



آزمون حلی سنج ۴

۶ مهر ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم – رشته ریاضی

دفترچه شماره ۱

مدت پاسخگویی: ۷۶ دقیقه

تعداد سوال: ۴۰

ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان
۱	ریاضیات	۱۸	۱	۱۸	۳۱ دقیقه	حسابان: حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده
		۱۱	۱۹	۲۹	۲۲ دقیقه	هندسه: صبا مهدوی
		۱۱	۳۰	۴۰	۲۳ دقیقه	گسسته: احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی



@helli_sanj

محل انجام محاسبات

۱- در مجموعه جواب نامعادله $\log(x^2 - 6|x|) \geq \log(|x^2 - 6x|)$ چند عدد صحیح مثبت قرار نمی‌گیرد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲- اگر تابع $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$ در بازه I اکیداً نزولی باشد در این بازه نامعادله $f(2m^2 - m + 3) < f(2m - m^2 + 1)$ برقرار باشد، چند مقدار صحیح برای m یافت می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳- اگر چند جمله‌ای $P(x)$ اکیداً یکنوا باشد و باقی‌مانده آن بر عبارت $x^2 + x - 6$ برابر $2x + 6$ باشد، حاصل $P^{-1}(0) + P^{-1}(10)$ چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۲

۴- اگر باقی‌مانده چند جمله‌ای $P(x) = x^{n+1} - 3x^n + x^2 - 2x + k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x - 3$ برابر ۲ باشد، باقی‌مانده $P(x)$ بر عبارت $x^2 - x$ کدام است؟ (به ازای هر عدد طبیعی)

- (۱) $-2x^2 - x - 19$ (۲) $-3x^2 - 19$
(۳) $x^2 + x - 19$ (۴) $-3x - 19$

۵- نمودار تابع $y = \sqrt[3]{3x+1} - 2$ را چنان انتقال عمودی می‌دهیم که نمودار جدید، نمودار وارون خود را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند. حالا اگر این نمودار جدید را دو واحد به سمت چپ انتقال افقی داده و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم و تابع نهایی را g بنامیم، تابع g^{-1} محور عرض‌ها را در چه عددی قطع می‌کند؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) ۲

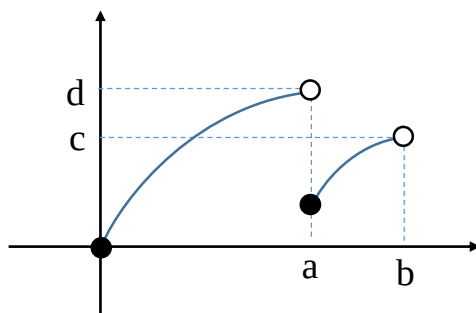
۶- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$ و $g(x) = x + \sqrt{2x+1}$ باشد، صفر تابع $y = (f \circ g)^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۷- اگر $f(x) = 2[2x] - 4x$ و $g(x) = x^2 - 3x^2 + 3x - 2$ باشد و برد $g \circ f$ به صورت $(a, b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۵۶ (۳) -۵۶ (۴) -۲۸

۸- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = \sqrt{2x - [x^2]}$ به صورت زیر باشد، حاصل bc کدام است؟ ([] جزء صحیح است.)



- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{12}$
(۳) $\sqrt{2\sqrt{2}} - 2$ (۴) $\sqrt{4\sqrt{2}} - 2$

محل انجام محاسبات

۹- اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ و $g(x) = \log_2(x - 2)$ و $h(x) = (g^{-1} \circ g)(x)$ فرض شوند، برد تابع $y = (f \circ h)(x) - 2x$ کدام است؟

- (۱) $(-12, -3)$ (۲) $[-15, -7]$
(۳) $(-2, 2)$ (۴) $\mathbb{R}^-$

۱۰- در یک دنباله حسابی غیر ثابت، مجموع ده جمله اول، ۴ برابر جمله دهم است. جمله پنجم این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

- (۱) $\frac{7}{13}$ (۲) $\frac{-5}{3}$ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۱۱- در الگوی درجه دوم ...، ۰، ۳، ۱۰، اولین جمله سه رقمی آن، چندمین جمله آن است؟

- (۱) دهم (۲) یازدهم
(۳) دوازدهم (۴) سیزدهم

۱۲- اگر $\frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+1} = \frac{2}{a}$ باشد، حاصل $\frac{1}{a^2-1} - \frac{a^{2-1}}{a^2+a^2+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{a}$ (۲) $\frac{3}{a}$ (۳) $\frac{4}{a}$ (۴) $\frac{6}{a}$

۱۳- حاصل عبارت $\left(\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right) \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

۱۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-ax}{x-a} < 0$ به صورت $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ است. حدود a کدام است؟

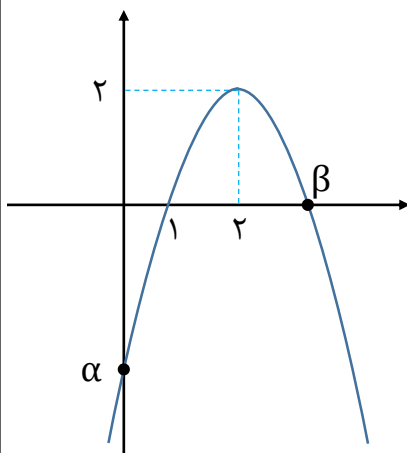
- (۱) $0 < a < 1$ (۲) $-1 < a < 0$
(۳) $-1 < a < 1$ (۴) $a < -1$

۱۵- معادله‌های $x^2 - x + 3a = 0$ و $x^2 - 2x + 4a = 0$ یک ریشه مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶- نمودار سهمی f به صورت زیر است.

ریشه‌های کدام معادله زیر برابر α و β است؟



(۱) $x^2 + x - 12 = 0$

(۲) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(۳) $x^2 + 3x - 18 = 0$

(۴) $x^2 + 4x - 21 = 0$

محل انجام محاسبات

۱۷- بین ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + 6x - m = 0$ رابطه $\alpha^2 + 2\beta^2 = 51$ برقرار است. m کدام است؟ ($\alpha < \beta$)

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۷ (۴) -۷

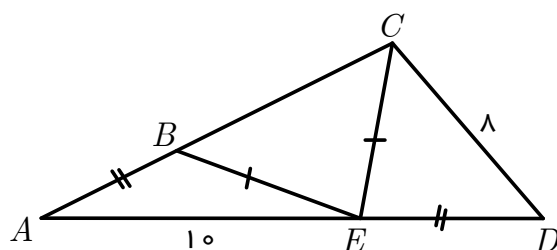
۱۸- ریشه‌های معادله $\sqrt{4x+8} = |x+3| - k$ قرینه یکدیگرند. k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۹- طول دو ارتفاع مثلثی برابر ۵ و ۷ واحد می‌باشد، بیشینه مقدار صحیح برای طول ارتفاع سوم کدام است؟

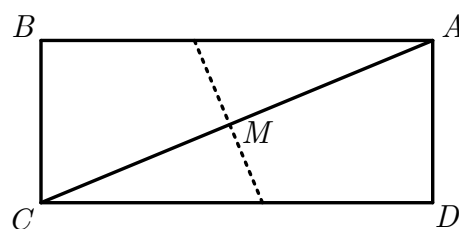
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۷

۲۰- اگر $\hat{B} = 113^\circ$ و $\hat{DEC} = 4x + 5$ باشد، کدام نامساوی برای x صحیح است؟



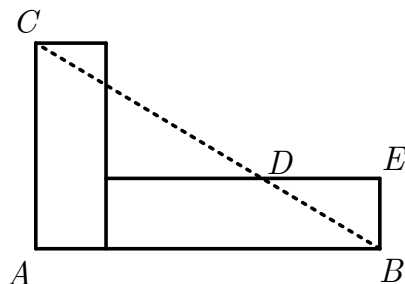
- (۱) $x < 27$
(۲) $-1/25 < x < 26$
(۳) $-2 < x < 28$
(۴) $-1/25 < x < 27$

۲۱- مستطیل مقوایی $ABCD$ به طول ۲۴ و عرض ۱۰ را طوری تا می‌زنیم که دو رأس A و C بر روی یکدیگر قرار بگیرند. طول این تاخوردگی چقدر است؟



- (۱) ۱۰
(۲) $\frac{65}{6}$
(۳) ۱۱
(۴) $\frac{67}{6}$

۲۲- دو مستطیل به عرض واحد، مانند شکل، کنار یکدیگر چیده شده‌اند. اگر $AB = 8$ و $AC = 6$ باشد، طول DB کدام است؟



- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{5}{3}$
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) ۲

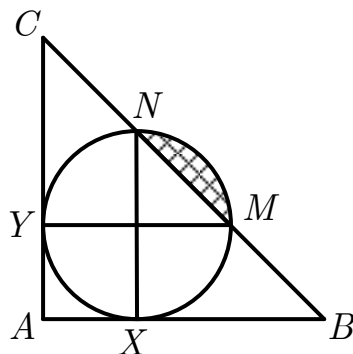
محل انجام محاسبات

۲۳- چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. اگر $BD = 8$ ، $BC = 4$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، $\hat{CDA} = 60^\circ$ و $\hat{ABD} = \hat{BCD}$ باشد، طول CD کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{16}{\sqrt{5}} \quad (2) \\ & 3\sqrt{5} \quad (4) \end{aligned}$$

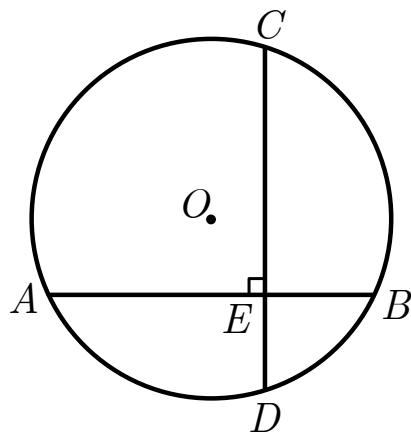
$$\begin{aligned} & \frac{12}{\sqrt{5}} \quad (1) \\ & 4\sqrt{3} \quad (3) \end{aligned}$$

۲۴- مثلث قائم‌الزاویه ABC مفروض است. دایره‌ای مماس بر دو ضلع این مثلث در نقاط X و Y ، وتر BC را طوری قطع می‌کند که NX و MY قطر باشند. اگر $AB = 6$ باشد، مساحت ناحیه هاشور خورده کدام است؟



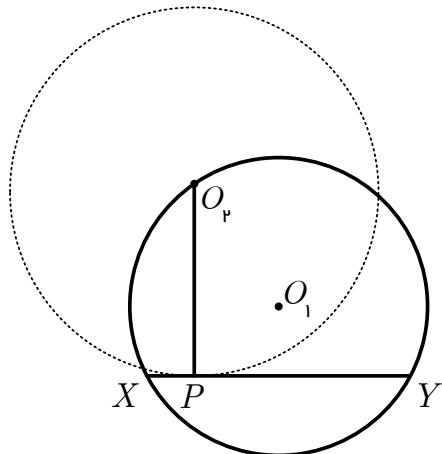
$$\begin{aligned} & \pi - 2 \quad (1) \\ & \pi - 1 \quad (2) \\ & 4\pi - 2 \quad (3) \\ & 2\pi - 1 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۵- در شکل مقابل اگر $AE = 8$ و $EB = 4$ و شعاع دایره برابر $4\sqrt{3}$ باشد، طول CD کدام است؟



$$\begin{aligned} & 2\sqrt{10} \quad (1) \\ & 12 \quad (2) \\ & 4\sqrt{11} \quad (3) \\ & 11 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۶- دایره ω_1 به شعاع ۱۷ مفروض است. مرکز دایره ω_2 به شعاع ۲۱ بر روی دایره ω_1 قرار دارد. وتر XY از دایره ω_1 در نقطه‌ی P بر دایره ω_2 مماس است. اگر $XY = 30$ باشد، مقدار $XP \times YP$ کدام است؟



$$\begin{aligned} & 100 \quad (1) \\ & 120 \quad (2) \\ & 105 \quad (3) \\ & 125 \quad (4) \end{aligned}$$

محل انجام محاسبات

۲۷- اگر دو ماتریس E و F سه در سه باشند و $G = (I - FE)^{-1}$ ، وارون ماتریس $(I + GFE)$ ؟

$$I + FEG \quad (۲)$$

$$I - EF \quad (۱)$$

$$I - FE \quad (۴)$$

$$I + FE \quad (۳)$$

۲۸- اگر $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & 13 & 18 \end{bmatrix}$ ، $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 18 & 13 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد و Q یک

