



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
سؤال
آزمون سوم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

مثلثات
+ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
ریاضی ۱
صفحه ۲۸ تا ۶۸
ریاضی ۲
صفحه ۷۱ تا ۹۴
ریاضی ۳
صفحه ۳۱ تا ۴۸

مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

محمد مصطفی ابراهیمی - کوروش اسلامی - حسین شفیع‌زاده - علی شهبابی - مهدی عزیزی
کیان کریمی خراسانی - مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی‌منش

گزینشگر

رسول محسنی‌منش

مؤلف پاسخ‌نامه

سروش موئینی

کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

مسعود شفیعی
محمد گودرزی

ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

امیرحسین ابومحبوب
مهدی خوش‌نویس

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.

ریاضی (۳): صفحه‌های ۳۱ تا ۴۸، ریاضی (۲): صفحه‌های ۷۱ تا ۹۴، ریاضی (۱): صفحه‌ها ۲۸ تا ۶۸

۱- اگر $\tan 2\alpha = 4 \cot \alpha$ باشد، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام می‌تواند باشد؟ ($\cos \alpha \neq 0$)

- (۱) $0/76$ (۲) $0/84$ (۳) $0/88$ (۴) $0/92$

۲- معادله $\sin x + [\sin x] = \frac{x}{3} + \left[\frac{x}{3}\right]$ چند جواب در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳- در مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{20-14\sqrt{2}}$ و ۲، بزرگ‌ترین زاویه مثلث چند برابر کوچک‌ترین زاویه آن است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۴- نمودار تابع $y = 1 + a \cos bx$ در سه نقطه متوالی $\frac{2\pi}{3}$ ، k و $\frac{14\pi}{3}$ محور x ها را قطع می‌کند. حاصل $\frac{ak}{\pi}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{20}{3}$ (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$

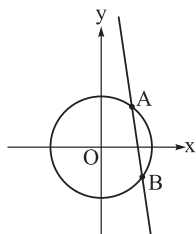
۵- اگر $2 = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ باشد، حاصل $5 \tan \theta + 12 \cot \theta$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) -۲۴ (۳) ۲۱ (۴) -۱۶

۶- در دایره مثلثاتی شکل مقابل می‌دانیم $AB = \sqrt{2}$ و شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر با ۷-

است. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



۷- مجموع جواب‌های معادله $3 - 3 \sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۸- اگر $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+16}} = \sin \theta$ داشته باشیم $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+16} = 13$ ، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

- (۱) $2/2$ (۲) $2/3$ (۳) $2/4$ (۴) $2/5$

۹- دوره تناوب و مینیمم تابع $f(x) = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x$ به ترتیب برابرند با:

- (۱) $\frac{7}{4}, \pi$ (۲) $\frac{7}{4}, \frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{19}{8}, \pi$ (۴) $\frac{19}{8}, \frac{\pi}{2}$

محل انجام محاسبات

۱۰- نمودار تابع $f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x$ چند بار در فاصله $[0, 10]$ خط $y = \frac{3}{4}$ را قطع می کند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۱- نمودار تابع $y = \left| \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \right|$ در بازه $\left[\frac{\pi}{18}, a\right]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{4\pi}{9}$

۱۲- از معادله $\frac{\sin 2x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos 5x}{1 - 2 \sin x}$ مجموع جواب ها در بازه $(0, \pi)$ چند برابر π است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) ۲

۱۳- اگر $f(x) = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x + 1$ ، آن گاه نمودار $y = f(x)$ و نمودار تابعی به صورت $y = a \cos bx + c$ که ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب آن با f یکسان باشد، در فاصله $(0, \frac{\pi}{4})$ چند نقطه برخورد دارند؟ ($a > 0$)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴- اگر $A = 2 - \sqrt{3}$ و $B = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{2}$ به طوری که $A^{\frac{1}{2}}B^k = \sqrt{3} - 1$ ، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{17}$ (۲) $\frac{12}{17}$ (۳) $\frac{17}{12}$ (۴) $\frac{15}{17}$

۱۵- فرض کنید $\frac{6 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{x^3} + 3x^3 + x^6$ باشد، مقدار $\frac{1}{x^2} + 2x + x^6$ با کدام برابر است؟

- (۱) $3 - 2\sqrt{2}$ (۲) $3 + 2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{2} + 1$

