



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
سؤال
آزمون یکم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

تعیین علامت و نامعادله
+ معادله و تابع درجه ۲
+ معادله‌های گویا و گنگ
ریاضی ۱
صفحه ۶۹ تا ۹۳
ریاضی ۲
صفحه ۱۱ تا ۲۴

مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - محمود امیری - حسین شفیع‌زاده - علی شهبابی - مهدی عزیزی
مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی‌منش

گزینشگر

رسول محسنی‌منش

مؤلف پاسخ‌نامه

سروش موئینی

کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

محمدحسین رحیمی
سروش موئینی

ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

شقایق راهبریان
حسنا شاه‌حیدری
ماهان فنی‌فر

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانی‌پور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.

ریاضی (۲): صفحه‌های ۱۱ تا ۲۴، ریاضی (۱): صفحه‌های ۶۹ تا ۹۳

۱- اگر a و b اعداد طبیعی یک‌رقمی و ریشه‌های معادله $-x^2 + bx + a = 0$ اعداد صحیح باشند، چند حالت برای انتخاب a و b قابل قبول است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۲- اگر $x = \sqrt{a} + b$ ریشه گنگ معادله درجه دوم $2x^2 + ax - b = 0$ با ضرایب گویای غیر صفر باشد، جزء صحیح ریشه دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۸ (۳) -۹ (۴) -۱۰

۳- در سهمی به معادله $y = x^2 + bx + c$ ، مثلثی که رئوسش نقاط برخورد سهمی با محورها باشد، قائم‌الزاویه است و مثلثی که رئوسش صفرهای سهمی و نقطهٔ مینیمم سهمی هستند، متساوی‌الاضلاع است. فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم سهمی از نقطهٔ تقاطع آن با محور y ها کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) ۶

۴- به ازای چند مقدار a معادله‌های $x^2 - x - a = 0$ و $x^2 + ax + 1 = 0$ ریشهٔ حقیقی مشترک دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۵- α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2 + rx - \frac{1}{2r^2} = 0$ هستند. کم‌ترین مقدار $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2 + \sqrt{2}$ (۳) $2 + 2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۶- اگر m یک عدد طبیعی باشد و چهار ریشهٔ حقیقی معادله $x^4 + m^2 - 3mx^2 = 2x^2$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d ایجاد کنند، حاصل $\log_{m-2}^d$ کدام است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/75$ (۳) $1/25$ (۴) $1/75$

۷- $\alpha - 2$ و $\beta - 2$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $4x^2 - x - 1 = 0$ هستند. معادلهٔ درجه دوم با ریشه‌های $\beta + 2$ و α به صورت $4x^2 + ax + b = 0$ است، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۲

۸- به ازای $m \in A$ ، سهمی $y = (m - 4)x^2 + 12x + m + 1$ دقیقاً از سه ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور می‌کند. اگر $A \subseteq \mathbb{Z}$ و a, b, c به ترتیب کوچک‌ترین عضو، بزرگ‌ترین عضو و میانهٔ اعضای A باشند، اختلاف جذر صفرهای تابع

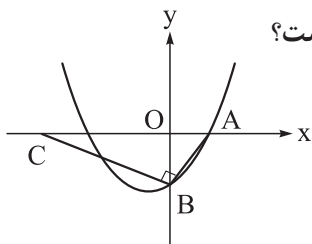
$f(x) = ax^2 + bx + c$ چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

محل انجام محاسبات



۹- در سهمی $y = 2x^2 + (k-3)x + 1 - k$ نقاط A و B به ترتیب محل برخورد سهمی با محور طول ها و محور عرض ها می باشند. مطابق شکل اگر مساحت مثلث ABC برابر ۱۵ باشد، حاصل $k + \sqrt{k+12}$ کدام است؟



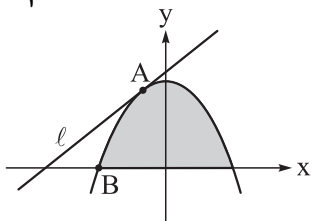
(۱) صفر

(۲) ۳۰

(۳) ۱۸

(۴) ۸

۱۰- مانند شکل، خط $\ell: y - x - a = 0$ سهمی $y = \frac{-1}{4}x^2 + 3$ را فقط در نقطه A قطع می کند. اگر خطوط $y - x - a = \frac{-n}{4}$ که $n \in \mathbb{N}$ از ناحیه رنگی (ناحیه محدود به بالای محور طولی و سهمی) نگذرند و مختصات نقطه C به صورت $(\frac{n}{4} - a, 0)$ باشد، کم ترین مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$\frac{25 + 10\sqrt{6}}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{25 + 5\sqrt{6}}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{5 + 5\sqrt{6}}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{5 + 10\sqrt{6}}{8} \quad (۳)$$

۱۱- اگر a و b اعداد طبیعی و $a + b = 8$ و ضمناً اشتراک مجموعه جواب نامعادلات $(x-a)(x+2a) < 0$ و $(x-b)(x+2b) > 0$ شامل ۱۶ عدد صحیح باشند، آن گاه $a \times b$ برابر است با:

(۴) ۷

(۳) ۱۰

(۲) ۱۲

(۱) ۱۵

۱۲- اگر $x = 2 + \frac{1}{\alpha}$ تنها جواب معادله $2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + 2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 5$ باشد، α کدام است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۸

