Subject :
Year : Month : Date :

• جبر خطی

نماد Σ برای ساده‌نویسی اعمال جمع است.

مثلاً اگر a_1 و a_2 و ... و a_n ، n عدد باشند به جای نوشتن $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ می‌نویسیم $\sum_{i=1}^{n} a_i$

خواص Σ از خواص جمع می‌آید مثلاً:

$$\underbrace{a+a+\dots+a}_{n\text{ مرتبه}}=na=\sum_{i=1}^{n} a=a\sum_{i=1}^{n} 1=a(1+1+\dots+1)$$

اگر c یک عدد ثابت باشد آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i=c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\Sigma(a_i+b_i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n)$$

$$=(a_1+\dots+a_n)+(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n} b_i+\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n}(b_i+a_i)$$

اگر c یک عدد ثابت باشد

$$c\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} c(a_i+b_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(ca_i+cb_i)=c\sum_{i=1}^{n} a_i+c\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=k}^{n} b_i=b_k+b_{k+1}+\dots+b_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=a_{1j}+a_{2j}+\dots+a_{nj}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{ik}$$

صرا

Subject :

Year : Month : Date :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+\dots+a_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}$$

$$= (a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1}) + (a_{12}+a_{22}+\dots+a_{n2}) +$$

$$+ \dots + (a_{1k}+a_{2k}+\dots+a_{nk})$$

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}$$

$$= \sum_{i=j}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{ik})$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=2}^{n} a_{i2} + \dots + \sum_{i=k}^{n} a_{ik}$$

$$= (a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1}) + (a_{22}+a_{32}+a_{42}+\dots+a_{n2}) +$$

$$+ (a_{33}+a_{43}+\dots+a_{n3}) + (a_{44}+a_{54}+\dots+a_{n4}) + (a_{kk}+\dots+a_{nk})$$

$$= a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}+\dots+a_{n1}$$

$$a_{22}+a_{32}+a_{42}+\dots+a_{n2}$$

$$a_{33}+a_{43}+\dots+a_{n3}$$

$$\vdots$$

$$a_{kk}+a_{k+1\,k}+\dots+a_{nk}$$

$$= \sum_{i=1}^{i}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i}(a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\dots+a_{nj})$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$$

$$(1-b^n)=(1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1-b^n}{1-b}=1+b+b^2+\dots+b^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1} b^i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+\dots+n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=n+n-1+n-2+\dots+1$$

جمع +

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n}$$

$$=2\sum_{i=1}^{n} i=n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1-\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1-\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{n}(1-i)^2=\sum_{i=1}^{n}(1-i)(1+i)$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots\pm b^{n-1})$$

• هر آرایش مستطیلی شکل از اعداد را یک ماتریس گویند.

مانند:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

این آرایش را معمولاً به صورت زیر نمایش می دهند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ عناصر ریاضی

Subject :
Year : Month : Date :

ماتریس ها حاوی سطرها و ستون هایی از اعداد هستند.

اعضای ماتریس را درایه های ماتریس گویند و اگر درایه های ماتریس را با a یا b یا ... نمایش دهیم در کنار آن اندیس هایی را نوشته قرار می دهیم که اولی نشان دهنده سطر و دومی نشان دهنده ستون جایگاه درایه است.

مثلاً a_{23} یعنی درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس. بعد یک ماتریس با تعداد سطرها ضربدر تعداد ستون های آن مشخص می شود و خود ماتریس را با نماد A یا B یا C و ... نمایش می دهند.

منظور از نماد $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

یعنی A یک ماتریس با درایه های a_{ij} و از مرتبه ی $m\times n$ است.

سطر
ستون

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots\ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots\ a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mj} & \cdots\ a_{mn} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

یک ماتریس را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$

سطر × ستون

Subject :
Year : Month : Date :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعمال بر روی ماتریس ها:

ترانسپوز یک ماتریس: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ترانسپوز A را با نماد A^T نمایش می دهیم.

$$A^T=[a_{ij}]_{n\times m}$$

به طور مثال داریم:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در ماتریس:

فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $c\in R$ آنگاه:

به طور مثال: در مثال قبل:

$$2A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

• جمع دو ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ آنگاه A و B را جمع پذیر گویند و

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

• ماتریس های خاص: ماتریسی که تمام درایه های آن ۱ باشد را با نماد $[1]_{m\times n}$ و $1_{m\times n}$ و واضح است که:

$$[C_{ij}]_{m\times n}=C1_{m\times n}$$

• بردار: ماتریس با یک ستون را یک بردار گویند و با $x_m=[x_{i1}]_{m\times 1}$ نمایش می دهند.

$$=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix}$$

• ماتریس مربعی: مهمترین دسته از ماتریس ها، ماتریس های مربعی می باشند و آن ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون های آن با هم برابرند. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربعی از مرتبه ۳ است.