۱۶- حاصل $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^6 + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^6$ کدام است؟

- (۱) ۳۲۰ (۲) ۳۲۱ (۳) ۳۲۲ (۴) ۳۲۳

۱۷- اگر $\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x} = 6$ ، آن گاه $\sqrt[3]{x^2+3x} + \sqrt[3]{x^2+6x+9}$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $\frac{1}{2} - \sqrt[3]{x^2}$ (۲) $\frac{1}{2} + \sqrt[3]{x^2}$ (۳) $2\sqrt[3]{x^2}$ (۴) $\sqrt[3]{2x^2}$

محل انجام محاسبات

۱۸- اگر $A = \frac{(\sqrt{2}-1)^{-1}}{1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}} + \frac{\sqrt{2}+1}{1+\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}$ و $B = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ، آن گاه جزء صحیح $A - B$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۹- چند عدد صحیح بین ریشه‌های دوم $\sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{10+7\sqrt{2}}$ هستند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۰- معادله $(4^x - 2)^3 + (2^x - 4)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
پاسخ
آزمون سوم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

مثلثات
+ توان‌های گویا و عبارتهای جبری
ریاضی ۱
صفحه ۲۸ تا ۶۸
ریاضی ۲
صفحه ۷۱ تا ۹۴
ریاضی ۳
صفحه ۳۱ تا ۴۸

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

محمد مصطفی ابراهیمی - کوروش اسلامی - حسین شفیع‌زاده - علی شهبابی - مهدی عزیزی
کیان کریمی خراسانی - مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
رسول محسنی‌منش	رسول محسنی‌منش	سروش موئینی	مسعود شفیعی محمد گودرزی	امیرحسین ابومحبوب مهدی خوش‌نویس

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

- ✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی
- ✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی
- ✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن؛
دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۳): صفحه‌های ۳۱ تا ۴۸، ریاضی (۲): صفحه‌های ۷۱ تا ۹۴، ریاضی (۱): صفحه‌های ۲۸ تا ۶۸

تست و پاسخ ۱

اگر $\tan 2\alpha = 4 \cot \alpha$ باشد، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام می‌تواند باشد؟ ($\cos \alpha \neq 0$)

$$-\infty / 92 (4)$$

$$-\infty / 88 (3)$$

$$-\infty / 84 (2)$$

$$-\infty / 76 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: از روی $\tan 2\alpha$ با کمک رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ، مقدار $\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha = 4 \cot \alpha = \frac{4}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{\tan \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = t} \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{4}{t}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2t^2 = 4 - 4t^2 \Rightarrow 6t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = \tan^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

گام دوم: از روی $\tan^2 \alpha$ به کمک رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ مقدار $\cos^2 \alpha$ را حساب می‌کنیم:

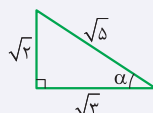
$$1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}$$

گام سوم: با کمک فرمول $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، در دو مرحله از روی $\cos^2 \alpha$ به $\cos^2 4\alpha$ می‌رسیم:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5}$$

$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\times 4} -\frac{92}{100}$$

هم می‌توانستیم به $\cos^2 \alpha = \frac{3}{5}$ برسیم.



وقتی به $\tan^2 \alpha = \frac{2}{3}$ رسیدیم از روی مثلث

خواستون باشه

تست و پاسخ ۲

معادله $\sin x + [\sin x] = \frac{x}{3} + \left[\frac{x}{3}\right]$ چند جواب در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

$$4 (4)$$

$$3 (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

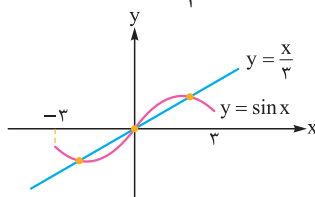
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی

گام اول: اگر $|x| > 3$ باشد، آن‌گاه $\left|\frac{x}{3}\right| > 1$ و طرف راست معادله از ۲ بیشتر یا از ۲- کم‌تر است و تساوی برقرار نمی‌شود.

گام دوم: برای $|x| \leq 3$ چون تابع $f(t) = t + [t]$ اکیداً صعودی است، تساوی صورت سؤال فقط وقتی امکان دارد که $\sin x = \frac{x}{3}$ باشد.

