



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
سؤال
آزمون دوم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

تابع
ریاضی ۱
صفحه ۹۴ تا ۱۱۷
ریاضی ۲
صفحه ۴۷ تا ۷۰
ریاضی ۳
صفحه ۱ تا ۳۰

مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

محمد مصطفی ابراهیمی - کوروش اسلامی - حسین شفیع‌زاده - علی شهبابی - مهدی عزیزی
کیان کریمی خراسانی - مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی‌منش

گزینشگر

رسول محسنی‌منش

مؤلف پاسخ‌نامه

سروش موئینی

کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

محمد گودرزی
سروش موئینی

ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

امیرحسین ابومحبوب
ابوالفضل ناصری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

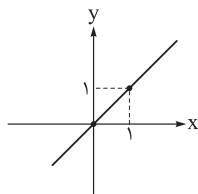
✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.

ریاضی (۳): صفحه‌های ۱ تا ۳۰، ریاضی (۲): صفحه‌های ۴۷ تا ۷۰، ریاضی (۱): صفحه‌ها ۹۴ تا ۱۱۷

۱- سهمی به معادله $y = x^2 - 2x$ را ابتدا نسبت به مبدأ مختصات و سپس نسبت به خط $x = 2$ قرینه می‌کنیم. مجموع طول و عرض رأس سهمی جدید کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) ۴



۲- اگر نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع f کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $y = x$ (۲) $y = -x$ (۳) $y = -x + 2$ (۴) $y = x + 2$

۳- می‌دانیم g و f دو تابع وارون‌پذیر روی $\mathbb{R}$ هستند. اگر $g(x) = \frac{3f(x)}{1-f(x)}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{x}{f \circ g^{-1}} - x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴- نمودار تابع $y = |x|$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۶ واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. سطح محدود به نمودار به دست آمده و نمودار تابع اولیه کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۵- تابع خطی f با دامنه $[4, 6]$ اکیداً نزولی است. اگر برد تابع $y = 2x - f(x)$ بازه $[3, 9]$ باشد، برد تابع $y = x + f(3x)$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 1]$ (۲) $[\frac{19}{3}, 5]$ (۳) $[-3, \frac{19}{3}]$ (۴) $[5, 1]$

۶- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 |x| + 3x^2 + 3|x| + 1$ روی بازه $(-k^2, 2k - 1)$ یکنوا نیست. مقدار حقیقی k متعلق به کدام مجموعه است؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 2)$ (۴) $(-\infty, -2)$

۷- تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ است. اگر $f(3) = -1$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x+3)(f^{-1}(5x+1)-3)}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

محل انجام محاسبات



۸- اگر $f(x) = 2x + 1 + |x - 2|$ ، آن گاه ضابطه f^{-1} به صورت $f^{-1}(x) = ax + b + c|x - 5|$ است. abc کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{27}$ (۲) $\frac{8}{27}$ (۳) $-\frac{4}{27}$ (۴) $-\frac{8}{27}$

۹- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 - [a]x + \frac{1}{a} & x > 0 \\ -a^2 & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. اگر تابع $(f \circ f)$ روی $\mathbb{R}$ تابعی ثابت باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $[-2, 0)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

۱۰- اگر به ازای a متعلق به بازه $[m, n]$ ، تابع $f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 - 2x + 513); & x \geq 1 \\ 3^{(4-a)x} & ; x < 1 \end{cases}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، بیشترین

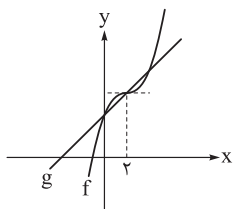
مقدار $n - m$ و حاصل $[f^{-1}(10)] + [\frac{1}{f^{-1}(2)}]$ به ازای بزرگ‌ترین عدد صحیح a به ترتیب از راست به چپ برابرند با:

- (۱) $20, 2$ (۲) $24, 2$ (۳) $20, 1$ (۴) $23, 1$

۱۱- ضابطه معکوس تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ کدام است؟ ($x > 1$)

- (۱) $\frac{1 + \sqrt{4x^2 - 1}}{2x}$ (۲) $\frac{1 - \sqrt{4x^2 - 1}}{2x}$ (۳) $\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$ (۴) $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$

۱۲- تابع f از انتقال تابع $y = x^3$ به دست آمده است. نمودار تابع f و خط g به صورت زیر است. اگر نمودار تابع $f \circ g$ از ناحیه چهارم عبور نکند، حداقل مقدار $f(2)$ کدام است؟



- (۱) 10 (۲) 2 (۳) 8 (۴) 4

۱۳- اگر $f(x) = \frac{-x-2}{2x-1}$ و $g(x) = x^2 + \left[\frac{1}{2} - x^2\right]$ ، آن گاه برد تابع $f^{-1} \circ g$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

- (۱) $(\frac{1}{3}, 2)$ (۲) $(-\infty, -\frac{3}{4})$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(-1, 0) \cup \{\frac{1}{3}\}$

محل انجام محاسبات

۱۴- تابع f با دامنه $\{0, 1\}$ و R در رابطه $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$ صدق می کند. مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۱۵- توابع $f(x) = 4 - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{x}}$ و $g(x) = x^2$ مفروض اند. مجموع جواب های متمایز معادله $\text{fog}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۶- به ازای یک مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{|x-a^2|}{x-a^2} \cdot (x^2 - 2x - 3a)$ وارون پذیر است. مقدار $f(2a)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) -۷ (۳) ۱۱ (۴) -۱۱