(۲) ۴

(۱) ۲

۱۳- از حل نامعادله $\sqrt{x^2 - 7x + 12} > 2x - 6$ ، تمامی مقادیر قابل قبول برای x به کدام صورت قابل نمایش است؟

(۴) $(-\infty, a) \cup (b, c)$ (۳) $(-\infty, a) \cup \{b, c\}$ (۲) $(a, +\infty)$ (۱) $(-\infty, a)$

۱۴- مجموع ریشه های حقیقی معادله $x^2 + (\frac{x}{x+1})^2 = 3$ برابر است با:

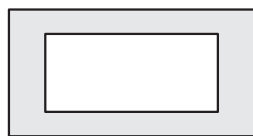
(۴) ۳

(۳) -۱

(۲) -۳

(۱) ۱

۱۵- در شکل زیر هر دو مستطیل طلایی هستند. اگر طول ضلع بزرگ مستطیل کوچک تر، برابر با طول ضلع کوچک مستطیل بزرگ تر باشد، مساحت ناحیه رنگی چه کسری از مساحت مستطیل بزرگ تر است؟



$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{3} \quad (۳)$$

محل انجام محاسبات

$$\frac{x+a}{4} + \frac{a-a}{2x+a} = 2$$

(۴) بی شمار

۱۶- به ازای چند مقدار حقیقی a ، معادله مقابل فقط یک جواب دارد؟

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۷- پریا نسخه دستنویس یک جزوه را در x دقیقه تایپ می کند. سرعت آریتا $\frac{1}{5}$ سرعت پریا است. اگر هر دو با هم مطالب را تایپ کنند، جزوه a دقیقه زودتر از حالتی که فقط پریا کار کند تایپ می شود. به شرطی که $x, a \in \mathbb{Z}$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین عدد سه رقمی قابل قبول برای x کدام است؟

(۴) ۸۹۲

(۳) ۸۹۴

(۲) ۸۹۶

(۱) ۹۰۰

۱۸- پرندهای مسیر ۲۰۰ متری را در هوای آرام می رود و در مسیر برگشت با باد موافق به سرعت ۱۰ متر بر دقیقه برمی گردد و رفت و برگشت کلاً ۹ دقیقه طول می کشد. اگر این باد با همان جهت در مسیر رفت هم می وزید، کل مسیر چند دقیقه طول می کشید؟

(۴) ۱۰ دقیقه و ۴۰ ثانیه

(۳) ۱۰ دقیقه و ۲۰ ثانیه

(۲) ۱۱ دقیقه

(۱) ۱۰ دقیقه

۱۹- مجموعه جواب نامعادله $|x-1| < a |3x+5|$ به صورت $(-\infty, b)$ می باشد. حاصل $a+b$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۴

(۲) $\frac{11}{3}$ (۱) $\frac{8}{3}$ ۲۰- اگر α و β جوابهای معادله $\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{x-1} = 1$ باشند، مقدار $\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{\beta-1}\right)^3$ کدام می تواند باشد؟

(۴) ۱

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) صفر

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
پاسخ
آزمون یکم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

تعیین علامت و نامعادله
+ معادله و تابع درجه ۲
+ معادله‌های گویا و گنگ
ریاضی ۱
صفحه ۶۹ تا ۹۳
ریاضی ۲
صفحه ۱۱ تا ۲۴

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - محمود امیری - حسین شفیع‌زاده - علی شهبابی - مهدی عزیزی
مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
رسول محسنی‌منش	رسول محسنی‌منش	سروش موئینی	محمدحسین رحیمی سروش موئینی	شقایق راهبریان حسنا شاه‌حیدری ماهان فنی‌فر

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانی‌پور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

- ✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:
- دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۲): صفحه‌های ۱۱ تا ۲۴، ریاضی (۱): صفحه‌های ۶۹ تا ۹۳

تست و پاسخ (۱)

اگر a و b اعداد طبیعی یک‌رقمی و ریشه‌های معادله $-x^2 + bx + a = 0$ اعداد صحیح باشند، چند حالت برای انتخاب a و b قابل قبول است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه (۴)

پاسخ تشریحی: ریشه‌های معادله طبق فرمول دلتا به صورت $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2(-1)}$ هستند؛ پس برای این که ریشه‌ها اعداد صحیح باشند باید $\sqrt{\Delta}$ صحیح باشد و صورت کسر زوج شود؛ یعنی b و $\sqrt{\Delta}$ هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

$$\Delta = b^2 + 4a$$

در این معادله داریم:

پس اگر b زوج باشد Δ هم زوج است و اگر b فرد باشد دلتا فرد می‌شود؛ بنابراین کافی است $b^2 + 4a$ مربع کامل باشد:

b	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$b^2 + 4a$	$1 + 4a$	$4 + 4a$	$9 + 4a$	$16 + 4a$	$25 + 4a$	$36 + 4a$	$49 + 4a$	$64 + 4a$	$81 + 4a$
a	۲ ۶	۳ ۸	۴	۵	۶	۷	۸	۹	—

بنابراین ۱۰ انتخاب داریم.

