www.konkur.in

نام و نام خانوادگی : نام درس : ریاضی (۳) - فصل ۶

پایه تحصیلی : دوازدهم تجربی عنوان آزمون :درس دوم - دایره

نام دبیر : سیّد علی موسوی

۱ معادله خط مماس مشترک دو دایره به معادلات : $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۰$, $x^۲+y^۲=۸$ کدام است؟

۱) $y-x=۲$ ۲) $y+x=۲$ ۳) $y-x=۴$ ۴) $y+x=۴$

۲ معادلهٔ دایره‌ای که بر دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x=۰$ و $x^۲+y^۲-۸x+۱۵=۰$ مماس خارج و مرکزش روی محور x ها است کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲+۵x+۶=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۳x+۱=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۳x-۱=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۵x+۶=۰$

۳ معادلهٔ دایره‌ای که بر دو خط $y=۱$ و $y=۵$ مماس باشد و مرکز آن روی خط $x+y=۴$ باشد کدام است؟

۱) $x^۲-۲x+y^۲-۶y+۶=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۶y+۵=۰$

۳) $x^۲+۲x+y^۲+۶y+۶=۰$ ۴) $x^۲+y^۲+۶y+۵=۰$

۴ مماس مشترک‌های خارجی دو دایره‌ی $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۱$ و $(x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۴$ در کدام نقطه متقاطع‌اند؟

۱) $(۰,۶)$ ۲) $(۶,۰)$ ۳) $(۳,۰)$ ۴) $(۰,۳)$

۵ دو دایرهٔ متمایز $x^۲+y^۲+ax+۴y=۴$ و $x^۲+y^۲-۲x+by=۱۱$ هم‌مرکز هستند. شعاع دایره‌ای که بر دو دایره مماس است چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۶ به ازای کدام مقدار a خط $y+۳x=a$ بر دایره $۲x^۲+۲y^۲-۳x+y=۰$ مماس است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ و $\frac{-۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ و $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۹}{۲}$

۷ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۸ مرکز دایره به عرض ۱ بر محور y ها واقع است. این دایره بر نیمسازهای ناحیه اول و دوم مماس است. معادله‌ی دایره کدام است؟

۱) $x^۲+(y-۱)^۲=۲$ ۲) $x^۲+(y-۱)^۲=\frac{۱}{۲}$ ۳) $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ ۴) $x^۲+(y-۱)^۲=۴$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹ اگر دایره $x^2 + y^2 + 4x + k = 0$ بر نیمساز ربع اول و سوم مماس باشد. مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰ اگر شعاع دایره‌ی $(a+1)x^2 + (a+1)y^2 + 5x + 4y = 2$ برابر $\frac{7}{2}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۱۱ خط $x + y = 2$ در دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x = 0$ وتر AB را بوجود می‌آورد اندازه‌ی وتر AB چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲ دایره‌ای با مرکز $C(1,1)$ خط $3x + 4y + 8 = 0$ را در وتری به طول ۸ قطع می‌کند. این دایره از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(3,4)$ ۲) $(4,3)$ ۳) $(6,1)$ ۴) $(5,2)$

۱۳ چه نقاطی در نابرابریهای زیر صدق می‌کنند؟

(الف) $x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0$ (ب) $2x^2 + 2y^2 + x + y > 0$

۱۴ اگر فاصله نقطه $M(x,y)$ تا نقطه $A(6,0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $B(0,3)$ باشد، نشان دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۱۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0,0)$ و $(7,7)$ گذشته و مرکزش بر خط $6x - 5y = 0$ واقع باشد.

۱۶ مرکز دایره‌ای روی محور yهاست و دایره بر خطوط $y = x - 2$ و $y = x + 4$ مماس است. بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از محور افقی چقدر است؟

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

۱۷ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ که بر نیمسازهای نواحی دوم و سوم مماس است، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\sqrt{2} - 1$ ۲) $1 - \sqrt{2}$ ۳) $4 - \sqrt{2}$ ۴) $2 - \sqrt{2}$

۱۸ دایره‌ای به شعاع ۲، مرکز تقارنش روی خط $y = 2x$ قرار دارد. اگر این دایره بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره تا محور yها کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۹) طول وتری که خط $x - 3y = 5\sqrt{10}$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 129 = 0$ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۴۸