۱۷- تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ مفروض است. در دنباله زیر مقدار جمله 2023 ام کدام است؟

$f(-1), f(f(-1)), f(f(f(-1))), \dots, f(\underbrace{f \dots f}_{2023}(-1)) \dots$

- (۱) -۱ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ (۴) $\sqrt[6]{2}$

۱۸- اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا ببریم، به نمودار $y = g(x)$ می رسیم. معادله $g(|x|) = x^2$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۹- اگر $f(x) = [3x+1] - 3[x]$ و $g(x) = x^2 - 2bx + c$ ، بُرد تابع gof دو عضوی خواهد بود. مجموع کم ترین و بیشترین مقدار b کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۰- قرینه نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم کرده، سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می دهیم و آن را $g(x)$ می نامیم. مقدار $g(2 + 3\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
پاسخ
آزمون دوم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

تابع
ریاضی ۱
صفحه ۹۴ تا ۱۱۷
ریاضی ۲
صفحه ۴۷ تا ۷۰
ریاضی ۳
صفحه ۱ تا ۳۰

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

محمد مصطفی ابراهیمی - کوروش اسلامی - حسین شفیع‌زاده - علی شهرابی - مهدی عزیزی
کیان کریمی خراسانی - مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
رسول محسنی‌منش	رسول محسنی‌منش	سروش موئینی	محمد گودرزی سروش موئینی	امیرحسین ابومحبوب ابوالفضل ناصری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانی‌پور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

- ✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی همراه با مرور نامه کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:
- دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت جزوه جمع‌بندی، ترکیبی و تصویری در قالب مرور نامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۳) صفحه‌های ۱ تا ۳۰، ریاضی (۲): صفحه‌های ۴۷ تا ۷۰، ریاضی (۱): صفحه‌ها ۹۴ تا ۱۱۷

تست و پاسخ ۱

سهمی به معادله $y = x^2 - 2x$ را ابتدا نسبت به مبدأ مختصات و سپس نسبت به خط $x = 2$ قرینه می‌کنیم. مجموع طول و عرض رأس سهمی جدید کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(1)} = 1$$

پاسخ تشریحی: راه اول: گام اول: رأس سهمی را پیدا کنیم:

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y_S = -1 \Rightarrow S(1, -1)$$

گام دوم: رأس سهمی را نسبت به مبدأ مختصات و سپس خط $x = 2$ قرینه می‌کنیم تا به رأس سهمی جدید برسیم:

$$S(1, -1) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y}]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} S'(-1, 1) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 4-x}]{\text{قرینه نسبت به } x=2} S''(5, 1)$$

$$x_{S''} + y_{S''} = 5 + 1 = 6$$

پس:

راه دوم: می‌خواهیم معادله سهمی جدید را هم پیدا کنیم. برای این کار:

گام اول: ابتدا در معادله سهمی $\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$ را قرار می‌دهیم تا نسبت به مبدأ قرینه شود:

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow[\substack{x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y}]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -y = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 - 2x$$

گام دوم: سپس در معادله جدید، $x \rightarrow 4 - x$ را قرار می‌دهیم تا نسبت به خط $x = 2$ قرینه شود:

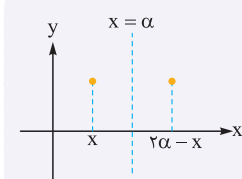
$$y = -x^2 - 2x \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} y = -(4-x)^2 - 2(4-x) \\ = -(x^2 - 8x + 16) - 8 + 2x = -x^2 + 10x - 24$$

گام سوم: رأس این سهمی جدیدتر را پیدا می‌کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{10}{2(-1)} = 5 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y_S = -5^2 + 10(5) - 24 = 1 \Rightarrow S(5, 1)$$

$$5 + 1 = 6$$

و مجموع طول و عرض رأس سهمی جدید می‌شود:



نکته: برای قرینه کردن منحنی نسبت به خط $x = \alpha$ باید x را به $2\alpha - x$ تبدیل کرد.

تست و پاسخ ۲

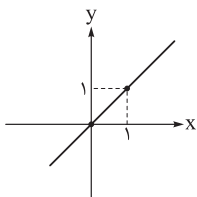
اگر نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع f کدام نمی‌تواند باشد؟

$$y = -x \quad (۲)$$

$$y = x \quad (۱)$$

$$y = x + 2 \quad (۴)$$

$$y = -x + 2 \quad (۳)$$



پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: راه اول: می‌دانیم خط $y = x$ و خط‌های $y = -x + b$ ، وارون خود هستند، پس در این خط‌ها $f \circ f(x) = x$ است؛ پس

در بین گزینه‌ها تابع همانی و خط با شیب -۱ را نمی‌خواهیم و جواب (۴) را انتخاب می‌کنیم.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$y = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

راه دوم: گام اول: در خط $y = ax + b$ تابع $f \circ f$ برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases}$$

گام دوم: اگر $f \circ f$ برابر x شود، داریم:

$$\begin{cases} a = 1, 2b = 0 \Rightarrow y = x \\ a = -1, 0 = 0 \Rightarrow y = -x + b \end{cases}$$

گام سوم: پس دو حالت داریم:

یعنی $y = x$ و $y = -x + b$ جواب نیستند.