تست و پاسخ (۲)

اگر $x = \sqrt{a} + b$ ریشه گنگ معادله درجه دوم $2x^2 + ax - b = 0$ با ضرایب گویای غیر صفر باشد، جزء صحیح ریشه دیگر این معادله کدام است؟

-۱۰ (۴)

-۹ (۳)

-۸ (۲)

-۷ (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

پاسخ تشریحی: راه اول: می‌دانیم اگر یک ریشه معادله درجه دوم با ضرایب گویا $\sqrt{a} + b$ باشد ریشه دیگر $-\sqrt{a} + b$ است، پس در این جا داریم:

$$x_1 = \sqrt{a} + b \Rightarrow x_2 = -\sqrt{a} + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2b \xrightarrow{\text{از روی معادله}} S = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = -4b \\ P = x_1 x_2 = b^2 - a \xrightarrow{\text{از روی معادله}} P = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

حالا با جای گذاری $a = -4b$ در عبارت P داریم:

$$\xrightarrow{a=-4b} b^2 - (-4b) = -\frac{b}{2} \Rightarrow b^2 = -\frac{9b}{2} \xrightarrow{b \neq 0} b = -\frac{9}{2} \xrightarrow{a=-4b} a = 18$$

پس ریشه دیگر معادله $x_2 = -\sqrt{18} + \frac{-9}{2}$ است که می‌شود $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 4\frac{1}{2}$ یعنی حدوداً $-8\frac{1}{2}$ که براکتش -۹ است.

راه دوم: ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند:

$$2x^2 + ax - b = 0 \xrightarrow{x=\sqrt{a}+b} 2(\sqrt{a}+b)^2 + a(\sqrt{a}+b) - b = 0$$

$$\Rightarrow 2(a + 2b\sqrt{a} + b^2) + a\sqrt{a} + ab - b = 0$$

حالا دسته‌بندی کنیم:

$$\underbrace{2a + 2b^2 + ab - b}_{\text{گویا}} + \underbrace{(4b + a)\sqrt{a}}_{\text{گنگ}} = 0$$

می‌دانیم مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، حتماً عددی گنگ خواهد بود؛ پس باید $4b + a = 0$ باشد؛ یعنی $a = -4b$ و با جای گذاری

در قسمت گویا داریم:

$$2(-4b) + 2b^2 + (-4b)b - b = -2b^2 - 9b = 0 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$$

و ادامه مسیر مثل راه اول است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

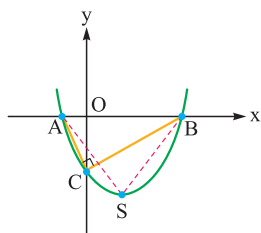
تست و پاسخ ۳

در سهمی به معادله $y = x^2 + bx + c$ ، مثلثی که رئوسش نقاط برخورد سهمی با محورها باشد، قائم‌الزاویه است و مثلثی که رئوسش صفرهای سهمی و نقطهٔ مینیمم سهمی هستند، متساوی‌الاضلاع است. فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم سهمی از نقطهٔ تقاطع آن با محور y ها کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: با توجه به شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه و مثلث ABS متساوی‌الاضلاع است. طبق روابط ارتفاع در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

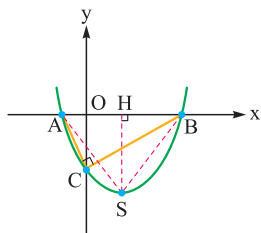


$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow CO^2 = AO \cdot OB \Rightarrow y_C^2 = -x_A \cdot x_B (*)$$

دقت می‌کنیم که طول باره‌خط AO ، قرینهٔ طول نقطهٔ A است (چون x_A منفی است). حالا با توجه به معادلهٔ سهمی، $y = x^2 + bx + c$ ، داریم:

$$CO = -c, x_A x_B = P = c \xrightarrow{\text{جاگذاری در (*)}} (-c)^2 = -c \xrightarrow{c \neq 0} c = -1$$

از طرف دیگر در مثلث متساوی‌الاضلاع ABS داریم:



$$SH = \text{ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow |y_S| = \frac{\sqrt{3}}{2} |x_B - x_A|$$

$$y_S = -\frac{b^2 - 4c}{4(1)}, AB = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{1}$$

می‌دانیم عرض رأس سهمی $-\frac{\Delta}{4a}$ و اختلاف دو ریشه برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

پس در سهمی $y = x^2 + bx + c$ داریم:

البته در قسمت قبل دیدیم که $c = -1$ ، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{b^2 + 4}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{b^2 + 4} \xrightarrow{\text{ساده کنیم}} \sqrt{b^2 + 4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \Delta = b^2 + 4 = 12 \Rightarrow y_S = -\frac{\Delta}{4(1)} = -3$$

$$b^2 + 4 = 12 \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2} \xrightarrow{b < 0} x_S = \frac{-b}{2} = \sqrt{2}$$

از طرفی:

$$CS = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{ در نتیجه } C(0, -1), S(\sqrt{2}, -3)$$

تست و پاسخ ۴

به ازای چند مقدار a معادله‌های $x^2 - x - a = 0$ و $x^2 + ax + 1 = 0$ ریشهٔ حقیقی مشترک دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

وقتی دو معادلهٔ درجه دوم ریشهٔ مشترک دارند، یعنی X هست که در هر دو صدق می‌کند، پس داریم:

$$x^2 - x - a = x^2 + ax + 1 = 0$$

از این تساوی با حذف x^2 ها و مرتب کردن نتیجه می‌شود: $(a+1)x = -a-1 \Rightarrow x = \frac{-a-1}{a+1} = -1, (a \neq -1)$

پس اگر قرار است این دو معادله ریشهٔ مشترک داشته باشند، $a \neq -1$ است و آن ریشه $x = -1$ است؛ یعنی $x = -1$ در هر دو معادله صدق می‌کند.