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد آنگاه:

درایه هایی به صورت a_{ii} را عناصر قطر اصلی ماتریس گویند و اگر $A=[a_{ii}]_{n\times n}$ آنگاه:

$$\text{Trace}(A) \text{ یا } tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}=a_{ji}$ و $\forall i,j$ ، A را متقارن گویند.

Subject :
Year : Month : Date :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

اگر A متقارن باشد $A=A^T$.

و اگر ماتریس مربعی A چنان باشد که: $\forall i,j \; ; \; a_{ij}=-a_{ji}$

آنگاه A را پادمتقارن گویند و در نتیجه $tr(A)=0$. $A=-A^T$

* اگر ماتریس A چنان باشد که $i<j$ اگر $a_{ij}=0$ آنگاه A را پایین مثلثی گویند و اگر $i>j$

اگر $a_{ij}=0$ آنگاه A را بالا مثلثی گویند.

ماتریس واحد از مرتبه n را با نماد I_n نمایش می‌دهیم و آن یک ماتریس مربعی از مرتبه n است

که اعضای قطر اصلی آن ۱ است و بقیه اعضا صفر. مثلاً:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad tr(I_n)=n$$

ضرب دو ماتریس: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times k}$.

$$A\times B=C_{m\times k}=[c_{ij}=\sum_{L=1}^{n} a_{iL}\, b_{Lj}]_{m\times k}$$

برای درک بهتر از ضرب دو ماتریس فرض کنید داریم:

صفحه ۴

Subject :

Year : Month : Date :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$C_{11}=\sum_{L=1}^{n} a_{1L}b_{L1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\dots+a_{1n}b_{n1}$$

$$C_{12}=\sum_{L=1}^{n} a_{1L}b_{L2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\dots+a_{1n}b_{n2}$$

$$C_{ij}=\sum_{L=1}^{n} a_{iL}b_{Lj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

مثال: فرض کنید

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix}3&0&1\\2&1&3\\4&1&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{3\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\2&4\end{bmatrix}$$

$$A\times B=C_{3\times2}=\begin{bmatrix}5&10\\8&17\\6&13\end{bmatrix}$$

نکته: $A\times B\neq B\times A$

قضیه: $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

برهان: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{n\times k}$

$$D=B+C=[d_{ij}]_{n\times k}=[b_{ij}+c_{ij}]_{n\times k}$$

$$A\times(B+C)=A\times D=\Big[\sum_{L=1}^{n} a_{iL}d_{Lj}\Big]_{m\times k}=\Big[\sum_{L=1}^{n} a_{iL}(b_{Lj}+c_{Lj})\Big]_{m\times k}$$

$$=\Big[\sum_{L=1}^{n}(a_{iL})+(a_{iL}c_{Lj})\Big]_{m\times k}=\Big[\sum_{L=1}^{n} a_{iL}b_{Lj}+\sum_{L=1}^{n} a_{iL}c_{Lj}\Big]_{m\times k}$$

$$\Big[\sum_{L=1}^{n} a_{iL}b_{Lj}\Big]+\Big[\sum_{L=1}^{n} a_{iL}B_{Lj}\Big]_{m\times k}=(A\times B)+(A\times C)$$

$$A_{m\times n}I_n=I_m A_{m\times n}=A$$

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد. $A^2 = A \times A$

$\vdots$

$A^k = A \times A^{k-1}$

اگر A چنان باشد که $A^2 = A$ درنتیجه $A^k = A$، A را خودتوان گویند. I خودتوان است.

ماتریس قطری یک ماتریس مربع است که تمامی عناصر آن بجز عناصر روی قطر اصلی صفر هستند.

اگر x یک بردار از مرتبه n باشد آنگاه $x^T x$ یک ماتریس از مرتبه ۱ می‌باشد که اصطلاحاً

اغلب آن را بصورت یک ماتریس نمی‌نویسند: $\underset{n\times 1}{x}\, x^T = \underset{n\times n}{A}$

اگر ماتریس A چنان باشد که $A \times B = I$، A را معکوس چپ B گویند و همچنین B معکوس راست A است.