تست و پاسخ ۳

می دانیم g و f دو تابع وارون پذیر روی $\mathbb{R}$ هستند. اگر $g(x) = \frac{3f(x)}{1-f(x)}$ ، آن گاه حاصل $\frac{x}{f \circ g^{-1}} - x$ کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: راه اول: گام اول: اول از رابطه $g(x) = \frac{3f(x)}{1-f(x)}$ ، باید $f(x)$ را به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{3f(x)}{1-f(x)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} g(x) - g(x)f(x) = 3f(x) \xrightarrow{\text{مرتب}}$$

$$g(x) = 3f(x) + g(x)f(x) = (3 + g(x))f(x) \xrightarrow{f(x) \text{ را تنها کنیم.}} f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + 3}$$

گام دوم: برای ساختن $(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x))$ باید در $f(x)$ به جای x ها، $g^{-1}(x)$ را قرار دهیم:

$$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = \frac{g(g^{-1}(x))}{g(g^{-1}(x)) + 3} \xrightarrow{g(g^{-1}(x)) = x} \frac{x}{x + 3}$$

$$\frac{x}{x + 3} - x = x + 3 - x = 3$$

گام سوم: بالاخره $\frac{x}{f \circ g^{-1}} - x$ را به دست می آوریم:

راه دوم: $g(x) = \frac{3f(x)}{1-f(x)}$ در واقع ترکیب دو تابع $h(x) = \frac{3x}{1-x}$ و $f(x)$ است:

گام اول: با فرمول وارون تابع مرکب، این تابع را وارون می کنیم:

گام دوم: $f(g^{-1}(x))$ را حساب می کنیم:

$$f(g^{-1}(x)) = \underbrace{f(f^{-1}(h^{-1}(x)))}_{\text{همانی}} = h^{-1}(x)$$

$$h^{-1}(x) = \frac{-x}{-x - 3} = \frac{x}{x + 3}$$

گام سوم: وارون h را با قانون هموگرافیک به دست می آوریم:

گام چهارم: مشابه گام سوم در راه اول عمل می کنیم.

تست و پاسخ ۴

نمودار تابع $y = |x|$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۶ واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم. سطح محدود به نمودار به دست آمده و نمودار تابع اولیه کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

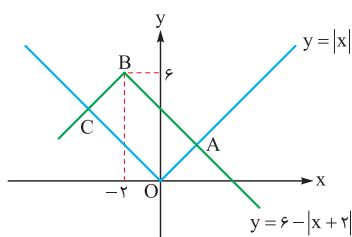
پاسخ تشریحی: گام اول: شکل را ببینید.

دو واحد به چپ

ضابطه تابع انتقال یافته $y = -|x + 2| + 6$ است.

شش واحد
به بالا

قرینه نسبت
به محور x





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: با انتقال و قرینه کردن نسبت به محور x ، شیب و زاویه تغییر نمی‌کند؛ پس در تابع جدید هم $\hat{B} = 90^\circ$ و شکل بین دو نمودار، یک مستطیل است. برای پیدا کردن مساحت آن به طول OA و OC نیاز داریم.

گام سوم: A نقطه برخورد شاخه‌های سمت راست دو نمودار است:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \text{ و } 6 - |x + 2| = 6 - (x + 2) = 4 - x$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} x = 4 - x \Rightarrow x_A = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

گام چهارم: C در محل برخورد شاخه سمت چپ دو نمودار قرار دارد:

$$x < -2 \Rightarrow |x| = -x \text{ و } 6 - |x + 2| = 6 + x + 2 = 8 + x$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} -x = 8 + x \Rightarrow x_C = -4 \Rightarrow C(-4, 4)$$

گام پنجم: طول OA و OC به ترتیب $\sqrt{2^2 + 2^2}$ و $\sqrt{(-4)^2 + 4^2}$ است و مساحت می‌شود:

$$S = \sqrt{32} \times \sqrt{16} = 16$$

تست و پاسخ ۵

تابع خطی f با دامنه $[4, 6]$ اکیداً نزولی است. اگر برد تابع $y = 2x - f(x)$ بازه $[3, 9]$ باشد، برد تابع $y = x + f(3x)$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 1]$ (۲) $[\frac{19}{3}, 5]$ (۳) $[-3, \frac{19}{3}]$ (۴) $[5, 1]$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: ضابطه تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم و چون f نزولی است، a باید منفی باشد.

گام دوم: تابع $y = 2x - f(x) = g(x)$ به صورت «ص - ن - ص» یک تابع اکیداً صعودی است.

پس برد آن با دامنه $[4, 6]$ بازه $[g(4), g(6)]$ است و داریم:

$$\begin{cases} g(4) = 3 = 2(4) - (4a + b) \\ g(6) = 9 = 2(6) - (6a + b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ 6a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = -1 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$f(x) = -x + 9$$

پس:

گام سوم: در تابع $y = x + f(3x)$ دامنه به صورت $[\frac{4}{3}, \frac{6}{3}]$ است، چون باید x ‌های f را بر ۳ تقسیم کنیم؛ پس داریم:

$$y = x + f(3x), \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

$$\xrightarrow{f(x) = -x + 9} y = x + (-3x) + 9 = 9 - 2x$$

گام چهارم: با جای‌گذاری ضابطه f داریم:

x	$\frac{4}{3}$	2
y	$9 - 2(\frac{4}{3}) = \frac{19}{3}$	5

یعنی برد تابع $y = x + f(3x)$ به صورت بازه $[\frac{19}{3}, 5]$ است.