با کنترل $x = -1$ در هر دو معادله داریم: $a = 2$ یعنی یک جواب برای a وجود دارد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۵

α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + rx - \frac{1}{2r^2} = 0$ هستند. کم‌ترین مقدار $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2 + \sqrt{2}$ (۳) $2 + 2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی می‌دانیم:

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$\xrightarrow{\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P} \alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

پس داریم:

در این معادله $S = -r$ و $P = -\frac{1}{2r^2}$ است؛ پس:

$$\alpha^4 + \beta^4 = \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2 - \frac{1}{2r^4} \xrightarrow{\text{اتحاد را باز کنیم}} \alpha^4 + \beta^4 = r^4 + \frac{1}{r^4} + 2 - \frac{1}{2r^4} = r^4 + \frac{1}{2r^4} + 2$$

راه اول: حالا برای مینیمم عبارت $r^4 + \frac{1}{2r^4}$ دقت کنید که حاصل ضرب r^4 و $\frac{1}{2r^4}$ ثابت و برابر $\frac{1}{2}$ است، پس جمع آن‌ها زمانی مینیمم می‌شود

که هر کدام $\sqrt{\frac{1}{2}}$ باشند (با هم برابر باشند)؛ یعنی حداقل مقدار $\alpha^4 + \beta^4$ برابر است با $2 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ ، یعنی $2 + \sqrt{2}$.

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

راه دوم: اگر x و y مثبت باشند، همواره داریم:

پس برای $y = \frac{1}{2r^4}$ و $x = r^4$ می‌توان گفت:

$$r^4 + \frac{1}{2r^4} \geq 2\sqrt{r^4 \times \frac{1}{2r^4}}$$

یعنی $r^4 + \frac{1}{2r^4} \geq \sqrt{2}$ و بنابراین حداقل مقدار $\alpha^4 + \beta^4$ می‌شود $2 + \sqrt{2}$.

تست و پاسخ ۶

اگر m یک عدد طبیعی باشد و چهار ریشه حقیقی معادله $x^4 + m^2 - 2mx^2 = 2x^2$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت d ایجاد کنند، حاصل $\log_{m-2}^d$ کدام است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/75$ (۳) $1/25$ (۴) $1/75$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

$$t^2 - (3m+2)t + m^2 = 0$$

معادله را به صورت $x^2 - (3m+2)x + m^2 = 0$ می‌نویسیم و با تغییر متغیر $x^2 = t^2$ داریم:

این معادله باید برای t دو ریشه مثبت t_1 و t_2 بدهد و برای x ریشه‌های $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ را خواهیم داشت؛ پس ریشه‌ها به ترتیب $\sqrt{t_1}$ و $\sqrt{t_2}$

و $-\sqrt{t_1}$ و $-\sqrt{t_2}$ هستند و از شرط دنباله حسابی داریم:

$$2 \Rightarrow t_1 = 9t_2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 3\sqrt{t_2} = \sqrt{t_1} \Rightarrow 3\sqrt{t_2} = -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} \Rightarrow 2\sqrt{t_2} = -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} \Rightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Rightarrow t_1 = 9t_2$$

پس در معادله $t^2 - (3m+2)t + m^2 = 0$ ریشه بزرگ‌تر ۹ برابر ریشه کوچک‌تر است:

$$\begin{cases} S = t_1 + t_2 = 3m+2 \\ P = t_1 t_2 = m^2 \end{cases} \xrightarrow[t_1=9t_2]{\text{جای گذاری}} \begin{cases} 10t_2 = 3m+2 \\ 9t_2^2 = m^2 \Rightarrow 3t_2 = m \Rightarrow t_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$10\left(\frac{m}{3}\right) = 3m+2 \Rightarrow \frac{m}{3} = 2 \Rightarrow m = 6$$

با جای گذاری در معادله بالا داریم:

پس $m = 6$ و از معادله $t^2 - 20t + 36 = 0$ جواب‌های $t_1 = 18$ و $t_2 = 2$ را داریم؛ پس ریشه‌ها $\sqrt{18}$ و $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{18}$ هستند که دنباله حسابی با قدرنسبت $2\sqrt{2}$ دارند و بنابراین:

$$\log_{m-2}^d = \log_4^{2\sqrt{2}} = \log_{2^2}^{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۷

$\alpha - 2$ و β ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - x - 1 = 0$ هستند. معادله درجه دوم با ریشه‌های $\beta + 2$ و α به صورت $4x^2 + ax + b = 0$ است، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی α و $\beta + 2$ نسبت به $\alpha - 2$ و β دو واحد بیشترند؛ پس در واقع دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌هایش ۲ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $4x^2 - x - 1 = 0$ باشند.