طرز یافتن معکوس چپ یا راست ماتریس A:

یک روش نه چندان مرسوم برای بدست آوردن معکوس چپ یا معکوس راست یک ماتریس استفاده از دستگاه معادلات است.

بطور مثال معکوس چپ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ را درصورت وجود بیابید.

حل) فرض کنید B معکوس چپ ماتریس A باشد. از آنجا که مرتبه‌ی A با ۳×۲ باید معکوس چپ یعنی B از مرتبه ۲×۳ باشد. پس فرض کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$B \times A = I_{2\times 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b_{11} + 4b_{12} + 0b_{13} = 1 \\ 3b_{11} + 1\times b_{12} + 2b_{13} = 0 \\ 2b_{21} + 4b_{22} + 0b_{23} = 0 \\ 3b_{21} + b_{22} + 2b_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b_{11} + 12b_{12} = 3 \\ -6b_{11} - 2b_{12} - 4b_{13} = 0 \\ 6b_{21} + 12b_{22} = 0 \\ -6b_{21} - 2b_{22} - 4b_{23} = -2 \end{cases}$$

$$12b_{12} = 3 \Rightarrow b_{12} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{b_{22} = 0} \qquad \boxed{b_{23} = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = 4b_{13} \Rightarrow b_{13} = -\frac{1}{8}$$

$$\boxed{2b_{11} + 1 = 1 \Rightarrow b_{11} = 0} \qquad \boxed{b_{21} = 0} \qquad \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم C معکوس راست A باشد بنابراین چون مرتبه‌ی A، 2×3 است پس C باید 2×3 باشد. درنتیجه C باید:

$$C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2c_{11} + 3c_{21} = 1 \Rightarrow c_{11} = \frac{1}{2} \qquad 4c_{12} + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{12} = \frac{1}{4}$$

$$2c_{12} + 3c_{22} = 0 \qquad 4c_{13} + c_{23} = 0 \Rightarrow c_{13} = -\frac{1}{8}$$

$$2c_{13} + 3c_{23} = 0 \qquad 0c_{11} + 2c_{21} = 0 \Rightarrow c_{21} = 0$$

$$4c_{11} + c_{21} = 0 \qquad 0c_{12} + 2c_{22} = 0 \Rightarrow c_{22} = 0$$

$$0c_{13} + 2c_{23} \Rightarrow c_{23} = \frac{1}{2}$$

Subject :
Year : Month : Date :

مثال: معکوس چپ و راست ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

حل) فرض کنید B معکوس چپ A باشد. $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ در نتیجه

$$I=BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$b_{11}=\frac{1}{2}$ $\quad 2b_{11}=1$

$b_{12}=\frac{-1}{4}$ $\quad b_{11}+2b_{12}=0$

$b_{21}=0$ $\quad 2b_{21}=0$ $\quad \Rightarrow B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$b_{22}=\frac{1}{2}$ $\quad b_{21}+2b_{22}=1$

فرض کنید C معکوس راست A باشد اگر $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ می‌توان نشان داد که $C=B$

قضیه: $(A\times B)^T=B^T\times A^T$

اثبات: فرض کنید $B=[b_{ij}]_{n\times k}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

$\Rightarrow A^T=[a_{ij}]_{n\times m}=[a_{ji}]_{n\times m}$; $B^T=[b_{ij}]_{k\times n}=[b_{ji}]_{k\times n}$

$\Rightarrow A\times B=C=[c_{ij}]_{m\times k}$

$=\left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{li}\right]_{m\times k}$

$\Rightarrow (A\times B)^T=C^T=[c_{ij}]_{k\times m}=[c_{ji}]_{k\times m}$

Subject :
Year : Month : Date :

$$= \left[\left(\sum_{L=1}^{n} a_{iL} b_{Lj}\right)'\right]_{k\times m} = \left[\sum_{L=1}^{n} b_{jL} a_{Li}\right]_{k\times m}$$

$$= B^T \times A^T$$

نتیجه: اگر B معکوس راست A باشد؛ B^T معکوس چپ A^T است.

$$I = AB \Rightarrow I = I^T = (AB)^T = (B^T A^T)$$

توضیح: گوییم که اگر A متقارن باشد $A^T = A$ ؛ یا A متقارن است اگر $a_{ij} = a_{ji}$

$$\Rightarrow [a_{ij}]_{n\times n} = [a_{ji}]_{n\times n} = [a'_{ij}]_{n\times n}$$