تست و پاسخ ۶

تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 |x| + 3x^2 + 3|x| + 1$ روی بازه $(4 - k^2, 2k - 1)$ یکنوا نیست. مقدار حقیقی k متعلق به کدام مجموعه است؟

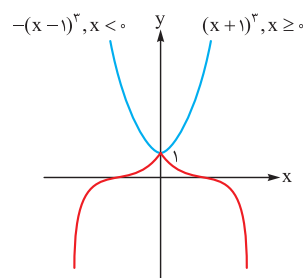
- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(\frac{1}{3}, 2)$ (۴) $(-\infty, -2)$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: گام اول: ضابطه تابع f را می‌توان به صورت روبه‌رو نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & x \geq 0 \\ -(x-1)^3 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار آن مانند شکل زیر است:





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: با توجه به این که f روی $(-k^2, 2k-1)$ یکنوا نیست، پس $(-k^2, 2k-1) \in \emptyset$ ؛ یعنی:

$$\underbrace{-k^2 < 0}_{\text{الف}} < \underbrace{2k-1}_{\text{ب}} \Rightarrow \begin{cases} \text{الف) } -k^2 < 0 \rightarrow 2 < |k| \Rightarrow k > 2 \text{ یا } k < -2 \\ \text{ب) } 2k-1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k > 2$$

$$k \in (2, +\infty)$$

توجه کنید که با حل نامعادله‌های بالا، نیازی به بررسی شرط بازه بودن، یعنی $-k^2 < 2k-1$ نیست.

تست و پاسخ ۷

تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ است. اگر $f(3) = -1$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x+3)(f^{-1}(5x+1)-3)}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

(۴) بی‌شمار

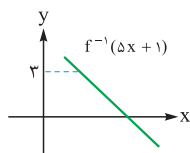
(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: f اکیداً نزولی است؛ پس f^{-1} نیز اکیداً نزولی و هم‌چنین $f^{-1}(5x+1)$ اکیداً نزولی است، مثلاً این شکلی:



گام دوم: برای تعیین علامت عبارت زیر رادیکال، با توجه به شکل بالا، $f^{-1}(5x+1) - 3$ قبل از ریشه‌اش $\oplus$ و پس از ریشه‌اش $\ominus$ است؛ پس داریم:

$$f^{-1}(5x+1) - 3 = 0 \Rightarrow f^{-1}(5x+1) = 3 \xrightarrow{\text{از دو طرف } f \text{ بگیریم}} 5x+1 = f(3) = -1 \Rightarrow x = \frac{-2}{5}$$

و جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

	-3	$\frac{-2}{5}$	
$x+3$	-	+	+
$f^{-1}(5x+1)-3$	+	+	-
$P \geq 0$	ج	ج	ج

گام سوم: پس دامنه فاصله $[-3, \frac{-2}{5}]$ است که شامل سه عدد صحیح $-3, -2, -1$ است.

تست و پاسخ ۸

اگر $f(x) = 2x+1+|x-2|$ ، آن‌گاه ضابطه f^{-1} به صورت $f^{-1}(x) = ax+b+c|x-5|$ است. کدام abc کدام است؟

$-\frac{8}{27}$ (۴)

$-\frac{4}{27}$ (۳)

$\frac{8}{27}$ (۲)

$\frac{4}{27}$ (۱)

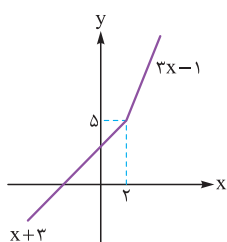
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: قدرمطلق را در حالت‌های $\oplus$ و $\ominus$ بررسی داریم:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2x+1+x-2 = 3x-1$$

$$x-2 < 0 \Rightarrow f(x) = 2x+1-x+2 = x+3$$

حالا نمودار f را ببینید:





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}, & x \geq 5 \\ f^{-1}(x) = x-3, & x < 5 \end{cases}$$

گام دوم: تابع را وارون می‌کنیم و در مقابل هر ضابطه وارون، برد تابع را می‌نویسیم:
پس داریم:

گام سوم: این ضابطه باید به صورت $ax + b + c | x - 5 |$ دربیاید:

$$x \geq 5: \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = ax + b + cx - 5c \Rightarrow a + c = \frac{1}{3}, b - 5c = \frac{1}{3}$$

$$x < 5: x - 3 = ax + b - cx + 5c \Rightarrow a - c = 1, b + 5c = -3$$

$$a = \frac{2}{3}, c = \frac{-1}{3}, b = \frac{-4}{3}$$

بنابراین:

$$abc = \frac{8}{27}$$

و در نتیجه:

تست و پاسخ ۹

$$\text{تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} ax^2 - [a]x + \frac{1}{a} & x > 0 \\ -a^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع f با ضابطه $f(x)$ مفروض است. اگر تابع $(f \circ f)$ روی $\mathbb{R}$ تابعی ثابت باشد، حدود a کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{0\} \quad (4)$$

$$(-\infty, 0) \quad (3)$$

$$[-2, 0) \quad (2)$$

$$[-4, 0) \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: نمودار ضابطه بالایی تابع، یک سهمی است و ترکیب یک تابع درجه دوم با خودش هرگز تابعی ثابت نمی‌شود؛ پس باید تمام خروجی‌های تابع f اعداد کم‌تر یا مساوی صفر باشند که در ترکیب $f \circ f$ ، مقادیر f را به ضابطه پایینی بدهیم، یعنی باید داشته باشیم:

$$x > 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow ax^2 - [a]x + \frac{1}{a} \leq 0$$

گام دوم: در تابع $y = ax^2 - [a]x + \frac{1}{a}$ ، چون $[a]$ و a همیشه هم‌علامت هستند، طول رأس یا صفر است یا $x_S = \frac{+[a]}{2a}$ که در طول‌های مثبت قرار می‌گیرد.