راه اول: جمع و ضرب ریشه‌های اولیه $P = -\frac{1}{4}$ و $S = \frac{1}{4}$ است. جمع و ضرب جدیدها را می‌سازیم:

$$S_{\text{جدید}} = x_1 + 2 + x_2 + 2 = S + 4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

$$P_{\text{جدید}} = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = -\frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4 = \frac{17}{4}$$

$$\text{پس } a + b = 0 \text{ و بنابراین } \frac{b}{4} = P = \frac{17}{4} \text{ و } \frac{a}{4} = -S = -\frac{17}{4}$$

راه دوم: در معادله اول به جای x ها، $x - 2$ قرار می‌دهیم تا ریشه ۲ واحد بیشتر شوند (در واقع نمودار سهمی اولیه را ۲ واحد به راست می‌بریم):

$$4x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow (x-2)} 4(x-2)^2 - (x-2) - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد را باز کنیم}} 4(x^2 - 4x + 4) - x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 17x + 17 = 0$$

$$\text{و بنابراین } b = 17 \text{ و } a = -17 \text{ و در نتیجه } a + b = 0$$

تست و پاسخ ۸

به ازای $m \in A$ ، سهمی $y = (m-4)x^2 + 12x + m + 1$ دقیقاً از سه ناحیه دستگاه مختصات عبور می‌کند. اگر $A \subseteq \mathbb{Z}$ و a, b, c به ترتیب کوچک‌ترین عضو، بزرگ‌ترین عضو و میانه اعضای A باشند، اختلاف جذر صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی شرط این که سهمی از سه ناحیه دستگاه مختصات بگذرد داشتن دو ریشه هم‌علامت (یا یکی صفر) است؛ پس داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 12^2 - 4(m-4)(m+1) > 0$$

$$\text{هم‌علامت یا صفر: } P \geq 0 \Rightarrow \frac{m+1}{m-4} \geq 0$$

از نامعادله بالا داریم:

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} \xrightarrow{\div (-4)} (m-4)(m+1) - 36 < 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 40 < 0 \Rightarrow (m-8)(m+5) < 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -5 < m < 8$$

و از نامعادله پایین داریم:

$$\frac{m+1}{m-4} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} m & -1 & & 4 \\ \hline & + & 0 & - \end{array} \xrightarrow{P \geq 0} m \leq -1 \text{ یا } m \geq 4$$

$$A = \{-4, -3, -2, -1, 5, 6, 7\}$$

از اشتراک این دو جواب، مجموعه مقادیر صحیح m عبارت‌اند از:

$$a = \min A = -4, \quad b = \max A = 7, \quad c = Q_2 = -1$$

میانه

پس $f(x) = -4x^2 + 7x - 1$ که اختلاف جذر ریشه‌های آن برابر است با:

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{s - 2\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{-7}{-4} - 2\sqrt{\frac{-1}{-4}}} = \sqrt{\frac{7}{4} - 1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

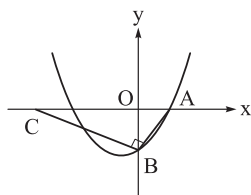


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۹

در سهمی $y = 2x^2 + (k-3)x + 1-k$ نقاط A و B به ترتیب محل برخورد سهمی با محور طولها و محور عرضها می باشند. مطابق شکل اگر مساحت مثلث ABC برابر ۱۵ باشد، حاصل $k + \sqrt{k+12}$ کدام است؟



(۲) ۳۰

(۱) صفر

(۴) ۸

(۳) ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: با کمی دقت، مجموع ضرایب عبارت $2x^2 + (k-3)x + 1-k$ برابر صفر است، پس یک ریشه $x_1 = 1$ و ریشه دیگر

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1-k}{2} \text{ است. با توجه به شکل حتماً } x_A = 1 \text{ و } x_B = \frac{1-k}{2} \text{ بوده و داریم:}$$

$$\hat{B} = 90^\circ \xrightarrow{\text{روابط طولی}} BO^2 = OA \cdot OC \Rightarrow |y_B|^2 = -x_C \cdot x_A \Rightarrow (1-k)^2 = -x_C \times 1 \Rightarrow x_C = -(1-k)^2$$

$$AC = x_A - x_C \Rightarrow AC = 1 + (1-k)^2$$

پس داریم:

و مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} OB \times AC = \frac{1}{2} |y_B| \times AC = \frac{1}{2} |1-k| (1 + (1-k)^2) = 15 \xrightarrow{(1-k) < 0} (k-1)(1 + (k-1)^2) = 30$$

$$\Rightarrow (k-1) + (k-1)^3 = 30 \xrightarrow{\text{کمی جست و جو}} k-1=3 \Rightarrow k=4$$

$$k + \sqrt{k+12} = 4 + \sqrt{16} = 8$$

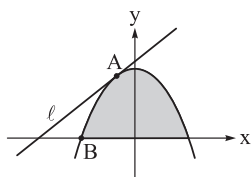
و بنابراین:

تست و پاسخ ۱۰

مانند شکل، خط $\ell: y-x-a=0$ سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ را فقط در نقطه A قطع می کند. اگر خطوط $y-x-a = \frac{n}{2}$ که $n \in \mathbb{N}$ از ناحیه

رنگی (ناحیه محدود به بالای محور طولی و سهمی) نگذرند و مختصات نقطه C به صورت $(\frac{n}{2} - a, 0)$ باشد، کمترین مساحت مثلث ABC

کدام است؟



$$\frac{25+10\sqrt{6}}{8} \quad (2)$$

$$\frac{5+5\sqrt{6}}{8} \quad (4)$$

$$\frac{25+5\sqrt{6}}{8} \quad (1)$$

$$\frac{5+10\sqrt{6}}{8} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: خط و سهمی بر هم مماس اند؛ پس معادله $y_1 = y_2$ باید ریشه مضاعف بدهد:

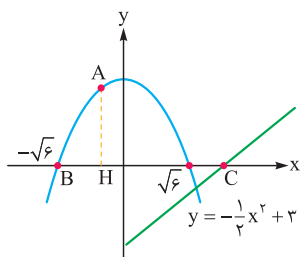
$$\xrightarrow{y_1=y_2} -\frac{1}{2}x^2 + 3 = x + a \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x + a - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 1 - 4(\frac{1}{2})(a-3) = 0 \Rightarrow a-3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

طول نقطه تماس هم برابر است با:

$$x_A = \text{ریشه مضاعف} = \frac{-B}{2A} = -\frac{1}{2(\frac{1}{2})} = -1$$

حالا خط $y-x-a = \frac{n}{2}$ باید از ناحیه رنگی نگذرد. ریشه های سهمی در $x = \pm\sqrt{6}$ هستند. برای این که خط با شیب ۱، از ناحیه رنگی

عبور نکند با توجه به شکل باید محور xها را بعد از $\sqrt{6}$ قطع کند.



$$y=0 \Rightarrow 0-x-a = -\frac{n}{2} \Rightarrow x = \frac{n}{2} - a > \sqrt{6} \xrightarrow{a=\frac{7}{2}} \frac{n}{2} - \frac{7}{2} > \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow n > 7 + \underbrace{2\sqrt{6}}_{\text{تقریباً } 4/8} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n_{\min} = 12$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پس مقدار x_C حداقل برابر $\frac{5}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$ است و داریم:

$$BC = x_C - x_B = \frac{5}{4} - (-\sqrt{6}) = \frac{5}{4} + \sqrt{6}, \quad y_A = -\frac{1}{4}(-1)^2 + 3 = \frac{5}{4} = AH$$

و حداقل مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{(\frac{5}{4} + \sqrt{6})(\frac{5}{4})}{2} = \frac{\frac{25}{4} + \frac{5\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{25 + 10\sqrt{6}}{8}$$

تست و پاسخ ۱۱

اگر a و b اعداد طبیعی و $a + b = 8$ و ضمناً اشتراک مجموعه جواب نامعادلات $(x - a)(x + 2a) < 0$ و $(x - b)(x + 2b) > 0$ شامل ۱۶ عدد صحیح باشند، آن گاه $a \times b$ برابر است با:

۷ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: تعیین علامت‌ها را ببینید:

x	$-\infty$	$-2a$	a	$+\infty$
$(x - a)(x + 2a)$		+	-	+
		ج	ج	

x	$-\infty$	$-2b$	b	$+\infty$
$(x - b)(x + 2b)$		+	-	+
		ج	ج	

پس محدوده مشترک جواب‌ها به صورت $(b, a) \cup (-2a, -2b)$ است.

تعداد اعداد صحیح در این بازه‌ها به ترتیب $a - b - 1$ و $-2b + 2a - 1$ است که روی هم می‌شود $3a - 3b - 2$ و باید ۱۶ باشد؛ پس داریم:

$$3a - 3b = 18 \Rightarrow a - b = 6 \xrightarrow{a+b=8} a = 7, b = 1$$

و بنابراین $a \times b = 7$.

تست و پاسخ ۱۲

اگر $x = 2 + \frac{1}{\alpha}$ تنها جواب معادله $2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + 2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 5$ باشد، α کدام است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

راه اول: معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + 2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}})^2 = 5^2$$

$$4(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 4(x + \sqrt{x^2 - 1}) + 2 \times 2 \times 2\sqrt{x^2 - (x^2 - 1)} = 25 \Rightarrow 8x + 8 = 25 \Rightarrow x = \frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 8$$

راه دوم: با کمی دقت $x - \sqrt{x^2 - 1}$ و $x + \sqrt{x^2 - 1}$ عکس هم هستند، پس اگر $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ را t بگیریم، حاصل $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ می‌شود $\frac{1}{t}$ و داریم:

$$2t + \frac{2}{t} = 5 \xrightarrow{\times t} 2t^2 + 2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \xrightarrow{\text{روش روسی}} t = x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \text{ یا } 2$$

حالا به جای x هم $2 + \frac{1}{\alpha}$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{2 + \frac{1}{\alpha}} + \sqrt{(2 + \frac{1}{\alpha})^2 - 1} = 2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

چون طبق گزینه‌ها $\alpha > 0$ است، $t = \frac{1}{\alpha}$ جواب ندارد، پس:

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 2 + \frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1} = 4 \Rightarrow \sqrt{\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1} = 2 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1 = 4 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha} \Rightarrow 4 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha} - 1 = 4 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

تست و پاسخ ۱۳

از حل نامعادله $\sqrt{x^2 - 7x + 12} > 2x - 6$ ، تمامی مقادیر قابل قبول برای x به کدام صورت قابل نمایش است؟

- (۱) $(-\infty, a)$ (۲) $(a, +\infty)$
(۳) $(-\infty, a) \cup \{b, c\}$ (۴) $(-\infty, a) \cup (b, c)$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی اول دقت کنیم که برای $x < 3$ ، زیر رادیکال مثبت و حاصل طرف راست منفی است؛ پس نامساوی همواره برقرار می‌شود، پس تمام مقادیر $x < 3$ جواب هستند.

برای $x \geq 3$ داریم:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} > 2x - 6 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 - 7x + 12 > 4x^2 - 24x + 36 \Rightarrow 0 > 3x^2 - 17x + 24$$

$$\xrightarrow{\text{روسی}} x^2 - 17x + 24 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x - 3) = 0$$

پس ریشه‌های $3x^2 - 17x + 24 = 0$ اعداد $\frac{8}{3}$ و 3 هستند و جواب نامعادله فاصله بین دو ریشه یعنی $(\frac{8}{3}, 3)$ است که با شرط $x \geq 3$ سازگار نیست؛ پس تنها جواب نامعادله همان بازه $(-\infty, 3)$ است.

