



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
سؤال
آزمون چهارم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

حد و پیوستگی + توابع نمایی و لگاریتمی
+ مجموعه، الگو و دنباله
ریاضی ۱
صفحه ۱ تا ۲۷
ریاضی ۲
صفحه ۹۵ تا ۱۴۲
ریاضی ۳
صفحه ۴۹ تا ۶۴

مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - حسین شفیع‌زاده - علی شهرابی - مهدی عزیزی - مصطفی کرمی
مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی‌منش

گزینشگر

رسول محسنی‌منش

مؤلف پاسخ‌نامه

مسعود شفیعی

کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

محمد گودرزی

ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

امیرحسین ابومحجوب
زهرا جالینوسی
امیرحسین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **برنامه کامل** از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



ریاضی (۳): صفحه‌های ۴۹ تا ۶۴، ریاضی (۲): صفحه‌های ۹۵ تا ۱۴۲، ریاضی (۱): صفحه‌ها ۱ تا ۲۷

۱- اگر تابع خطی $f(x)$ وارون خودش باشد و از $(-1, 4)$ بگذرد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(3x) + 2x}{|x| - 3f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -1

۲- اگر $f(x) = \frac{a[x] - [-x]}{x - 3}$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ باشد، چند مقدار صحیح برای $[11a]$ وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۳

۳- اگر $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$ با دامنه $x \leq 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(x) - 1}{f(x + 3) + 2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

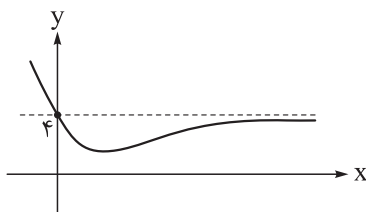
۵- اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^4 - 2\cos x + 5}{(4\cos 2x - 9\cos a + 5)^4} = +\infty$ باشد، مجموع جواب‌های قابل قبول برای a در بازه $(4\pi, 6\pi)$ کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π

۶- فرض کنید نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 3f(x) + \sqrt{f(x)}$ مانند شکل زیر باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ، $L > 0$.

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[f\left(\frac{-2}{x}\right) \right]$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) $+\infty$ (۴) صفر



محل انجام محاسبات

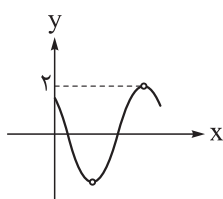
۷- طول دومین نقطه ناپیوستگی با طول مثبت در تابع $f(x) = \left[\frac{3x+16}{x+2} \right]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۸- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\cos nx} - 1}{1 - \cos^n x} = 6$ ، مقدار n کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۱۶ (۳) -۸ (۴) -۱۲

۹- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{a \cos(2x) - b}{\sin x + \cos x}$ در یک دوره تناوب است. مقدار a کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $2\sqrt{2}$

۱۰- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ ، تابع $g \circ f$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۱- a و b دو عدد حقیقی و $a-b$ ، $a+b$ ، $\frac{a}{b}$ و $a \times b$ ، به ترتیب از راست به چپ، ۴ جمله اول یک دنباله حسابی هستند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟ ($b \neq 1$)

- (۱) $-\frac{145}{3}$ (۲) $-\frac{145}{6}$ (۳) $\frac{145}{24}$ (۴) $-\frac{205}{24}$

۱۲- دنباله a_n چنان است که $\frac{a_{n+1} - 2}{a_n + 1} = 2$ و $a_1 = 0$ ، مقدار a_{11} کدام است؟

- (۱) ۲۰۴۴ (۲) ۱۰۲۲ (۳) ۴۰۹۲ (۴) ۲۰۴۶

محل انجام محاسبات

۱۳- اگر b_1, b_2 و b_3 جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگتر از یک و مجموع آنها برابر ۹۱ باشد و $b_1 + 25, b_2 + 27$ و $b_3 + 1$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، قدرنسبت دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۴- جملات دوم، ششم و سیزدهم از یک دنباله حسابی، سه جمله اول یک الگوی درجه دوم هستند. جمله دوازدهم الگوی درجه دوم با کدام جمله این دنباله حسابی برابر است؟

- (۱) ۱۸۲ (۲) ۱۹۶ (۳) ۲۰۴ (۴) ۲۱۱

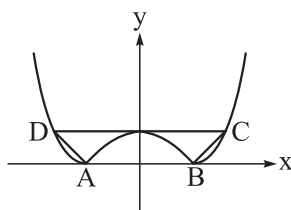
۱۵- جواب معادله $\log_2 x + \log_3 x + \log_6 x = 1$ برابر است با:

- (۱) $\log_{1.8} 9$ (۲) $\log_9 1.8$ (۳) $2^{\log_{1.8} 9}$ (۴) $2^{\log_2 1.8}$

۱۶- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x^6}{x^{12}} = \frac{x^{2-8}}{(x^2)^{2-8}}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۷- در شکل زیر، نمودار تابع $y = |\log_2(4 - a|x|)|$ رسم شده است. به ازای کدام مقدار a ، مساحت دوزنقه $ABCD$ برابر ۲۷ است؟



- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۱۸- نیمه عمر نوعی ماده رادیواکتیو ۱۲۰ سال است. با گذشت چه زمانی مقدار این ماده ۶۸ درصد کاهش می‌یابد؟

$$(\log 2 = 0.3)$$

- (۱) ۱۴۰ سال (۲) ۲۰۰ سال (۳) ۱۶۰ سال (۴) ۱۸۰ سال

محل انجام محاسبات



۱۹- نقاط برخورد تابع $g(x) = 2 \log_2 x$ و وارونش، از هم به فاصله k هستند. مقدار $\log_{18} k$ کدام است؟

$$(\log 3 \approx 0.48, \log 2 \approx 0.3)$$

$$\frac{5}{13} \quad (4)$$

$$\frac{5}{14} \quad (3)$$

$$\frac{5}{16} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

۲۰- مجموع جواب‌های حقیقی معادله $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

دفترچه
پاسخ
آزمون چهارم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

حد و پیوستگی + توابع نمایی و لگاریتمی
+ مجموعه، الگو و دنباله
ریاضی ۱
صفحه ۱ تا ۲۷
ریاضی ۲
صفحه ۹۵ تا ۱۴۲
ریاضی ۳
صفحه ۴۹ تا ۶۴

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - حسین شفیع‌زاده - علی شهرابی - مهدی عزیزی - مصطفی کرمی
مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی‌منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مستقل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
رسول محسنی‌منش	رسول محسنی‌منش	مسعود شفیعی	محمد گودرزی	امیرحسین ابومحجوب زهره جالینوسی امیرحسین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

- ✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **برنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:
- دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۳): صفحه‌های ۴۹ تا ۶۴، ریاضی (۲): صفحه‌های ۹۵ تا ۱۴۲، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۲۷

تست و پاسخ ۱

اگر تابع خطی $f(x)$ وارون خودش باشد و از $(-1, 4)$ بگذرد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(3x) + 2x}{|x| - 3f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -1

پاسخ: گزینه ۳

نکته یک تابع خطی مثل $f(x) = ax + b$ ، در دو حالت می‌تواند وارون خودش باشد:

حالت اول: f تابع همانی باشد.

حالت دوم: شیب f برابر -1 باشد که در این صورت ضابطه f به صورت $f(x) = -x + b$ می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول: تابع خطی f وارون خودش است، پس طبق نکته بالا تابع f یا همانی است یا شیب آن -1 است. در این جا f نمی‌تواند همانی باشد، چون از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد، پس شیب f باید برابر -1 باشد که در این صورت ضابطه آن به صورت $f(x) = -x + b$ می‌شود. گام دوم: f از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد:

$$f(x) = -x + b \xrightarrow{(-1, 4)} 4 = -(-1) + b \Rightarrow b = 3$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = -x + 3$ است.

گام سوم: گفتیم f وارون خودش است، پس ضابطه f^{-1} برابر با ضابطه f است: $f^{-1}(3x) = -3x + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 3$

گام چهارم: حالا جواب سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(3x) + 2x}{|x| - 3f(x)} \xrightarrow{\text{پس } |x| = -x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 3 + 2x}{-x - 3(-x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 3}{2x - 9} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۲

اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ و $f(x) = \frac{a[x] - [-x]}{x - 3}$ باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 7 (۴) 3

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: حد f در $x = 3$ برابر $-\infty$ است، پس مقدار حد راست و چپ آن در $x = 3$ هم باید برابر $-\infty$ باشد.

گام دوم: حد راست f در $x = 3$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3}$$

$$x \rightarrow 3^+ \xrightarrow{\text{مثلاً } x=3/1} \begin{cases} [x] = [3/1] = 3 \\ [-x] = [-3/1] = -4 \end{cases}$$

برای از بین بردن براکت‌ها داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3a - (-4)}{x - 3} = \frac{3a + 4}{0^+}$$

پس:

$$3a + 4 < 0 \Rightarrow a < -\frac{4}{3}$$

مقدار حد باید برابر $-\infty$ باشد، پس علامت صورت، یعنی $3a + 4$ باید منفی شود:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3}$$

گام سوم: حد چپ f در $x = 3$ را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 3^- \xrightarrow{\text{مثلاً } x=2/9} \begin{cases} [x] = [2/9] = 2 \\ [-x] = [-2/9] = -3 \end{cases}$$

برای از بین بردن براکت‌ها داریم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2a - (-3)}{x - 3} = \frac{2a + 3}{0^-}$$

پس:

مقدار حد باید برابر $-\infty$ باشد، پس علامت صورت، یعنی $2a + 3$ باید مثبت شود:

$$2a + 3 > 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{2}$$

گام چهارم: با توجه به دو شرط $a < -\frac{4}{3}$ و $a > -\frac{3}{2}$ ، باید $-\frac{3}{2} < a < -\frac{4}{3}$ باشد. محدوده $11a$ را به دست می آوریم:

$$-\frac{3}{2} < a < -\frac{4}{3} \xrightarrow{\times 11} -\frac{33}{2} < 11a < -\frac{44}{3} \Rightarrow -16\frac{5}{6} < 11a < -14\frac{2}{3}$$

$$[11a] = -17, -16, -15 \Rightarrow \text{مقدار } 3$$

پس:

تست و پاسخ ۳

اگر $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$ با دامنه $x \leq 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(x) - 1}{f(x+3) + 2}$ کدام است؟

$$\frac{1}{16} (4)$$

$$-\frac{1}{16} (3)$$

$$\frac{1}{8} (2)$$

$$-\frac{1}{8} (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: گام اول: ضابطه وارون f در $x \leq 2$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y = 2x^2 - 8x + 4 \xrightarrow{-4} \frac{1}{2}y = x^2 - 4x + 2 \xrightarrow{+2} \frac{1}{2}y + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}y + 2 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y + 2} = \sqrt{(x - 2)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y + 2} = |x - 2|$$

از طرفین رادیکال می گیریم:

$$\sqrt{\frac{1}{2}y + 2} = -x + 2 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}y + 2} + 2$$

طبق گفته سؤال $x \leq 2$ ؛ پس $|x - 2| = -x + 2$ می شود:

$$\Rightarrow y = -\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 2$$

جای x و y را عوض می کنیم:

گام دوم: حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(x) - 1}{f(x+3) + 2} \xrightarrow{f(x) = 2x^2 - 8x + 4} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 2 - 1}{2(x+3)^2 - 8(x+3) + 4 + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 1}{2(x+3)^2 - 8(x+3) + 6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} - 8} = \frac{-\frac{1}{4}}{-4} = \frac{1}{16}$$

با جای گذاری $x = -2$ به صفر صفر می رسیم؛ پس هوپیتال می زنیم:

تست و پاسخ ۴

حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})x$ کدام است؟

$$1 (4)$$

$$-\frac{1}{2} (3)$$

$$\text{صفر} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: اول از اتحاد مزدوج کمک می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})x \times \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x - \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2})x}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: بعد از اتحاد چاق و لاغر استفاده می کنیم:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x - \sqrt{(x^2 + 3x^2)^2})x}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x^2}} \times \frac{(x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x)\sqrt{(x^2 + 3x^2)^2} + \sqrt{(x^2 + 3x^2)^4}}{(x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x)\sqrt{(x^2 + 3x^2)^2} + \sqrt{(x^2 + 3x^2)^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3 - x^6 - 6x^5 - 9x^4}{((x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 3x^2)^2)} x}{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x^2})((x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x)\sqrt{(x^2 + 3x^2)^2} + \sqrt{(x^2 + 3x^2)^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^4 + 8x^3)x}{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x^2})((x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x)\sqrt{(x^2 + 3x^2)^2} + \sqrt{(x^2 + 3x^2)^4})}$$

گام سوم: از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 \times x}{(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2})((x^2)^2 + x^2\sqrt{(x^2)^2} + \sqrt{(x^2)^4})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{(-x-x)(x^4 + x^4 + x^4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{-6x^5} = -\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۵

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^4 - 2\cos x + 5}{(4\cos 2x - 9\cos a + 5)^4} = +\infty$ باشد، مجموع جواب های قابل قبول برای a در بازه $(4\pi, 6\pi)$ کدام است؟

$$9\pi (2)$$

$$8\pi (1)$$

$$11\pi (4)$$

$$10\pi (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

گام اول: برای این که حاصل حد نامتناهی شود، مخرج باید در $x = a$ برابر صفر باشد:

$$\text{مخرج} \xrightarrow{x=a} 4\cos(2a) - 9\cos(a) + 5 = 0$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

یادآوری

پس:

$$4(2\cos^2(a) - 1) - 9\cos(a) + 5 = 0 \Rightarrow 8\cos^2(a) - 4 - 9\cos(a) + 5 = 0 \Rightarrow 8\cos^2(a) - 9\cos(a) + 1 = 0$$

نکته اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، جمع ضرایب برابر صفر باشد (یعنی $a + b + c = 0$)، ریشه های معادله، $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ هستند.

پس ریشه های این معادله $\cos(a) = \frac{1}{8}$ و $\cos(a) = 1$ هستند.

گام دوم: حالا دقت کنید می دانیم جواب های معادله $\cos(x) = 1$ ، به صورت $x = 2k\pi$ است.

در بازه $(4\pi, 6\pi)$ ، هیچ عددی به شکل $2k\pi$ نداریم (خود 4π و 6π به شکل $2k\pi$ هستند، ولی داخل بازه نیستند)، پس مقدار $\cos(a)$

نمی تواند برابر ۱ باشد، بنابراین فقط $\cos(a) = \frac{1}{8}$ قابل قبول است.

گام سوم: حالا فرض کنید $\cos(t) = \frac{1}{8}$ و t زاویه ای حاده است، در این صورت داریم:

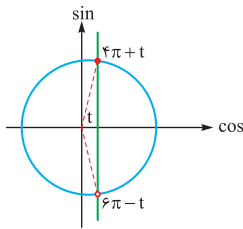
$$\cos(a) = \frac{1}{8} \xrightarrow{\cos(t) = \frac{1}{8}} \cos(a) = \cos(t) \Rightarrow a = 2k\pi \pm t$$

جواب های این معادله در بازه $(4\pi, 6\pi)$ ، $a = 4\pi + t$ و $a = 6\pi - t$ است که جمع جواب ها برابر 10π می شود.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

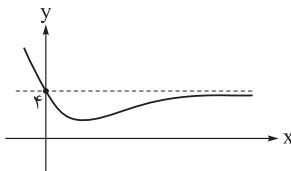


برای درک بهتر به دایره مثلثاتی مقابل نگاه کنید.

تست و پاسخ ۶

فرض کنید نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 3f(x) + \sqrt{f(x)}$ مانند شکل زیر باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} > 0$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f\left(\frac{-2}{x}\right) \right]$

برابر کدام است؟



عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} > 0$ یعنی حاصل حد

تابع f در $+\infty$ برابر یک عدد حقیقی مثبت مثل L است.

۱ (۱)

۳ (۲)

$+\infty$ (۳)

صفر (۴)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: گام اول: با توجه به نمودار رسم شده برای تابع g ، متوجه می شویم که حد تابع g در $+\infty$ برابر ۴ است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (3f(x) + \sqrt{f(x)}) = 4$$

گام دوم: طبق گفته سؤال، حد تابع f در $+\infty$ برابر عدد حقیقی مثبت L است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3f(x) + \sqrt{f(x)}) = 4 \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L} \underbrace{3L + \sqrt{L}}_{(*)} = 4$$

گام سوم: معادله را حل می کنیم:

$$3L + \sqrt{L} = 4 \Rightarrow \sqrt{L} = 4 - 3L \xrightarrow{\text{توان } 2} L = 9L^2 + 16 - 24L$$

$$\Rightarrow 9L^2 - 25L + 16 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} L = 1 \\ L = \frac{16}{9} \end{cases}$$

غ ق چون در $(*)$ صدق نمی کند.

بنابراین $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ است.

گام چهارم: اما دقت کنید با توجه به نمودار g ، اگر بخواهیم دقیق بررسی کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 4$ ؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (3f(x) + \sqrt{f(x)}) < 4 \Rightarrow 3L + \sqrt{L} < 4$$

دیدیم برای این که $3L + \sqrt{L} = 4$ باشد، $L = 1$ است، حالا واضح است برای این که $3L + \sqrt{L} < 4$ باشد، باید $L < 1$ شود؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^-$$

گام پنجم: در آخر سراغ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f\left(\frac{-2}{x}\right) \right]$ می رویم، $x \rightarrow -\infty$ است، پس $\frac{-2}{x} \rightarrow +\infty$ می شود (واضحه رنگه! ببین، $\frac{-2}{0^-} = +\infty$)؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f\left(\frac{-2}{x}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = [1^-] = 0$$

تست و پاسخ ۷

طول دومین نقطه ناپیوستگی با طول مثبت در تابع $f(x) = \left[\frac{3x+16}{x+2} \right]$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

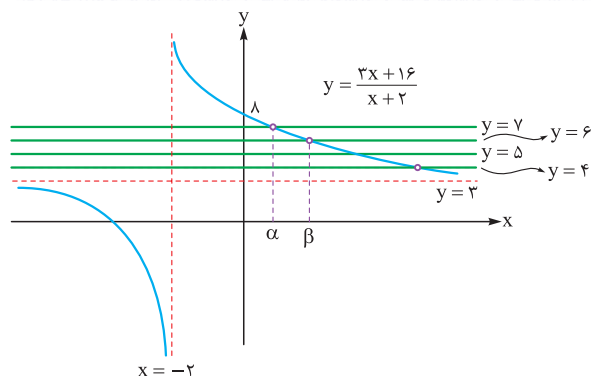


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی

نکته توابع برآکتی به شکل $y = [f(x)]$ ، در نقاطی که مقدار $f(x)$ صحیح باشد، ناپیوسته‌اند.