۲۰) طول وتری که خط $y = ax + 2$ بر روی دایره‌ای به معادله $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ جدا می‌کند برابر با ۲ می‌باشد، مقدار a چه‌قدر است؟

۱) $2 \pm \sqrt{3}$ ۲) $1 \pm \sqrt{6}$ ۳) $1 \pm \sqrt{3}$ ۴) $2 \pm \sqrt{6}$

۲۱) شعاع دایره‌ای مماس بر هر دو محور مختصات که از نقطه‌ی $(-1, 2)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۱ یا ۴ ۲) ۱ یا ۵ ۳) ۲ یا ۳ ۴) ۲ یا ۴

۲۲) اگر دایره‌های $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - ax = 5$ مماس برون باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۳) اگر خط $y = x + 3$ یکی از اقطار دایره‌ای باشد که از دو نقطه‌ی $(5, 1)$ و $(0, -4)$ می‌گذرد. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{15}$ ۳) $\sqrt{14}$ ۴) $\sqrt{13}$

۲۴) اندازه‌ی c کدام باشد تا دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0$ بر خط $2x - 3y = 1$ مماس باشد؟

۱) $\frac{27}{13}$ ۲) $\frac{23}{13}$ ۳) $\frac{25}{13}$ ۴) $\frac{25}{11}$

۲۵) دایره‌ای به مرکز $O(-1,3)$ که بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم مماس است، چه مقداری از محور yها را جدا می‌کند؟

۱) $\sqrt{7}$ ۲) $2\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{7}$ ۴) $8\sqrt{7}$

۲۶) طول پاره‌خطی که دایره $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ از خط $3x - 4y = 1$ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۶

۲۷) شعاع دایره گذرا بر سه نقطه‌ی $(0,0)$ و $(2,1)$ و $(-2,-1)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۲۸) دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله‌ی دایره‌ای که با دایره‌ی قبلی مماس داخل بوده و از نقطه‌ی $(-3, 0)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره‌ی داده شده برابر باشد، کدام است؟

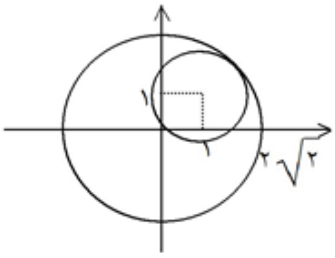
۱) $x^2 + y^2 - 4x = 3$ ۲) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

۳) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ۴) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱ معادله دو دایره را می‌توان بصورت $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ و $x^2+y^2=8$ نوشت. بنابراین $R=\sqrt{2}$ و $R'=2\sqrt{2}$ و

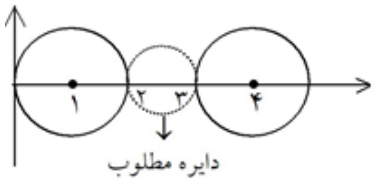


$d=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$ پس $d=R'-R$. بنابراین دو دایره مماس داخل هستند، پس یک مماس مشترک دارند که همان وتر مشترک دو دایره است و از رابطهٔ $C(x,y)-C'(x,y)=0$ بدست می‌آید، (در دو دایره مماس برهم، مماس مشترک همواره وتر مشترک دو دایره است):

معادله مماس مشترک : $x^2+y^2-2x-2y-(x^2+y^2-8)=0 \Rightarrow 2x+2y=8 \Rightarrow x+y=4$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲ گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.



$C_1: x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

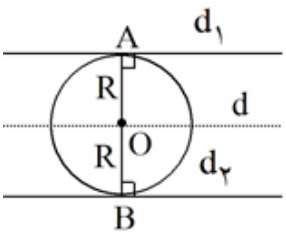
$C_2: x^2-8x+y^2+15=0 \Rightarrow (x-4)^2+y^2=1$

با رسم معادله‌ی دو دایره درمی‌یابیم که مرکز دایره‌ی مورد نظر $\left(\frac{5}{2},0\right)$ و شعاع آن $\frac{1}{2}$ است. پس:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2-5x+6=0$$

۳ هرگاه دایره‌ای بر دو خط موازی مماس باشد، مرکز آن از دو خط به یک فاصله بوده و شعاع آن برابر نصف فاصلهٔ دو خط است. $AB=y_2-y_1=4 \Rightarrow R=2$

مکان مرکز دایره بر خط d موازی دو خط d_1 و d_2 و وسط آنها قرار دارد.



$$O \in d \Rightarrow y_o=\frac{y_1+y_2}{2}=3 \left.\begin{array}{l} \\ x_o+y_o=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_o=1 \Rightarrow$$

$C(x,y): (x-1)^2+(y-3)^2=R^2=4 \Rightarrow x^2-2x+y^2-6y+6=0$

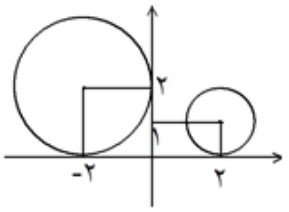
بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴ یادآوری : مماس مشترک خارجی دو دایره با خط المرکزین همرسند.