تست و پاسخ ۱۴

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی به دو عبارت $\frac{x}{x+1}$ و x کمی دقت کنیم:

تفاضل آن‌ها می‌شود:

$$x - \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

و ضرب آن‌ها هم می‌شود:

$$x \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

پس اگر آن‌ها را α و β بگیریم، داریم:

$$\alpha - \beta = \alpha\beta$$

و طبق صورت سؤال $\alpha^2 + \beta^2 = 3$

بنابراین با استفاده از اتحاد اول داریم:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = 3 - 2\alpha\beta \Rightarrow (\alpha\beta)^2 + 2(\alpha\beta) - 3 = 0$$

پس $\alpha\beta = 1$ یا $\alpha\beta = -3$ ، یعنی $\frac{x^2}{x+1} = 1$ یا $\frac{x^2}{x+1} = -3$ داریم:

$$\frac{x^2}{x+1} = x+1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{x+1} = -3x-3$$

$\Delta > 0$ $\Delta < 0$
 $S=1$ ریشه ندارد.

یعنی جمع دو ریشه ۱ است.

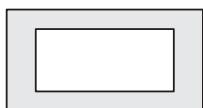


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۵

در شکل زیر هر دو مستطیل طلایی هستند. اگر طول ضلع بزرگ مستطیل کوچک تر، برابر با طول ضلع کوچک مستطیل بزرگ تر باشد، مساحت ناحیه رنگی چه کسری از مساحت مستطیل بزرگ تر است؟



$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{۳-\sqrt{5}}{۲} \quad (۴)$$

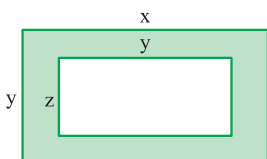
$$\frac{۱+\sqrt{5}}{۳} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{5}-۲}{۳} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

راه اول: ابعاد مستطیل ها را به صورت مقابل نام گذاری می کنیم. چون هر دو مستطیل طلایی هستند داریم:



$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{y}{z} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{در هم ضرب}} \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد را باز کنیم}} \frac{x}{z} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین نسبت مساحت مستطیل ها برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت مستطیل بزرگ}} = \frac{xy - yz}{xy} = \frac{xy}{xy} - \frac{yz}{xy} = 1 - \frac{z}{x} = 1 - \frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

$$\frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت مستطیل بزرگ}} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

کسر $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$ پس از گویاشدن برابر با $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ خواهد بود؛ پس:

راه دوم:

طبق تعریف مستطیل طلایی داریم:

$$\frac{x}{y} = k, \frac{y}{z} = k$$

و ویژگی عدد طلایی این است که:

$$k = 1 + \frac{1}{k}, k^2 = k + 1$$

حالا باید $1 - \frac{z}{x}$ را حساب کنیم:

$$1 - \frac{z}{x} = 1 - \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2 \xrightarrow{k^2 = k+1} 1 - \frac{1}{k+1} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{k}{k+1} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۶

به ازای چند مقدار حقیقی a ، معادله مقابل فقط یک جواب دارد؟

$$\frac{x+a}{4} + \frac{a-a}{2x+a} = 2$$

(۴) بی شمار

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

دو طرف را در $k.m$ مخرج ها ضرب کنیم:

$$\xrightarrow{\times 4(2x+a)} (2x+a)(x+a) + 4(a-a) = 2(4)(2x+a) \Rightarrow 2x^2 + 3ax + a^2 + 32 - 4a = 16x + 8a$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (3a-16)x + a^2 - 12a + 32 = 0$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

حالا معادله فقط یک جواب دارد، دوتا امکان داریم:

الف) $\Delta = 0$ بوده یعنی ریشه مضاعف داشته باشیم.

$$\Delta = (3a - 16)^2 - 4(a^2 - 12a + 32)(2) \Rightarrow \Delta = 9a^2 - 96a + 256 - 8a^2 + 96a - 256 = a^2$$

پس باید $a^2 = 0$ باشد، یعنی $a = 0$. توجه کنید که ریشه‌های معادله $x = \frac{-(3a - 16) \pm |a|}{4}$ هستند.

ب) یک ریشه $x = -\frac{a}{4}$ بوده که مخرج را صفر می‌کند و قبول نیست.

$$\frac{16 - 3a \pm |a|}{4} = -\frac{a}{4} \xrightarrow{a > 0} \frac{16 - 3a \pm a}{4} = -\frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16 - 4a}{4} = -\frac{a}{4} \Rightarrow a = 8 \checkmark \\ \frac{16 - 2a}{4} = -\frac{a}{4} \Rightarrow \text{امکان پذیر نیست.} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a < 0} \frac{16 - 3a \pm |a|}{4} = -\frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16 - 4a}{4} = -\frac{a}{4} \Rightarrow a = 8 \times \\ \frac{16 - 2a}{4} = -\frac{a}{4} \Rightarrow \text{امکان پذیر نیست.} \end{cases}$$

پس دو مقدار برای a پیدا کردیم: $\{0, 8\}$

تست و پاسخ ۱۷

پریا نسخه دست‌نویس یک جزوه را در x دقیقه تایپ می‌کند. سرعت آریتا $\frac{1}{5}$ سرعت پریا است. اگر هر دو با هم مطالب را تایپ کنند، جزوه a دقیقه زودتر از حالتی که فقط پریا کار کند تایپ می‌شود. به شرطی که $x, a \in \mathbb{Z}$ باشند، اختلاف بیشترین و کم‌ترین عدد سه‌رقمی قابل قبول برای x کدام است؟

۸۹۲ (۴)

۸۹۴ (۳)

۸۹۶ (۲)

۹۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: پریا در هر دقیقه $\frac{1}{x}$ و آریتا در هر دقیقه $\frac{1}{5x}$ را تایپ می‌کند؛ پس با هم در هر دقیقه $\frac{1}{x} + \frac{1}{5x}$ یعنی $\frac{6}{5x}$ از کار را انجام می‌دهند و داریم:

$$\frac{6}{5x} = \frac{1}{x - a}$$

بنابراین:

$$6x - 6a = 5x$$

و در نتیجه $x = 6a$ و چون $a \in \mathbb{Z}$ ، یعنی x مضرب ۶ است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد سه‌رقمی مضرب ۶ به ترتیب ۹۹۶ و ۱۰۲ هستند که اختلافشان می‌شود ۸۹۴.

تست و پاسخ ۱۸

پرنده‌ای مسیر ۲۰۰ متری را در هوای آرام می‌رود و در مسیر برگشت با باد موافق به سرعت ۱۰ متر بر دقیقه برمی‌گردد و برگشت کلاً ۹ دقیقه طول می‌کشد. اگر این باد با همان جهت در مسیر رفت هم می‌وزید، کل مسیر چند دقیقه طول می‌کشید؟

۱۰ (۴) دقیقه و ۴۰ ثانیه

۱۰ (۳) دقیقه و ۲۰ ثانیه

۱۱ (۲) دقیقه

۱۰ (۱) دقیقه

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: زمان رفت می‌شود $t = \frac{200}{v}$ و در برگشت باد موافق ۱۰ تا به سرعت اضافه می‌کند، پس $t = \frac{200}{v + 10}$ و مجموع این‌ها ۹ است؛ پس:

$$\frac{200}{v} + \frac{200}{v + 10} = 9 \xrightarrow{\text{جست‌وجو یا حل معادله}} v = 40$$

حالا این باد با همین جهت در مسیر رفت، باد مخالف است؛ پس داریم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$\text{زمان رفت و برگشت} = \frac{200}{v-10} + \frac{200}{v+10} = \frac{200}{30} + \frac{200}{50} = \frac{20}{3} + 4 = 10\frac{2}{3} = 10 \text{ min و } 40 \text{ s}$$

تست و پاسخ ۱۹

مجموعه جواب نامعادله $|3x+5| < a|x-1|$ به صورت $(-\infty, b)$ می باشد. حاصل $a+b$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

$\frac{11}{3}$ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی a باید مثبت باشد تا نامساوی برقرار شود. حالا دو طرف را به توان ۲ می رسانیم:

$$9x^2 + 25 + 30x < a^2(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow (9 - a^2)x^2 + (30 + 2a^2)x + 25 - a^2 < 0$$

اما جواب نامعادله درجه دوم هرگز به شکل $(-\infty, b)$ نیست؛ پس حتماً ضریب x^2 صفر است و داریم:

$$a^2 = 9$$

پس نامعادله به صورت $48x + 16 < 0$ درمی آید که جواب آن $x < -\frac{1}{3}$ است، پس $b = -\frac{1}{3}$ و $a = 3$ و بنابراین $a+b = \frac{8}{3}$.

تست و پاسخ ۲۰

اگر α و β جواب های معادله $\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{x-1} = 1$ باشند، مقدار $(\frac{1}{\alpha+1})^3 + (\frac{1}{\beta-1})^3$ کدام می تواند باشد؟

۱ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

راه اول: دو طرف معادله را به توان ۳ می رسانیم:

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \Rightarrow (\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{x-1})^3 = 4x - (x-1) - 3\sqrt[3]{4x}\sqrt[3]{x-1} \cdot \underbrace{1}_{a-b} = 1$$

پس داریم $3x = 3\sqrt[3]{4x(x-1)}$ حالا ۳ها را از دو طرف ساده می کنیم و دوباره به توان ۳ می رسانیم:

$$x^3 = 4x(x-1)$$

$$\text{پس } x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \text{ و داریم:}$$

$$\begin{array}{c} x(x^2 - 4x + 4) = 0 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ x=0 \quad \quad x=2 \end{array}$$

یعنی جواب ها $\alpha = 0$ و $\beta = 2$ یا برعکس هستند؛ بنابراین حاصل $\frac{1}{(\alpha+1)^3} + \frac{1}{(\beta-1)^3}$ می شود $\frac{1}{(0+1)^3} + \frac{1}{(2-1)^3}$ یا $\frac{1}{(2+1)^3} + \frac{1}{(0-1)^3}$

که اولی ۲ و دومی $-\frac{26}{27}$ است و در گزینه ها ۲ را داریم.

راه دوم: می دانیم اگر $a+b+c=0$ باشد، آن گاه $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. در این جا $\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{x-1} - 1 = 0$ است؛ پس داریم:

$$\underbrace{\sqrt[3]{4x}}_a - \underbrace{(x-1)}_{b^3} - \underbrace{1}_{c^3} = 3\sqrt[3]{4x}(-\sqrt[3]{x-1})(-1) \Rightarrow 3x = 3\sqrt[3]{4x(x-1)}$$

و ادامه ماجرا مثل راه اول خواهد بود.