اگر A پاد متقارن باشد می‌شود $-a$.

$$(A+B)^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T$$

$$= [c_{ij}]^T = [c_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = A^T + B^T$$

$$tr(A^T) = tr(A)$$

• اعمال مقدماتی سطری:

فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اعمال زیر را اعمال مقدماتی سطری گویند:

۱) جای دو سطر عوض کردن

۲) سطری را در یک عدد غیر صفر ضرب کردن

۳) مضربی از یک سطر با سطر دیگر جمع کردن

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید a_i' سطر iام ماتریس A باشد، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ باشد آنگاه:

$$a_i'=[a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}]$$

و فرض کنید a_j ستون jام همین ماتریس باشد آنگاه:

$$a_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

حال اگر $B=[b_{ij}]_{n\times k}$ در این صورت $b_i'=[b_{i1}\, b_{i2}\dots b_{ij}\dots b_{ik}]$

$$b_j=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1'b_1 & a_1'b_2 & \dots & a_1'b_k \\ a_2'b_1 & a_2'b_2 & \dots & a_2'b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m'b_1 & a_m'b_2 & \dots & a_m'b_k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix}[b_1\, b_2 \dots b_k]$$

یعنی سطر iام حاصل $A\times B$ $=a_i'B$

ستون jام حاصل $A\times B$ $=Ab_j$

Subject :
Year : Month : Date :

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1b_1 & a'_1b_2 & \cdots & a'_1b_k \\ a'_2b_1 & a'_2b_2 & \cdots & a'_2b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_mb_1 & a'_mb_2 & \cdots & a'_mb_k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_k \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} a'_1B \\ a'_2B \\ \vdots \\ a'_mB \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_k \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر یک سطر ماتریس A صفر باشد، آنگاه حداقل یک سطر ماتریس $A\times B$ صفر است و اگر یک ستون ماتریس B صفر باشد، آنگاه حداقل یک ستون ماتریس $A\times B$ صفر است.

حال فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $x=[a_{i1}]_{n\times 1}$ در این صورت

$$A\times x=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1x_1 \\ a'_2x_2 \\ \vdots \\ a'_mx \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n)$$

این بیان معناست که درایه اول x در ستون اول ماتریس A ضرب شده و الی آخر

تعریف: ماتریس مربعی A را وارون پذیر گویند اگر ماتریس مربعی B چنان یافت شود که

$$BA = AB = I$$

وارون A را با A^{-1} نمایش می دهند.

قضیه: در صورت وجود وارون، وارون یکتاست.

اثبات: فرض کنیم به جز A^{-1} ماتریس B نیز وارون A باشد یعنی

$$I = AB = BA$$

حال $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$

قضیه: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$$(AA^{-1}) = I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$

از آن جایی که $(A^{-1})^T \times A^T = I = (A^T)^{-1} A^T$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Subject :
Year : Month : Date :

قضیه: $(A^{-1})^{-1} = A$.

برهان: $I = (A^{-1})(A^{-1}) = A^{-1}A$

$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

ماتریس های پلکانی:

تعریف: ماتریس $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ را یک ماتریس پلکانی سطری گویند اگر

1) سطرهای صفر جزء سطرهای انتهایی ماتریس باشد.

2) اولین درایه از چپ غیرصفر هر سطر 1 باشد. این درایه را درایه ی پیشرو سطر گویند.

3) درایه پیشرو یک سطر سمت راست درایه پیشرو سطر ماقبل باشد.

مثال: ماتریس های زیر پلکانی سطری هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اما ماتریس زیر پلکانی سطری نیست.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

• قضیه: هر ماتریس را به وسیله اعمال مقدماتی سطری می‌توان به یک ماتریس پلکانی سطری تبدیل کرد.

• مثال: ماتریس زیر را به یک ماتریس پلکانی سطری تبدیل کنید.

$$A=\begin{bmatrix}4&1&3&5\\2&7&3&4\\1&3&2&5\\0&2&4&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\2&7&3&4\\4&1&3&5\\0&2&4&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\0&2&4&1\\4&1&3&5\\2&7&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\0&1&2&\frac{1}{2}\\4&1&3&5\\2&7&3&4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\0&1&2&\frac{1}{2}\\0&-11&-5&-15\\0&1&-1&-6\end{bmatrix}\to-\frac{30}{2}\quad\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\0&1&2&\frac{1}{2}\\0&0&17&-\frac{19}{2}\\0&0&-3&-\frac{13}{2}\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\0&1&2&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{19}{34}\\0&0&-3&-\frac{13}{2}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5\\0&1&2&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{19}{34}\\0&0&0&-\frac{57}{34}-\frac{13}{2}\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس مقدماتی سطری:

یک ماتریس مقدماتی سطری یک ماتریس واحد است که یکی از اعمال مقدماتی سطری بر روی آن انجام گرفته است. مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر ماتریس مقدماتی سطری را از چپ در یک ماتریس ضرب کنیم حاصل ماتریسی می‌شود که یک عمل مقدماتی سطری بر روی آن مانند عمل مقدماتی سطری که بر ماتریس واحد انجام گرفته است.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year :　　Month :　　Date :

$$e_2 \times A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 2c & 4c & 3c \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

از چپ در ماتریس‌های مقدماتی ضرب می‌کنیم تا به ماتریس پلکانی تبدیل شود.

بنابراین قضیه: برای هر ماتریس A ماتریس‌های مقدماتی سطری $r_k, \dots, r_2, r_1$ چنان وجود دارند که $r_k r_{k-1} \dots r_1 A = B$ و B یک ماتریس پلکانی سطری است.

مثال: با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی سطری ماتریس زیر را به یک ماتریس پلکانی تبدیل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{r_1} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{r_2} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 11/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{r_3} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 11/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{r_4} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 11/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

هم‌ارز سطری:

ماتریس A را هم‌ارز سطری با ماتریس B گویند اگر ماتریس‌های مقدماتی سطری $r_k, \ldots, r_2, r_1$ چنان وجود داشته باشند که $A = r_k r_{k-1} \ldots r_1 B$

قضیه: هر ماتریس مقدماتی سطری وارون‌پذیر است و وارون ماتریس همان عمل بر روی آن به صورت معکوس انجام گرفته باشد.

مثلاً: اگر $r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $r^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓ $\quad r \times r^{-1} \stackrel{?}{=} I$

اگر $r = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓ $\quad r \times r^{-1} \stackrel{?}{=} I$

اگر $r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$ و $r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓ $\quad r \times r^{-1} \stackrel{?}{=} I$

اگر A هم‌ارز سطری B باشد می‌نویسیم $A \stackrel{R}{\sim} B$

واضح است که $A \stackrel{R}{\sim} A \quad \& \quad A \stackrel{R}{\sim} B \Rightarrow B \stackrel{R}{\sim} A$

$$\& \quad A \stackrel{R}{\sim} B \quad \& \quad B \stackrel{R}{\sim} C \Rightarrow A \stackrel{R}{\sim} C$$

$A \stackrel{R}{\sim} B \Rightarrow \exists\, r_1, \ldots, r_k \ni$

$A = r_k r_{k-1}, \ldots, r_1 B$

$$\Rightarrow r_1^{-1} \cdot r_2^{-1} \cdots r_k^{-1} A = \underbrace{(r_1^{-1} \cdots r_k^{-1})^{I} (r_k \cdots r_1)}_{I} B$$

$$\Rightarrow r_1^{-1} r_2^{-1} \cdots r_k^{-1} A = B$$

Subject :
Year : Month : Date :

$\Rightarrow B \overset{R}{\sim} A$

• ماتریس پلکانی کاهش یافته

ماتریس پلکانی سطری A را یک ماتریس پلکانی کاهش یافته گویند اگر علاوه بر اینکه عناصر زیر عنصر پیشرو هر سطر صفر باشد،

عناصر بالای هر عنصر پیشرو صفر باشند.

• نتیجه: I یک ماتریس پلکانی کاهش یافته است.

• قضیه: هر ماتریس A را می‌توان به وسیله اعمال مقدماتی سطری به یک ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل کرد.

• مثال: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ را به یک ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل کنید.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

یک دستگاه n معادله و K مجهول

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}_{n\times k} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}_{k\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$ax - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad b = \left(x - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4a}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \equiv \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + \frac{1}{7}x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0$$

Subject :
Year :   Month :   Date :

فرض کنید $A \sim I$ در اینصورت ماتریس‌های مقدماتی سطری $r_k, \dots, r_1$ سطری وجود دارند

که $r_k \dots r_1 A = I$

فرض کنید $B = r_k \dots r_1$ در اینصورت $BA = I$

در نتیجه B معکوس چپ A است اگر A مربع باشد $AB = I$ از این رو A وارون‌پذیر است یعنی ثابت

کردیم $A^{-1} = r_k \dots r_1$ & A وارون‌پذیر است. $A \sim I \Rightarrow A$

فرض کنید A وارون‌پذیر باشد پس ماتریس B چنان وجود دارد که $B = I$

از طرفی $B \sim C$ که C ماتریس پلکانی کاهش یافته است

یعنی $B = r_k \dots r_1 C$

C یک ماتریس مربع است اگر یک سطر C صفر باشد.

آنگاه $r_k \dots r_1 CA \neq I$ و این خلاف فرض است از این رو $B \sim I$

از این رو

قضیه: A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $A \sim I$.

مثال: نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است و وارون آن را بدست آورید

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & -۷ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱۷}{۷} \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\overset{r_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \overset{r_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \overset{r_3}{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \overset{r_4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

دستگاه معادلاتی

را در نظر بگیرید. با استفاده از مفهوم ضرب ماتریس ها این دستگاه معادله به صورت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = Ax = b$$

اگر A را به صورت یک ماتریس پلکانی سطری یافته چون C تبدیل کنیم؛ آنگاه معادله به یکی از صورت های زیر درمی‌آید.

$$1.)\quad \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

۲.)
$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

۳.)
$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k-1} & c_{1k} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k-1} & c_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{3k-1} & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

در می‌آید.

در حالت ۱ دستگاه دارای دسته جواب یکتاست.

در حالت ۲ دستگاه دارای جواب نیست.

و در حالت ۳ دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب است.

روش گاوس

فرض کنید صورت ماتریسی یک دستگاه معادله به صورت $Ax=b$ باشد. اگر قرار دهیم $G=[A|b]$ آنگاه G را ماتریس افزوده دستگاه نامیم. اگر با استفاده از اعمال مقدماتی سطری ماتریس افزوده G تبدیل به یک ماتریس پلکانی به صورت $H=[C|d]$ شود، آنگاه دستگاه معادله به صورت $Cx=d$ در می‌آید و طبق قسمت قبل جوابهای دستگاه را در صورت وجود می‌توان به سادگی بدست آورد.

Subject :
Year : Month : Date :

مثال: با استفاده از روش گاوس دستگاه معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=4 \\ x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$G=\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

معادله به صورت

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_2-x_3=-\frac{1}{2} \\ x_3=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=-1 \\ x_3=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال ردیف دوم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$G=\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

در این صورت دستگاه معادله به صورت

$$-2+t-t$$

$$x_1+x_2-x_3=0$$

$$x_2-x_3=2$$

فرض کنید $x_3=t$ در این صورت $x_2=-2+t$ و $x_1=2$

Subject :

Year : Month : Date :

روش گاوس جردن:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

دستگاه معادلات همگن:

دستگاه معادله به صورت $Ax=0$ را یک دستگاه معادله همگن گویند.

$$Ax=b$$

$$A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$$

توجه کنید $x=0$ جواب بدیهی این دستگاه است.

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times k}$، $n<k$ آنگاه $x=0$ تنها جواب معادله نیست.

برهان: فرض کنید B ماتریس پلکانی سطری هم ارز با A باشد که در این صورت آخرین

Subject :
Year : Month : Date :

دارای B عنصر پیشرو نیست و از این رو $x=0$ تنها جواب معادله نیست.

قضیه: فرض کنید در معادله $Ax=0$ ؛ A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه $x=0$ تنها جواب معادله است اگر و تنها اگر $A\sim I$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

برهان: فرض کنید $A\sim I$ یعنی

$$\exists\, r_k r_{k-1}, \dots, r_1 \ni A = r_k r_{k-1} \cdots r_1 I$$

$$= r_k r_{k-1} \cdots r_1$$

$$\Rightarrow Ax=0 = (r_k \cdots r_1)x = (r_k \cdots r_1) = 0$$

$$(r_1^{-1}, \dots, r_k^{-1})(r_k \cdots r_1)x = 0 \quad \Rightarrow x=0$$

بالعکس: فرض $x=0$ تنها جواب معادله $Ax=0$ و فرض کنید B پلکانی کاهش یافته حاصل از A باشد: چون اعمال مقدماتی بر طرف راست معادله تاثیری ندارد بنابراین فرض کنید

Subject :
Year : Month : Date :

$Ax=0 \equiv Bx=0$

$B\neq I$ بنابراین حداقل یک سطر B صفر است. با حذف این سطر ماتریس B_1 بدست می‌آید. $\Rightarrow Ax=0 \equiv B_1x=0$

طبق قضیه قبل $x=0$ تنها جواب معادله نیست و این خلاف فرض است.

