالی باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم. یعنی :

$$x.f(x)\ge ۰$$

با توجه به اینکه دامنه ی به دست آمده باید همه ی نقاط تعریف شده در تابع را تحت پوشش قرار دهد :

رد گزینه ی ۱ – با اختیار $x = -۲$, خواهیم داشت :

$$-۲f(-۲) = -۲\left(۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\right) = -۲(۱ - ۴) = -۲(-۳) = ۶ \geq ۰$$

پس این گزینه نادرست است. زیرا به ازای همه ی مقادیر منفی تابع عبارت زیر رادیکال هواره بزرگتر مساوی صفر می شود.

رد گزینه ی ۲ – این گزینه شامل مقادیر مثبت نمی شود.در حالی که به ازای همه ی مقادیر مثبت نیز تابع هیچ مشکلی ندارد. زیرا مقدار عبارت $f(x) = ۱ - (\frac{۱}{۲})^x$ به ازای همه ی مقادیر مثبت نیز , مثبت بوده و در نتیجه حاصل $x.f(x)$ همواره بزرگتر مساوی صفر خواهد بود.

رد گزینه ی ۴ – این گزینه نیز فقط مقادیر مثبت را شامل می شود و نادرست است.

مثال۱۲۵- اگر $g(x) = ۲x - ۳$ و $(fog)(x) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵)$ باشند , تابع $f(x)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $x^۲ - ۴x + ۳$ ‌ ‌ ۲) $x^۲ - ۴x + ۵$ ‌ ‌ ۳) $x^۲ - ۲x + ۵$ ‌ ‌ ۴) $x^۲ - ۲x + ۳$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۲x - ۳) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵) \xRightarrow{۲x-۳=z \ :\ x=\frac{z+۳}{۲}} f(z) = ۴\left((\frac{z+۳}{۲})^۲ - ۴(\frac{z+۳}{۲}) + ۵\right)$$

$$= ۴\left(\frac{z^۲ + ۶z + ۹}{۴} - ۴(\frac{z+۳}{۲}) + ۵\right) = z^۲ + ۶z + ۹ - ۸(z + ۳) + ۲۰ = z^۲ - ۲z + ۵ \xRightarrow{z\to x} x^۲ - ۲x + ۵$$

روش تشریحی تست طولانی ست .

پاسخ تستی :

با اختیار $x = ۰$ داریم :

$$f(g(۰)) = ۲۰ \ , \qquad g(۰) = -۳ \xRightarrow{\text{در نتیجه}} f(-۳) = ۲۰$$

تنها گزینه ای که این شرایط را دارد گزینه ی ۳ است.مقدار $f(-۳)$ در گزینه ی ۱ , ۲۴ - در گزینه ی ۲ , ۲۶ - در گزینه ی ۳ , ۲۰ و در گزینه ی ۴ , ۱۸ می باشد.

مثال۱۲۶ - اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, دامنه ی تابع $f(3-x)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) [۰ و ۲] ۲) [۰ و ۳] ۳) [۱ و ۲] ۴) [۱ و ۳]

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x)=\sqrt{2x-x^2}\xrightarrow{x\to 3-x}f(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}=\sqrt{6-2x-(9-6x+x^2)}=$$

$$=\sqrt{6-2x-9+6x-x^2}==\sqrt{-x^2+4x-3}$$

برای تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج , همانطور که گفته شد , عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم :

$$-x^2+4x-3\geq 0\xrightarrow{\times -1}x^2-4x+3\leq 0\to (x-3)(x-1)\geq 0\to x=1\,,3$$

و بالاخره با تعیین علامت , بازه ای که در آن مقادیر تابع بزرگتر یا مساوی صفر است را به عنوان جواب تست انتخاب می کنیم

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
				ج			

البته یه چیزی رو هم مدنظر قرار بدین و اونم اینکه در این تست فقط ضابطه ی تابع رو که مشخص کردین دیگه با مشخص کردن ریشه های آن , جواب تست نیز مشخص می شه..!

چون اصلا بازه ها همشون متفاوت از هم هستند و نیازی به تعیین علامت نیست.

روش دوم :(تستی)

همون اول ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم :

$$2x-x^2\geq 0\to x(2-x)\geq 0\to 0\leq x\leq 2\xrightarrow{\times -1}-2\leq -x\leq 0\xrightarrow{+3}1\leq 3-x\leq 3$$

اگر به x صفر بدیم , $x-3$ میشه ۳... پس عدد ۳ باید تو دامنه باشه. اما گزینه ی ۱ و ۳ شامل این عدد نیستند. پس نادرست هستند.

مثال۱۲۷-اگر $f(x) = (۲x - ۳)^۲$ و $g(x) = x + ۲$ باشد , نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع اند؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

کاملا مشخص است که برای دستیابی به جواب تست , باید ضابطه ی تابع fog را به دست آورده و با تابع f قطع دهیم :

$$fog(x) = f(g(x)) = (۲(x+۲) - ۳)^۲ = (۲x + ۴ - ۳)^۲ = (۲x+۱)^۲$$

$$fog(x) = f(x) \to (۲x+۱)^۲ = (۲x-۳)^۲ \to ۲x+۱ = \left| \begin{array}{l} ۲x - ۳ \to ۱ = -۳ \to \text{نتیجه ی نادرست} \\ -(۲x-۳) = -۲x + ۳ \to ۴x = ۲ \end{array} \right.$$

$$x = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

بعضی وقتا یه سری از تستا اونقدر آسون هستن که دیگه جواب تستی براشون بی معنی میشه!

اما تو این تست هم میتونین اعداد داده شده در گزینه ها رو تو رابطه ی $(۲x+۱)^۲ = (۲x-۳)^۲$ چک کنید.با این وجود باز هم میتونین با بازی با اعداد و امتحان کردن گزینه ها به پاسخ تست برسید. به این شکل که :

پاسخ تستی :

$$f(g(x)) = f(x) \xrightarrow{\text{چک کردن گزینه ها}} \begin{cases} -۱ : f(g(-۱)) = f(-۱) : f(۱) = f(-۱) : ۱ = ۲۵ \times \\ \frac{۱}{۲} : f\left(g\left(\frac{۱}{۲}\right)\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) : f\left(\frac{۵}{۲}\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) : ۴ = ۴ \checkmark \\ ۱ : f(g(۱)) = f(۱) : f(۳) = f(۱) : ۹ = ۱ \times \\ \frac{۳}{۲} : f\left(g\left(\frac{۳}{۲}\right)\right) = f\left(\frac{۳}{۲}\right) : f\left(\frac{۷}{۲}\right) = f\left(\frac{۳}{۲}\right) : ۱۶ = ۰ \times \end{cases}$$

مثال۱۲۸-ضابطه ی معکوس تابع $y = ۲ - \sqrt{x - ۱}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) $y = x^۲ - ۴x + ۵ : x \le ۲$

۲) $y = -x^۲ + ۴x - ۵ : x \le ۲$

۳) $y = x^۲ - ۴x + ۵ : x \ge ۱$

۴) $y = -x^۲ + ۴x - ۵ : x \ge ۱$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

همانطور که می دانیم برای به دست آوردن معکوس یک تابع , باید ابتدا x را تنها کرده و سپس جای x و y را عوض می کنیم تا ضابطه ی تابع معکوس به دست آید.گرچه در برخی موارد هم امکان انجام چنین کاری و محاسبه ی تابع معکوس بسیار سخت می باشد :

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \rightarrow \sqrt{x - ۱} = ۲ - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x - ۱ = (۲ - y)^{۲} \rightarrow x = (۲ - y)^{۲} + ۱$$

$$x = ۴ + y^{۲} - ۴y + ۱ = y^{۲} - ۴y + ۵ \xrightarrow[y \to x]{x \to f^{-۱}(x)} f^{-۱}(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$$

یکی از گزینه های ۱ و ۳ صحیح است و برای تشخیص گزینه ی صحیح باید دامنه ی تابع معکوس را به دست آورد.

برای این کار می توان برد تابع اصلی را به دست آورد و طبق ویژگی های اشاره شده در مورد تابع معکوس , برد تابع اصلی را دامنه ی تابع معکوس در نظر گرفت.

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \rightarrow D_f = x \geq ۱$$

داوطلبان عزیز توجه داشته باشند که کاملا مشخص است که برد این تابع , $[-\infty , ۲]$ است.

کاملا مشخصه دیگه...مقدار تابع رو به ازای دامنه ی تابع به دست بیارین.قشنگ متوجه می شین که مقدار تابع هرگز از ۲ بیشتر نمیشه و به سمت منفی بی نهایت میل می کنه.

$$\begin{cases} x = ۱ \rightarrow y = ۲ \\ x = ۲ \rightarrow y = ۱ \\ x = ۵ \rightarrow y = ۰ \\ x = ۱۰ \rightarrow y = -۱ \\ \quad ... \end{cases}$$

پاسخ تستی : (توصیه می کنم که همه ی تست های تابع معکوس را به همین روش حل کنید.)

با توجه به ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی ۱۵ :

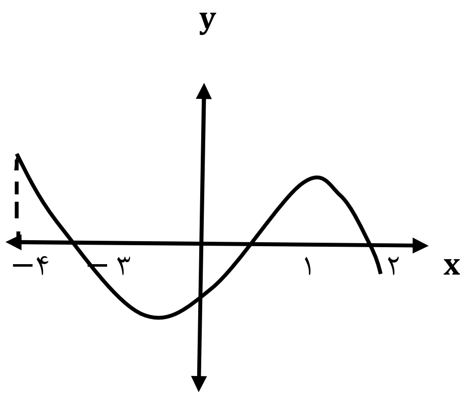
یک نقطه را با توجه به دامنه ی آن انتخاب می کنیم:

$$(x , y) \rightarrow (۱ , ۲) \in f \rightarrow (۲ , ۱) \in f^{-۱}$$

همانطور که مشاهده می کنید , با یک نقطه دادن , دو گزینه ی ۲ و ۴ نادرست تشخیص داده شدند. زیرا نقطه ی (۱ و ۲) که متعلق به تابع معکوس باید باشد در ضابطه ی توابع معکوسی که در دو گزینه ی یاد شده آورده شده است صدق نمی کند.

حال با توجه به اینکه ضابطه ی دو تابع داده شده در گزینه ی ۱ و ۳ کاملا یکسان می باشد , تشخیص گزینه ی درست بین این دو گزینه , باید به همان روشی که در پاسخ تشریحی اشاره شد بهش عمل کنیم.

مثال۱۲۹-شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است.دامنه ی تابع $\sqrt{x.f(x)}$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲)



۱) $[۰ \text{ و } ۲]$

۲) $[-۳ \text{ و } ۲]$

۳) $[-۴ \text{ و } -۳] \cup [۱ \text{ و } ۲]$

۴) $[-۳ \text{ و } ۰] \cup [۱ \text{ و } ۲]$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

یک تست بسیار هوشمندانه و جالب که به خوبی ذهن یک دانش آموز رو به چالش می کشه.

نمی دونم چرا بیشتر داوطلبان رشته ی ریاضی در کمال ناباوری بی خیال این تست شده بودند؟!

شاید از ظاهر تست ترسیده بودند!

اما واقعا با کمی تفکر به راحتی و بدون اینکه اصلا نیازی به دست بردن به قلم باشه می توان به این تست پاسخ داد...