پس برای این‌که همه مقادیر تابع نامثبت شوند، لازم است $a < 0$ (سهمی رو به پایین باشد) و $y_S \leq 0$ ، یعنی داریم:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{[a]^2 - 4a(\frac{1}{a})}{4a} \leq 0$$

و چون a هم منفی است، باید داشته باشیم: $[a]^2 - 4 \leq 0$ (صورت کسر باید منفی باشد یا صفر).

$$-2 \leq [a] \leq 2$$

گام سوم: از نامعادله $[a]^2 - 4 \leq 0$ داریم:

$$-2 \leq [a] < 0$$

که چون a منفی است، داریم:

بنابراین مجموعه جواب a به صورت $[-2, 0)$ خواهد بود.

تست و پاسخ ۱۰

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 - 2x + 513); & x \geq 1 \\ 2^{(4-a)x} & ; x < 1 \end{cases}$$

اگر به ازای a متعلق به بازه $[m, n]$ ، تابع $f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، بیشترین مقدار $n - m$ و حاصل

$$\left[\frac{1}{f^{-1}(2)} \right] + [f^{-1}(10)] \text{ به ازای بزرگ‌ترین عدد صحیح } a \text{ به ترتیب از راست به چپ برابرند با: } ([,] \text{، نماد جزء صحیح است.})$$

$$23, 1 \quad (4)$$

$$20, 1 \quad (3)$$

$$24, 2 \quad (2)$$

$$20, 2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: ضابطه بالایی تابع یعنی $\log_2(x^2 - 2x + 513)$ را به صورت $\log_2((x-1)^2 + 512)$ ببینید که برای $x \geq 1$ اکیداً صعودی است (ترکیب $\log_2$ صعودی با سمت راست رأس سهمی) و حداقل مقدارش در شروع $f(1) = \log_2 512 = 9$ است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: پس باید ضابطه پایینی تابع برای $x < 1$ نیز صعودی اکید باشد و حاصل آن در ۱ از ۹ بیشتر نشود. برای این که $3^{(4-a)(x)} > 3^{(4-a)(1)}$ باشد باید $4 - a > 0$ باشد، یعنی $4 > a$ و از نامساوی $3^{(4-a)(1)} \leq 9$ داریم: $4 - a \leq 2$ ، پس $a \geq 2$ و از اشتراک این‌ها: $2 \leq a < 4$ ، یعنی $4 - 2 = 2$ حداکثر مقدار $n - m$ می‌شود:

گام سوم: بزرگ‌ترین عدد صحیح a می‌شود ۳؛ پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2((x-1)^2 + 512), & x \geq 1 \\ 3^x, & x < 1 \end{cases}$$

و مقادیر $f^{-1}(10)$ و $f^{-1}(2)$ را می‌خواهیم:

الف) $f(x) = 10 \xrightarrow{\text{از ضابطه بالایی استفاده می‌کنیم، چون ضابطه پایین حداکثر به عرض ۹ می‌رسد.}} \log_2((x-1)^2 + 512) = 10 \xrightarrow{\text{تعریف log}} (x-1)^2 + 512 = 2^{10}$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 2^{10} - 512 = 512 - 512 = 0 \xrightarrow{x > 1} (x-1) = \sqrt{512}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{512} \xrightarrow{22 < \sqrt{512} < 23} [f^{-1}(10)] = [1 + \sqrt{512}] = 23$$

ب) $f(x) = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \xrightarrow{\text{تعریف log}} x = \log_3 2 = f^{-1}(2) \Rightarrow \frac{1}{f^{-1}(2)} = \log_3 3$

$$\xrightarrow{\log_3 3 \text{ بین ۱ و ۲ است.}} [\log_3 3] = \left[\frac{1}{f^{-1}(2)} \right] = 1$$

$$23 + 1 = 24$$

پس جواب می‌شود:

تست و پاسخ ۱۱

ضابطه معکوس تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ کدام است؟ ($x > 1$)

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \quad (4)$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \quad (3)$$

$$\frac{1 - \sqrt{4x^2 - 1}}{2x} \quad (2)$$

$$\frac{1 + \sqrt{4x^2 - 1}}{2x} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: راه اول: با قراردادن $x = 2$ داریم $f(2) = \frac{2}{5}$ ؛ پس گزینه‌ای درست است که به ازای $\frac{2}{5}$ به ما ۲ بدهد. در ۱ و ۲ زیر رادیکال منفی می‌شود:

$$4\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 < 0$$

و این دو گزینه حذف می‌شوند. در ۳ داریم:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^2}}{2\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{\frac{4}{5}} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}} = 2$$

و در ۴، با قراردادن $\frac{2}{5}$ به ۲ نمی‌رسیم. پس جواب ۳ است.

راه دوم:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1} \xrightarrow{\text{جای آن‌ها را عوض کنیم. x و y هم علامت‌اند.}} x = \frac{y}{y^2 + 1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} xy^2 - y + x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روش دلتا}} y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}$$

چون y و x هم علامت هستند، علامت $\oplus$ را برمی‌داریم.

راه سوم: بعداً می‌بینیم حد f در $+\infty$ صفر است؛ پس حد راست f^{-1} در صفر باید $+\infty$ شود که فقط در ۳ این‌طور است.