ماتریس وارون پذیر سه در سه باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

$$|(EF)^3| > |EF|^3 \quad (۲)$$

$$F = PEP \quad (۱)$$

$$P^2 = I \quad (۴)$$

$$|(EF)^3| = |EF|^3 \quad (۳)$$

۲۹- تعداد x های متمایز که در معادله $10 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ 2x & 4x^2 & 1+8x^3 \\ 3x & 9x^2 & 1+27x^3 \end{vmatrix}$ صدق می کنند کدام

است؟

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۳۰- به ازای چند عدد اول مانند m ، عددی طبیعی مانند n وجود دارد، به گونه ای که m هر دو عدد $2n+6$ و $3n^2-2n+4$ را بشمارد؟

$$۲ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

۳۱- a_1, a_2, a_3 ، b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند. حاصل کدام عبارت زیر، ممکن است زوج نباشد؟

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_3 - b_1) \quad (۲)$$

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \quad (۱)$$

$$a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 \quad (۴)$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (۳)$$

۳۲- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به گونه ای که $7 \mid 2a+b+k$ و $7 \mid 3a-2b+2$ ، آن گاه مجموع ارقام بزرگ ترین عدد طبیعی دورقمی k کدام است؟

$$۱۸ \quad (۴)$$

$$۱۷ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۱۵ \quad (۱)$$

۳۳- اگر $A = 1+2+3+\dots+n$ باشد، به ازای چند عدد n از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 90\}$ ، عدد A زوج است؟

$$۲۳ \quad (۴)$$

$$۲۲ \quad (۳)$$

$$۴۵ \quad (۲)$$

$$۴۴ \quad (۱)$$

۳۴- عدد $12!+13!$ بر چند عدد طبیعی یک رقمی بخش پذیر است؟

$$۷ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

محل انجام محاسبات

۳۵- در تقسیم عدد ۲۵۹ بر b ، باقی مانده برابر ۳۱ است. چند مقدار طبیعی برای b وجود دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۳۶- چند عدد طبیعی b وجود دارد به گونه ای که باقی مانده تقسیم اعداد a و $2a$ بر b به ترتیب ۲۳ و ۱۵ باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۷- به ازای اعداد طبیعی $1 \leq n \leq 50$ ، در چند حالت دو عدد $4n+7$ و $5n+9$ نسبت به هم اول اند؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۴۸ (۳) ۴۹ (۴) ۵۰

۳۸- در یک تقسیم، مقسوم 802 و خارج قسمت 14 است. حداقل و حداکثر مقدار مقسوم علیه کدام است؟

- (۱) 53 و 58 (۲) 54 و 57
(۳) 54 و 58 (۴) 55 و 57

۳۹- اگر $a = 4k + 1$ و $bc \mid a + 1400$ ، باقی مانده تقسیم عدد $7 - 4c^2 + 2b^2$ بر 16 کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۴۰- اگر مختصات نقاطی از منحنی تابع $y = \frac{2x^2 + 4x + 6}{3x + 2}$ را که هر دو مؤلفه آن عدد صحیح

هستند با (x, y) نمایش دهیم، آنگاه مجموع کمترین و بیشترین مقدار x کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) ۱ (۴) ۲



آزمون حلی سنج ۴

۶ مهر ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم – رشته ریاضی

دفترچه شماره ۲

مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

تعداد سوال: ۴۵

ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان
۱	فیزیک	۲۵	۴۱	۶۵	۴۵ دقیقه	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری امیر حسن محمدپور
۲	شیمی	۲۰	۶۶	۸۵	۳۰ دقیقه	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمد رضا زهرهوند سیدصمد صفوی



@helli_sanj

محل انجام محاسبات

۴۱- اگر یکای فرعی فشار در دستگاه SI به صورت $\frac{X}{Y^2 Z}$ باشد، یکای فرعی کار در SI کدام است؟

$$\frac{XY^2}{Z^2} \quad (۲)$$

$$\frac{XZ}{Y^2} \quad (۱)$$

$$\frac{XZ^2}{Y^2} \quad (۴)$$

$$\frac{XY}{Z^2} \quad (۳)$$

۴۲- یک ماده رطوبت گیر به شکل یک کره در اختیار داریم. این ماده را در محیط مرطوبی می گذاریم تا در اثر جذب رطوبت، جرم آن ۲۵ درصد افزایش یابد؛ ولی با نفوذ آب به داخل بافت آن، حجمش ۲۰ درصد کاهش می یابد. چگالی این ماده تقریباً چند درصد افزایش یافته است؟

$$۶۲ \quad (۴)$$

$$۵۶ \quad (۳)$$

$$۵۰ \quad (۲)$$

$$۴۴ \quad (۱)$$

۴۳- مخروطی به شعاع قاعده ۵ سانتی متر و ارتفاع ۲۰ سانتی متر و جرم ۴ kg در اختیار داریم. اگر این مخروط را در امتداد ارتفاع نصف کرده و نیمه آن را از سطح مثلثی شکل روی زمین بگذاریم، فشار وارد بر سطح چند برابر حالتی است که مخروط کامل بر روی قاعده خود روی زمین قرار دارد؟ ($\pi = ۳$)

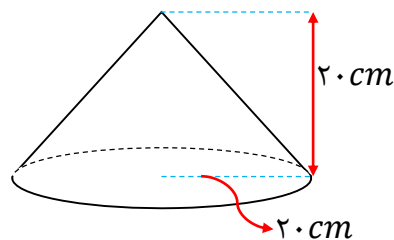
$$\frac{۵}{۸} \quad (۲)$$

$$\frac{۳}{۵} \quad (۴)$$

$$\frac{۳}{۴} \quad (۱)$$

$$\frac{۳}{۸} \quad (۳)$$

۴۴- در داخل یک ظرف مخروطی شکل توخالی به شعاع مقطع ۲۰ cm و ارتفاع ۲۰ cm مطابق شکل، ۷ لیتر از مایعی با چگالی $۲ \frac{g}{cm^3}$ ریخته ایم. فشار مایع در کف ظرف چند پاسکال است؟ (حجم مخروط برابر با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است.) ($\pi = ۳$)



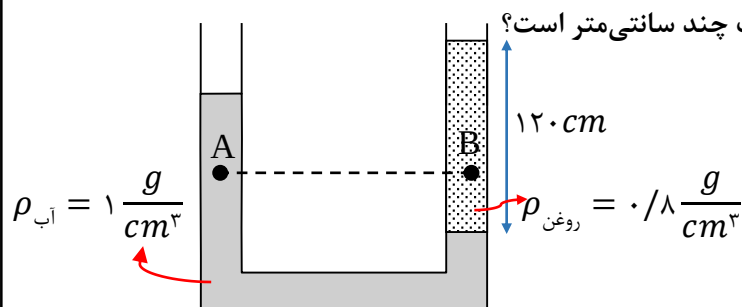
$$۱۰۰۰ \quad (۱)$$

$$۲۰۰۰ \quad (۲)$$

$$۳۰۰۰ \quad (۳)$$

$$۴۰۰۰ \quad (۴)$$

۴۵- در لوله U شکل زیر، اختلاف فشار بین دو نقطه A و B برابر با ۸۰۰ پاسکال است. فاصله



$$۸۶ \quad (۱)$$

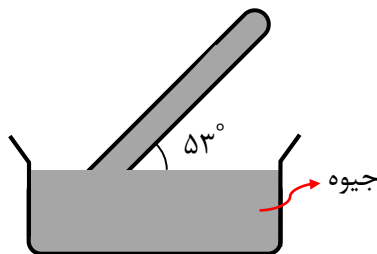
$$۵۶ \quad (۲)$$

$$۹۶ \quad (۳)$$

$$۴۰ \quad (۴)$$

محل انجام محاسبات

۴۶- در شکل زیر، فشار وارد بر انتهای لوله از طرف جیوه برابر با 6 cmHg و فشار هوای محیط 74 cmHg است. اگر طول قسمتی از لوله که بیرون از سطح جیوه است را نصف کرده و آن را به حالت قائم در آوریم، فشار وارد بر انتهای لوله از طرف جیوه چند سانتی متر جیوه خواهد شد؟ ($\sin 53^\circ = 0.8$)



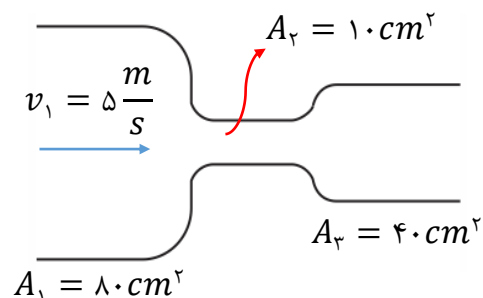
(۱) ۲۷/۵

(۲) ۲۷

(۳) ۳۱/۵

(۴) ۲۵/۵

۴۷- در شکل زیر، اختلاف سرعت حرکت مایع در دو مقطع ۲ و ۳ چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۳۰

(۲) ۱۰

(۳) ۴۰

(۴) ۲۰

۴۸- در ظرفی با ضریب انبساط طولی $\frac{1}{K} = 4 \times 10^{-5}$ و ظرفیت 125 cm^3 ، به اندازه 115 cm^3 از مایعی با ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{K} = 10^{-3}$ ریخته ایم. با چشم پوشی از تبخیر سطحی مایع، دمای مجموعه را حداکثر چند درجه سانتی گراد می توانیم افزایش دهیم تا مایع از ظرف لبریز نشود؟

(۴) ۱۰۰

(۳) ۸۰

(۲) ۴۰

(۱) ۱۰

۴۹- یک کره توپر به شعاع $3R$ در اختیار داریم. از درون این کره، کره ای به شعاع $2R$ را خارج می کنیم تا یک کره توپر کوچک تر به نام A و یک کره توخالی به نام B داشته باشیم. اکنون اگر به جسم های A و B به میزان برابر گرما بدهیم، نسبت تغییر حجم کره A به تغییر حجم کل کره B کدام است؟

(۴) $\frac{19}{27}$ (۳) $\frac{8}{19}$ (۲) $\frac{8}{27}$

(۱) ۱

۵۰- اگر قطعه یخی با دمای -20°C را داخل استخری با آب صفر درجه بیندازیم، پس از مدت زمان کافی، با صرف نظر از هرگونه اتلاف، جرم یخ $1/25 \text{ g}$ تغییر می کند. قطعه یخ اولیه چند ژول گرما دریافت کند تا به طور کامل ذوب شود؟ ($c_{\text{یخ}} = 2/1 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$ و $L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}$)

(۴) ۴۲۰

(۳) ۸۴۰

(۲) ۳۳۶۰

(۱) ۳۷۸۰

محل انجام محاسبات

۵۱- m گرم بخار آب 100°C می تواند دمای 20g آب 0°C را به 80°C برساند. اگر 7m گرم بخار آب 100°C را در تبادل گرما با 124g گرم یخ صفر درجه سانتی گراد قرار دهیم، با صرف نظر از تمام اتلاف ها و تبخیر سطحی، دمای نهایی چند درجه سانتی گراد می شود؟

$$(L_V = 2268 \frac{\text{J}}{\text{g}}, L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}})$$

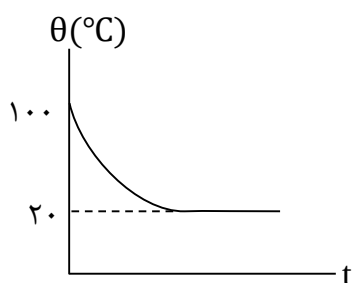
۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

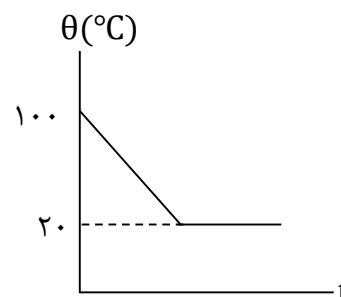
۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

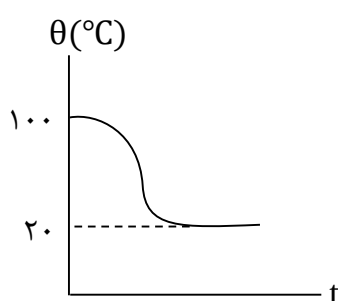
۵۲- درون یک لیوان، مقداری آب 100°C ریخته و در اتاقی با دمای ثابت 20°C قرار می دهیم. کدام نمودار رابطه بین دمای آب و زمان را بهتر نمایش می دهد؟