ابتدا ببینیم منظور تست چیه؟اگه دقت کنید شما برای اینکه به جواب تست برسید باید ببینین که تابع $\sqrt{x.f(x)}$ در چه بازه ای از دامنه ی داده شده تعریف شده است....یعنی ما باید نقاط و بازه هایی را که در آن این تابع داده شده به مشکل می خوره رو از بازه ی $[-۴ \text{ و } ۲]$ جدا کنیم.

بچه ها دقت کنید.من از ابتدای بازه شروع می کنم به بررسی...

$$-۴ \le x < -۳ \ , f(x) > ۰ \to x.f(x) < ۰ \to \sqrt{x.f(x)} \to \text{تعریف نشده}$$

$$-۳ \le x \le ۰ \ , f(x) \le ۰ \to x.f(x) \ge ۰ \to \sqrt{x.f(x)} \ge ۰ \ \text{تعریف شده}$$

$$۰ < x < ۱ \ , f(x) < ۰ \to x.f(x) < ۰ \to \sqrt{x.f(x)} \to \text{تعریف نشده}$$

$$۱ \le x \le ۲ \ , f(x) \ge ۰ \to x.f(x) \ge ۰ \to \sqrt{x.f(x)} \ge ۰ \ \text{تعریف شده}$$

خدایی تست بسیار آسونی بود.

یه چیزیو به یاد داشته باشید...اونم اینه که همیشه تست هایی که ظاهر خفنی دارن, خیلی آسون حل می شن!

مثال۱۳۰-اگر $f(x)=\mathrm{Max}\{|۲x|\ ,|x+۱|\}$, آن گاه می نیمم تابع $f(x)$ کدام است؟((سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

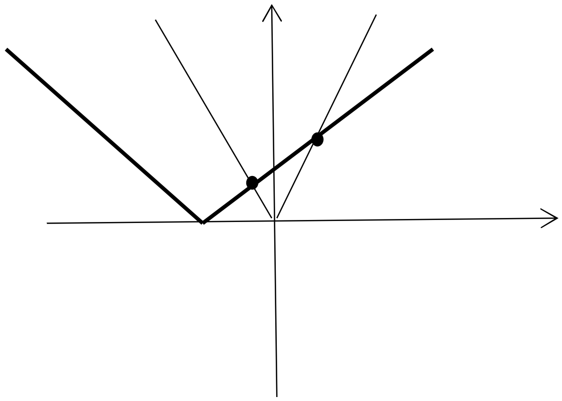
جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی و تستی :

کافی ست نقاط تقاطع دو تابع را مشخص کنیم :

$$|۲x| = |x+۱| \to ۲x = \pm(x+۱) \to x = ۱ , -\frac{۱}{۳} \quad : \quad f(۱) = ۲ \ , \ f\left(-\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۲}{۳} \quad \min$$

توصیه می شود برای درک بهتر مساله نمودار دو تابع داده شده را رسم نمائید.



مثال۱۳۱-اگر $f(x) = ۲x + ۳$ و $g\big(f(x)\big) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$ باشند , ضابطه ی تابع fog کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $۲x^۲ - ۷x + ۳$ ۲) $۲x^۲ - ۳x + ۷$ ۳) $۴x^۲ - ۲x + ۱۳$ ۴) $۴x^۲ - ۴x + ۱۱$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید ضابطه ی تابع $g(x)$ **به** دست آورد :

$$g\big(f(x)\big) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰ \to g(۲x+۳) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$$

حال با تغییر متغیر $۲x + ۳ \to z$ خواهیم داشت :

$$۲x + ۳ = z \to ۲x = z - ۳ \to x = \frac{z-۳}{۲} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} g(۲x+۳) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$$

$$\xrightarrow{\text{با اعمال تغییر متغیر}} g(z) = ۸\left(\frac{z-۳}{۲}\right)^۲ + ۲۲\left(\frac{z-۳}{۲}\right) + ۲۰ = ۲(z^۲ - ۶z + ۹) + ۱۱(z-۳)$$

$$+۲۰ = ۲z^۲ - z + ۵ \to g(x) = ۲x^۲ - x + ۵$$

حال می توان تابع fog را نیز محاسبه نمود :

$$fog(x) = f(g(x)) = f(۲x^۲ - x + ۵) = ۲(۲x^۲ - x + ۵) + ۳ = ۴x^۲ - ۲x + ۱۳$$

پاسخ تستی :

من که به هیچ وجه توصیه نمی کنم این همه راه برین و آخرش هم به جواب نرسین...بچه ها یه چیزی بگم.توی حل تست ها سعی کنید با اعداد زیاد بازی کنین.منظورمو که متوجه می شین؟میگم برای درستی یا رد گزینه ها و رسیدن به پاسخ صحیح تست ها با اعداد بازی کنین و سعی کنین به این روش مسلط شین.

با دقت توجه کنین که برای حل تست من چیکار می کنم؟توجه داشته باشید که تمام اعداد اشاره شده در اینجا تصادفی هستند و من فقط سعی کرده ام که اعداد راحت و آسان رو انتخاب کنیم.اعدادی که محاسبات رو آسانتر کنه.

میام به $x = ۰$ میدم.چی میشه؟$f(۰) = ۳$. و $g(f(۰)) = ۲۰$ در نتیجه $g(۳) = ۲۰$...تا اینجا درسته؟

خوب میایم حال $f\big(g(۳)\big) = (fog)(۳) = f(۲۰) = ۲(۲۰) + ۳ = ۴۳$ را محاسبه می کنیم و سپس با چک کردن گزینه ها , به پاسخ صحیح تست می رسیم.

$$۱ \to (fog)(۳) = ۰ \qquad\qquad ۲ \to (fog)(۳) = ۱۶$$

$$۳ \to (fog)(۳) = ۴۳ \qquad\qquad ۴ \to (fog)(۳) = ۳۵$$

البته این نوع حل کردن و پاسخ دادن به تست ها رو شاید تا حالا ندیده باشید.اما من که شاگردای خصوصی خودم همیشه از این روش استفاده می کنند.خوب بالاخره سرعت عمل داشتن از مهم ترین ویژگی هایی که یک داوطلب کنکور باید داشته باشه.

مثال۱۳۲-تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۱$ با دامنه ی $(-۱ , +\infty)$ مفروض است.نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیر متقاطع

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید ضابطه ی تابع معکوس را به دست بیاوریم.

$$F(x) = x^۲ + ۲x + ۱ \to y = (x+۱)^۲ \to x + ۱ = \pm\sqrt{y} \to x = -۱ + \pm\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{x \to f^{-۱} \\ y \to x}}$$

$$f^{-۱}(x) = -۱ \pm \sqrt{x}$$

حال باید دو تابع $f\ ,\ f^{-۱}$ را قطع دهیم :

$$(x+۱)^۲ = -۱ \pm \sqrt{x} \ \to \text{نقطه تقاطع ندارند.}$$

کاملا مشخص است که دو تابع غیرمتقاطع هستند.چرا؟زیرا همانطور که مشاهده می شود تابع f هرگز منفی نمی شود و نهایتا صفر شود.اما تابع معکوس هرگز نمی تواند مقداری مثبت داشته باشد.فقط به ازای $x = -۱$ صفر می شود که در تابع f چنین شرایطی برقرار نیست و مقدار تابع f به ازای $x = -۱$, صفر می گردد.پس این نقطه هم نمی تواند نقطه ی تلاقی دو تابع باشد.زیرا این نقطه اصلا در دامنه ی تابع معکوس وجود ندارد.

پاسخ تستی (۱) :

ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی ۵ را به یاد آورده و با چند نقطه چک کردن کاملا مشخص می شود این دو نقطه تلاقی ندارند.گرچه استفاده از این روش در این تست را توصیه نمی کنم.زیرا با محدودیت زمان برای چک کردن نقاط روبرو هستیم و گزینه ای هم نداریم که رد کنیم.پس همون روش تشریحی که گفته شد برای پاسخ تست مناسب تر است.سخت هم نبود انصافا.

پاسخ تستی(۲) :(توصیه ی من اینه که حتما از این روش استفاده کنید.)

نکته ی گفته شده در شماره ی ۲۰ را به خاطر بیاورید.(قطع تابع با نیمساز ربع اول و سوم)

$$x^۲ + ۲x + ۱ = x \to x^۲ + x + ۱ = ۰ \to \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱^۲ - ۴(۱)(۱) = -۳ < ۰$$

یعنی هیچ ریشه ی حقیقی نداشته و تابع f با تابع معکوس خود یعنی $f^{-۱}$, هیچ نقطه ی تلاقی ندارد.

توجه داشته باشید که امکان ندارد تابعی با تابع معکوس خود نقاط تلاقی داشته باشد و خط $y = x$ شامل این نقطه تلاقی نباشد.. اما ممکن است تابع با معکوس خود علاوه بر نیمساز ربع اول و سوم در نقاط دیگری نیز همدیگر ا قطع کنند.

پس زمانی که نقاط تلاقی خواست تنها نمی توان به این نکته بسنده کرد. اما مطمئن باشید که اگر تابع با تابع معکوس خود روی خط نیمساز ربع اول و سوم نقطه ی اشتراک نداشته باشند , نقطه ی تلاقی دیگه ای نیز ندارند.

مثال۱۳۳-اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(۱,۲), (۵,۴), (۶,۵),, (۲,۳)\}$ و $g(f(a)) = ۵$ باشد , a کدام است(سراسری تجربی ۹۱)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$g(?) = ۵ \to f(a) = ۶ \to x + \sqrt{x} = ۶ \to x = ۴ \to a = ۴$$

مثال۱۳۴-در تابع با ضابطه ی $f(x) = a.b^x : b > ۰$ داریم , $f(۰) = \frac{۳}{۲}$, $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$ مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۱)

۱) ۶　　۲) ۸　　۳) ۱۲　　۴) ۲۴

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

$$f(\cdot) = \frac{۳}{۲} \to a = \frac{۳}{۲} \quad , f(-۲) = \frac{۳}{۳۲} \to \frac{۳}{۲}b^{-۲} = \frac{۳}{۳۲} \to b^{-۲} = \frac{۱}{۱۶} \to b^{۲} = ۱۶ \to b = \pm ۴$$

$$b = ۴ \text{ ق ق } \to f\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳}{۲}.۴^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۴^{۳}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲^{۶}} = \frac{۳}{۲}۲^{۳} = ۱۲$$

مثال۱۳۵-ضابطه ی وارون تابع $y = \frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۱)

۱) $y = \frac{x}{۱-|x|} : |x| < ۱$

۲) $y = \frac{۱-|x|}{|x|} : |x| > ۱$

۳) $y = \frac{x}{|x|-۱} : |x| > ۱$

۴) $y = \frac{|x|-۱}{x} : |x| < ۱$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

می توان تابع را به صورت دو ضابطه ای نوشت و وارون تابع را محاسبه نمود.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{۱+x} : & x \geq \cdot \\ \dfrac{x}{۱-x} : & x < \cdot \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{۱+x} \to y + yx = x \to x(۱-y) = y \to f^{-۱}(x) = \dfrac{x}{۱-x} \\ y = \dfrac{x}{۱-x} \to y - yx = x \to x(۱+y) = y \to f^{-۱}(x) = \dfrac{x}{۱+x} \end{array}\right\} \to f^{-۱}(x) = \frac{x}{۱-|x|}$$

پاسخ تستی :

طبق ویژگی اشاره شده در مورد توابع معکوس , می دانیم که اگر $(a,b) \in f \to (b,a) \in f^{-۱}$

گزینه ی ۲ و ۴ به شکل واضحی $\to$ $(\cdot,\cdot) \in f \to (\cdot,\cdot) \in f^{-۱}$

نادرست است.چون اصلا عدد صفر را نمیتوان برای تابع معکوس اختیار کرد .