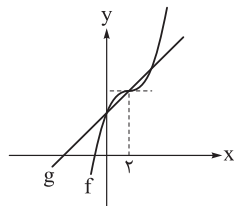


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۲

تابع f از انتقال تابع $y = x^3$ به دست آمده است. نمودار تابع f و خط g به صورت زیر است. اگر نمودار تابع $f \circ g$ از ناحیه چهارم عبور نکند، حداقل مقدار $f(2)$ کدام است؟



۱۰ (۱)

۲ (۲)

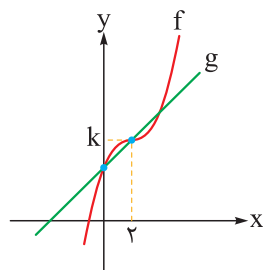
۸ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به شکل نمودار x^3 را ۲ واحد به سمت راست و k واحد به بالا $f(x) = (x-2)^3 + k$ برده‌ایم؛ پس داریم:



گام دوم: خط g نمودار f را در $(2, k)$ و روی محور y ها قطع کرده؛ پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= k \\ g(0) &= f(0) = k - 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{k}{2} = 4$$

$$g(x) = 4x + k - 8$$

بنابراین:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x) - 2)^3 + k = (4x + k - 10)^3 + k$$

گام سوم: $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم.

گام چهارم: حالا چون $f \circ g$ اکیداً صعودی است (از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی به دست آمده)؛ پس شرط این که از ناحیه چهارم نگذرد به صورت

$$\xrightarrow{x=0} (k-10)^3 + k \geq 0 \xrightarrow{\text{جستجو در گزینه‌ها}} k_{\min} = 8$$

$f \circ g(0) \geq 0$ است؛ پس داریم:

دقت کنید که $f(2)$ همان k است.

تست و پاسخ ۱۳

اگر $f(x) = \frac{-x-2}{2x-1}$ و $g(x) = x^2 + \left[\frac{1}{2} - x^2\right]$ ، آن گاه برد تابع $f^{-1} \circ g$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

(۴) $(-1, 0) \cup \{\frac{1}{4}\}$

(۳) $(-\infty, 0)$

(۲) $(-\infty, -\frac{3}{4})$

(۱) $(\frac{1}{4}, 2)$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

$$y = x^2 + \left[\frac{1}{2} - x^2\right] = x^2 + \left[-(x^2 - \frac{1}{2})\right]$$

گام اول: ضابطه g را به صورت روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{داریم: } [-t] = \begin{cases} -[t] - 1, & t \notin \mathbb{Z} \\ -t, & t \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ برای حاصل } \left[-(x^2 - \frac{1}{2})\right] \text{ دو حالت داریم:}$$

$$(x^2 - \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}: y = x^2 - (x^2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$(x^2 - \frac{1}{2}) \notin \mathbb{Z}: y = x^2 - [x^2 - \frac{1}{2}] - 1 = \underbrace{(x^2 - \frac{1}{2}) - [x^2 - \frac{1}{2}]}_{\text{جزء اعشاری، بین } 0 \text{ و } 1} - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{2}$$

$$0 < t < 1, y = t - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < g(x) \leq \frac{1}{2} \text{؛ بنابراین:}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: ضابطه $f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a} = \frac{x-2}{2x+1}$ به صورت $f^{-1}(x)$ است.

دقت می‌کنیم که برای ورودی‌های بیشتر از $-\frac{1}{2}$ ، تابع f^{-1} پیوسته و اکیداً صعودی است.

گام سوم: با قراردادن مقادیر $0 < g < 1$ داریم:

$$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) < f^{-1}(g(x)) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\infty < f^{-1}(g(x)) < -\frac{3}{4} \Rightarrow R_{f^{-1} \circ g} = (-\infty, -\frac{3}{4})$$

تست و پاسخ ۱۴

تابع f با دامنه $R - \{0, 1\}$ در رابطه $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$ صدق می‌کند. مقدار $f(2)$ کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی

$$\xrightarrow{x=2} f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3$$

راه اول: گام اول: برای محاسبه $f(2)$ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

گام دوم: حالا که به $f\left(\frac{1}{2}\right)$ احتیاج پیدا کردیم، بیایید به جای x بگذاریم $\frac{1}{2}$:

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

گام سوم: کم‌کم داریم نگران می‌شویم! به $f(-1)$ نیاز داریم؛ پس $x = -1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=-1} f(-1) + f(2) = -1 + 1 = 0$$

خب کار معلوم شد! سه‌تا معادله و سه‌تا مجهول داریم و $f(2)$ را می‌خواهیم.

گام چهارم: معادله‌ها را کنار هم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) = \frac{3}{2} \\ f(-1) + f(2) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ها می‌روند}} f(2) - f(-1) = \frac{3}{2}$$

اگر اولی را منهای دومی کنیم، داریم:

حالا این را در کنار سومی ببینید:

$$\begin{cases} f(2) - f(-1) = \frac{3}{2} \\ f(2) + f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(-1) \text{ ها می‌روند}} 2f(2) = \frac{3}{2}$$

از جمع این‌ها داریم:

$$\xrightarrow{\div 2} f(2) = \frac{3}{4}$$

پس:

راه دوم: اگر دلتان ضابطه $f(x)$ را خواست باید به جای x ، وارون $\frac{x-1}{x}$ یعنی $\frac{-1}{x-1}$ را قرار دهید. (اگر گفتید چرا؟)