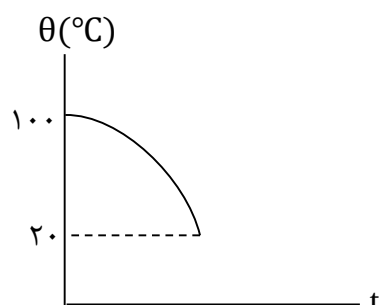
(۲)



(۱)

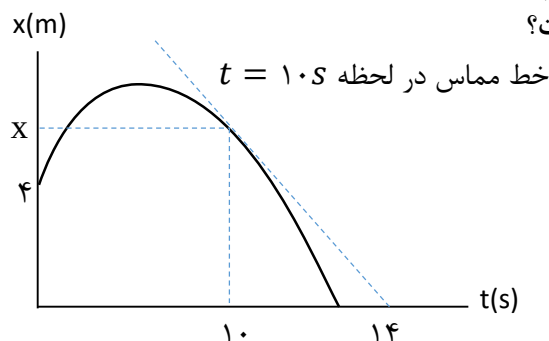


(۴)



(۳)

۵۳- شکل زیر، نمودار مکان - زمان یک حرکت روی خط راست را نشان می دهد. اگر اندازه سرعت متوسط در 10 ثانیه اول حرکت $\frac{2}{15}$ برابر اندازه سرعت در لحظه $t = 10\text{s}$ باشد، تندی در لحظه $t = 10\text{s}$ چند متر بر ثانیه است؟



۱/۵ (۱)

۲/۵ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

۵۴- معادله حرکت جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می کند در SI به صورت $x = 3t^2 - 18t + 15$ است. در 5 ثانیه اول حرکت، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ حرکت چند متر بوده است؟

۱۹ (۴)

۲۷ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

محل انجام محاسبات

۵۵- یک شخص پیاده که همواره با تندی ثابت V_1 حرکت می کند از شهر A به مقصد شهر B و یک دوچرخه سوار که همواره با تندی ثابت V_2 می راند از شهر B به مقصد شهر A، همزمان روی خط راست به راه می افتند. این دو یکدیگر را در بین راه می بینند و درست از همان لحظه، شخص پیاده تغییر جهت داده و به طرف شهر A بازمی گردد. اگر یک ساعت طول بکشد که دوچرخه سوار از شهر B به شهر A برسد، اختلاف زمان رسیدن شخص پیاده و دوچرخه سوار به شهر A چه کسری از ساعت است؟ ($V_2 > V_1$)

$$\begin{array}{ll} \frac{V_1}{V_2 + V_1} & (1) \\ \frac{V_2}{V_2 + V_1} & (2) \\ \frac{V_2 - V_1}{V_2} & (3) \\ \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} & (4) \end{array}$$

۵۶- یک خودروی مسابقه، با شتاب ثابت $\frac{4}{5} \frac{m}{s^2}$ از حال سکون روی خط راست به حرکت درمی آید. اگر این خودرو، $\frac{1}{9}$ انتهای مسیر خود را در مدت ۶ ثانیه طی کند، تندی آن در نیمه مسیر چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

$$\begin{array}{llll} 12\sqrt{2} & (1) & 18 & (2) \\ 12 & (3) & 18\sqrt{2} & (4) \end{array}$$

۵۷- ذره ای بر مسیر مستقیم از مکان $x_0 = 10m$ با تندی اولیه V_0 و شتاب ثابت $\frac{4}{5} \frac{m}{s^2}$ عبور می کند. اگر این ذره در لحظه $t = 6s$ تغییر جهت بدهد، تندی متوسط ذره در ۴ ثانیه دوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

$$\begin{array}{llll} 6 & (1) & 2 & (2) \\ 3 & (3) & 4 & (4) \end{array}$$

۵۸- فاصله بین دو ایستگاه راه آهن در یک مسیر مستقیم، ۱ km است. قطاری از حال سکون از ایستگاه اول به راه می افتد و در ایستگاه دوم متوقف می شود. حداکثر بزرگی شتاب تندشونده و کندشونده قطار، به ترتیب a و ۲a است. برای این که زمان سفر بین دو ایستگاه کمترین مقدار باشد، حداکثر زمانی که قطار باید با سرعت ثابت حرکت کند، چند ثانیه است؟ (۱ به مقدار a بستگی دارد. ۲ صفر ۳ ۵ ۴ ۸)

۵۹- اتومبیلی از حال سکون و با شتاب ثابت a مسیر ۲۵۰ متری را در مدت زمان ΔT طی می کند. کدام گزینه جابه جایی اتومبیل در بازه های $(0, T)$ ، $(T, 3T)$ و $(3T, 5T)$ را به درستی نشان می دهد؟

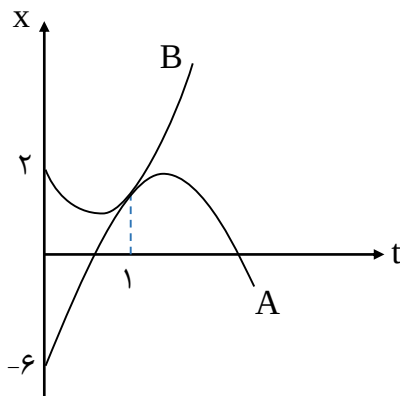
$$\begin{array}{ll} 10 \text{ و } 120 \text{ و } 130 & (1) \\ 20 \text{ و } 100 \text{ و } 170 & (2) \\ 10 \text{ و } 80 \text{ و } 160 & (3) \\ 20 \text{ و } 60 \text{ و } 170 & (4) \end{array}$$

۶۰- خودروهای A و B روی مسیر مستقیم به ترتیب با سرعت های $\frac{40}{5} \frac{m}{s}$ و $\frac{20}{5} \frac{m}{s}$ در حرکت هستند و خودروی A عقب تر از خودروی B است. هنگامی که فاصله دو خودرو به ۱۶۵m می رسد، خودروی A خودروی B را می بیند. اگر زمان واکنش راننده A برابر $0.75s$ باشد، حداقل اندازه شتاب کاهنده خودروی A چند متر بر مربع ثانیه باشد تا دو اتومبیل به هم برخورد نکنند؟ (خودروی B با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد.)

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & 2 & (2) \\ \frac{2}{3} & (3) & \frac{4}{3} & (4) \end{array}$$

محل انجام محاسبات

۶۱- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می کنند، در لحظه ۱s برهم مماس است. اگر شتاب دو متحرک، ثابت و هم اندازه باشد، اندازه شتاب آنها چند متر بر مربع ثانیه است؟



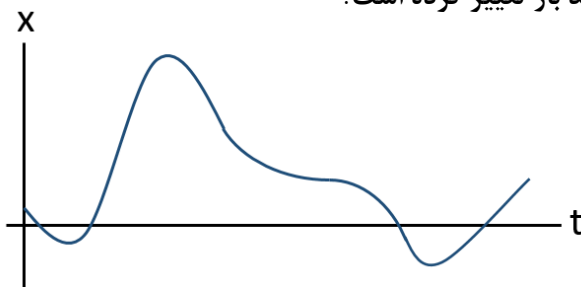
- (۱) ۸
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) ۱/۵

۶۲- سنگی را از بالای چاه عمیقی رها می کنیم و ۶/۶s بعد صدای برخورد سنگ به کف چاه را می شنویم. با چشم پوشی از اثر مقاومت هوا روی سنگ، عمق چاه چند متر است؟

$$g = ۱۰ \frac{m}{s^2} \text{ و سرعت صوت را } ۳۰۰ \frac{m}{s} \text{ در نظر بگیرید.}$$

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۴۸۰

۶۳- نمودار مکان - زمان جسمی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. جهت نیروی خالص وارد بر جسم، چند بار تغییر کرده است؟



- (۱) ۵
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۶۴- یک بالگرد با جرم ۵۰۰۰ کیلوگرم، با سرعت ثابت $۱ \frac{m}{s}$ در راستای قائم به زمین نزدیک می شود. ملخ این بالگرد چه مقدار و در چه جهتی به هوا نیرو وارد می کند؟

- (۱) ۵۰ کیلونیوتون - بالا
(۲) ۵۵ کیلونیوتون - بالا
(۳) ۵۰ کیلونیوتون - پایین
(۴) ۵۵ کیلونیوتون - پایین

۶۵- سه نیروی ۳ و ۴ و ۶ نیوتونی در یک راستا به جسمی به جرم ۲ کیلوگرم وارد می شوند. حداکثر شتابی که این سه نیرو می توانند به این جسم بدهند، چند متر بر مربع ثانیه بیشتر از حداقل شتابی است که می توانند به جسم بدهند؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۶/۵

محل انجام محاسبات

۶۶- تعداد نوترون‌های موجود در $^{19}_6\text{F}$ گرم سولفوریک اسید، چند برابر تعداد ذرات زیراتمی باردار در ۴۹ گرم فسفریک اسید (H_3PO_4) است؟

($^{1}_1\text{H} = 1$ و $^{16}_8\text{O} = 16$ ، $^{31}_{15}\text{P} = 31$ ، $^{32}_{16}\text{S} = 32$: g. mol $^{-1}$)

(۱) ۰/۴۹ (۲) ۰/۹۸ (۳) ۰/۱۹۲ (۴) ۱/۴۷

۶۷- اختلاف شمار الکترون و نوترون در یون $^{65}\text{X}^{+}$ برابر با ۸ است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد اتم X نادرست است؟

(آ) جرم هر اتم X به تقریب برابر با $10^{-23} \times 9/75$ گرم است. (۱amu را به تقریب برابر با $10^{-24} \times 1/5$ g در نظر بگیرید.)

(ب) دمای شعله X کم‌تر از دمای شعله سدیم است.

(پ) برای تعیین آرایش الکترونی اتم X، از روش‌های طیف‌سنجی پیشرفته کمک می‌گیریم.

(ت) اتم X در واکنش با اکسیژن، همانند عنصر قبل و بعد از خود در جدول دوره‌ای، بیش از یک نوع اکسید تشکیل می‌دهد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸- برای تهیه محلول ۰/۱ مولار H_2SO_4 ، از ۴۰ میلی‌لیتر محلول ۴/۹ درصد جرمی با چگالی $1/5 \text{ g. mL}^{-1}$ آن، به چند میلی‌لیتر آب نیاز است؟

(۱) ۲۶۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۲۹۰ (۴) ۲۹۵

۶۹- دستگاه گلوکومتر، قبل و پس از مصرف غذایی که ۴۰٪ جرم آن در بدن به صورت گلوکز جذب خون می‌گردد، اختلاف ۱/۸ واحدی نشان می‌دهد. با توجه به آن که حجم خون فرد بیمار ۵ لیتر می‌باشد، جرم غذای مورد نظر، چند گرم بوده است؟

(۱) ۰/۹ (۲) ۲/۲۵ (۳) ۰/۰۹ (۴) ۰/۲۲۵

۷۰- ۰/۴ لیتر فسفریک اسید (H_3PO_4) ۰/۳ مولار را به ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۵ مولار آن اضافه می‌کنیم. با افزودن ۱۰ میلی‌لیتر از محلول حاصل به مقدار کافی کلسیم کلرید، چند مول رسوب تولید می‌شود؟

(۱) $3/4 \times 10^{-1}$ (۲) $3/4 \times 10^{-3}$

(۳) $1/7 \times 10^{-1}$ (۴) $1/7 \times 10^{-3}$

۷۱- عبارت‌های «آ»، «ب»، «پ» و «ت» در رابطه با موارد زیر بیان شده‌اند.

«اتیلن گلیکول - سدیم کلرید - بنزین - اوره - روغن زیتون - وازلین»

کدام عبارت، بیان‌کننده مجموعه‌ای است که به ترتیب بیشترین و کمترین تعداد عضو را دارد؟ (آ) مولکول‌هایی که فاقد پیوند دوگانه هستند.

(ب) موادی که توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را بین مولکول‌های خود دارند.

(پ) مولکول‌هایی که در ساختار خود تنها دو نوع اتم دارند.

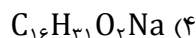
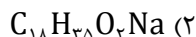
(ت) موادی که محلول آن‌ها رسانای جریان الکتریکی است.