گام سوم: شکل را ببینید:



پس ۳ نقطه برخورد دارند؛ یعنی معادله ۳ جواب دارد.

تست و پاسخ ۳

در مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{20-14\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ و ۲، بزرگ‌ترین زاویه مثلث چند برابر کوچک‌ترین زاویه آن است؟

$$4 (4)$$

$$3 (3)$$

$$5 (2)$$

$$6 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

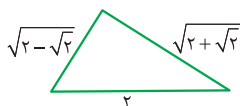
آزمون سوم آنلاین

پاسخ تشریحی راه اول: گام اول: تکلیف عبارات زیر $\sqrt[3]{20 \pm 14\sqrt{2}}$ را معلوم می کنیم. با کمی جست و جوی و دقت

$$\text{به عبارت } (2 \pm \sqrt{2})^3 \text{ می رسیم: } (2 \pm \sqrt{2})^3 = 2^3 \pm 3(2)^2\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2(2) \pm \sqrt{2}^3 = 8 \pm 12\sqrt{2} + 12 \pm 2\sqrt{2} = 20 \pm 14\sqrt{2}$$

پس $\sqrt[3]{20 \pm 14\sqrt{2}}$ همان $\sqrt[3]{(2 \pm \sqrt{2})^3}$ است که می شود $\sqrt{2} \pm 2$ ؛ یعنی اضلاع مثلث $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ ، $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ و ۲ هستند.

این شکلی:



$$(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 2^2$$

گام دوم: باز هم با کمی دقت! رابطه فیثاغورس برقرار است.

پس مثلث قائم الزاویه است.

گام سوم: در مثلث قائم الزاویه سینوس زاویه کوچک تر می شود:

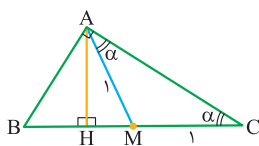
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\alpha < 90^\circ} \alpha = 22.5^\circ$$

پس زوایای بزرگ و کوچک به نسبت $\frac{90}{22.5} = 4$ هستند.

راه دوم:

گام اول: مثل گام اول و دوم راه اول

گام دوم: در مثلث قائم الزاویه، میانه و ارتفاع وارد بر وتر را بکشیم:



$$AM = BM = CM = \frac{BC}{2} = 1$$

می دانیم میانه وارد بر وتر، نصف وتر است:

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام سوم: طبق روابط ارتفاع در مثلث قائم الزاویه داریم:

پس در مثلث قائم الزاویه AHM با وتر ۱ و ضلع $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ زاویه M باید 45° باشد.

$$\hat{C} = \frac{\hat{M}}{2} = 22.5^\circ$$

گام چهارم: می دانیم $\widehat{AMH} = 2\hat{C}$ ، پس داریم:

و بنابراین نسبت مورد نظر $\frac{90}{22.5} = 4$ است.

تست و پاسخ ۴

نمودار تابع $y = 1 + a \cos bx$ در سه نقطه متوالی $\frac{2\pi}{3}$ ، k و $\frac{14\pi}{3}$ محور xها را قطع می کند. حاصل $\frac{ak}{\pi}$ کدام است؟

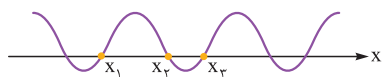
$$\frac{7}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{20}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی گام اول: به شکل نمودار کسینوسی دقت کنید:

اگر نمودار نسبت به محور xها این طور رسم شده باشد، دوره تناوب، فاصله برخورد نقاط اول و سوم است؛ یعنی $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{14\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 4\pi$

و این می گوید: $b = \pm \frac{1}{4}$

گام دوم: در این حالت $y = 1 + a \cos(\frac{x}{4})$ می شود. حالا باید مقدار تابع در $x = \frac{2\pi}{3}$ برابر صفر باشد:

$$1 + a \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 1 + a \times \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = -4$$

پس ضابطه تابع $y = 1 - 4 \cos(\frac{x}{4})$ می شود.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$1 - 2 \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \dots$$

گام سوم: می‌خواهیم تابع محور Xها را قطع کند، پس:

جواب‌های $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$ به صورت مقابل‌اند:

پس $k = \frac{10\pi}{3}$ می‌شود.