تست و پاسخ ۱۵

توابع $f(x) = 4 - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{x}}$ و $g(x) = x^3$ مفروض‌اند. مجموع جواب‌های متمایز معادله $\text{fog}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟

$$11 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: $g^{-1} \circ f^{-1}$ همان وارون تابع fog است؛ پس در معادله صورت سؤال fog با وارونش برابر شده است، چون f و g اکیداً صعودی اند، fog نیز اکیداً صعودی است و فقط وقتی با وارونش مساوی می شود که برابر X باشد:

$$fog = g^{-1} \circ f^{-1} = (fog)^{-1} \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} fog = x$$

$$f(g(x)) = 4 - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{g(x)}} = 4 - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{x^3}} = 4 - 3\sqrt[3]{2 - x}$$

$$4 - 3\sqrt[3]{2 - x} = x$$

گام دوم: fog را تشکیل می دهیم:

حالا از معادله fog = x داریم:

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} 4 - x = 3\sqrt[3]{2 - x} \xrightarrow{\text{به توان 3}} (4 - x)^3 = 27(2 - x)$$

گام سوم:

$$\xrightarrow{\text{اتحاد را باز و مرتب کنیم}} 64 - 48x + 12x^2 - x^3 = 54 - 27x \Rightarrow x^3 - 12x^2 + 21x - 10 = 0$$

با کمی دقت، مجموع ضرایب صفر است؛ پس $x = 1$ صدق می کند و با تقسیم بر $x - 1$ داریم:

$$\xrightarrow{x=1 \text{ می خورد}} (x-1)(x^2 - 11x + 10) = 0 \xrightarrow{\text{دوباره جمع ضرایب صفر است}} x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 10$$

$$1 + 10 = 11$$

گام چهارم: پس جمع جواب های متمایز می شود:

تست و پاسخ ۱۶

به ازای یک مقدار a، تابع $f(x) = \frac{|x-a^2|}{x-a^2} \cdot (x^2 - 2x - 3a)$ وارون پذیر است. مقدار $f(2a)$ کدام است؟

$$-11 \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

$$-7 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

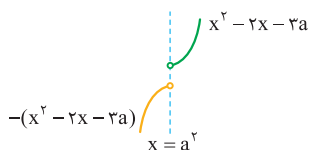
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: به عامل $\frac{|x-a^2|}{x-a^2}$ دقت کنید. حاصل آن همواره ۱ یا -۱ است.

در واقع ضابطه تابع f برای $x > a^2$ و $x < a^2$ دو حالت دارد:

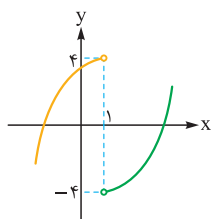
$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x - 3a), & x > a^2 \\ -(x^2 - 2x - 3a), & x < a^2 \end{cases}$$

گام دوم: با دقت به نمودار $y = x^2 - 2x - 3a$ ، فقط در حالتی f یک به یک می شود که $x = a^2$ طول رأس سهمی باشد، ببینید:



گام سوم: رأس سهمی در $x = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$ است؛ پس $a^2 = 1$ و دو حالت داریم: $a = 1$ یا $a = -1$

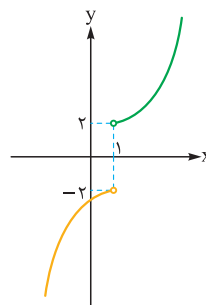
گام چهارم: به ازای $a = -1$ و $a = 1$ نمودار f را رسم می کنیم:



این که یک به یک نشد.

$$\xrightarrow{a=1} f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x > 1 \\ -(x^2 - 2x - 3), & x < 1 \end{cases}$$

$$f(2a) = f(2) = -((-2)^2 - 2(-2) + 3) = -11$$



این خوب است.

$$\xrightarrow{a=-1} f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x > 1 \\ -(x^2 - 2x + 3), & x < 1 \end{cases}$$

گام پنجم: پس فقط $a = -1$ قبول است و داریم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۷

تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ مفروض است. در دنباله زیر مقدار جمله 2023 ام کدام است؟
 $f(-1), f(f(-1)), f(f(f(-1))), \dots, f(\overbrace{f \dots f}^{2023}(-1)) \dots$

$$\sqrt[6]{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: بیایید با هم چندتای اول را حساب کنیم تا ببینیم ریتم تکراری پیدا می شود یا نه.

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-(-1)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f(f(-1)) = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2}$$

$$f(f(f(-1))) = f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-(\sqrt[3]{2})^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = -1$$

برگشتیم سر جای اول، یعنی دوباره به -1 رسیدیم!

گام دوم: حالا که فهمیدیم $f(f(f(-1))) = -1$ می شود: (-1) ، پس می گوئیم هر سه بار ترکیب f با خودش به ازای (-1) باز هم (-1) است؛ پس 2022 بار ترکیب f با خودش در (-1) می شود: (-1) . (چون 2022 مضرب 3 است).

گام سوم: پس در ترکیب برای 2023 امین بار داریم:

$$f(f \dots (f(-1)) \dots) = f(-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \xrightarrow[\text{مخرج را گویا کنیم.}]{\times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

تست و پاسخ ۱۸

اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا ببریم، به نمودار $y = g(x)$ می رسیم. معادله $g(|x|) = x^2$ چند جواب دارد؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$g(x) = (x-1)^3 + 1$$

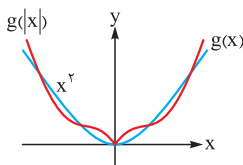
پاسخ تشریحی: گام اول: با انتقال یک واحد به راست و بالا داریم:

$$\Rightarrow g(|x|) = (|x|-1)^3 + 1$$

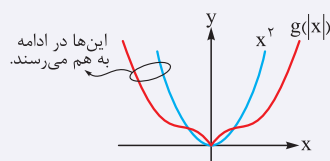
پس ضابطه $g(|x|)$ به صورت روبه رو است:

گام دوم: **راه اول:** معادله $g(|x|) = x^2$ به صورت تلاقی $x^2, (|x|-1)^3 + 1$ درمی آید.