(۱) پ - ب (۲) آ - ت (۳) آ - ب (۴) پ - ت

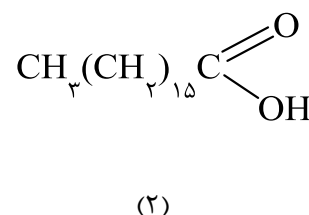
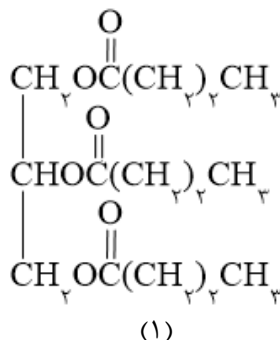
محل انجام محاسبات

۷۲- با وارد کردن ۱۲/۲۴ گرم صابون جامد با گروه R سیر شده در آب سختی که حاوی مول‌های برابری از یون کلسیم و یون منیزیم است، تمامی صابون وارد واکنش شده و آب، فاقد یون‌های کلسیم و منیزیم می‌گردد. در این حالت، دو نوع رسوب با اختلاف جرم ۰/۳۲ گرم به وجود می‌آید. صابون به کار رفته دارای کدام فرمول است؟

$$(Mg = ۲۴ \text{ و } Ca = ۴۰ \text{ g. mol}^{-1})$$



۷۳- با توجه به دو ساختار زیر، کدام عبارت درست است؟

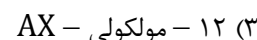
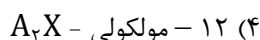
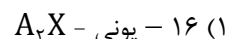
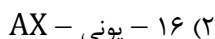


- (۱) مخلوطی از دو ماده «۱» و «۲» را می‌توان چربی دانست.
 (۲) نمک پتاسیم‌دار حاصل از مولکول «۲»، صابون مایع است.
 (۳) در مولکول «۱» همانند مولکول «۲» بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد.
 (۴) نمک کلسیم‌دار مولکول «۲» پس از وارد شدن در آب به یون‌های آب پوشیده تبدیل می‌شود.

۷۴- کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) طول موج پرتوی حاصل از انتقال $n_4 \rightarrow n_5$ بلندتر از $n_3 \rightarrow n_5$ است.
 (۲) براساس اصل آفبا، زیرلایه ۶s، سطح انرژی پایین‌تری از ۴f دارد.
 (۳) در حالت پایه، الکترون فقط در یک ناحیه مشخص پیرامون هسته که لایه الکترونی نامیده می‌شود، حضور دارد.
 (۴) آرایش الکترونی به‌دست‌آمده از روش‌های طیف‌سنجی در مورد برخی اتم‌ها، با قاعده آفبا در مورد آن اتم‌ها مطابقت ندارد.

۷۵- اگر در آرایش الکترونی اتم X، شمار الکترون‌ها با $n = ۳$ ، سه برابر شمار الکترون‌ها با $n = ۴$ باشد، این عنصر دارای الکترون با $l = ۱$ است و با عنصر ${}_{۳۷}\text{A}$ ترکیبی با فرمول شیمیایی تشکیل می‌دهد. (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)



۷۶- شمار کاتیون‌ها در ۲۰ گرم آهن (III) اکسید با شمار یون‌ها در چند گرم کلسیم نیتريد برابر است؟
 $(Fe = ۵۶ \text{ و } Ca = ۴۰, O = ۱۶, N = ۱۴ \text{ g. mol}^{-1})$

$$۱۹/۶ \text{ (۴)}$$

$$۱۴/۸ \text{ (۳)}$$

$$۷/۴ \text{ (۲)}$$

$$۳/۷ \text{ (۱)}$$

محل انجام محاسبات

۷۷- پاسخ درست موارد «آ» و «ب» و پاسخ نادرست مورد «پ» در مورد عنصرهای دوره چهارم جدول دوره‌ای به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟
(آ) تعداد عنصری که در آرایش الکترونی خود دارای زیرلایه نیمه پر هستند.
(ب) تعداد فلزهایی که دارای زیرلایه d پر هستند.

(پ) تعداد عنصری که در بیرونی ترین زیرلایه دارای ۲ الکترون هستند.

$$(۱) ۸ - ۲ - ۵ \quad (۲) ۸ - ۳ - ۵$$

$$(۳) ۱۰ - ۲ - ۴ \quad (۴) ۱۰ - ۳ - ۴$$

۷۸- اگر غلظت آنیون در محلولی از کلسیم برمید برابر ۴۰ ppm باشد، غلظت مولی محلول این نمک کدام است؟ (چگالی محلول را برابر ۱ گرم بر میلی لیتر در نظر بگیرید.)

$$(Ca = ۴۰, Br = ۸۰: g. mol^{-1})$$

$$(۱) ۲/۵ \times ۱۰^{-۴} \quad (۲) ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$(۳) ۲/۵ \times ۱۰^{-۳} \quad (۴) ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

۷۹- به تقریب چند میلی لیتر گاز هیدروژن برمید در شرایط STP باید به ۲۰۰ میلی لیتر محلولی از HCl(aq) با pH=۲ وارد شود تا pH آن نصف شود؟ (از تغییر حجم محلول در اثر انحلال HBr چشم پوشی کنید.)

$$(۱) ۳۳۷ \quad (۲) ۴۰۳ \quad (۳) ۵۲۲ \quad (۴) ۶۷۴$$

۸۰- برای زدودن رسوب ناشی از $CaCO_3$ موجود در یک کتری به جرم ۴ گرم، چند میلی لیتر هیدروکلریک اسید با pH = ۱ لازم است؟ (واکنش موازنه شود.)

$$(Ca = ۴۰ و O = ۱۶, C = ۱۲: g. mol^{-1})$$



$$(۱) ۱۰۰ \quad (۲) ۲۰۰ \quad (۳) ۴۰۰ \quad (۴) ۸۰۰$$

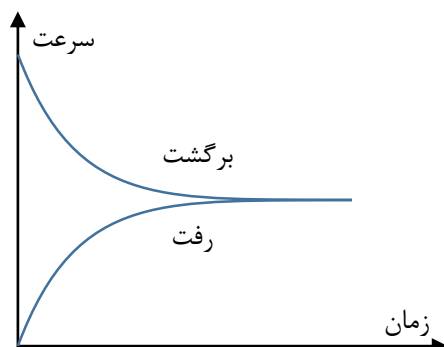
۸۱- اگر واکنش تعادلی $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ با مولهای برابر از آمونیاک و نیتروژن در یک ظرف دو لیتری آغاز شود، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) در لحظه تعادل، شمار مولکولهای هیدروژن، سه برابر نیتروژن است.

ب) در هر بازه زمانی مشخص از واکنش، سرعت مصرف آمونیاک $\frac{۲}{۳}$ برابر سرعت تولید هیدروژن است.

پ) نمودار سرعت واکنشهای رفت و برگشت به صورت مقابل است:

ت) پس از برقراری تعادل، سرعت مصرف آمونیاک با سرعت تولید نیتروژن برابر می شود.



$$(۱) ۱ \quad (۲) ۲ \quad (۳) ۳ \quad (۴) ۴$$

محل انجام محاسبات

۸۲- اگر در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلولی از اسید HA ($K_a = 2/3 \times 10^{-5}$) بیشتر از محلولی از اسید HB ($K_a = 1/4 \times 10^{-4}$) باشد، کدام یک از موارد زیر به یقین درست است؟

الف) نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول اسید HA بیشتر از محلول اسید HB است.

ب) pH محلول اسید HA کم تر از محلول اسید HB است.

پ) سرعت آغازین واکنش تکه‌ای از نوار منیزیم در محلول اسید HB بیشتر است.

ت) غلظت مولکول‌های یونیده نشده در محلول اسید HA بیشتر از HB است.

(۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

۸۳- در محلولی از یک اسید ضعیف ($K_a = 2 \times 10^{-5}$) نسبت غلظت یون هیدروکسید به غلظت یون هیدرونیوم در دمای $25^\circ C$ برابر $2/5 \times 10^{-9}$ است. غلظت تعادلی این اسید در محلول چند مول بر لیتر است و اگر غلظت این اسید ۱۶ برابر شود،

(۱) $0/2$ - درجه یونش ۴ برابر می‌شود.

(۲) $0/2$ - pH محلول $0/6$ کاهش می‌یابد.

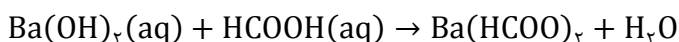
(۳) $0/2$ - درصد یونش $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

(۴) $0/2$ - غلظت یون هیدرونیوم ۴ برابر می‌شود.

۸۴- ثابت یونش آمونیاک در دمای اتاق $1/7 \times 10^{-5}$ است. در ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول آمونیاک با $pH = 12$ ، چند گرم از آن حل شده است؟ ($H = 1$ و $N = 14: g. mol^{-1}$)

(۱) $1/7$ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۷

۸۵- غلظت یون هیدرونیوم در محلولی از فرمیک اسید 2×10^{-3} مول بر لیتر و ثابت یونش آن برابر $1/6 \times 10^{-5}$ است. چند میلی‌لیتر از این اسید با ۲۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با $pH = 13$ خنثی می‌شود؟ (معادله واکنش موازنه شود.)



(۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۲۰ (۴) ۸۰



پاسخنامه حلّی سنج ۴

۶ مهر ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم – رشته ریاضی

ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۶ دقیقه
۲	فیزیک	۲۵	۴۱	۶۵	۴۵ دقیقه
۳	شیمی	۲۰	۶۶	۸۵	۳۰ دقیقه

نام درس	طراحان (حروف الفبا)
ریاضی و حسابان	حسین شفیع زاده، علیرضا نداف زاده
هندسه	صبا مهدوی
آمار و احتمال و گسسته	احسان ایزدپناه، محمد پیشنماز، علیرضا شریف خطیبی
فیزیک	محمد جواد حیدری، پوریا دیار کجوری، امیر حسن محمدپور
شیمی	حسن ایزدی، مسعود خوش طینت، محمدرضا زهرهوند، سید صمد صفوی



@helli_sanj

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلّی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

۱- گزینه ۴

چون تابع $f(x) = \log x$ در $\mathbb{R}^+$ اکیداً صعودی است، پس

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+: f(b) \geq f(a) \rightarrow b \geq a > 0$$

$$x^2 - 6|x| \geq |x^2 - 6x| > 0 \rightarrow x \neq 0, x \neq 6$$

$$x^2 - 6|x| \geq |x^2 - 6x| \rightarrow \underbrace{|x^2 - 6x|}_A + \underbrace{|6x|}_B \leq \underbrace{|x^2|}_{A+B}$$

$$|A| + |B| \leq |A + B| \rightarrow |A| + |B| = |A + B| \rightarrow AB \geq 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 6x)6x \geq 0 \rightarrow 6x^2(x - 6) \geq 0 \rightarrow x \geq 6 \rightarrow x > 6$$

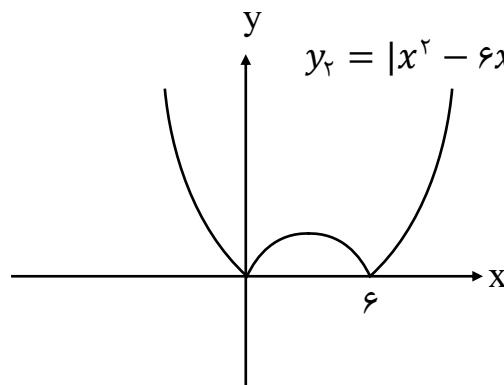
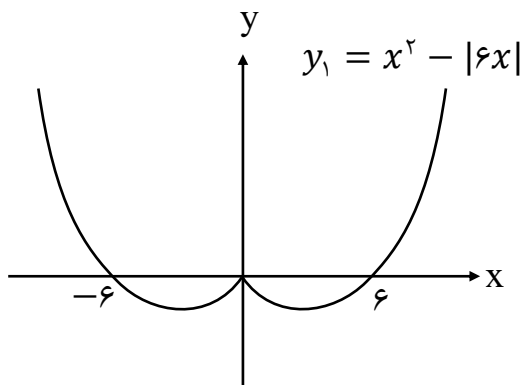
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

یادآوری:

$$ab \geq 0 \leftrightarrow |a + b| = |a| + |b|$$

$$ab < 0 \leftrightarrow |a + b| < |a| + |b|$$

راه حل دوم از روش هندسی:



از روی نمودارهای بالا درمی یابیم:

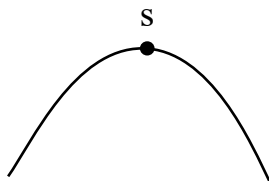
$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2$$