گام اول: نمودار تابع هموگرافیک $y = \frac{3x+16}{x+2}$ را رسم می‌کنیم:

گام دوم: با توجه به نمودار رسم‌شده، واضح است که طول اولین نقطه مثبت ناپیوستگی f برابر α و طول دومین نقطه مثبت ناپیوستگی f برابر β است.

گام سوم: مقدار تابع $y = \frac{3x+16}{x+2}$ در نقطه‌ای به طول β برابر ۶ می‌شود؛ پس:

$$y = \frac{3x+16}{x+2} \xrightarrow[y=6]{x=\beta} 6 = \frac{3\beta+16}{\beta+2} \Rightarrow 6\beta+12 = 3\beta+16 \Rightarrow 3\beta = 4 \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

بنابراین طول دومین نقطه مثبت ناپیوستگی f برابر $x = \frac{4}{3}$ است.

تست و پاسخ ۸

اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos nx} - 1}{1 - \cos^n x} = 6$ ، مقدار n کدام است؟

۱۶ (۲)

۶ (۱)

۱۲ (۴)

۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} \sin^n(u) \approx u^n \\ \cos^n(u) \approx 1 - \frac{n}{2}u^2 \\ \tan^n(u) \approx u^n \end{cases}$$

نکته اگر $u \rightarrow 0$ باشد، داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: $x \rightarrow 0$ ، پس با توجه به نکته بالا، داریم:

$$\sqrt{\cos(nx)} = \cos^{\frac{1}{2}}(nx) \approx 1 - \frac{1}{2}(nx)^2 = 1 - \frac{1}{4}n^2x^2$$

$$\cos^n(x) = 1 - \frac{n}{2}x^2$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(nx)} - 1}{1 - \cos^n(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{4}n^2x^2 - 1}{1 - (1 - \frac{n}{2}x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}n^2x^2}{\frac{n}{2}x^2} = \frac{-\frac{1}{4}n^2}{\frac{n}{2}} = -\frac{n}{2}$$

$$-\frac{n}{2} = 6 \Rightarrow n = -12$$

گام سوم: از طرفی طبق فرض سؤال $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(nx)} - 1}{1 - \cos^n(x)} = 6$ ، است؛ پس:

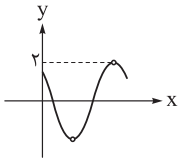


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۹

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{a \cos(2x) - b}{\sin x + \cos x}$ در یک دوره تناوب است. مقدار a کدام است؟



$$\sqrt{2} \quad (2)$$

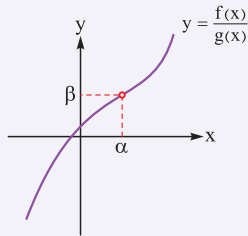
۱ (۱)

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

نکته به شکل روبه رو دقت کنید:



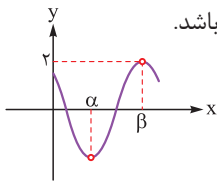
تابع y در نقطه‌ای به طول α حفره دارد. حفره نقطه‌ای است که:

الف) مقدار صورت و مخرج کسر در آن (به ازای $x = \alpha$) برابر صفر است.

ب) حاصل حد تابع در $x \rightarrow \alpha$ ، پس از رفع ابهام برابر β است.

پاسخ تشریحی

گام اول: واضح است که در دو حفره این تابع، مقدار مخرج، یعنی $\sin x + \cos x$ باید برابر صفر باشد.



نکته جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \cos x = 0$ ، به صورت $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ است.

گام دوم: طبق نکته بالا، ریشه‌های مخرج، $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ هستند، یعنی اعداد $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ و ... پس $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ و $\beta = \frac{7\pi}{4}$ است.

گام سوم: $x = \frac{7\pi}{4}$ ، طول حفره تابع است؛ پس مقدار صورت تابع f هم در $x = \frac{7\pi}{4}$ برابر صفر می‌شود:

$$f \text{ صورت} \Rightarrow a \cos(2x) - b \Rightarrow a \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) - b = 0 \Rightarrow b = 0$$

گام چهارم: بنابراین ضابطه تابع به شکل $f(x) = \frac{a \cos(2x)}{\sin x + \cos x}$ می‌شود. با توجه به نمودار تابع، حد f در $x \rightarrow \frac{7\pi}{4}$ (یا همان $x \rightarrow \beta$)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \frac{a \cos(2x)}{\sin x + \cos x} = 2 \quad \text{که } \beta = \frac{7\pi}{4} \text{ است، برابر ۲ است:}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{پادآوری}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \frac{a(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \frac{a(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = 2$$

$$\Rightarrow a(\cos(\frac{7\pi}{4}) - \sin(\frac{7\pi}{4})) = 2 \Rightarrow a(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})) = 2 \Rightarrow a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۱۰

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ ، تابع $g \circ f$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۴) صفر

۳) (۳)

۲) (۲)

۱) (۱)

پاسخ: گزینه ۲

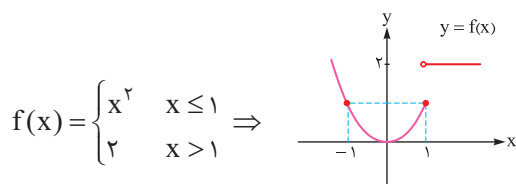


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به نمودار f ، مشخص است که در $[-1, 1]$ ، $f(x) \leq 1$ و در $(1, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ ، $f(x) > 1$ است.

فب الان احتمالاً می‌پرسی این به چه دردی می‌خورد؟ ببین برای تشکیل تابع gof باید به این توجه کنی که ضابطه g برای ورودی‌های کوچک‌تر یا مساوی ۱ (ضابطه بالایی g) برابر $x^2 + 3$ و برای ورودی‌های بزرگ‌تر (ضابطه پایینی g) برابر $x + 1$ هست. حالا $g(f(x))$ یعنی ورودی تابع g قراره تابع f باشد، پس برامون مهمه که f کجاها کوچک‌تر مساوی ۱ و کجاها بزرگ‌تر از ۱ هست!

گام سوم: حالا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضابطه } f \text{ را به این صورت می‌نویسیم}} f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} (f(x))^2 + 3 & f(x) \leq 1 \\ f(x) + 1 & f(x) > 1 \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} (x^2)^2 + 3 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 + 1 & x > 1 \\ x^2 + 1 & x < -1 \end{cases}$$

پس:

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^4 + 3 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & x > 1 \\ x^2 + 1 & x < -1 \end{cases}$$

یعنی:

گام چهارم: باید پیوستگی در نقاط مرزی، یعنی در $x = 1$ و $x = -1$ را بررسی کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(f(x)) &= 1^4 + 3 = 4 \\ g(f(1)) &= 1^4 + 3 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(f(x)) &= (-1)^4 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(f(x)) &= (-1)^2 + 1 = 2 \\ g(f(-1)) &= (-1)^4 + 3 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x = -1 \text{ ناپیوسته است.}$$

بنابراین gof فقط در ۲ نقطه ناپیوسته است.

تست و پاسخ ۱۱

a و b دو عدد حقیقی و $a - b$ ، $a + b$ و $\frac{a}{b}$ و $a \times b$ ، به ترتیب از راست به چپ، ۴ جمله اول یک دنباله حسابی هستند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟ ($b \neq 1$)

$$-\frac{205}{24} \quad (4)$$

$$\frac{145}{24} \quad (3)$$

$$-\frac{145}{6} \quad (2)$$

$$-\frac{145}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: اعداد زیر، به ترتیب ۴ جمله اول یک دنباله حسابی اند:

$$a_1: a - b, a_2: a + b, a_3: \frac{a}{b}, a_4: a \times b, \dots$$

نکته: در یک دنباله حسابی، اختلاف هر جمله متوالی برابر قدرنسبت است.

$$d = a_2 - a_1 = a + b - (a - b) = 2b$$

با توجه به نکته بالا، داریم d قدرنسبت دنباله است:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: از طرفی $a_3 = a_2 + d$ است؛ پس:

$$\frac{a}{b} = a + b + 2b \Rightarrow \frac{a}{b} = a + 2b \xrightarrow{\times b} a = ab + 2b^2 \Rightarrow a - ab = 2b^2 \Rightarrow a(1-b) = 2b^2 \Rightarrow a = \frac{2b^2}{1-b}$$

$$a \times b = \frac{a}{b} + 2b$$

گام سوم: باز می‌توانیم بنویسیم $a_4 = a_3 + d$:

$$\frac{2b^2}{1-b} \times b = \frac{2b^2}{1-b} + 2b \Rightarrow \frac{2b^3}{1-b} = \frac{2b^2}{1-b} + 2b \xrightarrow{\div b} \frac{2b^2}{1-b} = \frac{2}{1-b} + 2$$

$$\xrightarrow{\times (1-b)} 2b^2 = 2 + 2 - 2b \Rightarrow 2b^2 + 2b - 4 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} b = 1 \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

طبق گفته سؤال $b \neq 1$ ؛ پس $b = -\frac{5}{2}$ است.

گام چهارم: در آخر از $a_5 = a_4 + d$ استفاده می‌کنیم:

$$a_5 = a \times b + 2b \xrightarrow{a = \frac{2b^2}{1-b}} \frac{2b^2}{1-b} \times b + 2b \xrightarrow{b = -\frac{5}{2}} \frac{2 \times \frac{25}{4}}{1 - (-\frac{5}{2})} \times (-\frac{5}{2}) + 2(-\frac{5}{2}) = \frac{-125}{9} - \frac{10}{3} = \frac{-125}{24} - \frac{10}{3} = \frac{-125 - 80}{24} = \frac{-205}{24}$$

تست و پاسخ ۱۲

دنباله a_n چنان است که $\frac{a_{n+1} - 2}{a_n + 1} = 2$ و $a_1 = 0$ ، مقدار a_{11} کدام است؟

۲۰۴۶ (۴)

۴۰۹۲ (۳)

۱۰۲۲ (۲)

۲۰۴۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: اول رابطه $\frac{a_{n+1} - 2}{a_n + 1} = 2$ را ساده می‌کنیم: $a_{n+1} - 2 = 2a_n + 2 \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n + 4$

گام دوم: با توجه به $a_1 = 0$ ، چند جمله از این دنباله را می‌نویسیم:

$$a_{n+1} = 2a_n + 4 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 4 = 2 \times 0 + 4 = 4 \\ n=2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 4 = 2 \times 4 + 4 = 12 \\ n=3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 4 = 2 \times 12 + 4 = 28 \\ n=4 \Rightarrow a_5 = 2a_4 + 4 = 2 \times 28 + 4 = 60 \\ \vdots \end{cases}$$

۰، ۴، ۱۲، ۲۸، ۶۰، ...

$4 \times 0, 4 \times 1, 4 \times 3, 4 \times 7, 4 \times 15, \dots$

$$\underbrace{4 \times (2^0 - 1)}_{a_1}, \underbrace{4 \times (2^1 - 1)}_{a_2}, \underbrace{4 \times (2^2 - 1)}_{a_3}, \underbrace{4 \times (2^3 - 1)}_{a_4}, \underbrace{4 \times (2^4 - 1)}_{a_5}, \dots$$

گام چهارم: پس جمله عمومی این دنباله به صورت $a_n = 4 \times (2^{n-1} - 1)$ است؛ پس:

$$\Rightarrow a_{11} = 4 \times (2^{10} - 1) = 4 \times 1023 = 4092$$

تست و پاسخ ۱۳

اگر b_1 و b_2 و b_3 جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک و مجموع آن‌ها برابر ۹۱ باشد و $b_1 + 25$ ، $b_2 + 27$ و $b_3 + 1$

به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، قدرنسبت دنباله حسابی کدام است؟

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: b_1, b_2, b_3 و b_3 جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگتر از ۱ هستند، پس می‌توانیم فرض کنیم $b_3 = aq, b_2 = aq^2$ و $b_1 = a$ با شرط $q > 1$. جمع این ۳ جمله برابر ۹۱ است:

$$\Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 = 91 \Rightarrow a + aq + aq^2 = 91 \Rightarrow \underbrace{a + aq^2}_{(*)} = 91 - aq$$

گام دوم: $b_1 + 25, b_2 + 27, b_3 + 1$ جملات متوالی یک دنباله حسابی‌اند؛ پس:

$$\Rightarrow (b_1 + 25) + (b_2 + 27) = 2 \times (b_3 + 1) \Rightarrow (a + 25) + (aq^2 + 27) = 2(aq + 1)$$

$$\Rightarrow a + aq^2 + 26 = 2aq + 2 \Rightarrow a + aq^2 + 26 = 2aq + 2 \quad \text{از طرفی } b_3 = aq^2 \text{ و } b_2 = aq, b_1 = a \text{ است:}$$

$$\Rightarrow 91 - aq + 26 = 2aq + 2 \Rightarrow 63 = 3aq \Rightarrow aq = 21 \quad \text{با توجه به } (*), \text{ به جای } a + aq^2 \text{ قرار می‌دهیم } 91 - aq:$$

گام سوم: دوباره از $(*)$ استفاده می‌کنیم:

$$a + \underbrace{aq^2}_{aq \times q} = 91 - aq \xrightarrow{aq=21 \Rightarrow q=\frac{21}{a}} a + 21 \times \frac{21}{a} = 91 - 21 \Rightarrow a + \frac{441}{a} = 70 \xrightarrow{\times a} a^2 + 441 = 70a \Rightarrow a^2 - 70a + 441 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 63)(a - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ a = 63 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ a = 63 \end{cases} \xrightarrow{aq=21} \begin{cases} 7q = 21 \Rightarrow q = 3 \\ 63q = 21 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{مقدار } q \text{ را به دست می‌آوریم: غ ق چون } q > 1 \text{ است.}$$

بنابراین $a = 7$ و $q = 3$ است.

گام پنجم: جملات دنباله حسابی را می‌نویسیم:

$$b_1 + 25, b_2 + 27, b_3 + 1 \xrightarrow{b_1=a, b_2=aq, b_3=aq^2} a + 25, aq + 27, aq^2 + 1 \xrightarrow{a=7, q=3} 32, 48, 64$$

+۱۶ +۱۶

بنابراین قدرنسبت دنباله حسابی ۱۶ است.

تست و پاسخ ۱۴

جملات دوم، ششم و سیزدهم از یک دنباله حسابی، سه جمله اول یک الگوی درجه دوم هستند. جمله دوازدهم الگوی درجه دوم با کدام جمله این دنباله حسابی برابر است؟

۲۱۱ (۴)

۲۰۴ (۳)

۱۹۶ (۲)

۱۸۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: جملات دوم، ششم و سیزدهم دنباله حسابی را به ترتیب با $a_1 + d, a_1 + 5d, a_1 + 12d$ نمایش می‌دهیم.

گام دوم: این جملات به ترتیب سه جمله اول یک الگوی درجه دوم، مثلاً $t_n = an^2 + bn + c$ هستند:

$$t_1 = a + b + c = a_1 + d \quad (I)$$

$$t_2 = 4a + 2b + c = a_1 + 5d \quad (II)$$

$$t_3 = 9a + 3b + c = a_1 + 12d \quad (III)$$

$$(II - I) \Rightarrow \boxed{3a + b = 4d} \quad (*)$$

$$(III - II) \Rightarrow 5a + b = 7d$$

گام سوم: حالا داریم:

$$\Rightarrow 2a = 3d \Rightarrow a = \frac{3d}{2}$$

این دو عبارت را هم از هم کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 3 \times \left(\frac{3d}{2}\right) + b = 4d \Rightarrow \frac{9d}{2} + b = 4d \Rightarrow b = -\frac{d}{2}$$

$$\text{گام چهارم: در } (*) \text{ به جای } a \text{ قرار می‌دهیم } \frac{3d}{2}:$$

$$\frac{3d}{2} - \frac{d}{2} + c = a_1 + d \Rightarrow c = a_1$$

$$\text{گام پنجم: حالا در } I, \text{ به جای } a \text{ قرار می‌دهیم } \frac{3d}{2} \text{ و به جای } b \text{ قرار می‌دهیم } -\frac{d}{2}:$$

$$\text{بنابراین جمله عمومی الگوی درجه دوم به صورت } t_n = \frac{3d}{2}n^2 - \frac{d}{2}n + a_1 \text{ می‌شود.}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام ششم: جمله دوازدهم الگوی درجه دوم برابر است با: جمله ۲۱۱ام دنباله حسابی $\Rightarrow t_{12} = \frac{rd}{2} \times 144 - \frac{d}{2} \times 12 + a_1 = a_1 + 21 \cdot d$

تست و پاسخ ۱۵

جواب معادله $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$ برابر است با:

$$2^{\log_2 108} (4)$$

$$2^{\log_2 108} (3)$$

$$\log_2 108 (2)$$

$$\log_2 9 (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b}$$

نکته

$$\log_2 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 2}, \log_3 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 3}, \log_4 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 4}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 2} + \log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 4} = 1 \Rightarrow \log_3 x \left(\frac{1}{\log_3 2} + 1 + \frac{1}{\log_3 4} \right) = 1$$

با جای گذاری در معادله اصلی داریم:

$$\Rightarrow \log_3 x \left(\frac{1}{\log_3 2} + 1 + \frac{1}{2 \log_3 2} \right) = 1 \Rightarrow \log_3 x \left(\frac{3}{2 \log_3 2} + 1 \right) = 1$$

گام دوم: به جای $\log_3 4$ قرار می دهیم $2 \log_3 2$:

$$\Rightarrow \log_3 x \left(\frac{3 + 2 \log_3 2}{2 \log_3 2} \right) = 1 (*)$$

مخرج مشترک می گیریم:

$$2 \log_3 2 = \log_3 4, 3 = \log_3 3^3 = \log_3 27$$

گام سوم: از طرفی:

$$\log_3 x \left(\frac{\log_3 27 + \log_3 4}{\log_3 4} \right) = 1 \Rightarrow \log_3 x \left(\frac{\log_3 108}{\log_3 4} \right) = 1 \Rightarrow \log_3 x \times \log_4 108 = 1$$

پس با جای گذاری در (*) داریم:

$$\text{الف) } \frac{1}{\log_b a} = \log_a b$$

$$\text{ب) } \log_a x = b \Rightarrow x = a^b$$

$$\text{پ) } a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

نکته

پس:

$$\Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{\log_4 108} = \log_{108} 4 \Rightarrow \log_3 x = \log_{108} 4 \Rightarrow x = 3^{\log_{108} 4} = 4^{\log_{108} 3} = (2^2)^{\log_{108} 3} = 2^{2 \log_{108} 3} = 2^{\log_{108} 9}$$

تست و پاسخ ۱۶

حاصل ضرب ریشه های معادله $x^{\frac{6}{12}} - \frac{x^6}{5(\log_2 x)^2 - 8} = \frac{x^6}{2^{12}}$ کدام است؟

$$-1 (4)$$

$$1 (3)$$

$$-4 (2)$$

$$4 (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا دقت کنید که:

$$\frac{x^{\frac{6}{12}}}{5(\log_2 x)^2 - 8} - \frac{x^6}{5(\log_2 x)^2 - 8} = \frac{x^6}{2^{12}} \Rightarrow \frac{x^{\frac{6}{12}} - x^6}{5(\log_2 x)^2 - 8} = \frac{x^6}{2^{12}}$$

با جای گذاری در معادله اصلی، به $\frac{x^6}{2^{12}} = \frac{x^{\frac{6}{12}} - x^6}{5(\log_2 x)^2 - 8}$ می رسیم.

$$\Rightarrow 2^{12} \times x^{\frac{6}{12}} - x^6 = x^6$$

گام دوم: طرفین وسطین می کنیم:

از طرفین در مبنای ۲ لگاریتم می گیریم:

$$\Rightarrow \log_2 (2^{12} \times x^{\frac{6}{12}} - x^6) = \log_2 x^6 \Rightarrow \log_2 2^{12} + \log_2 x^{\frac{6}{12}} - \log_2 x^6 = 6 \log_2 x$$

$$\Rightarrow 12 + (2(\log_2 x)^2 - 8) \log_2 x = 6 \log_2 x$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: از تغییر متغیر $\log_2 x = t$ استفاده می‌کنیم: $\Rightarrow 2t^3 - 14t + 12 = 0 \Rightarrow 2t^3 - 8t + 12 = 6t \Rightarrow 2t^3 - 8t + 12 = 6t \Rightarrow 2t^3 - 14t + 12 = 0$

$$\xrightarrow{\div 2} t^3 - 7t + 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (t-1)(t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

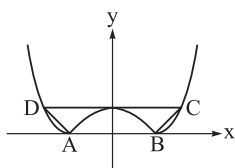
گام چهارم: به جای t قرار می‌دهیم $\log_2 x$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \\ \log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر $2 \times 4 \times \frac{1}{8} = 1$ است.

تست و پاسخ ۱۷

در شکل زیر، نمودار تابع $y = |\log_2(4 - a|x|)|$ رسم شده است. به ازای کدام مقدار a ، مساحت دوزنقه $ABCD$ برابر ۲۷ است؟



$$\frac{1}{2} (2)$$

$$2 (1)$$

$$\frac{1}{3} (3)$$

$$3 (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار رسم‌شده، واضح است که عرض نقاط C و D با عرض تابع در $x=0$ برابر است:

$$y = |\log_2(4 - a|x|)| \xrightarrow{x=0} y = |\log_2(4)| = 2$$

گام دوم: پس عرض نقاط C و D برابر ۲ است. برای پیدا کردن طول نقاط C و D ، کافی است معادله $|\log_2(4 - a|x|)| = 2$ را حل کنیم:

$$|\log_2(4 - a|x|)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \log_2(4 - a|x|) = 2 \Rightarrow 4 - a|x| = 4 \Rightarrow a|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \log_2(4 - a|x|) = -2 \Rightarrow 4 - a|x| = \frac{1}{4} \Rightarrow a|x| = \frac{15}{4} \Rightarrow |x| = \frac{15}{4a} \Rightarrow x = \pm \frac{15}{4a} \end{cases}$$

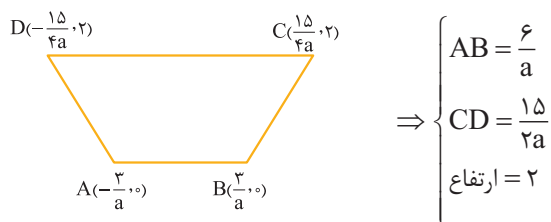
طبق گزینه‌ها، a مثبت است، پس طول نقطه C برابر $\frac{15}{4a}$ و طول نقطه D برابر $-\frac{15}{4a}$ است.

گام سوم: برای پیدا کردن طول نقاط A و B ، کافی است معادله $|\log_2(4 - a|x|)| = 0$ را حل کنیم:

$$|\log_2(4 - a|x|)| = 0 \Rightarrow \log_2(4 - a|x|) = 0 \Rightarrow 4 - a|x| = 1 \Rightarrow a|x| = 3 \Rightarrow |x| = \frac{3}{a} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{a}$$

پس با شرط $a > 0$ طول نقاط A و B هم به ترتیب برابر $-\frac{3}{a}$ و $\frac{3}{a}$ می‌شود.

گام چهارم: حالا طول قاعده‌ها و ارتفاع دوزنقه را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{6}{a} \\ CD = \frac{15}{2a} \\ \text{ارتفاع} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{(AB + CD) \times \text{ارتفاع}}{2} \Rightarrow 27 = \frac{(\frac{6}{a} + \frac{15}{2a}) \times 2}{2} \Rightarrow 27 = \frac{6}{a} + \frac{15}{2a} \Rightarrow 27 = \frac{27}{2a} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۸

نیمه عمر نوعی ماده رادیواکتیو ۱۲۰ سال است. با گذشت چه زمانی مقدار این ماده ۶۸ درصد کاهش می یابد؟ ($\log 2 = 0.3$)

۱۴۰ (۱) سال ۲۰۰ (۲) سال ۱۶۰ (۳) سال ۱۸۰ (۴) سال

پاسخ: گزینه ۲

نکته اگر نیمه عمر ماده ای T و مقدار اولیه آن ماده a باشد، پس از گذشت زمان t ، مقدار ماده باقی مانده برابر $a(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نیمه عمر این ماده ۱۲۰ سال است، پس اگر مقدار ماده اولیه a باشد، پس از گذشت t سال، مقدار ماده باقی مانده برابر

$$a(\frac{1}{2})^{\frac{t}{120}} \text{ می شود.}$$

گام دوم: می خواهیم مقدار این ماده ۶۸ درصد کاهش یابد، پس مقدار باقی مانده برابر $a - \frac{68}{100}a = \frac{32}{100}a$ می شود.

$$\xrightarrow{\div a} (\frac{1}{2})^{\frac{t}{120}} = \frac{32}{100} \quad \text{گام سوم: حالا کافی است معادله } a(\frac{1}{2})^{\frac{t}{120}} = \frac{32}{100}a \text{ را حل کنیم:}$$

از طرفین لگاریتم می گیریم:

$$\Rightarrow \log(\frac{1}{2})^{\frac{t}{120}} = \log \frac{32}{100} \Rightarrow \frac{t}{120} \log \frac{1}{2} = \log 32 - \log 100 \Rightarrow \frac{t}{120} \times (-\log 2) = 5 \log 2 - 2$$

گام چهارم: طبق گفته سؤال $\log 2 = 0.3$ ؛ پس:

$$\frac{t}{120} \times (-0.3) = 1.5 - 2 \Rightarrow \frac{t}{120} \times (0.3) = 0.5 \Rightarrow \frac{t}{120} = \frac{0.5}{0.3} = \frac{5}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \times 120 = 200$$

تست و پاسخ ۱۹

نقاط برخورد تابع $g(x) = 2 \log_2 x$ و وارونش، از هم به فاصله k هستند. مقدار $\log_{18} k$ کدام است؟ ($\log 3 = 0.48, \log 2 = 0.3$)

$\frac{5}{13}$ (۴) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

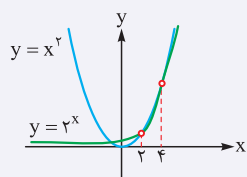
پاسخ: گزینه ۳

نکته اگر f تابعی صعودی اکید باشد، نقاط برخورد تابع f با وارون آن روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار می گیرد، پس برای پیدا کردن طول نقاط تلاقی f و f^{-1} ، کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** می دانیم $y = \log_2 x$ تابعی صعودی اکید است، پس $g(x) = 2 \log_2 x$ هم تابعی صعودی اکید می شود. طبق

نکته بالا، کافی است معادله $g(x) = x$ را حل کنیم تا نقاط تلاقی تابع g و وارون آن مشخص شوند:

$$g(x) = x \Rightarrow 2 \log_2 x = x \Rightarrow \log_2 x^2 = x \Rightarrow x^2 = 2^x$$



نکته نقاط تلاقی دو تابع $y = x^2$ و $y = 2^x$ با طول مثبت، $x = 2$ و $x = 4$ هستند.

گام دوم: با توجه به نکته بالا، جواب های مثبت $x^2 = 2^x$ ، $x = 2$ و $x = 4$ هستند.

حالا برای پیدا کردن عرض نقاط تقاطع، کافی است در $g(x) = 2 \log_2 x$ ، به جای x ، ۲ و ۴ را قرار دهیم:

$$g(x) = 2 \log_2 x \Rightarrow \begin{cases} g(2) = 2 \log_2 2 = 2 \Rightarrow A(2, 2) \\ g(4) = 2 \log_2 4 = 4 \Rightarrow B(4, 4) \end{cases}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$$

گام سوم: فاصله دو نقطه تلاقی برابر است با:

پس $k = \sqrt{8}$ است.

گام چهارم: بنابراین، باید مقدار $\log_{18} k = \log_{18} \sqrt{8}$ را محاسبه کنیم:

$$\log_{18} \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_{18} 8 = \frac{1}{2} \times \frac{\log 8}{\log 18} = \frac{1}{2} \times \frac{3 \log 2}{\log 2 + 2 \log 3} = \frac{1}{2} \times \frac{3 \times 0.3}{0.3 + 2 \times 0.48} = \frac{1}{2} \times \frac{0.9}{1.26} = \frac{45}{126} = \frac{5}{14}$$

تست و پاسخ ۲۰

مجموع جواب‌های حقیقی معادله $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (صفر)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: از تغییر متغیر $2^x = a$ و $3^x = b$ کمک می‌گیریم:

$$8^x = (2^3)^x = (2^x)^3 = a^3$$

$$27^x = (3^3)^x = (3^x)^3 = b^3$$

$$12^x = 4^x \times 3^x = (2^2)^x \times 3^x = (2^x)^2 \times 3^x = a^2 b$$

$$18^x = 2^x \times 9^x = 2^x \times (3^2)^x = 2^x \times (3^x)^2 = ab^2$$

گام دوم: با جای‌گذاری در معادله اصلی داریم:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 b + ab^2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab(a+b)} = \frac{7}{6} \Rightarrow 6a^2 - 6ab + 6b^2 = 7ab$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0 \Rightarrow (3a - 2b)(2a - 3b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2a = 3b \end{cases}$$

گام سوم: به جای a و b به ترتیب 2^x و 3^x را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \times 2^x = 2 \times 3^x \\ 2 \times 2^x = 3 \times 3^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = 3^{x-1} \Rightarrow x = 1 \\ 2^{x+1} = 3^{x+1} \Rightarrow x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع جوابها}} 1 - 1 = 0$$