گزینه ی ۳ نیز نادرست است. $\left(۱,\frac{۱}{۲}\right) \in f \to \left(\frac{۱}{۲},۱\right) \in f^{-۱}$

مثال۱۳۶-اگر $g(x) = ۲x - ۱$ و $fog(x) = \frac{x}{x-۳}$ مقدار $f(۳)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) ۴-

۲) ۲-

۳) ۲

۴) ۴

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(۲x - ۱) = \frac{x}{x - ۳} \xrightarrow{x=۲} f(۳) = \frac{۲}{۲ - ۳} = -۲$$

مثال۱۳۷-با کدام ضابطه ی $f(x)$, همواره تساوی $|f(x)| = (-۱)^{[x]}.f(x)$ برقرار است؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\sin\pi x$　　۲) $\cos\pi x$　　۳) $\sin ۲\pi x$　　۴) $\cos ۲\pi x$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

برای اینکه به پاسخ این تست برسیم , باید علامت جزء صحیح x را مبنا قرار دهیم :

$$[x]_{\text{فرد}} \to -f(x) = |f(x)| \to f(x) < ۰$$
$$[x]_{\text{زوج}} \to \quad f(x) = |f(x)| \to f(x) \geq ۰$$

کاملا مشخص است که تنها تابعی که ویژگی های فوق را داراست تابع گزینه ی (۱) هستش.

مثال۱۳۸-تابع با ضابطه ی $f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$ با دامنه ی $\{x :\ |x - ۱| < ۲\}$ همواره چگونه است؟(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) منفی　　۲) مثبت　　۳) صعودی　　۴) نزولی

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$|x - ۱| < ۲ \to -۲ < x - ۱ < ۲ \to -۱ < x < ۳ \to -۲ < x - ۱ < ۲ \to$$
$$(x - ۱)^۲{}_{max} < ۴ \ \to (x - ۱)^۲ - ۴ < ۰$$
$$x^۲ - ۲x - ۳ = (x - ۱)^۲ - ۴$$

پاسخ تستی :

دامنه ی تابع با توجه به رابطه ی $|x - ۱| < ۲$ به شکل واضحی معلوم است که فقط اعداد ۰ و ۱ و ۲ مورد قبول هستند.

اگه به تابع صفر بدیم , مقدارش ۳- , به ازای عدد ۱ مقدارش ۴- و به ازای عدد ۲ مقدارش ۳- می شود.چی برداشت می کنین؟مثبت!؟صعودی؟نزولی؟

به این واژه ها اصلا میشه فکر کرد؟

مثال۱۳۹-اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $\xrightarrow{x} f \to g \to ۲x$ باشند , و $g(x) = ۳x + ۴$, مقدار $f(۵)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

همانطور که از تابعی که به صورت ماشین داده شده میشه فهمید :

$$g(f(x)) = ۲x \to g(f(۵)) = ۱۰ \to ۳f(۵) + ۴ = ۱۰ \to ۳f(۵) = ۶ \to f(۵) = ۲$$

مثال۱۴۰-ضابطه ی وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & x < ۰ \end{cases}$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱) $y = x|x| : x \in R$ ۲) $y = x^۲ : x < ۰$

۳) $y = \pm x^۲ : x \in R$ ۴) $y = \pm x|x| : x \in R$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تستی :

دیگه نحوه ی به دست آوردن تابع معکوس حتما دستتون اومده...با وجود این باز هم توصیه ی اکید دارم که از روش رد گزینه استفاده کنید.

از آن جایی که تابع داده شده وارون پذیر می باشد , باید وارون آن نیز یک تابع باشد.

گزینه های ۳ و ۴ که اصلا تابع یک به یک نیستند و کاملا غلط می باشند.با رسم نمودار تابع و معکوس آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم می توان دریافت که تنها گزینه ی ۱ این شرایط را داراست.(خودتون نمودار رو رسم و این مطلب رو چک کنید.)

پاسخ تستی :

گزینه ی ۲ نادرست است.چون اصلا صفردر دامنه ی تابع معکوس وجود ندارد. $(۰,۰) \in f \to (۰,۰) \in f^{-۱}$

رد گزینه ی ۳ و ۴ $(-۱,-۱) \in f \to (-۱,-۱) \in f^{-۱} \to$

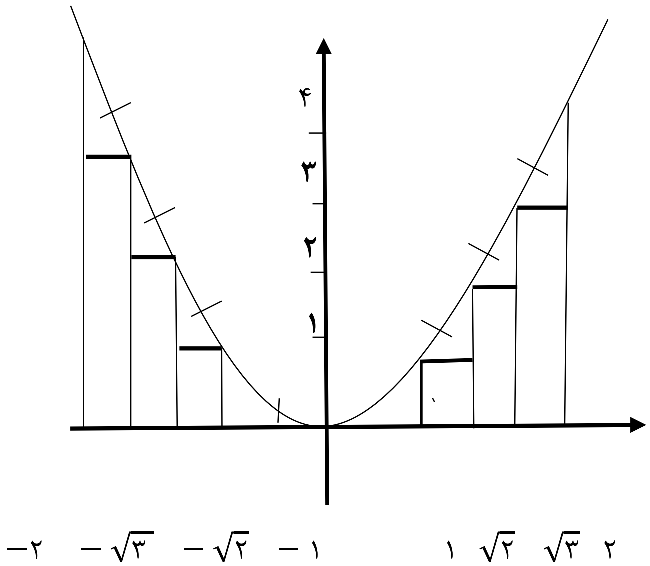
صحت کامل گزینه ی ۱ را با تست کردن چند نقطه ی دیگر نیز می توانید مطمئن باشید.

مثال۱۴۱-نمودار تابع $y = [x^۲]$ در بازه ی (۲ و ۲-) از چند پاره خط تشکیل شده است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

با رسم نمودار کاملا می توان به پاسخ صحیح تست دست یافت :



مثال۱۴۲-اگر $f(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$, تابع $(f(\sqrt{x}))^۲ - f(x)$ چگونه است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ثابت　　۲) همانی　　۳) فرد　　۴) یک به یک

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲ + \frac{۱}{(\sqrt{x})^۲} = x + \frac{۱}{x} \to (f(\sqrt{x}))^۲ = \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲(x)\left(\frac{۱}{x}\right) =$$

$$x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲ \to (f(\sqrt{x}))^۲ - f(x) = ۲$$

پاسخ تستی :

تو تابع $f(x)$ به x عدد یک اگر بدهیم , مقدار تابع برابر ۲ می شود. اگر این کار را در تابع $(f(\sqrt{x}))^۲ - f(x)$ نیز انجام دهیم :

$$(f(۱))^۲ - f(۱) = ۴ - ۲ = ۲$$

مثال۱۴۳-در تابع با ضابطه ی $x^{۲} \neq ۱ \; : \; f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{۱ - x^{۲}}$ و $f(۰) = ۰$ ضابطه ی وارون آن برابر کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $x.f(x)$ ۴) $-x.f(x)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

با توجه به تعریف تابع f در صورت سوال می توان دید که f یک تابع دو ضابطه ای است.یعنی اینکه :

$$\begin{cases} x > ۰ \; \rightarrow f(x) > ۰ \\ x < ۰ \; \rightarrow f(x) < ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{۱ - x^{۲}} \\ -\sqrt{۱ - x^{۲}} \end{cases}$$

با توجه به اینکه ترکیب هر تابع با وارون خود در صورت وجود البته تابع همانی $(y = x)$ است نیز می توان به پاسخ صحیح تست رسید.

$$y = \sqrt{۱ - x^{۲}} \rightarrow y^{۲} = ۱ - x^{۲} \rightarrow x^{۲} = ۱ - y^{۲} \rightarrow x = \pm\sqrt{۱ - y^{۲}} \rightarrow f^{-۱}(x) = \pm\sqrt{۱ - x^{۲}}$$

پاسخ تستی :

با توجه به اینکه ما برای رد گزینه ها و استفاده از اعداد با توجه به دامنه ی تابع با محدودیت روبه رو هستیم :

$$۱ - x^{۲} \geq ۰ \rightarrow x^{۲} \leq ۱ \rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \xrightarrow{x \neq ۰,۱,-۱} \text{دامنه ی تعریف تابع} \quad : \quad (-۱,۰) \cup (۰,۱)$$

یعنی ما برای استفاده از اعداد , مجاز به استفاده در این بازه فقط می باشیم :

با اختیار عدد $\frac{۱}{۲}$ از این بازه خواهیم داشت :

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{\left|\frac{۱}{۲}\right|}{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad : \quad (\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}) \in f \rightarrow (\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲}) \in f^{-۱}$$

حال با امتحان گزینه ها می توانید به پاسخ صحیح تست دست یابید.

$$\begin{cases} f(x)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \quad \checkmark \\ -f(x)=-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}=-\frac{1}{2} \quad \times \\ x.f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \times \\ -x.f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \times \end{cases}$$

مثال۱۴۴- اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$ باشد آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) x^2+1 ۲) x^2+3 ۳) x^2+4x+5 ۴) x^2-4x+5

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x-3)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \xrightarrow{x-3=z \to x=z+3} f(z)=(z+3-2)^2+1$$

$$z \to x \;:\; f(x)=(x+1)^2+1=x^2+2x+2 \to f(1-x)=(1-x+1)^2+1$$

$$=(2-x)^2+1=4-4x+x^2+1=x^2-4x+5$$

پاسخ تستی :

اگه یادتون باشه قبلا هم گفتم که همیشه سعی کنید در حل تست ها و برای رد گزینه های نادرست بازی اعداد کنید وگزینه های نادرست تست را رد کنید.این تست را هم به این روش می توان حل نمود :

میام $x=3$ قرار می دم.چه اتفاقی می افته ؟

$$f(x-3)=x^2-4x+5 \xrightarrow{x=3} f(0)=2$$

حال میام تو تابع $f(1-x)$ به $x=1$ می دم تا $f(0)$ ظاهر شده و آنگاه گزینه ها را مقایسه نموده و گزینه های نادرست را رد می کنم.

$$\begin{pmatrix} ۱) \to x = ۱ \to f(۱-x) = ۲ \\ ۲) \to x = ۱ \to f(۱-x) = ۴ \ \text{نا درست} \\ ۳) \to x = ۱ \to f(۱-x) = ۱۰ \ \text{نا درست} \\ ۴) \to x = ۱ \to f(۱-x) = ۲ \end{pmatrix}$$

دقت داشته باشید که حل تست به این روش کمتر از ۱۵ ثانیه طول می کشد و من اینجا فقط کامل حل تست به این روش را توضیح دادم تا دیگه تو تست های بعدی که می خواین به این روش حل کنین دچار مشکل نشین.

هنوز گزینه ی درست کاملا مشخص نشده است.با توجه به وضعیت پیش آمده مشخصه که یک نقطه ی دیگه رو هم برای پیدا کردن گزینه ی صحیح باید تست کنیم.

$$x = ۰ \to f(-۳) = ۵ \to x = ۴ \to f(۱-x) = f(-۳) \to \begin{pmatrix} ۱ \to ۱۷ \ \text{نادرست} \\ ۴ \to ۵ \end{pmatrix}$$

مثال۱۴۵-در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+۴} & : \ x > ۳ \\ ۲x + ۳ & : \ x \le ۳ \end{cases}$ مقدار $f\big(f(۵)\big) + f\big(f(۱)\big)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$f\big(f(۵)\big) + f\big(f(۱)\big) = f\big(۵ - \sqrt{۵+۴}\big) + f\big(۲(۱)+۳\big) = f(۲) + f(۵) = ۷ + ۲ = ۹$$

.