مطابق شکل محور x ها یکی از مماس مشترک‌های خارجی دو دایره است.



$$\left.\begin{matrix} O_1 : (۲ , ۱) \\ O_2 : (-۲ , ۲) \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1O_2 \text{ معادله : } y - y_1 = \frac{yo_2 - yo_1}{xo_2 - xo_1}(x - xo_1) \Rightarrow$$

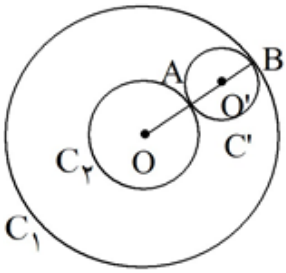
$$y - ۱ = \frac{۱}{-۴}(x - ۲) \Rightarrow y = -\frac{x}{۴} + \frac{۳}{۲}$$

$$\begin{cases} y = ۰ \\ y = -\frac{x}{۴} + \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۰ \end{cases}$$

محل تقاطع محور x ها با خط O_1O_2 جواب مسئله است.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح سؤال است.

۵



$$C_1(x,y): x^۲ + y^۲ - ۲x + by = ۱۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ + \left(y + \frac{b}{۲}\right)^۲ = ۱۲ + \frac{b^۲}{۴}$$

$$C_2(x,y): x^۲ + y^۲ + ax + ۴y = ۴ \Rightarrow \left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۸ + \frac{a^۲}{۴}$$

$$\frac{a}{۲} = -۱ \Rightarrow a = -۲ \Rightarrow R_2 = ۳ \ , \ \frac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow R_1 = ۴$$

دایرهٔ C' بر دو دایرهٔ C_1 و C_2 مماس است، پس شعاع آن برابر است با:

$$O'B = \frac{OB - OA}{۲} = \frac{۴ - ۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ درست است.

۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در صورتی خط بر دایره مماس است که فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد.

$$x^۲ + y^۲ - \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰ \quad \begin{cases} o\left|\begin{matrix} \frac{۳}{۴} \\ -\frac{۱}{۴} \end{matrix}\right. \\ R = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \end{cases}$$

$$\text{فاصله o تاخط} = R \Rightarrow \frac{\left|\frac{-۱}{۴} + \frac{۹}{۴} - a\right|}{\sqrt{۱ + ۹}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow |۲ - a| = \frac{۱۰}{۴} \quad \begin{cases} ۲ - a = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \\ ۲ - a = -\frac{۱۰}{۴} \Rightarrow a = \frac{۹}{۲} \end{cases}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

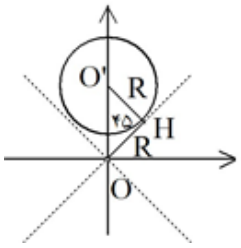
$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$

$$\begin{cases} ۱ - a + c = ۰ \\ ۹ + ۳a + c = ۰ \\ ۹ - ۳b + c = ۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۲ \\ c = -۳ \end{cases}$$

$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - ۳ = ۰$

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۱۲} = \sqrt{۵}$

۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به شکل توجه کنید:



در مثلث $\widehat{OO'H}$: $R^۲ + R^۲ = ۱ \Rightarrow R^۲ = \frac{۱}{۲}$

معادله دایره : $x^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O'\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$

۹ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $y = x$ نیمساز ربع اول و سوم است باید فاصله‌ی مرکز دایره تا این خط برابر با شعاع دایره باشد.

$$\left.\begin{matrix} O(-۲ , ۰) \\ R = \frac{\sqrt{۱۶ - ۴k}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH = R \Rightarrow \frac{|-۲ - ۰|}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۶ - ۴k}}{۲} \Rightarrow k = ۲$$

راه حل دوم: معادله‌ی محل برخورد خط $y = x$ با دایره باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. پس:

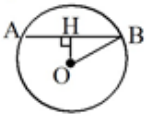
$$y = x \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۴x + k = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x + k = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} ۱۶ - ۸k = ۰ \Rightarrow k = ۲$$

۱۰ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow[\text{تقسیم}]{a + ۱ \text{ بر}} x^۲ + y^۲ + \frac{۵}{a + ۱}x - \frac{۲}{a + ۱} + \frac{۴}{a + ۱}y = ۰$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲۵}{(a + ۱)^۲} + \frac{۱۶}{(a + ۱)^۲} + \frac{۸}{a + ۱}} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow a = ۰$$

۱۱ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. باید فاصله‌ی مرکز از خط $x + y = ۲$ را پیدا کنیم و R شعاع دایره را بدست آوریم.



مرکز $O\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ $R = ۱$

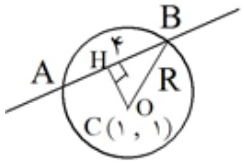
$$x + y = ۲ \Rightarrow OH = \frac{|۱ + ۰ - ۲|}{\sqrt{۱ + ۱}} \Rightarrow OH = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \text{ و } OB = R = ۱$$

$$BH^۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BH = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AB = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AB = \sqrt{۲}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$۳x + ۴y + ۸ = ۰$

$$OH = d = \frac{|۳ + ۴ + ۸|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \Rightarrow R = \sqrt{d^۲ + ۴^۲} = ۵$$

$$(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۲۵ \Rightarrow M\Big|_{۱}^{۶}$$

۱۳

الف) $x^۲ + ۴x + y^۲ - ۱۲ \leqslant ۰$

$$\Rightarrow (x + ۲)^۲ + y^۲ \leqslant ۱۶ \Rightarrow \sqrt{(x + ۲)^۲ + y^۲} \leqslant ۴$$

نقاط داخل دایره و روی دایره $r = ۴ , O(-۲ , ۰)$

ب) $۲x^۲ + ۲y^۲ + x + y > ۰$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}y > ۰ \Rightarrow x^۲ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۱۶} + y^۲ + \frac{۱}{۲}y + \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۸} > ۰$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{۱}{۴}\right)^۲ + \left(y + \frac{۱}{۴}\right)^۲ > \frac{۱}{۸} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{۱}{۴}\right)^۲ + \left(y + \frac{۱}{۴}\right)^۲} > \sqrt{\frac{۱}{۸}}$$

نقاط بیرون دایره $r = \frac{\sqrt{۲}}{۴} , O\left(-\frac{۱}{۴} , -\frac{۱}{۴}\right)$

۱۴

$$AM = ۲BM \qquad \sqrt{(x - ۶)^۲ + y^۲} = ۲\sqrt{(x)^۲ + (y - ۳)^۲} \Rightarrow$$

$$x^۲ - ۱۲x + ۳۶ + y^۲ = ۴\left(x^۲ + y^۲ - ۶y + ۹\right) \Rightarrow ۳x^۲ + ۳y^۲ - ۲۴y + ۱۲x = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲ + y^۲ + ۴x - ۸y = ۰ \Rightarrow O\Big|_{۴}^{-۲} , r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۶۴} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۵

$A\Big|_{۰}^{۰} , B\Big|_{۷}^{۱۷}$ AB عمودمنصف : AB وسط $M\left(\frac{۱۷}{۲} , \frac{۷}{۲}\right)$, $m_{AB} = \frac{۷}{۱۷} \Rightarrow m' = \frac{-۱۷}{۷}$

معادله عمودمنصف $\Rightarrow y - \frac{۷}{۲} = \frac{-۱۷}{۷}\left(x - \frac{۱۷}{۲}\right) \Rightarrow y = \frac{-۱۷}{۷}x + \frac{۳۳۸}{۱۴}$ تقاطع با $۶x - ۵y = ۰$

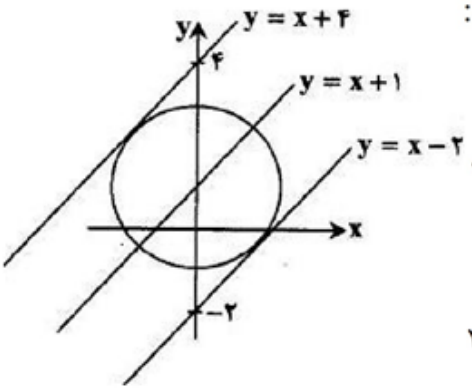
$$\Rightarrow O\left(\frac{۵ \times ۱۶۹}{۲۷} , \frac{۶ \times ۱۶۹}{۲۷}\right)$$

معادله دایره : $\left(x - \frac{۵ \times ۱۶۹}{۲۷}\right)^۲ + \left(y - \frac{۶ \times ۱۶۹}{۲۷}\right)^۲ = ۶۱\left(\frac{۱۶۹}{۲۷}\right)^۲$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۶ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مرکز این دایره، روی خط وسطی قرار دارد:



$$y = \frac{x + ۴ + x - ۲}{۲} = x + ۱$$

پس مرکز دایره روی محور yهاست و روی خط $y = x + ۱$ هم هست. یعنی باید نقطه‌ی $C(۰,۱)$ باشد. شعاع دایره، نصف فاصله‌ی این دو خط موازی است:

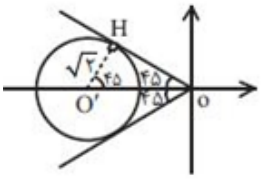
$$۲R = \frac{|۴ - (-۲)|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} \Rightarrow R = \frac{۳}{\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

حالا بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از محور افقی، یعنی عرض بالاترین نقطه‌ی دایره، برابر است با $y_C + R$، یعنی $۱ + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$.

۱۷ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس با توجه به شکل، $O'H = OH = \sqrt{۲}$ می‌باشد، بنابراین:

$$OO' = O'H^۲ + OH^۲ = ۲ + ۲ = ۴ \Rightarrow OO' = ۲$$

پس: $O'(-۲,۰)$، حالا معادله‌ی دایره:

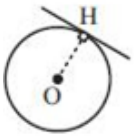


$$(x + ۲)^۲ + (y - ۰)^۲ = \left(\sqrt{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow (x + ۲)^۲ + y^۲ = ۲ \xrightarrow[\text{محور طول ها}]{\text{تلاقی با}} y = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۲ \Rightarrow x + ۲ = \pm\sqrt{۲} \Rightarrow x = -۲ \pm \sqrt{۲}$$

۱۸ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مرکز دایره روی خط $y = ۲x$ است پس به فرم $o(h,۲h)$ خواهد بود. حالا فاصله‌ی OH شعاع دایره است پس:



$$OH = R = \frac{|۳(h) + ۴(۲h) - ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|۱۱h - ۱|}{۵} = ۲$$

$$|۱۱h - ۱| = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱۱h - ۱ = ۱۰ \Rightarrow h = ۱ \\ ۱۱h - ۱ = -۱۰ \Rightarrow h = -\frac{۹}{۱۱} \end{cases}$$

فاصله‌ی مرکز دایره تا محور yها همان طول مرکز دایره یا h است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۹ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^۲ + y^۲ - ۱۲x - ۴y - ۱۲۹ = ۰ \Rightarrow (x - ۶)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱۳^۲$$

$$OH = \frac{|۶ - ۳(۲) - ۵\sqrt{۱۰}|}{\sqrt{۱ + ۹}} = \frac{۵\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}} = ۵ \, , \, r = ۱۳$$

$$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۱۳^۲ - ۵^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow AH = ۱۲$$

$$AB = ۲AH = ۲۴$$

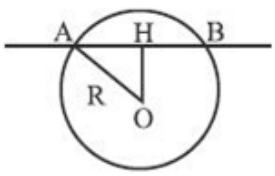
۲۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^۲ + y^۲ + ۴x - ۲y + ۱ = ۰$$

$$O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) \Rightarrow O(-۲, ۱)$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۴ - ۴} = ۲ \Rightarrow R = ۲$$

$$OH = \frac{|۱ + ۲a - ۲|}{\sqrt{۱ + a^۲}} = \frac{|۲a - ۱|}{\sqrt{۱ + a^۲}} \qquad y - ax - ۲ = ۰$$



$$AB = ۲ \Rightarrow AH = ۱ \Rightarrow (AH)^۲ + (OH)^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{R^۲ - (AH)^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{|۲a - ۱|}{\sqrt{a^۲ + ۱}} = \sqrt{۳} \Rightarrow ۴a^۲ - ۴a + ۱ = ۳a^۲ + ۳ \Rightarrow a^۲ - ۴a - ۲ = ۰$$

$$\Delta = ۱۶ + ۸ = ۲۴ \Rightarrow a = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۶}}{۲} \Rightarrow a = ۲ \pm \sqrt{۶}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۱ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

نکته‌ی ۱: در دایره به شعاع r اگر:

دایره مماس بر محورهای مختصات در ربع اول باشد، مرکز آن به‌صورت $O(r , r)$ است.

دایره مماس بر محورهای مختصات در ربع دوم باشد، مرکز آن به‌صورت $O(-r , r)$ است.

دایره مماس بر محورهای مختصات در ربع سوم باشد، مرکز آن به‌صورت $O(-r , -r)$ است.

دایره مماس بر محورهای مختصات در ربع چهارم باشد، مرکز آن به‌صورت $O(r , -r)$ است.

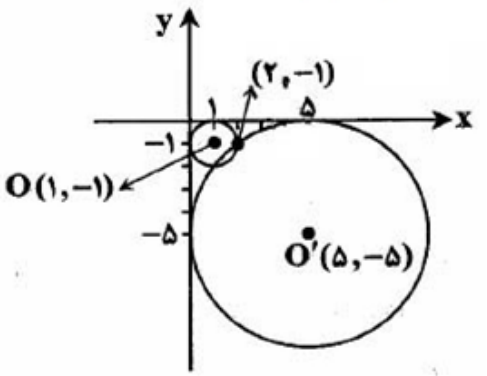
نکته‌ی ۲: فاصله‌ی هر نقطه روی دایره از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

این دایره از نقطه‌ی $(۱- , ۲)$ می‌گذرد، پس باید در ربع چهارم باشد. با توجه به نکته‌ی (۱)، مرکز این دایره به‌صورت $O(r , -r)$ است. چون نقطه‌ی $A(۲ , -۱)$ روی این دایره است، از نکته‌ی (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$|OA| = r \Rightarrow |OA|^۲ = r^۲ \Rightarrow (۲ - r)^۲ + (-۱ + r)^۲ = r^۲ \Rightarrow ۴ - ۴r + r^۲ + ۱ - ۲r + r^۲ = r^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ - ۶r + ۵ = ۰ \Rightarrow (r - ۵)(r - ۱) = ۰ \Rightarrow r = ۱ \text{ یا } ۵$$

بنابراین دو دایره با مراکز $(۱- , ۱)$ و $(۵- , ۵)$ به‌ترتیب با شعاع‌های ۱ و ۵ با این ویژگی‌ها وجود دارد.



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4 \Rightarrow O(2,-3)\ ,\ R=\sqrt{4}=2$$

$$x^2+y^2-ax=5 \Rightarrow x^2+y^2-ax-5=0$$

$$O'\left(\frac{a}{2},0\right)\ ,\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+20}$$

برای این‌که این دو دایره نسبت به هم مماس بیرون باشد لازم است:

$$OO'=R+R'$$

ابتدا OO' را به‌دست می‌آوریم:

$$OO'=\sqrt{\left(2-\frac{a}{2}\right)^2+(-3)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-2a+13}$$

در نهایت مقادیر را در رابطهٔ $OO'=R+R'$ جایگذاری می‌کنیم:

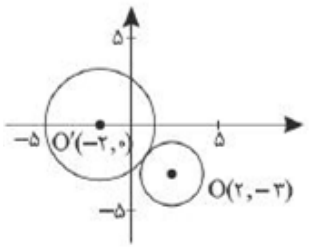
$$\sqrt{\frac{a^2}{4}-2a+13}=2+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+20}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{a^2}{4}-2a+13=4+2\sqrt{a^2+20}+\frac{1}{4}(a^2+20)$$

$$\Rightarrow 4-2a=2\sqrt{a^2+20} \Rightarrow 2-a=\sqrt{a^2+20}$$

مجدداً طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:



$$(2-a)^2=a^2+20$$
$$\Rightarrow a^2-4a+4=a^2+20$$
$$\Rightarrow -4a=16 \Rightarrow a=-4$$

۲۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم همه‌ی اقطار دایره از مرکز آن می‌گذرند. پس مرکز دایره روی خط $y=x+3$ قرار دارد. یعنی می‌توان مختصات آن‌را به شکل $O(x\ ,\ x+3)$ درنظر گرفت. چون فاصله‌ی مرکز از هر نقطه روی محیط دایره برابر شعاع دایره است، پس: $R=OA=OB$

$$A(1\ ,\ 5)\ ,\ B(-4\ ,\ 0) \Rightarrow OA=\sqrt{(x-1)^2+(x+3-5)^2} \Rightarrow OB=\sqrt{(x+4)^2+(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(x-2)^2=(x+4)^2+(x+3)^2 \Rightarrow x^2-2x+1+x^2-4x+4$$
$$=x^2+8x+16+x^2+6x+9 \Rightarrow 20x=-20 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow OA=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}=R$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر خطی بر دایره‌ای مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0 \Rightarrow O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\sqrt{16 + 36 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{52 - 4c}}{2} = \sqrt{13 - c}$$

$$O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix}\ ,\ 2x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{|2(2) - 3(-3) - 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13 - c} = \frac{12}{\sqrt{13}} \Rightarrow 13 - c = \frac{144}{13} \Rightarrow 169 - 13c = 144 \Rightarrow 13c = 25 \Rightarrow c = \frac{25}{13}$$

۲۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع دایره فاصله‌ی مرکز آن از خط $y = x$ است:

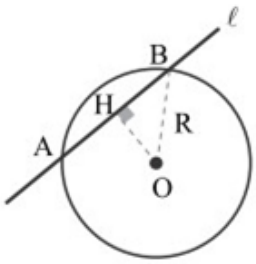
$$\begin{matrix}O\ (-1;3)\\ l : y - x = 0\end{matrix} \Rightarrow r = \frac{|3 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی دایره}} (x+1)^2 + (y-3)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \xrightarrow{x = 0} 1 + (y-3)^2 = 8$$

$$\Rightarrow (y-3)^2 = 7 \Rightarrow y - 3 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 + \sqrt{7} \\ y_2 = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = 2\sqrt{7}$$

۲۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow O\begin{vmatrix}-2\\-1\end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 - 4(4)}}{2} = 1$$

$$O\begin{vmatrix}-2\\-1\end{vmatrix}\ ,\ l : 3x - 4y - 1 = 0 \Rightarrow OH = \frac{|-6 + 4 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow HB = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = 2HB = \frac{8}{5} = 1/6$$

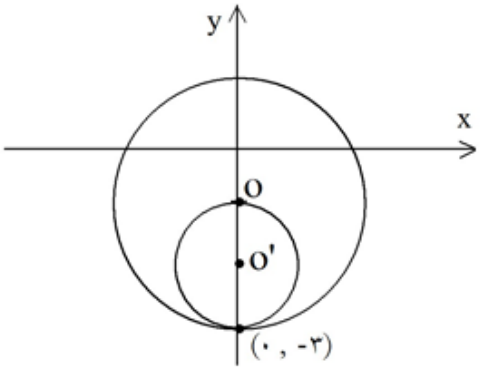
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادله‌ی دایره‌ی مطلوب به‌صورت $f(x,y): x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ فرض شود، چون از سه نقطه‌ی $(۰,۰)$ و $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقاط باید در معادله‌ی دایره صدق کند، یعنی:

$$f(۰,۰) = ۰ \Rightarrow c = ۰$$
$$f(۲,۱) = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱ + ۲a + b + c = ۰ \Rightarrow ۲a + b = -۵$$
$$f(۱,-۲) = ۰ \Rightarrow ۱ + ۴ + a - ۲b + c = ۰ \Rightarrow a - ۲b = -۵$$
$$\begin{cases} ۲a + b = -۵ \\ a - ۲b = -۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳ \quad , \quad b = ۱$$
$$\Rightarrow f(x) = x^۲ + y^۲ - ۳x + y = ۰$$
$$\Rightarrow R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹ + ۱} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

۲۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$x^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲^۲ \Rightarrow R = ۲ \, , \, O(۰ \, , \, -۱)$$

مطابق شکل اگر دایره جدید بخواهد با دایره فعلی مماس داخل باشد و از نقطه $(۳- \, , \, ۰)$ نیز عبور کند تنها حالت آن است که دایره مذکور تنها نقطه تماسش (نقطه مماس) همان نقطه $(۳- \, , \, ۰)$ باشد. پس مرکز دایره جدید به فرم $O'(۰ \, , \, y_۰)$ است.

شعاع دایره جدید نصف شعاع دایره داده شده $\longrightarrow R' = ۱ \, , \, O' = (۰ \, , \, -۲)$

$$x^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$

Telegram: @konkur_in