که با توجه به شکل روبه رو پنج جواب دارد:



تذکره: دقت کنید که برای x های بزرگ و خیلی کوچک (مثلاً ± 100) باید نمودار g بالاتر از x^2 باشد؛ پس شکل را این طوری ول نکنید:





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

راه دوم:

$$x \geq 0 \Rightarrow (x-1)^3 + 1 = x^2 \Rightarrow (x-1)^3 = x^2 - 1 \Rightarrow (x-1)(x-1)^2 = (x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-2x+1=x+1 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow (-x-1)^3 + 1 = x^2 \Rightarrow -(x+1)^3 = x^2 - 1 \Rightarrow -(x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ -x^2-2x-1=x-1 \Rightarrow x^2+3x=0 \Rightarrow x(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۹

اگر $f(x) = [3x+1] - 3[x]$ و $g(x) = x^2 - 2bx + c$ ، بُرد تابع $g \circ f$ دو عضوی خواهد بود. مجموع کم‌ترین و بیشترین مقدار b کدام است؟
([]، نماد جزء صحیح است.)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: ضابطه f را ساده‌تر کرده و بُرد آن را می‌یابیم. از آن جایی که $1 > x - [x] \geq 0$ داریم:

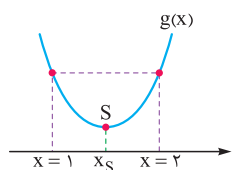
$$f(x) = [3x+1] - 3[x] = [3x - 3[x] + 1] = [3(x - [x]) + 1] = [1 \leq \underbrace{3(x - [x])}_{\substack{0 \leq < 1 \\ \leq < 3}} < 4] = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3$$

بنابراین بُرد f مجموعه $\{1, 2, 3\}$ است.

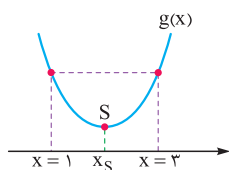
$$g(f(x)) = g(1) \text{ یا } g(2) \text{ یا } g(3)$$

گام دوم: $g \circ f$ یعنی $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

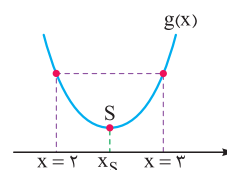
گام سوم: برای این که حاصل $g(1)$ ، $g(2)$ و $g(3)$ دو مقدار باشد، باید دوتا از این نقاط هم‌عرض باشند. سه حالت داریم:



حالت اول



حالت دوم



حالت سوم

طول رأس سهمی $g(x) = x^2 - 2bx + c$ برابر با $x_S = b$ می‌باشد؛ پس:

گام چهارم: مجموع حداقل و حداکثر b برابر است با:

$$\text{حالت اول: } x_S = b = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$\text{حالت دوم: } x_S = b = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow b_{\min} + b_{\max} = 1.5 + 2 = 3.5$$

$$\text{حالت سوم: } x_S = b = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

تست و پاسخ ۲۰

قرینه نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم کرده، سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(2 + 3\sqrt{2})$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی **راه اول:** گام اول: ضابطه تابع وارون $y = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}}$ به صورت $x = \sqrt{y + \sqrt{2y - 1}}$ می باشد که نمودار آن قرینه نمودار $y = x$ نسبت به خط $y = x$ است.

گام دوم: حالا نمودار $x = \sqrt{y + \sqrt{2y - 1}}$ را:

(۱) دو واحد در جهت مثبت محور x ها جابه جا می کنیم؛ پس باید تبدیل $x - 2 \rightarrow x$ انجام شود.

(۲) سه واحد در جهت منفی محور y ها جابه جا می کنیم؛ پس باید تبدیل $y + 3 \rightarrow y$ انجام شود.

$$x = \sqrt{y + \sqrt{2y - 1}} \xrightarrow[y \rightarrow y+3]{x \rightarrow x-2} x - 2 = \sqrt{(y+3) + \sqrt{2(y+3) - 1}} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{y+3 + \sqrt{2y+5}}$$

گام سوم: حالا مقدار y را به ازای $x = 2 + 3\sqrt{2}$ می یابیم:

$$(2 + 3\sqrt{2}) - 2 = \sqrt{y+3 + \sqrt{2y+5}} \Rightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{y+3 + \sqrt{2y+5}} \xrightarrow{\text{توان } 2} 18 = y+3 + \sqrt{2y+5}$$

$$\Rightarrow 15 - y = \sqrt{2y+5} \xrightarrow[15-y \geq 0]{\text{توان } 2} 225 - 30y + y^2 = 2y + 5 \xrightarrow{\text{مرتب}} y^2 - 32y + 220 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} (y-10)(y-22) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=10 \\ y=22 \end{cases} \xrightarrow[15-y \geq 0]{} \boxed{y=10}$$

راه دوم: در معادله $15 - y = \sqrt{2y+5}$ گزینه ها را کنترل کنیم.

تذکر دقت کنید در انتقال، عملیات روی y برعکس انجام می شود، فقط چون آن عملیات را کنار y نمی نویسیم، متوجه برعکس اعمال شدنش

$$y = |x| \xrightarrow[y \rightarrow y-3]{\text{انتقال سه واحد به سمت بالا}} y - 3 = |x| \Rightarrow y = |x| + 3$$

نمی شویم، مثلاً: