

۱ در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین نقاط بیضی سه برابر فاصله همان کانون از نزدیکترین نقاط آن بیضی است، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۲ بیضی با دو سر قطر بزرگتر $A'(-2, 1)$ و $A(6, 1)$ و خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{4}$ بر کدام خط مماس است؟

$y = 2$ (۱) $y = 3$ (۲) $y = 2\sqrt{3}$ (۳) $y = 3\sqrt{2}$ (۴)

۳ مختصات کانون F یک بیضی با عرض مثبت که بر چهار خط $x = -1$, $x = 5$, $y = -4$, $y = 6$ مماس باشد، کدام است؟

$(2, 5)$ (۱) $(2, 3)$ (۲) $(1, 5)$ (۳) $(1, 3)$ (۴)

۴ در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

$0/6$ (۱) $0/64$ (۲) $0/75$ (۳) $0/8$ (۴)

۵ در داخل یک مکعب به طول یال a مخروطی با بیشترین حجم ممکن قرار می‌دهیم. حجم مخروط چند برابر حجم مکعب است؟

$\frac{\pi}{4}$ (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{2\pi}{9}$ (۴)

۶ اندازه مماسی که از نقطه $(-1, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 7x + 6y = 0$ رسم شود کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۷ به ازای کدام مقدار a قائم‌های بر منحنی به معادله $2x^2 + (a-1)y^2 - 3x + 4y = 0$ همواره از نقطه ثابتی می‌گذرند؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴)

۸ فاصله نقطه متحرک $M(x, y)$ از نقطه $A(1, 3)$ به اندازه $\sqrt{2}$ برابر فاصله M تا نقطه $B(-2, 4)$ است، شعاع

دایره مسیر حرکت M ، کدام است؟
 ۱) $2\sqrt{6}$ (۲) ۲) $2\sqrt{5}$ (۳) ۳) ۵ (۴) ۴) ۴ (۴)

۹ دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ و $x^2 + y^2 + 2y = 0$ نسبت به هم چگونه‌اند؟
 ۱) مماس داخلی (۲) مماس خارجی (۳) متخارج (۴) متقاطع

۱۰ معادله دایره‌ای به مرکز $O(-1, 2)$ و به شعاع ۲ کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$
 ۳) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

۱۱ شعاع انحنای منحنی حاصل از نقطه M به مختصات $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$ وقتی t تغییر می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۲ معادله خط راستی که نقاط تقاطع دو دایره $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$ ، $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$ را به هم وصل می‌کند کدام است؟
 ۱) $x = 0$ (۲) $y = 0$ (۳) $x = y$ (۴) $x = -y$

۱۳ تمام خطوطی که با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ زاویه ۹۰ درجه بسازند از نقطه ثابت A می‌گذرند مختصات A کدام است؟
 ۱) $(1, -2)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(2, -1)$ (۴) $(-1, 2)$

۱۴ مختصات مرکز دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ کدام است؟
 ۱) $(2, -3)$ (۲) $(3, -2)$ (۳) $(-3, 2)$ (۴) $(-2, 3)$

۱۵ دو دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ ، $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟
 ۱) متخارج (۲) متداخل (۳) مماس خارج (۴) مماس داخل



۱۶

معادله دایره مماس داخل با دایره $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (1 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2$ که مختصات مرکز آن $(2\alpha, 2\beta)$ است کدام است؟

$$(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 = \frac{1}{9} \quad (2) \qquad (x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 = \frac{1}{16} \quad (1)$$

$$(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 = 1 \quad (4) \qquad (x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 = \frac{1}{4} \quad (3)$$

۱۷

معادله دایره‌ای که مرکزش $C(0, 1)$ و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 2y - 23 + 16\sqrt{2} = 0 \quad (2) \qquad x^2 + y^2 - 2y - 11 + 8\sqrt{2} = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2y + 23 + 16\sqrt{2} = 0 \quad (4) \qquad x^2 + y^2 + 2y + 11 + 8\sqrt{2} = 0 \quad (3)$$

۱۸

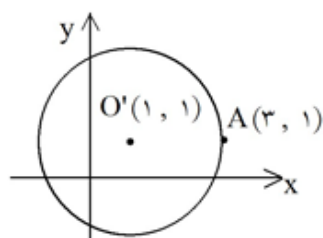
معادله قائم بر منحنی $y^2 + x^2 - 6y - 2x + 5 = 0$ در نقطه $A(2, 1)$ چیست؟

$$2y + x = 5 \quad (4) \qquad y + 2x = 5 \quad (3) \qquad 2y - x = 5 \quad (2) \qquad y - 2x = 5 \quad (1)$$

۱۹

به ازای چه مقدار k ، معادله $(k - 2)x^2 + (6 - k)(y + 1)^2 = 18$ یک دایره را مشخص می‌کند؟

$$2 \quad (4) \qquad 4 \quad (3) \qquad 6 \quad (2) \qquad 8 \quad (1)$$



در شکل زیر، O' مرکز و A یک نقطه از دایره است. معادله دایره کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 3x - y = 4 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 4 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 - 3x - y = 2 \quad (4)$$

۲۱

معادله خط مماس مشترک دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 = 8$ ، $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ کدام است؟

$$y + x = 4 \quad (4) \qquad y - x = 4 \quad (3) \qquad y + x = 2 \quad (2) \qquad y - x = 2 \quad (1)$$

۲۲

معادله وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ، $x^2 + y^2 - 2y = 0$ کدام است؟

$$y = 2x \quad (4) \qquad y = x \quad (3) \qquad y = -x \quad (2) \qquad y = -2x \quad (1)$$

۲۳

معادله دایره به شعاع $3\sqrt{2}$ و مماس بر نیمساز ناحیه اول و نیمساز ناحیه دوم کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 12x = 18 \quad (2) \qquad x^2 + y^2 - 12y = 18 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \quad (4) \qquad x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0 \quad (3)$$



۲۴ به ازای کدام مقادیر a نمودار معادله $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ یک دایره حقیقی است؟
 (۱) $a > 3$ (۲) $a < 17/5$ (۳) $a < 1/5$ (۴) $a < 17$

۲۵ دایره به معادله $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$ از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد. شعاع دایره چقدر است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{b}{a}$ (۳) $a\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۶ معادله دایره‌ای به مرکز $C(0, 1)$ که از خط به معادله $y = 3$ و تری به طول ۲ جدا کند، کدام است؟
 (۱) $x^2 + y^2 + 2y = 4$ (۲) $x^2 + y^2 - 2y = 4$
 (۳) $x^2 + y^2 - 2y = 3$ (۴) $x^2 + y^2 + 2y = 3$

۲۷ معادله قطری از دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ که به موازات محور y ها است، کدام است؟
 (۱) $x = -3$ (۲) $x = -2$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 3$

۲۸ طول خط‌المركزین دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ ، $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{10}$

۲۹ معادله قطری از دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ عمود بر خط $y = x$ ، کدام است؟
 (۱) $y + x = 2$ (۲) $y + 2x = 2$ (۳) $2y + x = 1$ (۴) $y + x = 1$

۳۰ شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(1, 2)$ ، $(3, 0)$ گذشته و مرکز تقارن آن روی خط به معادله $y = 2x - 1$ باشد، کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{13}$

۳۱ دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟
 (۱) مماس خارجی (۲) مماس داخلی (۳) متقاطع در دو نقطه (۴) یکی خارج دیگری

۳۲ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

۳۳ دسته خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ قطرهای یک دایره‌اند اگر این دایره از نقطه $(2, 5)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$



۳۴ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟
 (۱) مماس داخل (۲) مماس خارج (۳) متقاطع (۴) متداخل

۳۵ طول قطعه‌ی مماسی که از نقطه‌ی $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ رسم شود برابر کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) $2\sqrt{3}$

۳۶ به ازای کدام مقدار a دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله‌ی $x + 3y = 0$ مماس است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۵

۳۷ به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل‌اند؟

(۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۲

۳۸ دایره به مرکز $(2, 0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y = 1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

(۱) ۳, ۱ (۲) ۴, ۰ (۳) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ (۴) $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

۳۹ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج

۴۰ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(0, 0), (-2, 4), (2, 1)$ می‌گذرد کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

۴۱ شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(0, 0), (2, 1), (1, -2)$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۴۲ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

(۱) $\{-3\}$ (۲) $\{3\}$ (۳) $\{-3, 3\}$ (۴) \emptyset

۴۳ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله‌ی $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳



۴۴ دایره‌ای، محور X ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیم‌ساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

۴۵ دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور X ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۱) ۱ و ۳ (۲) ۱ و ۴ (۳) ۲ و ۳ (۴) ۴ و $1/5$

۴۶ دایره گذرا بر نقطه $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

(۱) ۱، ۴ (۲) ۱، ۵ (۳) ۲، ۴ (۴) ۲، ۵

۴۷ نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این

دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۱) $3, -5$ (۲) $2, -4$ (۳) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

۴۸ دایره‌ای به مرکز $(1, 3)$ بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، و تری به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر

روی محور X ها، و تری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

(۱) $2\sqrt{6}$ (۲) ۶ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴) ۸

۴۹ فرض کنید خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ و قطرهای یک دایره و خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

(۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{5} - 2$

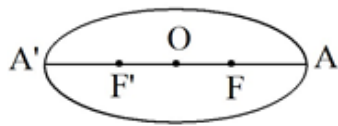
۵۰ دایره‌های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع‌اند. معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

(۱) $x = y$ (۲) $x = 1 + y$ (۳) $x = -y$ (۴) $x = 1 - y$

۵۱ دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله‌ی دایره‌ای که با دایره‌ی قبلی مماس داخل بوده و از نقطه‌ی $(0, -3)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره‌ی داده شده برابر باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 - 4x = 3$ (۲) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$
 (۳) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (۴) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$





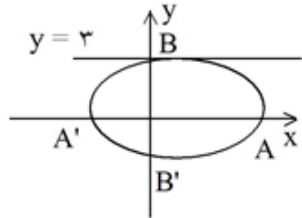
$$\left. \begin{aligned} FA' = 2FA &\Rightarrow FF' + F'A' = 2FA \\ FA = F'A' \end{aligned} \right\} \Rightarrow FF' = 2AF$$

$$FA = OA - OF = a - c \Rightarrow FF' = 2c = 2FA = 2(a - c) \Rightarrow a = 2c$$

$$\text{خروج از مرکز بیضی} = e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۱



$$A(6, 1), A'(-2, 1) \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

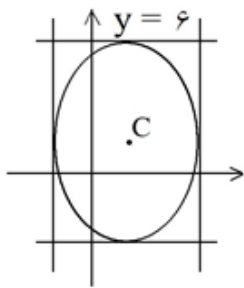
$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow (\text{قطر کوچک}) b = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲

مرکز بیضی (نقطه C) وسط دو نقطه A و A' است، پس $C\left(\frac{6-2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = C(2, 1)$

دو سر قطر کوچک B(2, 3) و B'(2, -1) می‌باشد. پس بیضی می‌توان بر خط $y = 3$ یا $y = -1$ مماس شود. با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بیضی مورد نظر در مستطیلی که توسط چهار خط $x = -1$ و $x = 5$ و $y = -4$ و $y = 6$ ایجاد می‌شود، محاط شده است و مرکز بیضی بر مرکز مستطیل منطبق است. مختصات مرکز بیضی بصورت زیر می‌باشد:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{5 - (-1)}{2} = 2 \\ y_C &= \frac{6 - (-4)}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(2, 1)$$

فاصله مرکز تا $y = 6$ نصف قطر بزرگ است پس $a = 5$ و فاصله مرکز تا $x = 5$ نصف قطر کوچک است پس $b = 3$ می‌باشد. از طرفی $a^2 = b^2 + c^2$ بنابراین $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ می‌باشد. فاصله هر کانون تا مرکز بیضی برابر c می‌باشد و کانون روی قطر بزرگ بیضی است. مختصات کانون با عرض مثبت به صورت $F(x = \alpha, y = \beta + c)$ می‌باشد. بنابراین $F(2, 5)$ بوده و گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
* مختصات کانون با عرض منفی بصورت $F'(\alpha, \beta - c) = F'(2, -3)$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

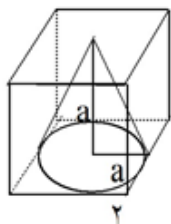
$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$F: (2, 5)$$

$$F': (2, -1) \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$



اگر در داخل یک مکعب به ضلع a ، مخروطی محاط کنیم، مرکز مخروط بر مرکز قاعده مکعب منطبق می‌شود و ارتفاع مخروط مقدار ثابت a است. پس هنگامی که حجم مخروط ماکزیمم است که سطح قاعده مخروط ماکزیمم شود یعنی به صورت شکل مقابل، که در این صورت شعاع مخروط برابر می‌شود با $\frac{a}{2}$. پس:

$$\left. \begin{aligned} \text{مخروط } V &= \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{1}{12} \pi a^3 \\ \text{مکعب } V &= a^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{مخروط } V}{\text{مکعب } V} = \frac{\frac{1}{12} \pi a^3}{a^3} = \frac{\pi}{12}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $f(x, y) = 0$ معادله‌ی دایره باشد آن‌گاه $\sqrt{f(A)}$ طول مماس رسم شده از A بر

دایره است.

$$\text{طول مماس} = \sqrt{f(3, -1)} = \sqrt{9 + 1 + 21 - 6} = 5$$



7 چون همه قائم‌ها از نقطه ثابتی می‌گذرند پس مقطع مورد نظر دایره بوده و نقطه مورد نظر مرکز آن می‌باشد هرگاه ضرایب X^2 و Y^2 برابر باشند، منحنی داده شده تبدیل به دایره خواهد شد. پس گزینه 1 صحیح است.

$$2 = a - 1 \Rightarrow a = 3$$

8 با توجه به آنکه فاصله نقطه $M(x, y)$ از $N(p, q)$ بصورت $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ می‌باشد، داریم:

$$MA = \sqrt{2} MB \Rightarrow MA^2 = 2MB^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 2((x+2)^2 + (y-4)^2) \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 2(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20) \Rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$$

اگر معادله فوق را بصورت استاندارد بنویسیم:

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 20 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

پس گزینه 2 صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} C_1 : x^2 + (y+1)^2 = 1 \Rightarrow O_1(0, -1), R_1 = 1 \\ C_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow O_2(1, -2), R_2 = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$d \text{ خط‌المركزين} = O_1 O_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow R_2 - R_1 < d < R_1 + R_2$$

پس دو دایره متقاطعند. بنابراین گزینه 4 پاسخ صحیح است.

10 معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R بصورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ می‌باشد. بنابراین:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

پس گزینه 2 صحیح است.

11 در منحنی M ، اگر x و y را به توان 2 برسانیم، خواهیم داشت:

$$M \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \xrightarrow{\text{توان 2}} \begin{cases} x^2 = 2 \cos^2 t \\ y^2 = 2 \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2$$

$$\Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

با توجه به معادله حاصل، منحنی M یک دایره به شعاع $\sqrt{2}$ می‌باشد. بنابراین گزینه 4 صحیح است.



۱۲ در دو دایره متقاطع وتر مشترک از محل تقاطع دو دایره می‌گذرد. معادله وتر مشترک دو دایره بصورت $C(x, y) - C'(x, y) = 0$ است پس:

$$C(x, y) - C'(x, y) = \left(x^2 + y^2 + x - \frac{3}{4}\right) - \left(x^2 + y^2 - x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.

۱۳ وقتی خطی با دایره‌ای زاویه 90° می‌سازد، از مرکز دایره می‌گذرد و چون محل هم‌رسی این خطوط نقطه A است لذا A مرکز دایره است. پس:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 \Rightarrow A(1, -2)$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۱۴ نکته: مختصات مرکز دایره

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ و اندازه شعاع آن } R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \text{ می‌باشد.}$$

با توجه به این نکته، مختصات مرکز دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ نقطه $\left(\frac{-(-4)}{2}, \frac{-6}{2}\right)$ یعنی $(2, -3)$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۱۵ با توجه به معادله‌ی دایره‌ها که $C_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ ، $C_2: (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 1$ ، مرکز و شعاع دایره‌ها بصورت $R_1 = 4$ ، $O_1(2, 3)$ ، $R_2 = 1$ ، $O_2(5, 7)$ می‌باشند. طول خط‌المركزین دو دایره

$$O_1O_2 = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = 5 \text{ می‌باشد. مشاهده می‌شود که } O_1O_2 = R_1 + R_2 \text{ پس دو دایره$$

مماس خارجند و گزینه ۳ صحیح است.



می‌دانیم در دو دایره مماس داخل $|R - R'| = d$ است. لذا ابتدا d طول خط مرکزین را می‌یابیم:

$$\left. \begin{array}{l} O(\alpha, \beta) \\ O'(2\alpha, 2\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow OO' = d = \sqrt{(2\alpha - \alpha)^2 + (2\beta - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$|R - R'| = d \Rightarrow R - R' = \pm d \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R' = R - d \Rightarrow R' = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 1\right) - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \\ R' = R + d \Rightarrow R' = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 1\right) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

مسئله دو جواب دارد. که جواب اول با $R' = 1$ در گزینه‌ها وجود دارد.
پس معادله دایره بصورت $(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 = 1$ بوده و گزینه ۴ صحیح است.

شرط مماس بودن دو دایره به شعاعهای R, R' و خط مرکزین d بصورت $d = R + R'$ برای مماس خارج و

$d = |R - R'|$ برای مماس داخل می‌باشد. در دایره مفروض $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ است، پس:

$$R = 4, C'(2, 3) \Rightarrow d = CC' = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$d = |R - R'| = 2\sqrt{2} \Rightarrow R - R' = \pm 2\sqrt{2}$$

چون طول خط مرکزین از R کمتر می‌باشد، بنابراین دو دایره تنها می‌توانند مماس داخل باشند، مسئله در این حالت ۲ جواب دارد.

$$\begin{cases} R' = R - d = 4 - 2\sqrt{2} \\ R' = R + d = 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

در نتیجه معادله دایره‌های مورد نظر بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (4 - 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 23 + 16\sqrt{2} = 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (4 + 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 23 - 16\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

دایره به شعاع $4 - 2\sqrt{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد. بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.



۱۸

در منحنی داده شده چون ضرایب x^2 و y^2 برابر هستند بنابراین منحنی داده شده معادله یک دایره است. می دانیم که قائم بر دایره از مرکز دایره می گذرد. پس ابتدا مرکز دایره را بدست می آوریم:

$$y^2 + x^2 - 6y - 2x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5 \Rightarrow \text{مرکز دایره} = O(1, 3)$$

$$\frac{y-1}{x-2} = \frac{3-1}{1-2} \Rightarrow y + 2x = 5$$

پس باید معادله خط گذرنده بر O و A را بنویسیم:

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۱۹

شرط دایره بودن معادله داده شده، یکسان بودن ضرایب x^2 و y^2 می باشد، پس:

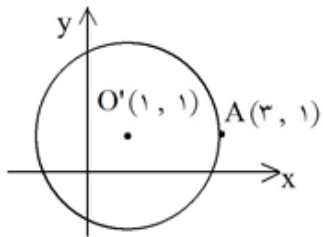
$$k - 2 = 6 - k \Rightarrow k = 4$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲۰

شعاع دایره برابر است با فاصله O' تا A ، پس:

$$R = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2} = 2$$



معادله دایره از رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ بدست می آید که (α, β) مرکز آن است.

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲۱

معادله دو دایره را می توان بصورت $x^2 + y^2 = 8$ و $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ نوشت.

بنابراین $R = \sqrt{2}$ و $R' = 2\sqrt{2}$ و

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

دو دایره مماس داخل هستند، پس یک مماس مشترک دارند که همان وتر مشترک

دو دایره است و از رابطه $C(x, y) - C'(x, y) = 0$ بدست می آید، (در دو دایره مماس برهم، مماس مشترک همواره وتر مشترک دو دایره است):

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - (x^2 + y^2 - 8) = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 8 \Rightarrow x + y = 4$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۲

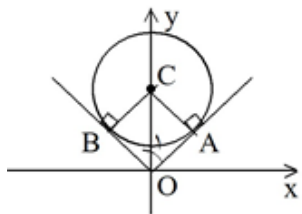
می دانیم وتر مشترک دو دایره متقاطع روی خطی است که از محل برخورد دو دایره می گذرد.

$$x^2 + y^2 - 2x = x^2 + y^2 - 2y \Rightarrow x = y$$

نقاط تلاقی دو دایره داده شده را حساب می نمایم:

پس خط $y = x$ معادله وتر مشترک دو دایره است، بنابراین گزینه ۳ صحیح است.





۲۳ می‌دانیم هرگاه دایره‌ای بر دو خط مماس باشد مرکز دایره روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد.

چون دایره مورد نظر بر نیمسازهای ربع اول و دوم مماس است، پس همانطور که در شکل دیده می‌شود، مرکز آن روی محور y ها قرار دارد.

در مثلث OAC چون $\widehat{O_1} = 45^\circ$ پس، مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، لذا

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 = 2AC^2 = 2(3\sqrt{2})^2 = 36 \Rightarrow OC = 6 \quad \text{پس: } AC = AO$$

پس $C(0, 6)$ مرکز دایره و $R = 3\sqrt{2}$ است. بنابراین معادله دایره بصورت $x^2 + (y - 6)^2 = 18$ و یا

$$x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0 \quad \text{لذا گزینه ۳ صحیح است.}$$

۲۴ معادله کلی دایره بصورت $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ می‌باشد.

هرگاه معادله را به فرم اصلی معادله دایره تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} - a = \frac{34 - 4a}{4} = R^2 > 0$$

$$\Rightarrow 34 - 4a > 0 \Rightarrow a < 8.5$$

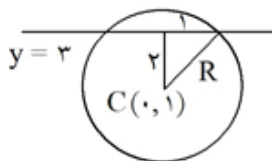
بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲۵ چون دایره از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد پس مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند. داریم:

$$a(1 + 1) + b(1 + 1) = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{در نتیجه معادله بصورت روبرو درمی‌آید:}$$

$$\text{از روی معادله فوق، } R^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و گزینه ۴ جواب صحیح است.}$$



۲۶ فاصله نقطه $(0, 1)$ از خط $y = 3$ برابر با ۲ است و چون عمودی که از مرکز دایره بر وتر وارد می‌شود آن را نصف می‌کند، پس مطابق شکل برای محاسبه شعاع:

$$R^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 4$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۷ معادله دایره داده شده را می‌توان به فرم استاندارد زیر نوشت:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$$

چون مرکز دایره نقطه $(3, -2)$ است و قطر نیز باید از مرکز گذشته و موازی محور y ها نیز باشد، پس معادله قطر

مورد نظر بصورت $x = 3$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



اگر معادلات دو دایره را به فرم استاندارد بنویسیم: ۲۸

$$C_1: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$C_2: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

مرکز دایره اول $O(-1, 1)$ و مرکز دایره دوم $O(-2, 2)$ است و فاصله آنها برابر است با:

$$O_1 O_2 = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۲۹ می‌دانیم حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود برهم برابر -1 می‌باشد.

مرکز دایره نقطه $(1, 0)$ است و چون قطر دایره باید بر خط $y = x$ عمود باشد پس دارای شیب -1 خواهد بود پس معادله قطر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y + x = 1$$

یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۳۰ می‌دانیم مرکز تقارن دایره، مرکز دایره است.

چون مرکز دایره روی خط تقارن است پس مرکز بصورت $(a, 2a - 1)$ می‌باشد. فاصله مرکز از $(1, 2)$ با فاصله مرکز از $(3, 0)$ برابر است (شعاع دایره):

$$\sqrt{(a-1)^2 + (2a-2)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (2a-1)^2} \Rightarrow$$

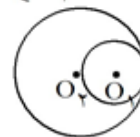
$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 \Rightarrow a = 0$$

پس $R = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ و گزینه ۳ صحیح است.

$$C_1(x, y): x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \Rightarrow C_1(x, y): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O_1 = (2, -4) \\ R_1 = 1 \end{cases} \quad ۳۱$$

$$C_2(x, y): x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow C_2(x, y): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} O_2 = (2, -2) \\ R_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{طول خط‌المركزين } O_1 O_2 = \sqrt{0^2 + (-2 + 4)^2} = 2 = R_2 - R_1$$



لذا ۲ دایره مماس داخل می‌باشند بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$\begin{cases} 1 - a + c = 0 \\ 9 + 3a + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 12} = \sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای m ، عددگذاری می‌کنیم تا دو خط به دست آید. محل برخورد آنها، مرکز دایره است. ۳۳

$$\left. \begin{matrix} m = -2 \Rightarrow x = +1 \\ m = -1 \Rightarrow y = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{مرکز: } C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow CM = R = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 18 \Rightarrow O \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} R = 3\sqrt{2}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} R' = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} = |R - R'| \text{ مماس داخل}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$MT = \sqrt{16 + 1 - 8 + 4 + 3} = 4$$

* نکته: اگر معادله‌ی دایره $C(x, y) = 0$ باشد و $A(x, y)$ نقطه‌ای از صفحه آنگاه طول مماس رسم شده بر

$$MT = \sqrt{C(x, y)}$$

دایره از نقطه A برابر است با:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$\begin{cases} x = -3y \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \end{cases} \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0$$

$$10y^2 + 10y + a = 0$$

$$\Delta = 100 - 40a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

راه دوم: فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مساوی شعاع دایره است.

$$O \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) = (1, -2), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16 - 4a}}{2} = \sqrt{5 - a}$$

$$OH = R \Rightarrow \frac{|1 - 6|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{5 - a} \Rightarrow 25 = 50 - 10a \Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$C: x^2 + (y - 2)^2 = -b + 4$$

$$C': (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad o \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right| \text{ و } o' \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right| \Rightarrow oo' = \sqrt{2} = |R - R'| = |\sqrt{-b + 4} - \sqrt{2}| \Rightarrow b = -4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره، فاصله $(2, 0)$ از خط $y = x$ است. ۳۸

$$R = \frac{r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 18$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

$$\left. \begin{aligned} O_1 \left| \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right| \quad O_2 \left| \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix} \right| \quad r_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ |O_1 O_2| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow O_1 O_2 = r_1 + r_2 \text{ مماس خارج}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دایره را $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می‌گیریم و نقاط داده شده را در دایره صدق می‌دهیم. ۴۰

$$(0, 0) \in \text{دایره} \Rightarrow c = 0$$

$$(2, 1) \in \text{دایره} \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -5$$

$$(-2, 4) \in \text{دایره} \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \Rightarrow -2a + 4b = -20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{دایره: } x^2 + y^2 - 5y = 0 \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{5}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم که معادله دایره‌ی مورد نظر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد و سه نقطه‌ی $A(0, 0)$ ، $B(2, 1)$ و $C(1, -2)$ نقاط روی این دایره می‌باشند پس مختصات آن‌ها در دایره صدق می‌کند: ۴۱

$$\begin{cases} A \begin{cases} 0 + 0 + 0 + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ B \begin{cases} 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \\ C \begin{cases} 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 2a + b = -5 \\ a - 2b = -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

به این ترتیب معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ است و شعاع این دایره برابر است با:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای این که معادله‌ی مقطع مخروطی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ دایره باشد، باید ابتدا ضرایب x^2 و y^2 را برابر قرار دهیم:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

حال با جایگذاری $a = \pm 3$ در معادله، آن را به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ تبدیل و شرط $a^2 + b^2 - 4c > 0$ را کنترل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = 4 - 6 = -2 < 0 \\ a = -3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 + 6 = 10 > 0 \end{cases}$$

بنابراین $a = -3$ قابل قبول است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مرکز دایره روی خط $y = 2x$ قرار دارد، پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha, 2\alpha)$ می‌باشد. چون این دایره از دو نقطه‌ی $A(0, 0)$ و $B(3, 1)$ می‌گذرد، لذا فاصله‌ی مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع دایره است. بنابراین داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 = (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (4\alpha^2 - 4\alpha + 1) \Rightarrow \cancel{\alpha^2} = \cancel{\alpha^2} - 10\alpha + 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow O(1, 2) \Rightarrow R = OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ ۴۴

$h = k$ مرکز روی نیمساز ربع اول است.

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = R^2$$

$$(1, 0) \Rightarrow (1 - h)^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow (1 - h)^2 + h^2 = (3 - h)^2 + h^2 \Rightarrow (1 - h)^2 = (3 - h)^2$$

$$(3, 0) \Rightarrow (3 - h)^2 + h^2 = R^2$$

$$\Rightarrow |1 - h| = |3 - h| \Rightarrow 1 - h = \pm(3 - h) \Rightarrow h = 2 \Rightarrow k = 2$$

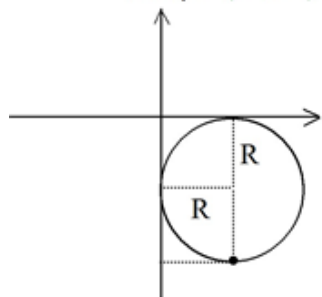
$$(1 - h)^2 + h^2 = R^2 \xrightarrow{h=2} r^2 = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$



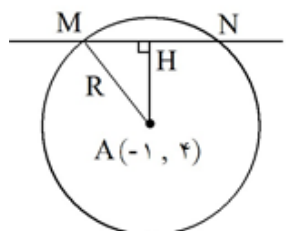
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۴۵)

$$x - y - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2 + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$$

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \\ x - 2 &= 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 &= -1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $(1, -2)$ در ربع چهارم قرار دارد. مرکز این دایره اگر $O(R, R)$ باشد.

$$\begin{aligned} (x - R)^2 + (y + R)^2 &= R^2 \Rightarrow (1 - R)^2 + (-2 + R)^2 = R^2 \\ \Rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R &= R^2 \\ \Rightarrow R^2 - 6R + 5 &= 0 \Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow R = 1, 5 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و فرض $MN = 2\sqrt{7}$ نتیجه می‌گیریم $MH = \sqrt{7}$.

$$AH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\triangle AMH: AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow R^2 = 13 + 7 = 20$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$ است. حال دایره را با خط $y = 2$ قطع می‌دهیم.

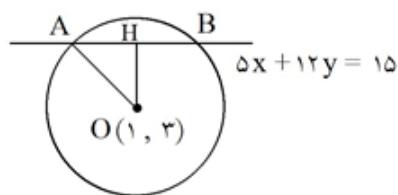
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (x + 1)^2 + (2 - 4)^2 = 20 \Rightarrow (x + 1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = -4 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$



۴۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنا بر فرض سؤال وتر AB به طول $2\sqrt{21}$ است پس $AH = \sqrt{21}$ با به دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم.



$$OH = \frac{|5 + 36 - 15|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\begin{aligned} \triangle OAH: OA^2 &= OH^2 + AH^2 = 4 + 21 = 25 \\ \Rightarrow OA &= 5 \Rightarrow R = 5 \end{aligned}$$

معادله دایره: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$

حال نقاط برخورد این دایره با محور Xها را تعیین می‌کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x-1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور Xها نقطه‌های $M(5, 0)$ و $N(-3, 0)$ است و فاصله‌ی این دو نقطه مساوی $MN = 8$ است.

۴۹

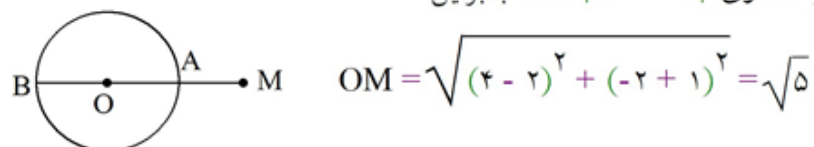
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی قطرهای $x + y = 1$ و $x - y = 3$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$$

پس مرکز دایره $O(2, -1)$ است. در ضمن فاصله‌ی O تا خط مماس $4x + 3y + 5 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

نزدیک‌ترین فاصله‌ی $M(4, -2)$ از دایره مساوی $|OM - R|$ است. بنابراین:



$$OM = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

$$MA = \text{فاصله نزدیکترین} = |OM - R| = \sqrt{5} - 2$$

۵۰

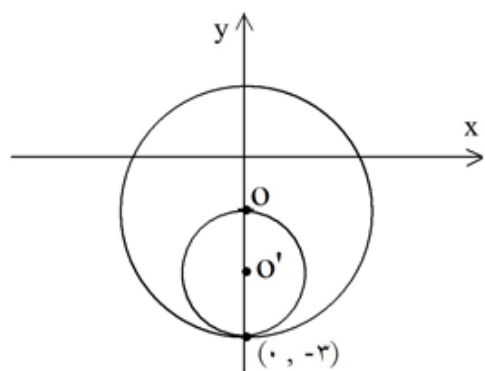
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف x^2 و y^2 از دستگاه هر آنچه بماند معادله وتر مشترک است.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2y - 2x = 0 \Rightarrow x = y$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$x^2 + (y + 1)^2 = 2^2 \Rightarrow R = 2, O(0, -1)$$

مطابق شکل اگر دایره جدید بخواهد با دایره فعلی مماس داخل باشد و از نقطه $(0, -3)$ نیز عبور کند تنها حالت آن است که دایره مذکور تنها نقطه تماسش (نقطه مماس) همان نقطه $(0, -3)$ باشد. پس مرکز دایره جدید به فرم $O'(0, y_0)$ است.

شعاع دایره جدید نصف شعاع دایره داده شده

$$\rightarrow R' = 1, O' = (0, -2)$$

$$x^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