$$\text{گام چهارم: بنابراین } \frac{ak}{\pi} = \frac{-2 \times \frac{10\pi}{3}}{\pi} = -\frac{20}{3}$$

تست و پاسخ ۵

اگر $2 \sin \theta + 4 \cos \theta = 2$ باشد، حاصل $5 \tan \theta + 12 \cot \theta$ کدام است؟

-۱۶ (۴)

۲۱ (۳)

-۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: طرفین تساوی $2 \sin \theta + 4 \cos \theta = 2$ را به توان ۲ برسانیم:

$$(2 \sin \theta + 4 \cos \theta)^2 = 2^2 \Rightarrow 4 \sin^2 \theta + 16 \cos^2 \theta + 16 \sin \theta \cos \theta = 4$$

گام دوم: می‌دانیم $4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta = 4$ پس داریم: $4 \sin^2 \theta + 16 \cos^2 \theta + 16 \sin \theta \cos \theta = 4$

$$\xrightarrow{\div \cos^2 \theta} 4 \tan^2 \theta + 16 + 16 \tan \theta = \frac{4}{\cos^2 \theta} = 4(1 + \tan^2 \theta)$$

$$\Rightarrow 4 \tan^2 \theta + 16 \tan \theta = -12$$

گام چهارم: حالا با ضرب دو طرف در $\cot \theta$ به $5 \tan \theta + 12 \cot \theta$ می‌رسیم:

$$\xrightarrow{\times \cot \theta} 5 \tan \theta + 12 \cot \theta = -24$$

تست و پاسخ ۶

در دایره مثلثاتی شکل مقابل می‌دانیم $AB = \sqrt{2}$ و شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر با -۷ است. عرض از

مبدأ این خط کدام است؟

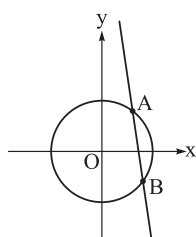
۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

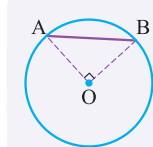
۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱



نکته: اگر طول وتر AB در دایره $\sqrt{2}$ برابر طول شعاع دایره باشد، زاویه کمان $\widehat{AB}$ قائمه است:

$$AB = \sqrt{2}r \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$$

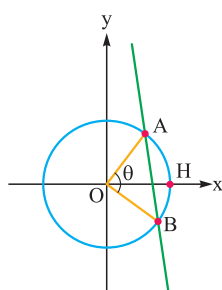


پاسخ تشریحی: گام اول: اول فرض می‌کنیم $\widehat{HOA} = \theta$ است، پس مختصات A به صورت $A(\cos \theta, \sin \theta)$

می‌شود.

$$\widehat{HOB} = \widehat{AOB} - \widehat{AOH} = 90^\circ - \theta$$

حالا طبق نکته بالا، $\widehat{AOB} = 90^\circ$ است، پس:





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: حالا چون B در ربع چهارم است، برای رسیدن به B باید از A، 90° درجه به عقب برگردیم، پس زاویه‌ای که B دارد $90^\circ - \theta$ است. گام سوم: مختصات نقطه B به صورت $(\cos(\theta - 90^\circ), \sin(\theta - 90^\circ))$ یا همان $(\sin \theta, -\cos \theta)$ می‌شود.

گام چهارم: شیب خط گذرنده از A و B برابر -7 است، پس: شیب: $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\cos \theta - \sin \theta} = -7$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = -7 \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = -7 \cos \theta + 7 \sin \theta$$

$$\Rightarrow 8 \cos \theta = 6 \sin \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3}$$

گام پنجم: $\tan \theta = \frac{4}{3}$ است، پس $\sin \theta = \frac{4}{5}$ و $\cos \theta = \frac{3}{5}$ می‌شود.

$$A(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

حالا معادله خط گذرنده از A را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{4}{5} = -7\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow y = -7x + 5$$

بنابراین عرض از مبدأ خط 5 است.

تست و پاسخ ۷

مجموع جواب‌های معادله $21 \sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$5\pi (4)$$

$$4\pi (3)$$

$$3\pi (2)$$

$$2\pi (1)$$

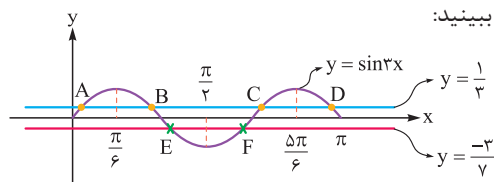
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: اگر به جای $\sin 3x$ مثلاً t بنویسیم، داریم:

$$21t^2 + 2t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} t^2 + 2t - 63 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-7) = 0 \Rightarrow t = -\frac{9}{21}, \frac{7}{21}$$

پس $\frac{1}{3}$ یا $-\frac{3}{7}$ $\sin 3x = -\frac{3}{7}$ یا $\frac{1}{3}$

گام دوم: روی نمودار $y = \sin 3x$ در فاصله $[0, \pi]$ تلاقی با $y = \frac{1}{3}$ و $y = -\frac{3}{7}$ را ببینید:



$$x_A + x_B = 2 \times \frac{\pi}{6}, \quad x_E + x_F = 2 \times \frac{\pi}{2}, \quad x_C + x_D = 2 \times \frac{5\pi}{6}$$

داریم:

پس جمع جواب‌ها می‌شود 3π .

تست و پاسخ ۸

اگر $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+16}} = \sin \theta$ و داشته باشیم $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+16} = 13$ ، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$2/5 (4)$$

$$2/4 (3)$$

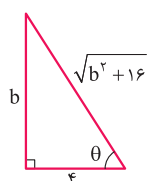
$$2/3 (2)$$

$$2/2 (1)$$

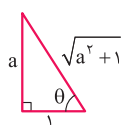
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: تعریف $\sin \theta$ یادتان هست؟ ضلع مقابل وتر بود.

پس الان دوتا مثلث داریم:



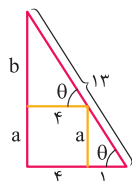
و





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس



گام دوم: از صورت سؤال مجموع طول وترها ۱۳ است؛ پس:

یعنی با رسم دو مثلث طوری که وترشان در یک امتداد باشد به مثلث قائم الزاویه با وتر ۱۳ و ضلع کوچک ۵ می‌رسیم.
گام سوم:

$$13^2 = 5^2 + (a+b)^2$$

$$\Rightarrow (a+b) = 12 \Rightarrow \tan \theta = \frac{12}{5} = 2.4$$

تست و پاسخ ۹

دوره تناوب و مینیمم تابع $f(x) = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x$ به ترتیب برابرند با:

$$\frac{19}{8}, \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{19}{8}, \pi \quad (3)$$

$$\frac{7}{4}, \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4}, \pi \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x$$

گام اول: ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = 1 + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

با روابط $\sin^4 x + \cos^4 x$ و $\sin^6 x + \cos^6 x$ داریم:

$$f(x) = 3 - 5\sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow f(x) = 3 - \frac{5}{4}\sin^2 2x$$

گام دوم: می‌دانیم دوره تناوب $\sin^2 ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس $T = \frac{\pi}{2}$.

و از طرفی چون $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ است، داریم:

$$3 - \frac{5}{4} \times 1 \leq f(x) \leq 3 - 0$$

$$f_{\min} = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

تست و پاسخ ۱۰

نمودار تابع $f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x$ چند بار در فاصله $[0, 10]$ خط $y = \frac{3}{4}$ را قطع می‌کند؟

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: به جای $\sin^2 x$ می‌نویسیم $1 - \cos^2 x$ و ضابطه را مربع کامل می‌کنیم:

$$f(x) = \cos^4 x - \cos^2 x + 1 = (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

گام دوم: اگر $f(x) = \frac{3}{4}$ باشد، باید داخل پرانتز صفر شود؛ پس $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ و بنابراین $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

گام سوم: جواب‌های کلی معادله $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ به صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ هستند و در فاصله $[0, 10]$ به $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ و $2\pi \pm \frac{\pi}{4}$ و $3\pi - \frac{\pi}{4}$ می‌رسیم.

یعنی در این بازه ۶ جواب دارد. دقت کنید که $3\pi + \frac{\pi}{4}$ می‌شود تقریباً $9.78 + 0.785 = 10.565$ که از ۱۰ بیشتر است.

تست و پاسخ ۱۱

نمودار تابع $y = \left| \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \right|$ در بازه $[\frac{\pi}{18}, a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

$$\frac{4\pi}{9} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi}{9} \quad (1)$$

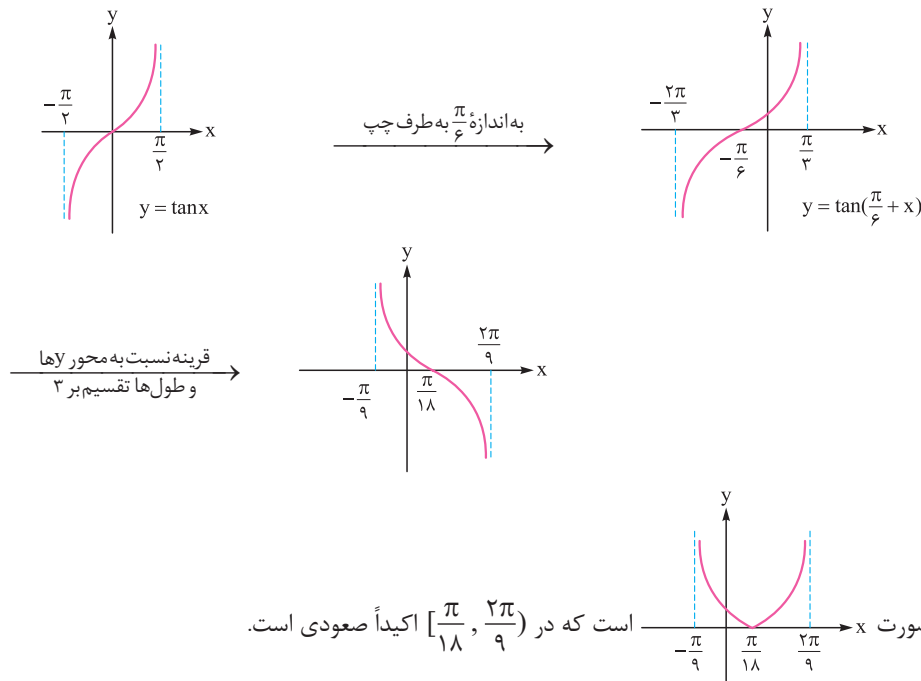
پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: نمودار $y = \tan(\frac{\pi}{6} - 3x)$ را رسم کنیم:



گام دوم: پس قدرمطلق آن به صورت $x \in [\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}]$ اکیداً صعودی است.

تست و پاسخ ۱۲

از معادله $\frac{\sin 2x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos 5x}{1 - 2 \sin x}$ مجموع جواب‌ها در بازه $(0, \pi)$ چند برابر π است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: با حذف مخرج‌ها داریم:

گام دوم: جواب کلی معادله را می‌نویسیم:

$$2 \sin x - 1 \neq 0 \Rightarrow \cos 5x = -\sin 2x = \sin(-2x) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$$

$$\begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \\ 5x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{6} \\ 7x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{14} \end{cases}$$

در فاصله $(0, \pi)$ جواب‌های $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ از بالایی و $\frac{3\pi}{14}$ و $\frac{7\pi}{14}$ از پایینی را داریم.

گام سوم: اما به ازای $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ مخرج صفر است؛ پس فقط ۳ جواب داریم که جمعشان $\frac{3\pi}{2} = \frac{3}{14}(11+7+3)\frac{\pi}{14}$ است.

تست و پاسخ ۱۳

اگر $f(x) = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x + 1$ ، آن‌گاه نمودار $y = f(x)$ و نمودار تابعی به صورت $y = a \cos bx + c$ که ماکزیمم، مینیمم و

دوره تناوب آن با f یکسان باشد، در فاصله $(0, \frac{\pi}{4})$ چند نقطه برخورد دارند؟ ($a > 0$)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: با رابطه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ضابطه $f(x)$ را ساده‌تر کنیم:

$$\begin{aligned} 4(\underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x}) \cos 2x \cos 4x &= 2(\underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\sin 4x}) \cos 4x = \sin 8x \\ \Rightarrow f(x) &= 1 + \sin 8x \end{aligned}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: بنابراین تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت $1 + \cos \lambda x$ است که باید با f برخورد کند:

$$\xrightarrow{\text{برخورد}} 1 + \sin \lambda x = 1 + \cos \lambda x \Rightarrow \sin \lambda x = \cos \lambda x$$

$$\Rightarrow \tan \lambda x = 1 \Rightarrow \lambda x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{4} = \frac{(4k+1)\pi}{4}$$

گام سوم: جواب معادله مثلثاتی را می نویسیم:

که به ازای $k = 0, 1, 2, 3$ ، چهار برخورد در فاصله $(0, \frac{\pi}{4})$ داریم.

تست و پاسخ ۱۴

اگر $A = 2 - \sqrt{3}$ و $B = \sqrt{2}\sqrt{32}\sqrt{2}$ به طوری که $A^{\frac{1}{2}}B^k = \sqrt{3} - 1$ ، مقدار k کدام است؟

$$\frac{15}{17} \quad (4)$$

$$\frac{17}{12} \quad (3)$$

$$\frac{12}{17} \quad (2)$$

$$\frac{6}{17} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: $A^{\frac{1}{2}}$ را حساب کنیم:

$$A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\frac{\times \sqrt{2}}{\times \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{2}\sqrt{32}\sqrt{2} = (2^1)(2^5 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (2^1 \times 2^{(5+\frac{1}{2})\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (2^{1+\frac{11}{4}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15}{4}}$$

گام دوم: B را با توان کسری ساده تر کنیم:

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \times (2^{\frac{15}{4}})^k = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow (2^{\frac{15}{4}})^k = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{15}{4}k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{15}$$

گام سوم: از رابطه $A^{\frac{1}{2}}B^k = \sqrt{3} - 1$ داریم:

تست و پاسخ ۱۵

فرض کنید $\frac{6 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = x^6 + 3x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، مقدار $x^6 + 2x + \frac{1}{x^2}$ با کدام برابر است؟

$$\sqrt{2} + 1 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (3)$$

$$3 + 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$3 - 2\sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: با کمی دقت $x^6 + 2x + \frac{1}{x^2}$ به صورت $(\frac{1}{x})^2 + 2(\frac{1}{x}) + (x^2)^2 + (x^2)$ است؛ یعنی $(x^2 + \frac{1}{x})^2$ را می خواهیم،

پس در فرض سؤال باید $x^2 + \frac{1}{x}$ را پیدا کرد.

گام دوم: با توجه به فرض سؤال و دیدن $\frac{1}{x^3}$ و x^6 به فکر اتحاد $(x^2 + \frac{1}{x})^3$ می افتیم. ببینید:

$$(x^2 + \frac{1}{x})^3 = x^6 + 3x^4 \times \frac{1}{x} + 3x^2 \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^6 + 3x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 = \frac{6 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} + 3$$

این را داریم.

$$\xrightarrow{\text{گویا کنیم}} \frac{(6 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} + 3 \Rightarrow 6 - 2 + 6\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2} + 1)^3 = \underbrace{\sqrt{2}^3}_{2\sqrt{2}} + \underbrace{3\sqrt{2}^2}_{6} + 3\sqrt{2} + 1$$

گام سوم: $7 + 5\sqrt{2}$ همان $(\sqrt{2} + 1)^3$ است. ببینید:

پس $x^2 + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1$ و خواسته سؤال $(\sqrt{2} + 1)^2$ است که می شود $3 + 2\sqrt{2}$.

تست و پاسخ ۱۶

حاصل $(\frac{3 + \sqrt{5}}{2})^6 + (\frac{3 - \sqrt{5}}{2})^6$ کدام است؟

$$323 \quad (4)$$

$$322 \quad (3)$$

$$321 \quad (2)$$

$$320 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: دو عدد $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ دارای مجموع $S = \frac{3}{2} \times 2 = 3$ و حاصل ضرب $P = \frac{9-5}{4} = 1$ هستند؛ یعنی این اعداد ریشه‌های

معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند و ما $x_1^6 + x_2^6$ را می‌خواهیم.

گام دوم: می‌دانیم $x_1^3 + x_2^3$ می‌شود $3PS - S^3$ ، پس:

$$x_1^3 + x_2^3 = 3^3 - 3(1)3 = 18$$

گام سوم: حالا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x_1^3 + x_2^3)^2 = 18^2 \Rightarrow x_1^6 + x_2^6 + 2x_1^3x_2^3 = 324 \Rightarrow x_1^6 + x_2^6 = 324 - 2 = 322$$

این می‌شود ۱

تست و پاسخ ۱۷

اگر $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+3} = 6$ ، آن‌گاه $\sqrt[3]{x^2+6x+9} + \sqrt[3]{x^2+3x} = \sqrt[3]{x^2} + 6x + 9 + \sqrt[3]{x^2+3x}$ با کدام گزینه برابر است؟

$$\sqrt[3]{2x^2} \quad (4)$$

$$2\sqrt[3]{x^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt[3]{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} - \sqrt[3]{x^2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: اگر $\sqrt[3]{x+3} = a$ و $\sqrt[3]{x} = b$ باشد داریم:

$$a - b = 6$$

$$a^3 - b^3 = 3$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{3}{6}$$

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2+6x+9} + \sqrt[3]{x^2+3x} = \frac{1}{2} - \sqrt[3]{x^2}$$

و با توجه به $a^3 = x+3$ و $b^3 = x$ می‌توان گفت:

دو طرف رابطه دوم را بر رابطه اول تقسیم کنیم:

پس طبق اتحاد چاق و لاغر:

گام دوم: این عبارت را بر حسب x بنویسیم:

تست و پاسخ ۱۸

اگر $A = \frac{(\sqrt{2}-1)^{-1}}{1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}} + \frac{\sqrt{2}+1}{1+\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}$ و $B = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ، آن‌گاه جزء صحیح $A - B$ برابر است با:

$$-2 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: نترسید! کل ماجرا زیر سر این است که $\sqrt{2}+1$ و $\sqrt{2}-1$ عکس هم هستند؛ پس اگر $\sqrt{2}-1 = t$ باشد:

$$A = \frac{\frac{1}{t}}{1+\sqrt[3]{t}} + \frac{\frac{1}{t}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{t} \times \frac{1+\sqrt[3]{t}+1+\sqrt[3]{\frac{1}{t}}}{(1+\sqrt[3]{t})(1+\sqrt[3]{\frac{1}{t}})} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج کسر بزرگ برابرند}} A = \frac{1}{t} = \sqrt{2}+1$$

گام دوم: درباره B هم دقت کنیم که $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ عکس هم هستند؛ پس B به صورت $\frac{1+k}{1+\frac{1}{k}}$ در می‌آید که جوابش می‌شود k ؛ یعنی $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

گام سوم: $A - B$ می‌شود $1 - \sqrt{3}$ که حدوداً 0.732 است و جزء صحیحش می‌شود -1 .

تست و پاسخ ۱۹

چند عدد صحیح بین ریشه‌های دوم $\sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2\sqrt{10+7\sqrt{2}}}$ هستند؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: حاصل رادیکال اول را ببینید:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گام دوم: حالا دوتا رادیکال را یکی کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{12-8\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12-8\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2-\sqrt{2}$$

گام سوم: به طور مشابه عبارت سمت راست را ساده تر کنیم:

$$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{10+7\sqrt{2}} = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2}$$

گام چهارم: پس حاصل عبارت می شود ۴ که ریشه های دوم آن ± 2 هستند و ۳ عدد صحیح -1 ، 0 و 1 بین آن ها قرار دارند.

تست و پاسخ ۲۰

معادله $(4^x - 2)^3 + (2^x - 4)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ چند جواب حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: اگر $4^x - 2 = a$ بنامیم و به جای $2^x - 4$ بنویسیم b ، داریم:

$$\frac{2^x - 4 = b}{4^x - 2 = a} \rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3$$

گام دوم: طبق اتحاد مکعب حاصل $(a + b)^3$ برابر $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ است، پس تساوی بالا وقتی برقرار می شود که $3ab(a + b) = 0$ باشد؛ یعنی یکی از حالت های روبه رو را داریم:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

گام سوم: از معادله $b = 2^x - 4 = 0$ به جواب $x = 2$ می رسیم.

از معادله $a = 4^x - 2 = 0$ به جواب $x = \frac{1}{2}$ می رسیم.

و از معادله $a + b = 2^x + 4^x - 6 = 0$ به جواب $x = 1$ می رسیم، پس ۳ جواب داریم.

دقت کنید که 2^x و 4^x و مجموع آن ها اکیداً صعودی اند و هر مقدار مثبت را فقط یک بار می گیرند؛ یعنی معادله ها فقط یک جواب دارند.