و چون باید $y_2 \neq 0$ پس $x \neq 0, 6$ پس $x > 6$

۲- گزینه ۳

با توجه به نمودار تابع $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$ که به صورت مقابل است، متوجه می شویم f در بازه $[x_s, +\infty)$ اکیداً نزولی است و در ضمن

$$\forall a, b \in [\frac{3}{4}, +\infty) \text{ پس } x_s = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$



$$f(b) < f(a) \rightarrow b > a \geq \frac{3}{4} \rightarrow 2m^2 - m + 3 > 2m - m^2 + 1 \geq \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} 3m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 4m - 4m^2 + 4 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4m^2 - 4m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow m = 0, 1, 2$$

۳- گزینه ۱

$$p(x) = (x+3)(x-2)q(x) + 2x + 6$$

$$\rightarrow p(-3) = 0, p(2) = 10 \rightarrow p^{-1}(0) = -3, p^{-1}(10) = 2$$

۴- گزینه ۲

$$p(x) = (x-3)q_1(x) + 2 \rightarrow p(3) = 2$$

$$\rightarrow (3)^{n+1} - 3(3)^n + 27 - 6 + k = 2 \rightarrow k = -19$$

$$p(x) = x(x-1)(x+2)q_2(x) + (ax^2 + bx + c)$$

$$\rightarrow \begin{cases} p(0) = c = 19 \\ p(1) = a + b + c = 1 - 3 + 1 - 2 - 19 = -22 \\ p(-1) = a - b + c = -1 - 3 - 1 + 2 - 19 = -22 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ a - b = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -19 \end{cases} \rightarrow R(x) = -3x^2 - 19$$

۵- گزینه ۴

$$y_1 = \sqrt[3]{3x+1} - 2 \rightarrow y_2 = \sqrt[3]{3x+1} - 2 + k$$

چون نمودار y_2 در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، وارون خود را فقط روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند. پس محل تقاطع، نقطه $A \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix}$ می‌باشد.

پس $-3 = -2 - 2 + k$ ، بنابراین، $k = 1$ و $y_2 = \sqrt[3]{3x+1} - 1$ داریم:

$$y_3 = \sqrt[3]{3x+7} - 1 \text{ یا } y_3 = \sqrt[3]{3(x+2)+1} - 1$$

و سپس داریم: $y_4 = \sqrt[3]{-3x+7} - 1$

بنابراین: $g(x) = \sqrt[3]{-3x+7} - 1$ حال می‌توان نوشت:

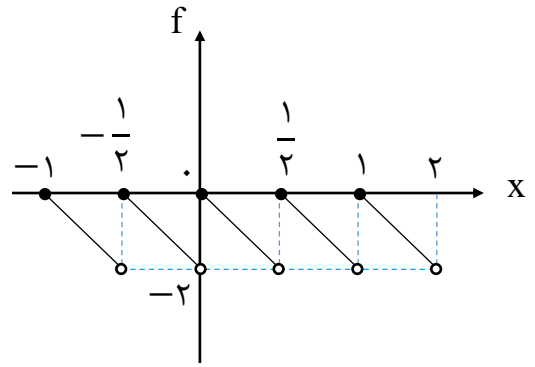
$$g^{-1}(a) = x \rightarrow g(x) = a \rightarrow \sqrt[3]{7-3a} = 1 \rightarrow 7-3a = 1 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

۶- گزینه ۱

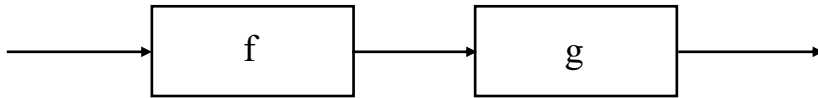
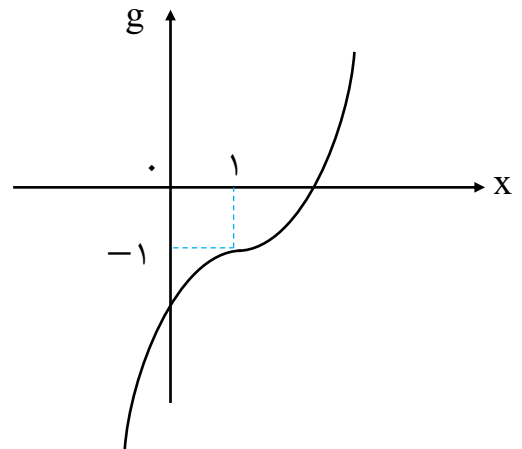
$$(f \circ g)^{-1}(a) = x \rightarrow (f \circ g)(x) = a \rightarrow f(g(x)) = a \rightarrow f(1) = a = \frac{1}{4}$$



$$f(x) = 2([2x] - 2x)$$



$$g(x) = (x - 1)^3 - 1$$



چون مقادیر تابع f در بازه $(-2, 0]$ می‌باشد، پس برد تابع g در این بازه برابر است با $[-28, -2]$ ، پس $ab = 56$.

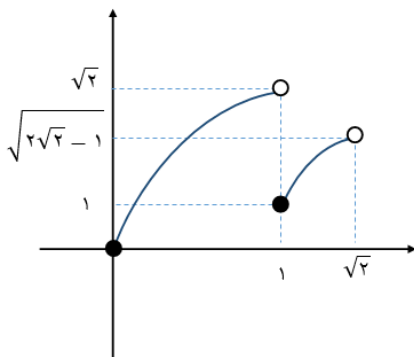
۸- گزینه ۴

چون باید $0 \leq [x^2] - 2x$ ، پس $x \geq 0$ می‌باشد. حال می‌نویسیم:

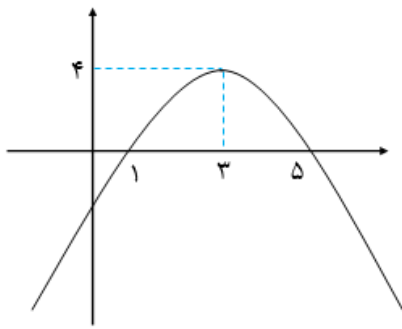
$$0 \leq x^2 < 1 \rightarrow [x^2] = 0 \rightarrow y = \sqrt{2x} \quad ; 0 \leq x < 1$$

$$1 \leq x^2 < 2 \rightarrow [x^2] = 1 \rightarrow y = \sqrt{2x-1} \quad ; 1 \leq x < \sqrt{2}$$

حال نمودار را رسم می‌کنیم:



$$bc = \sqrt{4\sqrt{2}-2} \text{ پس: } c = \sqrt{2\sqrt{2}-1} \text{ و } b = \sqrt{2}$$



$$y = -x^2 + 6x - 5$$

پس دامنه تابع f به صورت $[1, 5]$ می باشد، به طوری که تابع f در بازه $[1, 3]$ اکیداً صعودی و در بازه $[3, 5]$ اکیداً نزولی است. از طرفی داریم:

$$h(x) = (g^{-1} \circ g)(x) = x; \quad x \in D_g \text{ یا } x > 3$$

$$\text{پس: } y = f(x) - 3x; \quad 3 < x \leq 5$$

چون توابع $f(x)$ و $-3x$ در بازه $(3, 5]$ اکیداً نزولی و پیوسته می باشند، پس جمع آنها نیز اکیداً نزولی و پیوسته می باشد؛ بنابراین:

$$x = 3 \rightarrow y = f(3) - 9 = 2 - 9 = -7$$

$$x = 5 \rightarrow y = f(5) - 15 = -15$$

پس برد برابر است با: $[-15, -7]$

$$S_{10} = 4a_1.$$

$$\rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 4(a_1 + 9d) \rightarrow 10a_1 + 45d = 4a_1 + 36d \rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}d$$

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} = \frac{-\frac{3}{2}d + 4d}{-\frac{3}{2}d} = \frac{\frac{5}{2}d}{-\frac{3}{2}d} = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} a_1 = 10 \rightarrow a + b + c = 10 \\ a_2 = 3 \rightarrow 4a + 2b + c = 3 \\ a_3 = 0 \rightarrow 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \\ \xrightarrow{\text{تفاضل}} \end{matrix} \begin{cases} 3a + b = -7 \\ 5a + b = -3 \end{cases}$$

اگر دو معادله آخر را از هم کم کنیم، به رابطه $2a = 4$ می رسیم.

پس $a = 2$ و $b = -13$ و $c = 21$. در نتیجه: $a_n = 2n^2 - 13n + 21$.

جمله یازدهم، اولین جمله سه رقمی دنباله است: $a_{11} = 120$ و $a_{10} = 91$.

$$\frac{a^7 + 1 - (a^7 - 1)}{a^6 - 1} = \frac{2}{7} \rightarrow \frac{2}{a^6 - 1} = \frac{2}{7} \rightarrow 2a^6 - 2 = 14 \rightarrow a^6 = 8 \rightarrow a^7 = 2$$

$$\frac{1}{a^7 - 1} - \frac{a^7 - 1}{a^6 + a^7 + 1} = \frac{a^6 + a^7 + 1 - a^6 + 2a^7 - 1}{a^6 - 1} = \frac{3a^7}{a^6 - 1} = \frac{6}{7}$$

$$P = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) = \sqrt{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 = 2$$

تعیین علامت عبارت $\frac{1-ax}{x-a}$ مانند تعیین علامت عبارت $(1-ax)(x-a)$ است. (بجز ریشهٔ مخرج) باتوجه به علامت a ، دو حالت برای جدول تعیین علامت وجود دارد.

	x	a	$\frac{1}{a}$	
$a > 0$	$(1-ax)(x-a)$	-	+	-

در این حالت، جواب نامعادله به صورت $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ نیست.

	x	a	$\frac{1}{a}$	
$a < 0$	$(1-ax)(x-a)$	+	-	+

در این حالت، جواب به صورت $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ است. از طرفی، باید $a < \frac{1}{a}$ باشد؛ پس:

$$a < \frac{1}{a} \rightarrow a - \frac{1}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} a^2 - 1 > 0 \rightarrow a^2 > 1 \rightarrow a < -1$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 3a = 0 \\ x^2 - 2x + 4a = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x - a = 0 \rightarrow x = a$$

ریشه مشترک پیدا شد.

$$x = a \rightarrow \begin{cases} a^2 - a + 3a = 0 \\ a^2 - 2a + 4a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -2 \end{cases}$$

حال، دو معادله را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2, 3 \\ x = -2, 4 \end{cases} \rightarrow \alpha - \beta = 4 - 3 = 1$$

رأس سهمی نقطه $A(2, 2)$ است.

$$f(x) = k(x - 2)^2 + 2$$

$$f(1) = 0 \rightarrow k + 2 = 0 \rightarrow k = -2$$

$$\rightarrow f(x) = -2(x - 2)^2 + 2 = -2x^2 + 8x - 6 = -2(x - 1)(x - 3)$$

$$\begin{cases} \alpha = f(0) = -6 \\ \beta = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = -18 \end{cases}$$

$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$\begin{cases} \beta = -3 + \sqrt{9+m} \\ \alpha = -3 - \sqrt{9+m} \end{cases} \rightarrow 9 + 9 + m + 6\sqrt{9+m} + 2(9 + 9 + m - 6\sqrt{9+m}) = 51 \rightarrow 3m - 6\sqrt{9+m} + 3 = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{9+m} = m + 1 \quad (1)$$

$$2 \text{ به توان } 2: 4(9+m) = m^2 + 2m + 1 \rightarrow m^2 - 2m - 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -5 \end{cases}$$

 $m = -5$ نمی تواند ریشه معادله (۱) باشد ولی $m = 7$ ریشه معادله می تواند باشد.با توجه به این که $4x + 8 \geq 0$ است، پس $x \geq -2$ و در نتیجه $x + 3$ مثبت است.

$$\sqrt{4x+8} = x + 3 - k \rightarrow 4x + 8 = x^2 + 2(3-k)x + (3-k)^2 \quad (1)$$

$$\rightarrow x^2 + 2(1-k)x + 1 - 6k + k^2 = 0$$

به شرطی ریشه ها قرینه یکدیگرند که مجموع دو ریشه برابر صفر باشد؛ پس $k = 1$ است.

$$k = 1 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

حال باید مطمئن شویم که ریشه های به دست آمده در معادله (۱) صدق می کند.

$$k = 1 \rightarrow \sqrt{4x+8} = x + 2$$

هم $x = 2$ و هم $x = -2$ در این معادله صدق می کند.

۲۱- گزینه ۲ 	۲۰- گزینه ۴ 	۱۹- گزینه ۴ 
۲۴- گزینه ۱ 	۲۳- گزینه ۱ 	۲۲- گزینه ۲ 
۲۷- گزینه ۴ 	۲۶- گزینه ۳ 	۲۵- گزینه ۳ 
۲۹- گزینه ۳ 	۲۸- گزینه ۲ 	

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow a | kb (k \in \mathbb{Z}) \\ a | b, a | c \Rightarrow a | b \pm c \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} m | 2n+6 &\xrightarrow{\times 3n} m | 6n^2 + 18n \\ m | 3n^2 - 2n + 6 &\xrightarrow{\times 2} m | 6n^2 - 4n + 12 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} m | 22n - 6$$

$$\left. \begin{aligned} m | 22n - 6 &\xrightarrow{\times (-1)} m | -22n + 6 \\ m | 2n + 6 &\xrightarrow{\times 11} m | 22n + 66 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} m | 72 \Rightarrow m = \pm 1, \pm 2, \pm 36, \pm 72$$

$m = 2, 36$ عددی اول است در نتیجه داریم:

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: اگر حاصل ضرب سه پرانتز فرد باشد (فرض خلف)، پس حاصل هر پرانتز عددی فرد بوده و در نتیجه مجموع آن‌ها نیز عددی فرد است. اما:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0$$

بنابراین فرض خلف باطل بوده و حاصل ضرب پرانتزها عددی زوج است.

گزینه ۲: از آنجا که تنها ترتیب اعداد عوض شده است، پس حتماً یکی از اعداد a_1, a_2 یا a_3 با b_1 برابر بوده و حداقل حاصل یکی از پرانتزها، صفر است و در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها نیز صفر بوده و زوج است.

گزینه ۳: برای مثال اگر هر سه عدد a_1, a_2 و a_3 را فرد در نظر بگیریم، حاصل گزینه ۳ عددی فرد خواهد بود.

$$\text{گزینه ۴: از آنجا که تنها ترتیب اعداد عوض شده می‌توانیم بنویسیم: } a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 = 2a_1 a_2 a_3$$

که عددی زوج است.

پس تنها حاصل گزینه ۳ می‌تواند عددی فرد باشد.

$$\left. \begin{aligned} 7 | 2a+b+k &\xrightarrow{\times 2} 7 | 4a+2b+2k \\ 7 | 2a-2b+2 &\end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} 7 | 6a+2k+2 \xrightarrow{7|6a} 7 | 2k+2 \Rightarrow 7 | 2(k+1) \Rightarrow 7 | k+1$$

بنابراین عدد $k+1$ مضرب ۷ است. بزرگ‌ترین مضرب دورقمی ۷، عدد ۹۸ است، بنابراین داریم:

$$k+1=98 \Rightarrow k=97 \Rightarrow k = 16 = \text{مجموع ارقام}$$

۳۳- گزینه ۱

مجموع اعداد ۱، ۲، ... و n برابر است با: $A = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

اگر A زوج باشد، داریم: $A = \frac{n(n+1)}{2} = 2k \Rightarrow n(n+1) = 4k$

از آنجا که n و $n+1$ دو عدد متوالی هستند، هر دو نمی‌توانند مضرب ۲ باشند، بنابراین n یا $n+1$ مضرب ۴ خواهد بود:

$$\begin{cases} n = 4q \Rightarrow 1 \leq 4q \leq 90 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 1 \leq q \leq 22 \\ n = 4q - 1 \Rightarrow 1 \leq 4q - 1 \leq 90 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 1 \leq q \leq 22 \end{cases}$$

هریک از مجموعه‌های فوق ۲۲ عضو دارند؛ بنابراین به‌ازای ۴۴ مقدار مختلف n ، عدد A زوج می‌باشد.

۳۴- گزینه ۲

می‌دانیم عدد $13!$ بر تمام اعداد کوچکتر یا مساوی ۱۳ بخش‌پذیر است. از طرفی ۱۲ بر اعداد یک‌رقمی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ بخش‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 1 \mid 13! + 12 \\ 2 \mid 13! + 12 \\ 3 \mid 13! + 12 \\ 4 \mid 13! + 12 \\ 5 \mid 13! + 12 \end{cases}$$

۳۵- گزینه ۱

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

$$259 = bq + 31 \Rightarrow bq = 228 \xrightarrow{0 \leq r < b} b > 31$$

بنابراین حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} b = 38, q = 6 \\ b = 57, q = 4 \\ b = 76, q = 3 \\ b = 114, q = 2 \\ b = 228, q = 1 \end{cases}$$

$$a = bq + 23, r < b \Rightarrow 23 < b \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه تقسیم را در ۳ ضرب کنیم، آنگاه داریم:

$$3a = 3bq + 69 \quad (2)$$

از طرفی طبق فرض باقی مانده $3a$ بر b عدد ۱۵ است، پس داریم:

$$3a = bq' + 15 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow 3bq + 69 = bq' + 15 \Rightarrow b(q' - 3q) = 54 \Rightarrow bq'' = 54 \Rightarrow b \mid 54 \xrightarrow{(1)} b = 27, 54$$

$$(fn + 7, \Delta n + 9) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid fn + 7 \\ d \mid \Delta n + 9 \end{cases} \Rightarrow d \mid 5(fn + 7) - 4(\Delta n + 9) \Rightarrow d \mid -1 \Rightarrow d = 1$$

پس به ازای تمامی مقادیر $1 \leq n \leq 50$ ، ب. م. م این دو عدد برابر ۱ است.

$$802 = 14b + r \xrightarrow{0 \leq r < b} \begin{cases} r = 802 - 14b \geq 0 \Rightarrow b \leq 57 \\ r = 802 - 14b < b \Rightarrow b \geq 54 \end{cases} \Rightarrow 54 \leq b \leq 57$$

a عددی فرد است، پس $a + 1400$ نیز فرد بوده و در نتیجه مقسوم علیه های آن یعنی b و c نیز فرد هستند. مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8t + 1$ نوشت، بنابراین داریم:

$$2b^2 + 4c^2 - 7 = 2(8t + 1) + 4(8t' + 1) - 7 = 16t + 2 + 32t' + 4 - 7 = 16(t + 2t') - 1 = 16(\underbrace{t + 2t' - 1}_q) + 16 - 1 = 16q + 15$$

بنابراین باقی مانده تقسیم برابر ۱۵ است.

برای اینکه y مقداری صحیح داشته باشد، باید $3x^2 + 4x + 6$ بر $3x + 2$ بخش پذیر باشد، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{matrix} 3x + 2 \mid 3x^2 + 4x + 6 \\ 3x + 2 \mid 3x + 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3x + 2 \mid (3x^2 + 4x + 6) - (3x + 2)x \Rightarrow 3x + 2 \mid 2x + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x+2 \mid 2x+6 \\ 3x+2 \mid 3x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x+2 \mid 3(2x+6) - 2(3x+2) \Rightarrow 3x+2 \mid 14$$

یعنی $3x+2$ مقسوم‌علیه ۱۴ است. برای پیدا کردن کمترین و بیشترین مقدار x ، به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌های ۱۴ را که به‌ازای آن x عددی صحیح شود، امتحان می‌کنیم.

$$3x+2=-14 \Rightarrow x=-\frac{16}{3} \text{ غ ق}$$

$$3x+2=-7 \Rightarrow x=-3 \text{ کمترین مقدار } x$$

$$3x+2=14 \Rightarrow x=4 \text{ بیشترین مقدار } x$$

بنابراین مجموع کمترین و بیشترین مقدار x ، برابر $1 = 4 + (-3)$ است.



۴۱ (دیارکجوری) - گزینه ۴

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow \frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{X}{Y^2 Z} \rightarrow \begin{cases} X = kg \\ Z = m \\ Y = s \end{cases}$$

$$W = F \cdot d \Rightarrow kg \frac{m}{s^2} \times m = kg \frac{m^2}{s^2} \rightarrow \frac{X \cdot Z^2}{Y^2}$$

۴۲ (دیارکجوری) - گزینه ۳

$$\rho = \frac{m}{v} \quad \rho' = \frac{1/2 \Delta m}{\cdot / \Delta} \cong 1/56 \rho$$

۴۳ (حیدری) - گزینه ۳

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2} mg}{\frac{1}{2} \times h \times 2R} = \frac{\pi R^2}{h \times 2R} = \frac{\pi R}{h \times 2} = \frac{3 \times 5}{20 \times 2} = \frac{3}{8}$$

۴۴ (حیدری) - گزینه ۲

$$\text{حجم ظرف} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times 3 \times 20^2 \times 20 = 8000 \text{ cm}^3 = 8L$$

حجم مایع ۷L است بنابراین $\frac{1}{8}$ ظرف خالی است و طبق تالس نتیجه می گیریم.

مایع تا نصف ارتفاع ظرف پر شده است.

$$P = \rho gh = 2000 \times 10 \times 0.1 = 2000 \text{ Pa}$$

۴۵ (حیدری) - گزینه ۲

اگر فاصله خط AB تا مرز جدایی دو مایع را H در نظر بگیریم:

$$P_B - P_A = (\rho_{\text{آب}} - \rho_{\text{روغن}}) gH = 800 \rightarrow (1000 - 800) \times 10 \times H = 800 \rightarrow H = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

اکنون ارتفاع ستون آب (h) حساب میکنیم:

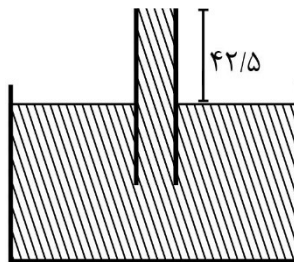
$$1 \times h = 0.4 \times 120 \Rightarrow h = 96 \text{ cm} \Rightarrow h' = h - H = 56 \text{ cm}$$

$$P_{\text{انتهای لوله}} + l \sin 53 = P. \rightarrow 6 + \cdot / \lambda l = 74 \rightarrow l = 85 \text{ cm}$$

اکنون طول قسمتی از لوله که بیرون جیوه است را نصف می‌کنیم:

$$P_{\text{انتهای لوله}} + 42/5 \text{ cmHg} = 74 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{انتهای لوله}} = 31/5 \text{ cmHg}$$



$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 \rightarrow 80 \times 5 = 10 v_2 = 40 v_3$$

$$\rightarrow v_2 = 40 \text{ m/s}, v_3 = 10 \text{ m/s} \rightarrow v_2 - v_3 = 40 - 10 = 30 \text{ m/s}$$

$$\Delta V_{\text{مایع}} = \Delta V_{\text{ظرف}} + 10 \text{ cm}^3 \rightarrow 115 \times 10^{-3} \times \Delta \theta = 125 \times 3 \times 4 \times 10^{-5} \Delta \theta + 10 \rightarrow$$

$$100 \times 10^{-3} \Delta \theta = 10 \rightarrow \Delta \theta = 100^\circ \text{C}$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{4}{3} \pi \times (2R)^3}{\frac{4}{3} \pi [(3R)^3 - (2R)^3]} = \frac{8R^3}{19R^3} = \frac{8}{19}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{8}{19} m_A c \Delta \theta_A = m_B c \Delta \theta_B \rightarrow \Delta \theta_A = \frac{19}{8} \Delta \theta_B$$

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A \alpha \Delta \theta_A}{V_B \alpha \Delta \theta_B} = \frac{(2R)^3}{(3R)^3} \times \frac{19}{8} = \frac{8}{27} \times \frac{19}{8} = \frac{19}{27}$$

۵۰ (محمدپور) - گزینه ۱

با رسیدن دمای یخ از -20°C به 0°C ، $1/25\text{g}$ یخ جدید تشکیل شده است. پس:

$$m \times 2/1 \times 20 = 1/25 \times 336 \rightarrow m = 10\text{g}$$

برای ذوب شدن 10g یخ -20°C گرمای لازم عبارت است از:

$$10 \times 2/1 \times 20 + 10 \times 336 = 420 + 3360 = 3780\text{J}$$

۵۱ (محمدپور) - گزینه ۲

ابتدا m را پیدا می کنیم:

$$m \times 2268 + m \times 4/2 \times 20 = 20 \times 4/2 \times 80 \rightarrow m = \frac{20}{7}$$

اکنون $7m$ گرم بخار آب 100°C را با 124g یخ صفر درجه مخلوط می کنیم. از گزینه های پیشنهاد شده معلوم است که در نهایت فقط آب داریم. اگر دمای تعادل θ باشد:

$$7 \times \frac{20}{7} \times 2268 + 7 \times \frac{20}{7} \times (100 - \theta) = 124 \times 336 + 124 \times 4/2 \times \theta$$

$$10800 + 2000 - 20\theta = 9920 + 124\theta$$

$$2880 = 144\theta \rightarrow \theta = 20^{\circ}\text{C}$$

۵۲ (محمدپور) - گزینه ۲

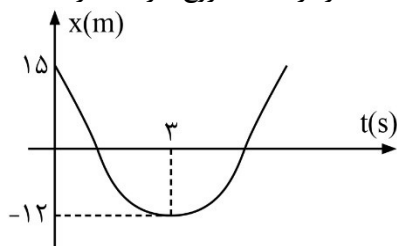
شدت انتقال گرما، به اختلاف دمای بین دو جسم وابسته است. با کم شدن دمای آب شدت انتقال گرما هم کاهش می یابد و شیب نمودار رفته رفته کاهش می یابد تا در دمای 20°C مماس افق شود.

۵۳ (حیدری) - گزینه ۱

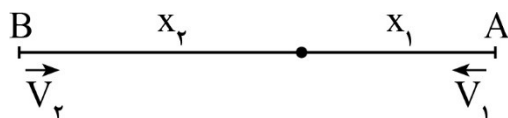
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2}{15} \times v_1 \rightarrow \frac{x-4}{10} = \frac{2}{15} \times \frac{x}{4} \rightarrow x = 6\text{m}, v_1 = \frac{6}{4} = 1.5\text{m/s}$$

۵۴ (حیدری) - گزینه ۳

با توجه به معادله مکان، متحرک در لحظه $t=3\text{s}$ تغییر جهت می دهد. بنابراین در همین لحظه بیشترین فاصله را از نقطه شروع حرکت دارد:



$$x_3 - x_1 = 3 \times 3^2 - 18 \times 3 = -27\text{m}$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1}{v_1} &= \frac{x_2}{v_2} \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{v_1}{v_2} \\ \text{برای متحرک دوم: } 1 &= \frac{x_1 + x_2}{v_2} \rightarrow v_2 = x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow v_1 = \frac{x_1(x_1 + x_2)}{x_2}$$

$$t_1 = \frac{2x_1}{v_1} = \frac{2x_1}{x_1(x_1 + x_2)} = \frac{2x_2}{x_1 + x_2} \left\{ \begin{aligned} t_2 &= 1 \end{aligned} \right. \rightarrow$$

$$t_1 - t_2 = \frac{2x_2}{x_1 + x_2} - 1 = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$$

۵۶ (حیدری) - گزینه ۴

با توجه به کاربرد نسبت در حرکت شتاب ثابت، داریم:

$$\frac{3x + 5x}{x + 3x + 5x} = \frac{8}{9}$$

بنابراین ۶s مدت زمان جابه‌جایی ۳x و ۵x است. پس مدت زمان کل حرکت ۹s است:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 9^2 = 162 \text{ m}$$

اکنون از ابتدا تا فاصله ۸۱ متری (وسط مسیر) معادله مستقل از زمان می‌نویسیم:

$$2 \times 4 \times 81 = v^2 - 0^2 \Rightarrow v = 18\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۵۷ (محمدپور) - گزینه ۴

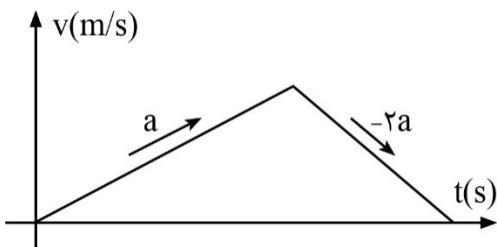
در لحظه $t=6s$ تندی ذره صفر است. ۴ ثانیه دوم یعنی $t=4s$ تا $t=8s$ ، و مسافت طی شده در این بازه دوباربر اندازه جابه‌جایی از $t=6s$ تا $t=8s$ است:

$$l = 2|\Delta x_{6 \rightarrow 8}| = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2 = 16 \text{ m}$$

$$S_{av} = \frac{16m}{4s} = 4 \frac{m}{s}$$

۵۸ (محمدپور) - گزینه ۲

برای اینکه قطار در کمترین زمان ممکن فاصله بین دو ایستگاه را طی کند، باید نمودار سرعت - زمان آن به شکل زیر باشد.
بنابراین نیازی نیست که مدتی با سرعت ثابت حرکت کرده باشد.



۵۹ (محمدپور) - گزینه ۳

می توان از کاربرد نسبت استفاده کرد.



$$x + 3x + 5x + 7x + 9x = 250 \rightarrow x = 10m$$

پس جابجایی در بازه های زمانی اشاره شده، به ترتیب برابر ۱۰، ۸۰ و ۱۶۰ متر است.

۶۰ (محمدپور) - گزینه ۴

ابتدا فاصله دو خودرو را در انتهای زمان واکنش راننده A (ابتدای ترمزگیری) حساب می کنیم.

$$165 - 20 \times 0.75 = 150m$$

اکنون معادله مستقل از زمان برای حرکت خودروی A از دید خودروی B به صورت زیر است.

$$20^2 - 0^2 = 2a \times 150 \rightarrow a = \frac{4}{3} \frac{m}{s^2}$$

دقت کنید در معادله بالا، ۲۰ و ۰ به ترتیب سرعت های نسبی ابتدا و انتهای ماجرا، ۱۵۰ جابجایی نسبی و a شتاب نسبی است.

ولی شتاب خودروی A نسبت به زمین همان شتاب خودروی A نسبت به خودروی B است، زیرا خودروی B شتاب ندارد.

۶۱ (محمدپور) - گزینه ۱

شتاب یکی از خودروها a و دیگری -a است.

$$x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_{.B}t + 2 \rightarrow v_B = at + v_{.B}$$

$$x_A = \frac{-1}{2}at^2 + v_{.A}t - 6 \rightarrow v_A = -at + v_{.A}$$



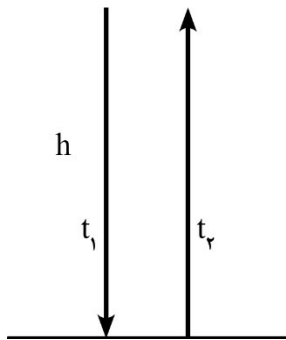
در لحظه $t = 1s$ دو نمودار مماس هستند، یعنی دو متحرک هم مکان و هم سرعت هستند. پس:

$$t = 1s \xrightarrow{v_A=v_B} a + v_B = -a + v_A \rightarrow v_A - v_B = 2a$$

$$t = 1s \xrightarrow{x_A=x_B} \frac{1}{2}a + v_B + 2 = \frac{-1}{2}a + v_A - 6$$

$$a + 8 = v_A - v_B = 2a \rightarrow a = 8 \text{ m/s}^2$$

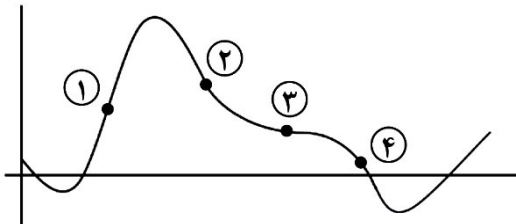
۶۲ (دیوار کجوری) - گزینه ۲



$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \times g \times t_1^2 = 5t_1^2 \\ h &= 300 \cdot t_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5t_1^2 = 300 \cdot t_2 \rightarrow \left. \begin{aligned} t_1^2 &= 60 \cdot t_2 \\ t_1 + t_2 &= 6/6 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$t_1 = 6s \quad t_2 = 0.6s \rightarrow h = 300 \times 0.6 = 180m$$

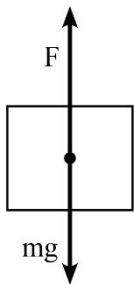
۶۳ (دیوار کجوری) - گزینه ۴



در هر کدام از نقاط ۱ تا ۴ که جهت تقعر منحنی تغییر می‌کند.

علامت شتاب و در نتیجه تغییر جهت برآیند نیروهای وارد بر جسم رخ می‌دهد.

۶۴ (دیوار کجوری) - گزینه ۳



چون سرعت ثابت است برآیند نیروهای وارد بر جسم باید صفر باشد.

$$F = mg = 5000 \times 10 = 50kN$$

این نیرویی است که هوا به ملخ وارد می‌کند پس نیروی ملخ به هوا همین مقدار و در خلاف جهت آن رو به پایین است.

۶۵ (دیوار کجوری) - گزینه ۳

$$F_{max} = 3 + 4 + 6 = 13N \rightarrow a_{max} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ m/s}^2$$

$$F_{min} = 3 + 4 - 6 = 1N \rightarrow a_{min} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

$$a_{max} - a_{min} = 6 \text{ m/s}^2$$

۶۶- گزینه ۳

می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \times \text{تعداد نوترون} = x \left(\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \times \text{تعداد پروتون و الکترون} \right)$$

$$\frac{19/6}{98} \times 48 = x \left(\frac{49}{98} \right) \times \frac{50 \times 2}{p^+ + e^-} \rightarrow x = 0.192$$

۶۷- گزینه ۲

عبارت‌های «ب» و «ت» نادرست هستند.

$$\Delta x = n - e$$

$$Z = \frac{A - \Delta x + (\text{بار با علامت جبری})}{2} = \frac{65 - 8 + (+1)}{2} = 29 \rightarrow X = {}^{65}_{29}\text{Cu}$$

بررسی عبارت‌ها:

(آ) جرم هر پروتون و نوترون تقریباً برابر با ۱amu است و جرم الکترون قابل چشم‌پوشی است.

$$65 \times 1/5 \times 10^{-24} = 9/75 \times 10^{-23} \text{ g}$$

(ب) شعله مس سبزرنگ و شعله سدیم رنگ زرد دارد. با توجه به انرژی پرتوهای مختلف، هرچه طول موج پرتویی که در هر مورد گسیل می‌شود کم‌تر باشد، دما بالاتر است.

دمای شعله زرد (Na) > دمای شعله سبز (Cu) → طول موج سبز > طول موج زرد

(پ) قاعده آفا برای تعیین آرایش الکترونی اتم مس نارسایی دارد و باید به کمک روش‌های طیف‌سنجی پیشرفته آن را تعیین کرد.

۶۸- گزینه ۱

ابتدا مولاریته محلول اولیه را بدست می‌آوریم:

$$M = \frac{10 \cdot ad}{M(\text{جرم مولی})} = \frac{10 \times 4/9 \times 1/5}{98} = 0.75 \text{ mol. L}^{-1}$$

سپس حجم آب لازم برای رقیق کردن را محاسبه می‌کنیم:

$$M_{\text{غلظت}} \times V_{\text{غلظت}} = M_{\text{رقیق}} \times V_{\text{رقیق}}$$

$$0.75 \times 40 = 0.1 \times V \rightarrow V = 300 \text{ mL}$$

$$V_{\text{رقیق}} = V_{\text{غلظت}} + V_{\text{آب}} \rightarrow 300 = 40 + V_{\text{آب}} \rightarrow V_{\text{آب}} = 260 \text{ mL}$$

۶۹- گزینه ۴

عددی که گلوکومتر نشان می‌دهد، بر اساس میلی گرم گلوکز در هر دسی لیتر خون است؛ در نتیجه اختلاف ۱/۸ به معنی افزایش ۱/۸ میلی گرم گلوکز در هر دسی لیتر خون است؛ یعنی $1/8 \times 10^{-2}$ گرم گلوکز در هر لیتر خون.