مثال۱۴۶-اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ باشد , ضابطه ی تابع $f^{-۱}(\sin x)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید تابع $f^{-۱}(x)$ را باید به دست آوریم :

$$y = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲ = \frac{x^۲}{۱+x^۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^۲ = y^۲ + y^۲x^۲ \to y^۲x^۲ - x^۲ = -y^۲$$

$$x^۲(y^۲ - ۱) = -y^۲ \to x^۲ = \frac{-y^۲}{y^۲ - ۱} = \frac{y^۲}{۱ - y^۲} \to f^{-۱}(x) = \sqrt{\frac{x^۲}{۱ - x^۲}}$$

$$f^{-۱}(\sin x) = \sqrt{\frac{(\sin x)^۲}{۱-(\sin x)^۲}} = \sqrt{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{|\sin x|}{|\cos x|}$$

پاسخ تستی :

رد گزینه ی ۲ و ۳ : اگر به x صفر بدم , آن گاه مقدار f هم میشه صفر. یعنی در تابع معکوس هم باید همین اتفاق بیفتد.

$$f^{-۱}(\sin x) = f^{-۱}(\sin ۰) = f^{-۱}(۰) = ۰$$

اما گزینه های ۲ و ۳ نادرست هستند. زیرا به ازای مقدار عددی صفر تعریف نشده هستند.

رد گزینه ی ۱ : اگر به ۱− بدم , آن گاه مقدار f هم میشه $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. یعنی در تابع معکوس هم باید داشته باشیم :

$$f^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = f^{-۱}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\text{ و }\frac{۵\pi}{۴}\text{ و }\frac{۷\pi}{۴}\text{ و }\ldots\right)\right) = -۱$$

اما در تابع داده شده در گزینه ی ۱ همواره این اتفاق نمی افتد و مثلا به ازای کمان $\frac{۵\pi}{۴}$ که در ناحیه ی سوم مثلثاتی واقع شده است و علامت سینوس و کسینوس در این ناحیه منفی و در نتیجه مقدار تانژانت مثبت است و این متناقض با مطلوب مساله است. اما در تابع گزینه ی ۴ برای رعایت شدن همین نکته مقدار تانژانت به صورت نسبت سینوس بر روی کسینوس و بالطبع عبارت کسینوس داخل قدرمطلق نوشته شده است.

مثال۱۴۷–تابع های $f = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g = \{(۱,۲),(۳,۱),(a\,,۳),(b,۱)\}$ مفروض اند.اگر $\begin{matrix}(۴,۲)\in fog\\(۴,۱)\in gof\end{matrix}$ باشند , دوتایی (a,b) کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) (۴ و۳) ۲) (۳ و ۴) ۳) (۵ و ۴) ۴) (۴ و ۵)

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

یکی از سخت ترین و البته سخت نگیم بهتره , جالب ترین تست های مطرح شده در مورد توابع ترکیبی در طی سال های اخیر است که هوش یک داوطلب کنکور را به زیبایی به چالش می کشاند.

$(۴,۲)\in fog \to ۴\in D_g$: با توجه به اینکه عدد ۴ در D_g وجود ندارد .یعنی صد در صد $a=۴$ است

پس گزینه ی ۱ و ۴ تا همینجا هم مشخصه که نادرست است.

$$g(۴)=۳ \to f\big(g(۴)\big) = f(۳) = ۲ \to (۴,۲)\in fog$$

$$(۴,۱)\in gof \to ۴\in D_f \to (۴,۵)\in f \to f(۴)=۵ \to g\big(f(۴)\big) = g(۵) = g(b) = ۱ \to b = ۵$$

مثال۱۴۸-اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = ۲^x$ باشد , آنگاه برد تابع gof کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $(\frac{۱}{۲} , ۱]$ ۲) $[\frac{۱}{۲} , ۱)$ ۳) $(۱ , ۲]$ ۴) $[۱ , ۲)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

طبق ویژگی های اشاره شده در مورد توابع جزء صحیح داریم :

$$۰ \leq x - [x] < ۱ \xrightarrow{\times -۱} -۱ < -x + [x] \leq ۰$$

در نتیجه می توان نوشت :

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(-x + [x]) = ۲^{-x+[x]}$$

کاملا واضح است که به ازای کمترین و بیشترین مقدار $-x + [x]$ برد تابع به دست می آید:

$$\begin{cases} -x + [x] = ۰ \rightarrow ۲^۰ = ۱ \\ -x + [x] > -۱ \rightarrow ۲^{-x+[x]} > ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

در نتیجه برد تابع مذکور به صورت $(\frac{۱}{۲} , ۱]$ به دست می آید.

پاسخ دوم :

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(-x + [x]) = ۲^{-x+[x]}$$

خوب فرض می کنیم دانش آموزان گرامی این نکته ی مهم در مورد توابع جزء صحیح را بلد نباشند. با استفاده از رد گزینه ها نیز می توان مساله را حل نمود :

اگر به اعداد بازه ها در ۴ گزینه ی داده شده توجه نمائید خواهید دید که درستی بازه ها و جواب ها حول و حوش سه عدد ۱ و ۲ و $\frac{۱}{۲}$ پایه گزاری شده است. یعنی باید مشخص کنیم مقدار تابع این اعداد میشه یا نه؟

رد گزینه ی ۲ و ۳ : آیا مقدار تابع ۱ می شود؟آری...در تابع $۲^{-x+[x]}$ در صورتی که شما به x صفر بدین , مقدار تابع $۱ = ۲^۰$ میشود. یعنی با قطعیت میتوان گزینه ی ۲ و ۳ را به دلیل اینکه عدد ۱ را جزو برد تابع درنظر نگرفتند , نادرست پنداشت.

رد گزینه ی ۴ : مشکل این گزینه چیست؟در واقع بهتره سوال رو اینطوری مطرح کنیم.فرق این گزینه با گزینه ی ۱ در چیست؟گزینه ی ۱ میگه که مقدار تابع هرگز از یک تجاوز نمی کنه.اما گزینه ی ۴ خلاف این مطلبو میگه. یعنی اگر ما بتوانیم درستی این مطلب رو نشون بدیم , به گزینه ی صحیح و پاسخ مطلوب تست نیز خواهیم رسید.

شما هر عدد صحیح به x نسبت بدین ,مقدار تابع همواره یک میشه.اگر عدد غیرصحیح نسبت بدین , با توجه به اینکه $۲^{-x+[x]} = \frac{۱}{۲^{x-[x]}}$ می باشد , مقدارش هرگز از عدد یک تجاوز نخواهد کرد. با زدن چند مثال می توان به این ادعا صحه گذاشت :

$$x = ۱.۲ \rightarrow x - [x] = ۱.۲ - ۱ = ۰.۲ \ , \qquad \frac{۱}{۲^{۰.۲}} < ۱$$

$$x=-1.2 \rightarrow x-[x]=-1.2+2=0.8\ ,\qquad \frac{1}{2^{0.8}}<1$$

مثال۱۴۹-در تابع با ضابطه ی $f(x)=x^2-2[x]$, مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۱.۷۵ ۲) ۲.۲۵ ۳) ۲.۵ ۴) ۲.۷۵

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\left[\sqrt{3}\right]=3-2(1)=3-2=1 \rightarrow$$

$$f\left(-\frac{1}{2}f\left(\sqrt{3}\right)\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left[-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}-2(-1)=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}=2.25$$

مثال۱۵۰-اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f\left(g(x)\right)=x^2+x-2$, آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می تواند باشد؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f\left(g(x)\right)=x^2+x-2=\left(g(x)\right)^2-\left(g(x)\right)-2 \rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=\left(g(x)-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

$$\left(g(x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow g(x)-\frac{1}{2}=\begin{cases} x+\frac{1}{2} \\ -x-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x)-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2} \\ g(x)-\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=x+1 \rightarrow (f+g)(x)=x^2-x-2+x+1=x^2-1 \\ g(x)=-x \rightarrow (f+g)(x)=x^2-x-2-x=x^2-2x-2 \end{cases}$$

پاسخ تستی :

شاید بشه گفت فرایند حل این تست به روش تشریحی سخت و در بیشتر موارد با اشتباه از سوی دانش آموزان عزیز هنگام جلسه ی کنکور است.رد گزینه ها یا استفاده از اعداد. حتما تا حالا باید درک کرده باشید که چگونه می توان از این روش استفاده نمود.

من میام به x صفر میدم , چه اتفاقی می افته؟

$$f(0)=-2$$

مگر غیر اینه که مطلوب مساله مقدار جبری عبارت $(f+g)(x)$ یا همان $f(x)+g(x)$ است؟غیر این نیست.درسته؟اگر به گزینه ها هم صفر بدیم , آن گاه مقادیر گزینه ها به این شکل درخواهد آمد :

$$\begin{cases} \text{گزینه ی ۱} : & f(۰)+g(۰)=-۱ \xRightarrow{f(۰)=-۲} g(۰)=۱ \\ \text{گزینه ی ۲} : & f(۰)+g(۰)=+۱ \xRightarrow{f(۰)=-۲} g(۰)=۳ \\ \text{گزینه ی ۳} : & f(۰)+g(۰)=۰ \xRightarrow{f(۰)=-۲} g(۰)=۲ \\ \text{گزینه ی ۴} : & f(۰)+g(۰)=۰ \xRightarrow{f(۰)=-۲} g(۰)=۲ \end{cases}$$

درستی گزینه ی ۱ : با توجه به اینکه $g(۰)=۱$ می باشد , $f(g(۰))=-۲$, پس باید $f(۱)=-۲$ باشد که اینگونه هم هست.

رد گزینه ی ۲ : با توجه به اینکه $g(۰)=۳$ می باشد , $f(g(۰))=-۲$, پس باید $f(۳)=-۲$ باشد که اینگونه نیست و مقدارش ۴ می شود.

رد گزینه ی ۳ : با توجه به اینکه $g(۰)=۲$ می باشد , $f(g(۰))=-۲$, پس باید $f(۲)=-۲$ باشد که اینگونه نیست و مقدارش صفر می شود.

رد گزینه ی ۴ : با توجه به اینکه $g(۰)=۲$ می باشد , $f(g(۰))=-۲$, پس باید $f(۲)=-۲$ باشد که اینگونه نیست و مقدارش صفر می شود.

✍مثال۱۵۱- دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض اند.تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$ **۲)** $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$

۳) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۲,۲)\}$ **۴)** $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

✍جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$g^{-۱}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\} \quad , \quad f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\}$$

حال باید تابع خواسته شده را به صورت زوج مرتب به دست آورد :

$$g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

✍مثال۱۵۲-اگر $f(x)=۲-|x-۲|$ باشد , ضابطه ی تابع $f(f(x))$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) x **۲)** $۴-x$ **۳)** $f(x)$ **۴)** $۴-f(x)$

✍جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ اول :

$$f(f(x)) = ۲ - |۲ - |x - ۲| - ۲| = ۲ - ۲ - \big|-|x - ۲|\big| = ۲ - |x - ۲| = f(x)$$

پاسخ دوم :

رد گزینه ی ۲ و ۴ : اگر به x صفر بدم , مقدار $f(۰) = ۰$ می شود. $f(f(۰)) = f(۰) = ۰$ باید باشد.

گزینه ی ۱ و ۳ مشکلی از این بابت ندارند. اما گزینه ی ۲ و گزینه ی ۴ هم هر دو می شوند ۴. پس نادرست هستند.

رد گزینه ی ۱ : اگر به x سه بدم , مقدار $f(۳) = ۱$ می شود. $f(f(۳)) = f(۱) = ۱$ باید باشد.

اما گزینه ی ۱ به ازای عدد ۳ می شود , ۳ و این نادرست است.

مثال۱۵۳-نمودارهای دو تابع $f(x) = x^۳ + ax + b$ و خط به معادله ی $y + ۲x = b$ در نقطه ای به طول یک روی محور x ها متقاطع اند. طول های دو نقطه ی تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) ۱- و ۰   ۲) ۳ و ۱-   ۳) ۲ و ۱-   ۴) ۲ و ۰

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

در نقطه ای به طول یک روی محور x ها متقاطع اند.یعنی اینکه مقدار هر دو تابع در نقطه ی $x = ۱$, صفر است.

$$f(x) = x^۳ + ax + b \to ۰ = ۱ + a + b \to ۰ = ۱ + a + ۲ \to a = -۳$$

$$y + ۲x = b \to ۰ + ۲ = b \to b = ۲$$

حال که مقادیر مجهول b , a محاسبه شد , می توان سایر نقاط تلاقی دو تابع را نیز به دست آورد :

$$b - ۲x = x^۳ + ax + b \to ۲ - ۲x = x^۳ - ۳x + ۲ \to x^۳ - x = x(x^۲ - ۱) = ۰$$

$$x = ۰\,,۱\,,-۱$$

مثال۱۵۴-اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^۲ + ۲x + ۱$ باشد , حاصل $(gof)(۱ - \sqrt{۲}) - (fog)(۱ - \sqrt{۲})$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۸۹)

۱) ۴   ۲) $۴(\sqrt{۲} - ۱)$ ۳) $۴(۱ - \sqrt{۲})$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

قبل اینکه شروع به حل تست کنیم , اگه دانش آموز باهوشی باشید که حتما همینطوره , ضابطه ی تابع $g(x) = (x + ۱)^۲$ را به این شکل در نظر بگیرید و سپس اقدام به حل تست کنید.

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})=f\left(g(۱-\sqrt{۲})\right)=f\left((۱-\sqrt{۲}+۱)^{۲}\right)=f\left((۲-\sqrt{۲})^{۲}\right)=f(۴-۴\sqrt{۲}+۲)$$

$$=f(۶-۴\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$(gof)(۱-\sqrt{۲})=g\left(f(۱-\sqrt{۲})\right)=g(|۱-\sqrt{۲}|)=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱+۱)^{۲}=۲$$

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

مثال۱۵۵-دو تابع با ضابطه های $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^{۲}+x-۲$ مفروض اند.اگر $g\left(f(x)\right)=-۲$ باشد , مجموعه ی مقادیر x کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱) **$R-Z$** ۲) **R** ۳) **Z** ۴) **$\emptyset$**

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

حتما این ویژگی مهم اشاره شده در مورد توابع جزء صحیح را به خاطر دارید :

$$f(x)=\begin{cases}[x]+[-x]=-۱\rightarrow x\notin Z\\ [x]+[-x]=۰\quad\rightarrow x\in Z\end{cases}$$

$$g\left(f(x)\right)=\begin{cases}g(-۱)=-۲\rightarrow x\notin Z\\ g(۰)=-۲\rightarrow x\in Z\end{cases}$$

یعنی به ازای تمام اعداد حقیقی(چه صحیح و چه غیر صحیح) رابطه ی $g\left(f(x)\right)=-۲$ برقرار است.

مثال۱۵۶-اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ باشد , حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۹)

۱) **۵** ۲) **۶** ۳) **۷** ۴) **۸**

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

یک تست بسیار هوشمندانه و البته شاید به جرات بشه گفت سخت ترین تستی که طی ۱۲ سال اخیر در مورد توابع ترکیبی مطرح شده است!

$$g(x)=f(۳x-۴)\rightarrow ۳x-۴=f^{-۱}\left(g(x)\right)\rightarrow x=\frac{f^{-۱}\left(g(x)\right)+۴}{۳}\rightarrow$$

$$g^{-۱}(x)=\frac{f^{-۱}(x)+۴}{۳}\rightarrow g^{-۱}(۱۶)=\frac{f^{-۱}(۱۶)+۴}{۳}=\frac{(۱۶+\sqrt{۱۶})+۴}{۳}=\frac{۱۶+۴+۴}{۳}=۸$$

✍مثال۱۵۷-نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه ای به طول یک و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه ی (۶- و ۲-) می گذرد.$f(-1)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۸-　　۲) ۷-　　۳) ۵-　　۴) ۴-

✍جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$(1,0) \to 0 = a + b + c$$

$$-6 = c$$

$$(-2,-6) \to -6 = 4a - 2b + c$$

حال باید با قرار دادن مقدار c , در دو معادله ی به دست آمده می توان دستگاه دو معادله ی دو مجهولی را حل نموده و مقدار a , b

را نیز محاسبه نمود.

$$\begin{cases} a + b = 6 \to a + 2a = 3a = 6 \to a = 2 \\ 4a - 2b = 0 \to b = 2a = 2(2) = 4 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = 2 - 4 - 6 = -8$$

✍مثال۱۵۸-اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$, ضابطه ی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور۸۹)

۱) $\frac{1}{1-x^2}$　　۲) $\frac{2x}{x^2-1}$　　۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$　　۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

✍جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2 - 1} - 2\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} =$$

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2x - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(2x+1)}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{1 - x^2}$$

پاسخ تستی :

اگر به x صفر بدیم , $f(0) = 0$ خواهد شد و در نتیجه $f(x^2) - 2f(x) + 1 = f(0) - 2f(0) + 1 = 1$ خواهد شد و بالطبع در گزینه های داده شده هم باید همینطور باشد و اگر به به x صفر بدیم باید حاصل یک گردد.

رد گزینه ی ۲ : مقدار عددی گزینه ی ۲ برابر صفر می شود و نادرست است.

خوب با عدد صفر فقط یک گزینه رد شد.باید اعداد دیگر را هم امتحان کنیم.

اگر به x دو بدیم , $f(۲) = ۲$ خواهد شد و در نتیجه $-\frac{۵}{۳} = ۱ + ۴ - \frac{۴}{۳} = ۱ + f(۲)۲ - f(۴) = ۱ + f(x)۲ - f(x^۲)$ خواهد شد و بالطبع در گزینه های داده شده هم باید همینطور باشد و اگر به به x دو بدیم باید حاصل $-\frac{۵}{۳}$ گردد.

رد گزینه ی ۱: حاصل $-\frac{۱}{۳}$ **رد گزینه ی ۴ :** حاصل ۱

مثال۱۵۹-دو تابع f , g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده اند.در کدام حالت دو تابع مساوی اند؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $\mathbf{f(x) = ۲logx \ , \ g(x) = logx^۲}$

۲) $\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{x^۲}}{|x|} \ , \ g(x) = ۱}$

۳) $\mathbf{f(x) = (\sqrt{x})^۲ \ , \ g(x) = x}$

۴) $\mathbf{f(x) = \frac{x}{|x|} \ , \ g(x) = \frac{|x|}{x}}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

همانطور که می دانیم شرط اول مساوی بودن دو تابع , این است که دامنه ی دو تابع با هم مساوی باشند.

رد گزینه ی ۱) - $D_g = R - \{۰\}$ و $D_f = x \geq ۰$

رد گزینه ی ۲) - $D_g = R$ و $D_f = R - \{۰\}$

رد گزینه ی ۳) - $D_g = R$ و $D_f = x \geq ۰$

دامنه ی تعریف هر دو تابع در گزینه ی ۴ یکسان و به صورت$D_f = D_g = R - \{۰\}$ است.ضمنا ضابطه ی دو تابع نیز کاملا یکسان و به صورت زیر است :

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

مثال۱۶۰-در تابع با ضابطه ی $\mathbf{f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{sin\pi x - ۱}}$ مقدار $\mathbf{f(-\frac{۱}{۲}f(x))}$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) تعریف نشده

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

برای اینکه به این تست پاسخ دهیم , باید دامنه ی تابع را مشخص کنیم :

$$sin\pi x - ۱ \geq ۰ \rightarrow sin\pi x \geq ۱$$

همانطور که می دانیم مقدار تابع سینوس هرگز نمی تواند از ۱ بیشتر باشد.پس تنها حالت قبول برای این حالت همون مقدار $sin\pi x = ۱$ است.

$$\sin\pi x = ۱ \rightarrow \pi x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = ۲k + \frac{۱}{۲} : k \in Z$$

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند , با توجه به اینکه k فقط مقدار صحیح می تواند اختیار کند , مقدار x همواره غیر صحیح است.یعنی :

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin\pi x - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

$$f\left(-\tfrac{۱}{۲}f(x)\right) = f\left(\tfrac{۱}{۲}\right) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin\pi x - ۱} \xrightarrow{x \notin Z} -۱$$

پاسخ تستی :

اگر به x , $\frac{۱}{۲}$ بدیم , آن گاه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin\pi x - ۱} = \left[\frac{۱}{۲}\right] + \left[-\frac{۱}{۲}\right] + \sqrt{\sin\frac{\pi}{۲} - ۱} = ۰ - ۱ + ۰ = -۱$

حال باید مقدار $f\left(-\frac{۱}{۲}f(x)\right) = f\left(-\frac{۱}{۲}f\left(\frac{۱}{۲}\right)\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۱$ می شود که در هر شرایطی گزینه ی ۱ صحیح است.

مثال۱۶۱-اگر نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - x + m$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند , طول های دو نقطه ی تلاقی دیگر آن با محور xها کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ و ۱- ۲) ۱ و $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ و ۱- ۴) ۳ و $-\frac{۱}{۲}$

جواب :گزینه ی ۳ صحیح است.

$$F(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - x + m \xrightarrow{(2,0)} ۰ = ۲(۸) - ۵(۴) - ۲ + m \rightarrow m = ۶$$

$$f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - x + ۶$$

با توجه به اینکه یکی از ریشه های این معادله $x = ۲$ است , طبق قوانین بخش پذیری تنها راه برای حل این تست این است که عبارت جبری مورد نظر را بر $x - ۲$ تقسیم کنیم تا درجه ی عبارت به دو جمله ای کاهش یافته و ریشه های دیگر معادله نیز مشخص شود :

$$۲x^۳ - ۵x^۲ - x + ۶ = (x - ۲)(۲x^۲ - x - ۳) = (x - ۲)(x + ۱)(۲x - ۳) = ۰ \rightarrow$$

$$x = ۲ , -۱ , \frac{۳}{۲}$$

داوطلبان عزیز توجه داشته باشند با توجه به اینکه ما دنبال ریشه های عبارت $f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - x + ۶$ هستیم , در صورتی که قادر به حل و تجزیه ی این عبارت نشدید , می توانید اعداد داده شده در گزینه ها را در معادله تست کنید.