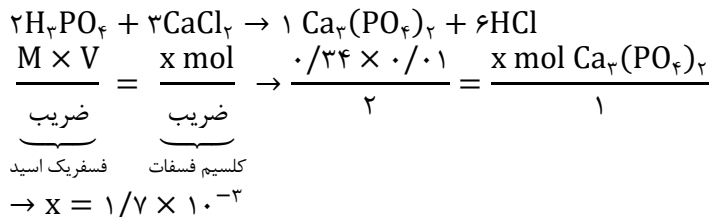
$$1/8 \times 10^{-2} \times 5 = 9 \times 10^{-2} \text{ g. L}^{-1}$$

$$9 \times 10^{-2} \times \frac{100}{4} = 0.225 \text{ g}$$

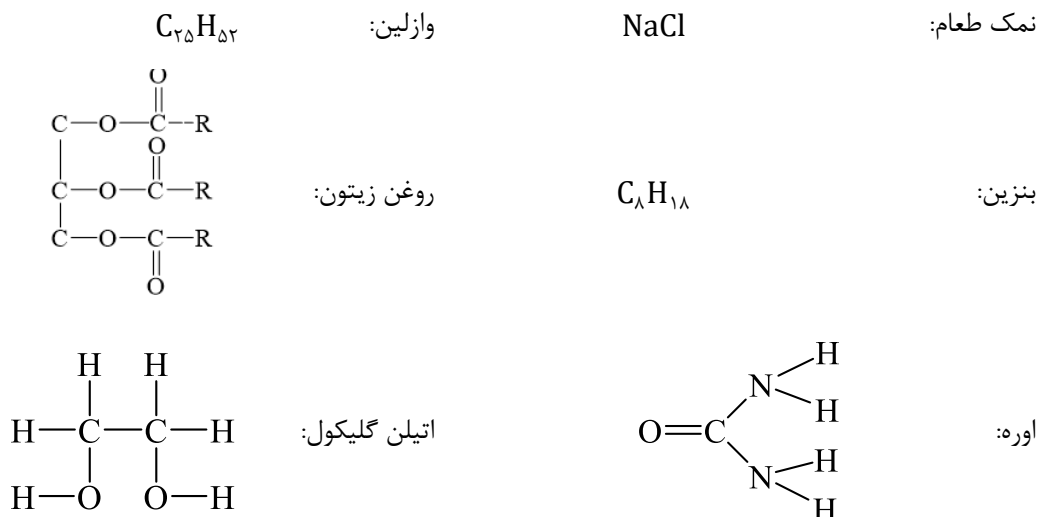
۷۰- گزینه ۴

ابتدا مولاریته محصول نهایی را حساب می‌کنیم:

$$M_{\text{نهایی}} = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{(0.3 \times 0.4) + (0.5 \times 0.1)}{0.5} = 0.34 \text{ mol. L}^{-1}$$

حال، مقدار رسوب یعنی $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ را بر حسب مول بدست می‌آوریم:

۷۱- گزینه ۲



بررسی عبارت‌ها:

(آ) مولکول‌های اتیلن گلیکول، بنزین و وازلین سیرشده هستند. (سه عضوی) [توجه: NaCl مولکول نیست.]

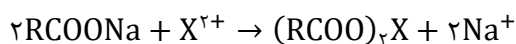
(ب) اتیلن گلیکول و اوره توانایی برقراری پیوند هیدروژنی دارند. (دو عضوی)

(پ) مولکول‌هایی که در ساختار خود تنها دو نوع اتم دارند، وازلین و بنزین هستند. (دو عضوی)

(ت) تنها ماده‌ای که محلول آن رسانای جریان الکتریکی است، NaCl است. (تک عضوی)

۷۲- گزینه ۲

صابون جامد، RCOONa است که با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} ، به ترتیب، رسوب‌های $(\text{RCOO})_2\text{Ca}$ و $(\text{RCOO})_2\text{Mg}$ را تشکیل می‌دهد. اختلاف جرم این دو رسوب در هر مول از آن‌ها، برابر با اختلاف جرم مولی Mg و Ca یعنی 16g است. $40 - 24 = 16\text{g}$ است.



$$\frac{\text{جرم صابون جامد}}{\text{جرم مولی } \times \text{ ضریب}} = \frac{\text{اختلاف جرم دو رسوب}}{\text{اختلاف جرم در هر مول } \times \text{ ضریب}} \rightarrow \frac{12/24\text{g صابون}}{x \times 2} = \frac{0.32\text{g}}{16 \times 1} \rightarrow x = 3.6$$

$$14n + 54 = 3.6 \rightarrow n = 18$$

۷۳- گزینه ۲

ترکیب «۱»، استر ۳ عاملی است ولی بخش زنجیر کربن آن بسیار کوتاه (سه کربن) است؛ در نتیجه استر بلندزنجیر نیست.
ترکیب «۲»، اسید چرب است.
بررسی عبارت‌ها:

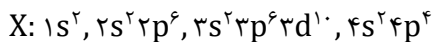
- (۱) به علت کوتاه بودن زنجیره کربنی این استر، به عنوان جزء سازنده چربی مناسب نیست.
- (۲) نمک پتاسیم دار اسید چرب، صابون مایع است.
- (۳) در مولکول «۱»، بخش ناقطبی کوتاه و در نتیجه مغلوب بخش قطبی است.
- (۴) نمک کلسیم دار اسید چرب، ترکیبی نامحلول در آب است. $((RCOO)_2Ca(s))$

۷۴- گزینه ۳

الکترون در هر لایه‌ای که باشد، در تمام پیرامون هسته حضور می‌یابد.

۷۵- گزینه ۱

آرایش الکترونی عنصر مورد نظر به صورت زیر است:



این عنصر دارای ۱۶ الکترون با $l = 1$ (در زیرلایه p) است و یون X^{2-} تشکیل می‌دهد. فرمول ترکیب حاصل از این عنصر با A به صورت A_2X است و ترکیب یونی می‌باشد.

۷۶- گزینه ۲

$$\begin{aligned} \text{Fe}_2\text{O}_3 \text{ در مول کاتیون: } \frac{20 \text{ g Fe}_2\text{O}_3}{160} \times 2 &= \frac{1}{4} \\ \text{Ca}_3\text{N}_2 \text{ در مول یونها: } \frac{x}{148} \times 5 &= \frac{5x}{148} \\ \frac{1}{4} &= \frac{5x}{148} \rightarrow x = \frac{148}{20} = 7/4 \end{aligned}$$

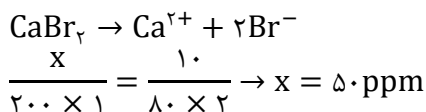
۷۷- گزینه ۲

تعداد درست در هر مورد به صورت زیر است:

- (آ) ۵ مورد (^{33}As , ^{29}Cu , ^{25}Mn , ^{24}Cr , ^{19}K)
(ب) ۳ مورد (^{31}Ga , ^{30}Zn , ^{29}Cu)
(پ) ۱۰ مورد (^{32}Ge , ۸ عنصر واسطه، ^{20}Ca)

۷۸- گزینه ۱

ابتدا غلظت نمک CaBr_2 را بر حسب ppm حساب می‌کنیم:



سپس غلظت ppm را به غلظت مولی تبدیل می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10^{-3} \times 50 \times 1}{200} = \frac{10 \times 10^{-4}}{4} = 2/5 \times 10^{-4}$$

۷۹- گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} [H^+]_1 &= 10^{-2} \\ [H^+]_2 &= 10^{-1} \end{aligned} \right\} \Delta[H^+] = 10^{-1} - 10^{-2}(10 - 1) = 9 \times 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$? \text{ L HCl} = 200 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{9 \times 10^{-2} \text{ mol}}{1 \text{ L}} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol}} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 403.2 \text{ mL HCl}$$

۸۰- گزینه ۴

واکنش موازنه شده به صورت زیر است:



$$[H^+] = 10^{-\text{pH}} = M_{\text{HCl}} = 10^{-1}$$

$$\frac{\text{لیتر محلول} \times \text{غلظت مولی HCl}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب CaCO}_3}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \rightarrow \frac{10^{-1} \times x}{2} = \frac{4}{100 \times 1}$$

$$\rightarrow x = 0.8 \text{ L} = 800 \text{ mL}$$

۸۱- گزینه ۲

موارد «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف) با توجه به اینکه در شروع فرآیند، مقداری N_2 در ظرف وجود داشته است، در لحظه تعادل تعداد ذرات H_2 کمتر از ۳ برابر ذرات N_2 است.ت) پس از برقراری تعادل، رابطه سرعت تغییر مقدار NH_3 و N_2 به صورت زیر است:

$$\frac{\bar{R}_{NH_3}}{2} = \frac{\bar{R}_{N_2}}{1} \rightarrow \bar{R}_{NH_3} = 2\bar{R}_{N_2}$$

۸۲- گزینه ۴

با توجه به اینکه ثابت یونش (K_a) اسید HA کمتر از اسید HB است، برای اینکه رسانایی الکتریکی محلولی از HA بیشتر از محلول حاوی HB باشد، باید غلظت یون‌ها در محلول HA بیشتر باشد؛ بنابراین، غلظت H^+ در محلول HA و غلظت اولیه آن بیشتر از HB است.

بررسی تمام عبارت‌ها:

الف و ب) از آنجا که $[H^+]$ در محلول HA بیشتر است، نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول HA و pH محلول HA کمتر است.پ) سرعت واکنش منیزیم با محلول اسید به $[H^+]$ بستگی دارد که در محلول HA بیشتر از HB است.ت) غلظت مولکول‌های یونیده نشده از رابطه $M(1 - \alpha)$ به دست می‌آید:

$$[H^+]_{HA} > [H^+]_{HB} \rightarrow M\alpha_{(HA)} > M\alpha_{(HB)}$$

از آنجا که M_{HA} بیشتر از M_{HB} است، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{HB} &> \alpha_{HA} \\ M_{HB} &< M_{HA} \end{aligned} \right\} \rightarrow \underbrace{M(1 - \alpha)}_{HB} < \underbrace{M(1 - \alpha)}_{HA}$$

غلظت مولکول‌های یونیده نشده $HA <$ غلظت مولکول‌های یونیده نشده $HB \rightarrow$

۸۳- گزینه ۲

ابتدا غلظت یون H^+ در محلول موردنظر را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{[H^+]^2} = 2/5 \times 10^{-9}$$

$$\rightarrow [H^+] = \sqrt{\frac{10^{-14}}{2/5 \times 10^{-9}}} = \sqrt{4 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{-3}$$

حال، غلظت تعادلی (غلظت مولکول یونیده نشده) در این اسید را حساب می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{تعادلی}}} \rightarrow 2 \times 10^{-5} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{x} \rightarrow x = \frac{4 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-5}} = 0.2$$

با توجه به اینکه این اسید بسیار ضعیف ($K_a = 2 \times 10^{-5}$) است، می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$K_a = M\alpha^2 \rightarrow M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \xrightarrow{M_2=16M_1} M_1\alpha_1^2 = (16M_1)\alpha_2^2$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{16}\alpha_1^2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{4}\alpha_1 \rightarrow [H^+]_2 = M_2\alpha_2 = (16M_1)\left(\frac{1}{4}\alpha_1\right)$$

$$\rightarrow |\Delta pH| = \log 4 = 0.6$$

۸۴- گزینه ۲

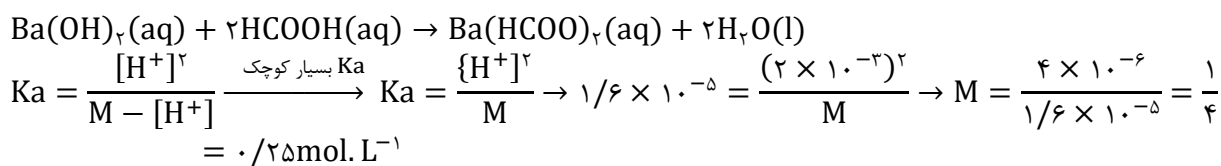
$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M - [OH^-]} \xrightarrow{K_b \text{ بسیار کوچک}} K_b = \frac{[OH^-]^2}{M}$$

$$\rightarrow 1/7 \times 10^{-5} = \frac{(10^{-2})^2}{M} \rightarrow M = \frac{10^{-4}}{1/7 \times 10^{-5}} = \frac{10 \times 10^{-5}}{1/7 \times 10^{-5}} = \frac{10}{1/7}$$

$$(M) \text{ غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{لیتر}} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{لیتر}} = \frac{x}{0.1} = \frac{10}{1/7} \rightarrow x = 10 \text{ g NH}_3$$

۸۵- گزینه ۲

واکنش موازنه شده به صورت زیر است:

اکنون غلظت $Ba(OH)_2$ را حساب می‌کنیم:

$$[OH^-] = 10^{-1} = M \times n \rightarrow M = \frac{10^{-1}}{2} = 5 \times 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\frac{Ba(OH)_2 \text{ غلظت} \times \text{میلی لیتر محلول}}{\text{ضریب}} = \frac{HCOOH \text{ غلظت} \times \text{میلی لیتر محلول}}{\text{ضریب}} \rightarrow \frac{5 \times 10^{-2} \times 20}{1} = \frac{25 \times 10^{-2} \times x}{2} \rightarrow x = 8$$