مثال۱۶۲-اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۲x}$ باشد , حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب :گزینه ی ۲ صحیح است.

$$g^{-1}(۶) = x \to g(x) = ۶ \to f(x) + \sqrt{f(x)} = ۶ \to f(x) + \sqrt{f(x)} - ۶ = ۰$$

$$\left(\sqrt{f(x)} - ۲\right)\left(\sqrt{f(x)} + ۳\right) = ۰ \to \sqrt{f(x)} = ۲, -۳ \xrightarrow{\sqrt{f(x)} \geq ۰} \sqrt{f(x)} = ۲$$

$$f(x) = ۴ \xrightarrow{\text{طبق تعریف تابع معکوس}} x = f^{-1}(۴) = \sqrt[۳]{۲(۴)} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

$$g^{-1}(۶) = x = ۲$$

مثال۱۶۳-اگر $f(x) = \sqrt{x + ۲|x|}$ باشد , مقدار $f(f(-۱۴۴))$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

جواب :گزینه ی ۲ صحیح است.

$$f(f(-۱۴۴)) = f\left(\sqrt{-۱۴۴ + ۲|-۱۴۴|}\right) = f(\sqrt{۱۴۴}) = f(۱۲) = \sqrt{۱۲ + ۲|۱۲|} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

مثال۱۶۴-اگر جزءصحیح $(x^۲ + x)$ برابر ۱- باشد , آنگاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۸)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

جواب :گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$[x^۲ + x] = -۱ \to -۱ \leq x^۲ + x < ۰ \to -۱ < x < ۰ \to ۰ < x^{۲۰} < ۱ \to [x^{۲۰}] = ۰$$

پاسخ تستی :

عددی از این بازه انتخاب می کنیم که تو رابطه ی $[x^۲ + x] = -۱$ صدق کند. به ازای عدد $-\frac{۱}{۲}$ این رابطه برقرار است :

$$\left[\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۴}\right] = -۱$$

حال می توانید به ازای همین عدد مقدار $[x^{۲۰}]$ را حساب نموده و به پاسخ تست برسید.

$$\left[\frac{۱}{۲^{۲۰}}\right] = ۰$$

مثال۱۶۵-دوره ی تناوب اصلی تابع با ضابطه ی $f(x) = \tan 3x - \cot 3x$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{6}$　　۲) $\frac{\pi}{2}$　　۳) $\frac{\pi}{3}$　　۴) π

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x) = \tan 3x - \cot 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x = -(\cos^2 3x - \sin^2 3x)}{\sin 3x . \cos 3x} =$$

$$\frac{-\cos 6x}{\frac{1}{2}\sin 6x} = -2\cot 6x \to T = \frac{\pi}{6}$$

پاسخ تستی :

اگر به x کمان $\frac{\pi}{4}$ نسبت دهیم , آن گاه حاصل عبارت $\tan 3x - \cot 3x$ به صورت زیر درمی آید :

$$\tan\frac{3\pi}{4} - \cot\frac{3\pi}{4} = -1 - (-1) = 0$$

گزینه ی ۱ به ما میگه که کمان بعدی که دوباره مقدار این عبارت برابر صفر می شود به اندازه ی $\frac{\pi}{6}$ است .

$$\tan 225 - \cot 225 = \tan(180 + 45) - \cot(180 + 45) = \tan 45 - \cot 45 = 1 - 1 = 0$$

با توجه به اینکه این کمان کوچکترین کمان داده شده در گزینه هاست و به ازای این کمان درستی مطلب اخیر نیز اثبات گردید , پس همین کمان دوره ی تناوب تابع بوده و گزینه ی ۱ صحیح خواهد بود.

مثال۱۶۶-در تابع با ضابطه ی $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) تعریف نشده　　۲) -5　　۳) -2　　۴) -8

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f^{-1}(4) = a \to (a, 4) \in f \to 4 = -a + \sqrt{-2a} \to \sqrt{-2a} = 4 + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2a = 16 + a^2 + 8a$$

$$a^2 + 10a + 16 = 0 \to (a + 8)(a + 2) = 0 \to a = -8, -2 \to a = -2 \text{ ق ق}$$

پاسخ تستی :

به راحتی و با جاگذاری گزینه ها می توانید به پاسخ صحیح تست برسید.

باید به ازای اعداد داده شده در گزینه ها مقدار تابع ۴ شود و تنها عددی که در این شرایط صدق می کند فقط عدد ۲- است.

مثال۱۶۷-رابطه ی $R = \{(x,y)|x,y \in Z , |x| + |y| = ۲\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

به راحتی می توان با توجه به اینکه x , y تنها می تواند عدد صحیح باشد , تمام زوج مرتب هایی را که در رابطه ی داده شده صدق می کند درآورد :

$$R = \{(۲,۰), (-۲,۰), (۰,۲), (۰,-۲), (۱,۱), (۱,-۱), (-۱,۱), (-۱,-۱)\}$$

مثال۱۶۸-اگر $f(x) = \sqrt{۲ - x - x^۲}$, مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

$$f(-۱) = \sqrt{۲ - (-۱) - (۱)} = \sqrt{۲} \rightarrow f(\sqrt{۲}) = \sqrt{۲ - \sqrt{۲} - ۲} = \sqrt{-\sqrt{۲}}$$

همانطور که می دانیم فرجه ی زوج اعداد منفی تعریف نشده است.

مثال۱۶۹-اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد , حاصل $[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴]$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

باید ببینیم چه نتیجه ای می توان از نامعادله ی داده شده برداشت کرد :

$$x^۲ + x < ۰ \rightarrow -۱ < x < ۰ \rightarrow [x] = -۱$$

$$۰ < x^۲ < ۱ \rightarrow [x^۲] = ۰$$

$$-۱ < x^۳ < ۰ \rightarrow [x^۳] = -۱$$

$$۰ < x^۴ < ۱ \rightarrow [x^۴] = ۰$$

$$[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=-۱+۰-۱+۰=-۲$$

پاسخ تستی :

یک عدد انتخاب می کنیم که در رابطه ی $x^۲+x<۰$ صدق کند. مثلا عدد $-\frac{۱}{۲}$ که به ازای آن مقدار عبارت $-\frac{۱}{۴}$ می شود و از عدد یک کوچکتر است.

حال می توان به ازای این عدد مقدار عبارت $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ را محاسبه نموده و به پاسخ تست رسید.

$$x=-\frac{۱}{۲}\rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=\left[-\frac{۱}{۲}\right]+\left[\frac{۱}{۴}\right]+\left[-\frac{۱}{۸}\right]+\left[\frac{۱}{۱۶}\right]=-۱+۰-۱+۰=-۲$$

مثال۱۷۰-رابطه ی $R=\{(x,y)|x,y\in N\ ,۲x+y\le ۷\}$ دارای چند زوج مرتب است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۹

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

به راحتی می توان تعداد زوج مرتب های موجود را با توجه به رابطه ی داده شده شمرد :

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$$

مثال۱۷۱-اگر $f(x)=x^۳-۳x : x\ge ۱$ باشد , نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و f با کدام طول متقاطع اند؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) غیر متقاطع

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ اول :

باز هم نکته ی شماره ی ۲۰ رو به یاد آورده و برای دستیابی به جواب , تابع داده شده را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهید :

$$x^۳-۳x=x\rightarrow x^۳-۴x=۰\rightarrow x(x^۲-۴)=۰\rightarrow x=۰\ ,\pm۲$$

پاسخ دوم :

کاملا معلوم است که به ازای $x=۲$ مقدار عبارت نیز ۲ می شود. در نتیجه تو تابع معکوس هم همین شرایط برقرار است.البته اینجور جواب دادن به سوال تا حدودی استفاده از همان ویژگی مطرح شده در مورد توابع معکوس در پاسخ اول است.

مثال۱۷۲-اگر $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و تابع $|x|<\frac{\pi}{2}$: $g(x)=\operatorname{tag}x$ باشند دامنه ی تابع fog کدام است؟(سراسری تجربی ۸۷)

۱) $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

۲) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

۳) $\left[-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$

۴) $[-1,0)\cup(0,1]$

جواب : گزینه ی ۳ صحیح است.

روش تشریحی :

با توجه به اینکه دامنه ی تابع g داده شده , می توان مستقیما و با تشکیل تابع fog دامنه ی تابع را از روی ضابطه به دست آورد :

$$(fog)(x)=\frac{\sqrt{1-\tan^2x}}{\tan x}=\begin{cases}1-\tan^2x\geq 0\to\tan^2x\leq 1\to-\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}\\ \tan x\neq 0\to x\neq k\pi\end{cases}$$

در نتیجه می توان دامنه ی تابع fog را به صورت زیر بیان کرد :

$$D_{fog}=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]-\{0\}$$

پاسخ تستی :

$$(fog)(x)=\frac{\sqrt{1-\tan^2x}}{\tan x}$$

رد گزینه ی ۱ : به ازای عدد صفر $\tan x=0$ و در نتیجه تابع تعریف نشده است و این گزینه چون عدد صفر را شامل می شود نادرست خواهد بود.

رد گزینه ی ۲ : این گزینه کمان هایی از جمله $\frac{\pi}{3}$ را نیز شامل می شود. در صورتی که به ازای این کمان مقدار عبارت $1-\tan^2x$ که یک عبارت زیر رادیکالی ست برابر ۲- می شود و این اتفاق نمی تواند بیفتد.

رد گزینه ی ۴ : این گزینه به طور کلی با جواب مساله منافات دارد و ما می خواهیم محدوده ی مقادیری که x می تواند اختیار کند را به دست آوریم نه tanx را

مثال۱۷۳-اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-4x}$ باشد , دامنه ی تابع gof کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۷)

۱) $(0,8)\cup(8,+\infty)$

۲) $R-\{0,8\}$

۳) $R-\{0\}$

۴) $(0,+\infty)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

در مورد دامنه ی تابع f دقت داشته باشید که با وجود اینکه تابع رادیکالی است , اما هیچ محدودیتی ایجاد نمی کند و به ازای همه ی نقاط حقیقی برقرار است.

$$D_f = R \quad , \quad D_g = R - \{۰,۴\}$$

$$D_{gof} = \{x | x \epsilon D_f , f(x) \in D_g\} = \left\{x \in R , \sqrt{x + |x|} \neq ۰ , ۴\right\} = R - Z^- , ۸ = (۰,۸) \cup (۸, +\infty)$$

پاسخ تستی :

$$gof = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x + |x|}\right) = \frac{۱}{\left(\sqrt{x + |x|}^{۲}\right) - ۴\left(\sqrt{x + |x|}\right)}$$

رد گزینه ی ۳ و ۴ : این دو گزینه عدد ۸ را نیز جزو دامنه ی تابع قرار داده اند. با امتحان این عدد در تابع خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{\left(\sqrt{۱۶}^{۲}\right) - ۴\left(\sqrt{۱۶}\right) = ۱۶ - ۱۶ = ۰} \quad \text{تعریف نشده}$$

رد گزینه ی ۲ : مطابق بازه ی داده شده در این گزینه , به جز دو عدد صفر و ۸ هیچ عدد دیگری مشکلی از بابت قرارگرفتن در دامنه ی تابع ندارد.با قرار دادن عددی منفی مثلا ۱- داریم :

$$\frac{۱}{\left(\sqrt{۰}^{۲}\right) - ۴\left(\sqrt{۰}\right) = ۰ - ۰ = ۰} \quad \text{تعریف نشده}$$

مثال۱۷۴-اگر $f(x) = ۳ + \sqrt{۲x}$ باشد , آنگاه $f(۸)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۵　　۲) ۳　　۳) ۷　　۴) ۸

جواب :گزینه ی ۳ صحیح است.

عجب سوالی!دستتون پرتوان!

$$f(۸) = ۳ + \sqrt{۲(۸)} = ۳ + ۴ = ۷$$

مثال۱۷۵-اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{۱-x}$ باشد آنگاه $fog(\sqrt{۲})$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۴-　　۲) ۳-　　۳) ۲-　　۴) ۱-

جواب :گزینه ی ۱ صحیح است.

$$g(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۱ - \sqrt{۲}} = \frac{۱.۴}{۱ - ۱.۴} = \frac{۱.۴}{-۰.۴} = \frac{۱۴}{-۴} = -\frac{۷}{۲} = -۳.۵ \to f\left(g(\sqrt{۲})\right) =$$

$$f(-۳.۵) = [-۳.۵] = -۴$$

مثال۱۷۶-اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد , مقدار ورودی کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۶)

$$\text{ورودی} \to ۲\mathbf{x} - ۲ \to \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}} + ۱} \to \text{خروجی}$$

۱) $\frac{۱۱}{۹}$

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۳

۴) ۴

جواب :گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$F(x) = ۲x - ۲ \quad , \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + ۱} \to g\big(f(x)\big) = \frac{۴}{۳}$$

$$\frac{۲x - ۲}{\sqrt{۲x - ۲} + ۱} = \frac{۴}{۳} \to ۴\sqrt{۲x - ۲} + ۴ = ۶x - ۶ \to ۴\sqrt{۲x - ۲} = ۶x - ۱۰ \to$$

$$۱۶(۲x - ۲) = (۶x - ۱۰)^۲ \to ۳۲x - ۳۲ = ۳۶x^۲ + ۱۰۰ - ۱۲۰x \to$$

$$۳۶x^۲ - ۱۵۲x + ۱۳۲ = ۰ \to ۱۸x^۲ - ۷۶x + ۶۶ = ۰ \to ۹x^۲ - ۳۸x + ۳۳ = ۰$$

$$x = \frac{۳۸ \pm \sqrt{۲۵۶}}{۱۸} = \frac{۳۸ \pm ۱۶}{۱۸} = \left(\begin{matrix} ۳ \\ \frac{۱۱}{۹} \end{matrix}\right.$$

توجه داشته باشید که هر دو ریشه ی به دست آمده , جزء جواب هستند , اما گزینه ی ۱ , مقدار $\frac{۴}{۳}$ را به ما نمی دهد.

پاسخ تستی :

ناسلامتی داریم تست حل می کنیما...اونم با این اعداد سنگینی که این تست داره یه ۵ دقیقه ای حداقل طول می کشه تا شما به جواب برسید.

واقعا هر کی این جوری به این تست پاسخ بده , ببخشیدا اما واقعا بیکاره! و اصلا دلش نمی خواد کنکور موفق بشه.

تابع gof رو مگه تشکیل ندادیم؟خوب حالا گزینه ها رو روش تست کنید دیگه...حل نمی خواد که...

$$(gof)(x)=\frac{۴}{۳}\to ۴\sqrt{۲x-۲}=۶x-۱۰\to\begin{cases}۱\to x=\frac{۱۱}{۹}\to ۴\sqrt{\frac{۴}{۹}}=۶\left(\frac{۱۱}{۹}\right)-۱۰\to\frac{۸}{۳}=-\frac{۸}{۳}\\ ۲\to x=\frac{۷}{۲}\to ۴\sqrt{۵}=۶\left(\frac{۷}{۲}\right)-۱۰\to ۴\sqrt{۵}=۱۱\\ ۳\to x=۳\to ۴\sqrt{۴}=۶(۳)-۱۰\to ۸=۸\\ ۴\to x=۴\to ۴\sqrt{۶}=۶(۴)-۱۰\to ۴\sqrt{۶}=۱۴\end{cases}$$

قدرت محاسباتی تو ببر بالا...

مثال۱۷۷-دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log(x-۱)}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۶)

۱) $(۱,۲]$ **۲)** $[۲,۱۰]$ **۳)** $[۱,۱۱)$ **۴)** $(۱,۱۱]$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ اول :

$$۱-\log(x-۱)\ge ۰\to\log(x-۱)\le ۱\to x-۱\le ۱۰\to x\le ۱۱$$
$$x-۱>۰\to x>۱$$

پاسخ دوم :

رد گزینه ی ۱ و ۲ و ۳ : همه ی این گزینه ها را می توان با مثال نقض عدد ۱۱ رد کرد. به نظر شما تابع با عدد ۱۱ مشکلی داره؟

$$f(۱۱)=\sqrt{۱-\log(۱۰)=۱-۱=۰}$$

هیچ یک از گزینه های ۱ و ۲ و۳ این عدد را شامل نمی شوند. پس نادرست هستند.

مثال۱۷۸-اگر رابطه ی $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳\,,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک به یک باشد , دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۶)

۱) $(-۱,۱)$ **۲)** $(-۱,۳)$ **۳)** $(۲,۱)$ **۴)** $(۲,۳)$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

با مقایسه ی دو زوج مرتب $(۳,۲),(b,۲)$, برای اینکه شرط یک به یک بودن تابع رعایت بشه باید $b=۳$ باشه.

یعنی گزینه ی ۱ و ۳ نادرست است.

حال از بین گزینه های ۲ و ۴ باید ببینیم که کدام یک از اعداد ۱- و ۲ برای a می تونه مقداری درست باشه و شرط یک به یک بودن رو نقض نکنه!

اگر $a = -۱$ باشه , در این صورت خواهیم داشت :

$$(-۱,۵),(۳,۲),(۳,۲),۳,۲),(-۱,۴)$$

اگر $a = ۲$ باشه , در این صورت خواهیم داشت :

$$(۳,۲),(۲,۵),(۳,۲),۳,۲),(-۱,۴)$$

کاملا مشخص است که $a = -۱$ نمی تواند اختیار کند . زیرا یک به یک بودن تابع را نقض می کند.

مثال۱۷۹-اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{۱-x}{x}$ باشد , برد تابع gof کدام بازه است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۶)

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰ و +\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱ و +\infty)$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

روش اول :

$$g(x) = \frac{۱}{x} - ۱ \to g\big(f(x)\big) = \frac{۱}{x-[x]} - ۱$$

این ویژگی در مورد توابع جزء صحیح را که به خاطر دارید؟

$$۰ \le x-[x] < ۱ \to \frac{۱}{x-[x]} > ۱ \to \frac{۱}{x-[x]} - ۱ > ۰ \to g\big(f(x)\big) > ۰ \to R_{gof} = (۰,+\infty)$$

روش دوم:

$$g\big(f(x)\big) = \frac{۱}{x-[x]} - ۱$$

آنچه که مسلم است ما نمی توانیم به x اعداد صحیح را نسبت دهیم. زیرا به ازای این اعداد تابع تعریف نشده می شود.

رد گزینه ی ۳ : آیا مقدار تابع صفر و یک می شود.؟برای اینکه این اتفاق بیفتد مقدار عبارت $x-[x]$ باید یک یا $\frac{۱}{۲}$ شود.

مقدار تابع به ازای $x = \frac{۳}{۲}$ یک می شود.

$$\frac{۱}{x-[x]} - ۱ = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}-\left[\frac{۳}{۲}\right]} - ۱ = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}-۱} - ۱ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$$

رد گزینه ی ۲ : به وضوح و با امتحان چند عدد به آسانی می توان دریافت که امکان ندارد به ازای هیچ عددی مقدار عبارت $x-[x]$ یک شود.

رد گزینه ی ۴ : مطابق بازه ی داده شده در این گزینه و فرق آن با گزینه ی ۱ می توان گفت که گزینه ی ۱ برخلاف گزینه ی ۴ عددی مثل $\frac{۱}{۲}$ را نیز دربرمیگیرد.آیا امکان پذیر است؟برای اینکه این اتفاق بیفته باید داشته باشیم :

$$\frac{۱}{x-[x]}-۱=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۱}{x-[x]}=\frac{۳}{۲}\rightarrow x-[x]=\frac{۲}{۳}$$

بله امکان پذیر است. به ازای خود عدد $\frac{۲}{۳}$

مثال۱۸۰-در تابع $f(x)=x^{۲}(۲-x)^{۲}$ حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۵)

۱) ۰　　**۲)** $۴x$　　**۳)** $۲x^{۲}$　　**۴)** $۴x^{۲}$

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(۱+x)-f(۱-x)=(۱+x)^{۲}\big(۲-(۱+x)\big)^{۲}-(۱-x)^{۲}\big(۲-(۱-x)\big)^{۲}=$$
$$(۱+x)^{۲}(۲-۱-x)^{۲}-(۱-x)^{۲}(۲-۱+x)^{۲}=(۱+x)^{۲}(۱-x)^{۲}-(۱-x)^{۲}(۱+x)^{۲}=۰$$

پاسخ تستی :

میام به x یک میدم.چه اتفاقی می افته؟ $f(۱+x)-f(۱-x)=f(۲)-f(۰)=۰-۰=۰$

فقط گزینه ی ۱ به ازای عدد یک میشود صفر...بقیه ی گزینه ها به ترتیب ۴ و ۲ و ۴ می شوند و نادرست هستند.

مثال۱۸۱-اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$ تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۵)

۱) $\{(۱,۳),(۰,۰)\}$　　**۲)** $\{(۲,۴),(۳,۵)\}$

۳) $\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$　　**۴)** $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

ابتدا باید تابع $f^{-۱}$ را تشکیل دهیم :

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$$

حال می توان تابع $gof^{-۱}$ را به دست آورد :

$$gof^{-۱}(x)=g\big(f^{-۱}(x)\big)=\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$$

مثال۱۸۲-رابطه ی $\{(۳,m),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟(تجربی خارج از کشور ۸۵)

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۲　　۴) هیچ مقدار

جواب :گزینه ی ۴ صحیح است.

شرط یک به یک بودن تابع را بررسی می کنیم.نباید دو زوج مرتبی یافت بشه که مولفه ی دوم آنها یکسان باشه و اگه اینگونه هم باشه مولفه ی اول آنها نیز باید یکسان باشه.

$$\begin{cases} m=-۲ \rightarrow \{(۳,-۲),(۲,۱),(-۲,-۲),(۳,۰),(-۲,۴)\} \\ m=-۱ \rightarrow \{(۳,-۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\} \\ m=۲ \rightarrow \{(۳,۲),(۲,۱),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\} \end{cases}$$

مثال۱۸۳-اگر $f(x)=[x]$ باشد , مجموعه ی مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۵)

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۰ و ۱　　۴) ۱- و ۰ و ۱

جواب :گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ اول :

با توجه به این ویژگی در مورد توابع جزء صحیح :

$$۰ \le x-[x] < ۱$$

$$x-f(x)=x-[x] \rightarrow f(x-[x])=\big[x-[x]\big]=۰$$

پاسخ دوم :

با دادن چند عدد به عنوان مثال به راحتی می توان فهمید که پاسخ تست همواره صفر می شود.

$$f\big(x-f(x)\big)=\left|\begin{array}{l} x=۰ \ : \ f\big(۰-f(۰)\big)=f(-۰)=f(۰)=۰ \\ x=۱ \ : \ f\big(۱-f(۱)\big)=f(۱-۱)=f(۰)=۰ \\ \quad\quad \dots \end{array}\right.$$

مثال۱۸۴-دو تابع g , f به صورت مجموعه ی زوج های مرتب بیان شده اند.در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) $f \cup g$　　۲) $f \cap g$　　۳) $f-g$　　۴) fog

جواب : گزینه ی ۱ صحیح است.

با یک مثال نقض به راحتی می توانید به تست پاسخ دهید.

$$f = \{(۱,۲),(۳,۰)\} , g = \{(-۱,۲),(۴,۵)\}$$

گرچه همین الان هم پاسخ تست به وضوح معلوم است , اما بهتره همه ی ۴ گزینه را بررسی کنیم تا ببینیم در سایر گزینه ها چه پیش خواهد آمد؟

$$f \cup g = \{(۱,۲),(۳,۰),(-۱,۲),(۴,۵)\}$$

$$f \cap g = \emptyset \quad : \quad f - g = \emptyset \quad : \quad fog = \emptyset$$

مثال های مختلفی می توان زد . اما سعی کنین در چنین تست هایی , مثال های نقض آسانی بزنید تا به راحتی بتوانید به پاسخ صحیح تست برسید.

مثال۱۸۵-اگر $f(x) = \frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog(x) = \frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$ مقدار $g(۱)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

جواب : گزینه ی ۴ صحیح است.

$$(fog)(x) = \frac{x^۲+۲}{x^۲+۱} \to f(g(۱)) = \frac{۳}{۲} \to \frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱} = \frac{۳}{۲} \to ۲g(۱)+۲ = ۳g(۱)-۳$$

$$g(۱) = ۵$$

مثال۱۸۶-اگر $f(x) = x^۲ - ۱$ باشد , نمودار تابع $y = (fof)(x)$ با محور x ها کدام وضعیت را دارد؟(سراسری ریاضی ۸۳)

۱) یک نقطه ی تلاقی – دو نقطه ی تماس

۲) دو نقطه ی تلاقی – یک نقطه ی تماس

۳) سه نقطه ی تلاقی – فاقد نقطه ی تماس

۴) فاقد نقطه ی تلاقی – دو نقطه ی تماس

جواب : گزینه ی ۲ صحیح است.

$$(fof)(x) = f(f(x)) = (x^۲-۱)^۲ - ۱ = ۰ \to (x^۲-۱)^۲ = ۱ \to x^۲ - ۱ = \pm۱$$

$$x^۲ - ۱ = ۱ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm۱$$
$$x^۲ - ۱ = -۱ \to x^۲ = ۰ \to x = ۰$$

یعنی معادله یک ریشه ی مضاعف و دو ریشه ی معمولی حقیقی دارد . پس دو نقطه ی تلاقی و یک نقطه ی تماس با محور طول ها دارد.

مثال۱۸۷-اگر $f(x) = |x| - x$ باشد , ضابطه ی $(fof)(x)$ برابر کدام است؟(سراسری تجربی ۸۳)

۱) x ۲) $|x|$ ۳) $x + |x|$ ۴) ۰

جواب :گزینه ی ۴ صحیح است.

پاسخ اول :

$$(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = \big||x| - x\big| - (|x| - x) = |x| - x - |x| + x = ۰$$

پاسخ دوم :

اگر به x یک بدهم , آنگاه $f\big(f(۱)\big) = f(۰) = ۰$

اما گزینه ی ۱ می شود یک – گزینه ی ۲ می شود یک – گزینه ی ۳ هم می شود ۲

پس همگی نادرست هستند.

مثال۱۸۸-اگر $f(x) = x + \sqrt{x^۲ + ۱}$ باشد , ضابطه ی $f^{-۱}(x)$ دقیقا کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $x \in R \;:\; \frac{۱}{۲}\left(x - \frac{۱}{x}\right)$

۲) $x \in R \;:\; \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x} - x\right)$

۳) $x > ۰ \;:\; \frac{۱}{۲}\left(x - \frac{۱}{x}\right)$

۴) $x > ۰ \;:\; \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x} - x\right)$

جواب :گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید برد تابع را مشخص کنیم تا پس از محاسبه ی تابع معکوس , در انتخاب گزینه ی صحیح با مشکل مواجه نشویم :

$$x^۲ + ۱ \geq ۰ \xrightarrow{\text{یک نتیجه ی بدیهی}} D_f = R$$

$$\sqrt{x^۲ + ۱} > x \to x + \sqrt{x^۲ + ۱} > ۰ \to R_f = (۰, +\infty)$$

یعنی یا گزینه ی ۳ یا گزینه ی ۴ صحیح است.

حال باید ضابطه ی تابع معکوس را به دست آوریم :

$$y = x + \sqrt{x^۲ + ۱} \to y - x = \sqrt{x^۲ + ۱} \to (y - x)^۲ = x^۲ + ۱ \to y^۲ + x^۲ - ۲xy = x^۲ + ۱$$

$$\to y^۲ - ۲xy = ۱ \to ۲xy = y^۲ - ۱ \to x = \frac{y^۲ - ۱}{۲y} \xrightarrow[y \to x]{x \to f^{-۱}(x)} f^{-۱}(x) = \frac{x^۲ - ۱}{۲x} = \frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{x})$$

پاسخ تستی :

پس از رد گزینه ی ۱ و ۲ با تعیین برد تابع و در واقع دامنه ی تابع معکوس , به صورت زیر عمل کرده و با دادن یک نقطه ی دلخواه و استفاده از ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی ۱۵ می توان گزینه ی صحیح را از بین گزینه های ۳ و ۴ انتخاب نمود.

طبق ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی ۱۵ داریم :

$$\left(\frac{۳}{۴},۲\right)\in f\to\left(۲,\frac{۳}{۴}\right)\in f^{-۱}\to \text{رد گزینه ی ۴}$$

مثال۱۸۹-اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه های $y=ax^{۲}+bx-۳$, $y=۲x+b$ روی محور x ها در نقطه ای به طول ۱- متقاطع باشند , a کدام است؟(سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

جواب :گزینه ی ۴ صحیح است.

$$۰=a-b-۳\ \ ,\ \ ۰=-۲+b\to b=۲\to a-b=۳\to a-۲=۳\to a=۵$$

مثال۱۹۰-با توجه به ماشین $x\to f\to g\to x$ و $f(x)=۲x-۱$ باشد , آنگاه $g(۰)$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۲)

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

جواب :گزینه ی ۳ صحیح است.

با توجه به تابع ماشین داده شده می توان نوشت :

$$g(f(x))=x\to g(۲x-۱)=x\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}g(۰)=\frac{۱}{۲}$$

مثال۱۹۱-نمودارهای دو تابع $y=۲x^{۲}+ax+b$ و $y=۲x+b$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر محور xها متقاطع اند.a کدام است؟

(سراسری تجربی ۸۱)

۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۳   ۴) ۴

جواب :گزینه ی ۱ صحیح است.

$$(۲,۰)\to\begin{cases}۴+b=۰\to b=-۴\\ ۸+۲a+b=۰\to ۲a=-۸+۴=-۴\to a=-۲\end{cases}$$

مثال۱۹۲-اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ مقدار $(gof)(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

جواب :گزینه ی ۱ صحیح است.

$$(gof)\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

مثال۱۹۳-اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ آنگاه ضابطه ی $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۱)

۱) $x - 1$ ۲) $x + 1$ ۳) $x^2 - 1$ ۴) $x^2 + 1$

جواب :گزینه ی ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

همانطور که می دانیم :

$$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$$

پس بهترین کار همینه که ابتدا تابع fog را به دست آورده و سپس معکوس آن را محاسبه کنیم تا به پاسخ صحیح تست برسیم :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 1 + \sqrt{x^2} = 1 + |x| \xrightarrow{x>0} (fog)(x) = 1 + x$$

حال معکوس تابع را به دست می آوریم :

$$y = 1 + x \to x = y - 1 \to (fog)^{-1} = x - 1$$

پاسخ تستی:

$$g^{-1}of^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

رد گزینه ی ۲ و ۴ : به x اگر یک بدم , آن گاه خواهیم داشت :

$$g^{-1}(f^{-1}(1)) = g^{-1}(0) = 0$$

گزینه ی ۲ و ۴ به دلیل آنکه به ازای عدد یک مقدارشان ۲ می شوند , رد می شوند.

رد گزینه ی ۳ : به x اگر دو بدم , آن گاه خواهیم داشت :

$$g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) = 1$$

گزینه ی ۳ به دلیل آنکه به ازای عدد دو مقدارش ۳ می شود , رد می شود.

مثال۱۹۴-نمودارهای دو تابع $y = ۲x + b$ و $y = x^۳ + ax^۲ - b$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر محور xها متقاطع اند.a کدام است؟(سراسری تجربی ۸۰)

۱) ۱　　۲) ۰　　۳) -۲　　۴) -۳

جواب :گزینه ی ۴ صحیح است.

$$(۲,۰) \to ۰ = ۸ + ۴a - b = ۰ , ۰ = ۴ + b \to b = -۴ \ ,a = -۳$$

مثال۱۹۵-اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $g(x) = \tan x$ ضابطه ی تابع fog در بازه ی $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ برابر کدام است؟(سراسری تجربی ۸۰)

۱) sinx　　۲) cosx　　۳) - sinx　　۴) - cosx

جواب :گزینه ی ۳ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{۱ + \tan^۲ x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}} = \frac{\tan x}{\frac{۱}{|\cos x|}} = \tan x.|\cos x|$$

همانطور که می دانید در بازه ی یاد شده که ربع دوم و سوم مثلثاتی را نشان می دهد , علامت کسینوس همیشه منفی است.پس می توان نوشت :

$$(fog)(x) = \frac{\sin x}{\cos x}(-\cos x) = -\sin x$$

پاسخ تستی :

رد گزینه ی ۲ و ۴ : یک عدد از این بازه اختیار می کنیم :

$$x = \pi \to g(\pi) = \tan\pi = ۰ \to f\big(g(\pi)\big) = f(۰) = ۰$$

پس گزینه ها ی ۲ و ۴ رد می شوند. چون مقدارشان ۱- و ۱ می شود.

رد گزینه ی ۱ : یک عدد دیگر از این بازه اختیار می کنیم :

$$x = \frac{۳\pi}{۴} = ۱۳۵ \to g\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = \tan\frac{۳\pi}{۴} = -۱ \to f\left(g\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)\right) = f(-۱) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس گزینه ی ۱ رد می شود. چون مقدارش $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می شود نه $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مثال۱۹۶-دوره ی تناوب اصلی تابع f با ضابطه ی $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\sin^{۲}\frac{\pi}{۲}x & : \quad x\in Q\\ 0 & : \quad x\in Q\end{cases}}$ **کدام است؟**(سراسری ریاضی ۸۰)

۱) ۲π ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۴π

جواب :گزینه ی ۲ صحیح است.

پاسخ تشریحی :

رابطه ی مثلثاتی روبرو را که حتما به خاطر دارید :

$$\sin^{۲}\frac{\pi}{۲}x=\frac{۱}{۲}(۱-\cos\pi x)\rightarrow T=\frac{۲\pi}{a}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$$

پاسخ تستی :

اگر به x صفر بدم , مقدار تابع هم صفر میشود. حال باید دنبال کوچکترین عددی باشم که دوباره به ازای اون مقدار تابع صفر شود و آن را دوره ی تناوب تابع بنامم.

کاملا مشخص است که این عدد ۲ می باشد.

سلامت و موفق باشید.

پناهی – دبیر دبیرستان های تهران

تیر ماه ۱۴۰۲