• قضیه: ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $A\sim I$ باشد.

فرض کنید A وارون‌پذیر است در این صورت در معادله

$$Ax=0 \Rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}0 \Rightarrow x=0$$

$\therefore$ تنها جواب بدیهی است. طبق قضیه قبل $A\sim I$

بالعکس فرض کنید $A\sim I$ یعنی $A=r_k,\ldots,r_1 I$

$$\Rightarrow r_1^{-1}r_2^{-1},\ldots,r_k^{-1}A=(r_1^{-1},\ldots,r_k^{-1})(r_k,\ldots,r_1)$$

فرض کنید $B=r_1^{-1},\ldots,r_k^{-1}$ در این صورت B معکوس چپ A است.

از طرفی $\underbrace{A(r_1^{-1},\ldots,r_k^{-1})}_{B}=(r_k,\ldots,r_1)(r_1^{-1},\ldots,r_k^{-1})=I$

و B وارون راست A است. پس A وارون‌پذیر است.

• قضیه: فرض کنید $A\sim B$ باشد آنگاه A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر B وارون‌پذیر باشد.

فرض کنید A وارون‌پذیر است پس $A\sim I$ و چون $B\sim A$ پس $B\sim I$ و از این رو B وارون‌پذیر است.

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید B وارون پذیر باشد پس $B \sim I$ ، $A \sim B$ پس $A \sim I$ و از این رو A وارون پذیر است.

قضیه: فرض کنید C یک ماتریس مربعی باشد که حداقل یک سطر آن صفر است. در این صورت C منفرد است.

برهان: فرض کنید B وارون C باشد؛ در این صورت $CB=I$ اما حداقل یک سطر CB صفر است و این یعنی $CB \neq I$ و این تناقض است.

قضیه: ماتریس مربعی A منفرد است اگر و تنها اگر هم ارز ماتریسی باشد که حداقل یک سطر آن صفر باشد.

ابتدا فرض کنید A منفرد است. باید نشان دهیم A هم ارز ماتریسی است که حداقل یک سطر آن صفر است. A را به صورت سطری کاهش یافته در می‌آوریم و آن را C می‌نامیم. چون A منفرد است $C \neq I$ و چون A مربع است پس حداقل یک سطر آن صفر است.

بالعکس فرض کنید $A \sim C$ و حداقل یک سطر آن صفر است. اگر A منفرد نباشد پس $A \sim I$ و چون $C \sim A$ پس $C \sim I$ و این درست نیست.

قضیه: فرض کنید B وارون راست ماتریس مربع A باشد. در اینصورت A وارون پذیر است و B وارون چپ A است:

فرض کنید A وارون پذیر نباشد. طبق قضیه قبل A هم ارز ماتریسی چون C است که حداقل یک سطر آن صفر است.

Subject :
Year : Month : Date :

$C = r_1, \dots, r_k A$

و این تناقض است پس A وارون پذیر است $\Rightarrow CB = r_1, \dots, r_k AB = r_1, \dots, r_k$

از طرفی $(BA)^T = A^T B^T = I$

$\Rightarrow BA = I$

مقصد: A وارون پذیر است اگر معادله $Ax = b$ دارای یک جواب منحصر به فرد باشد.

برهان: فرض کنید A منفرد باشد و $Ax = b$ دارای یک جواب یکتا چون C باشد در این صورت $AC = b$

از طرفی چون A منفرد است معادله $Ax = 0$ دارای یک جواب غیر صفر چون d است در این صورت $Ad = 0$ $\Rightarrow AC + Ad = b \Rightarrow A(C + d) = b$ & $C + d \neq C$

و این تناقض است.

بالعکس فرض کنید A وارون پذیر و A^{-1} وارون A باشد در این صورت:

$Ax = b$

جواب یکتا است. $\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b = C$

یک راه ساده یافتن وارون A در صورت وجود اگر $[A|I] \sim [A|B]$ آنگاه B وارون A است.

Subject :

Year : Month : Date :

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&5\end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&4&1&0\\1&5&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&5&0&1\\2&4&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&5&0&1\\0&-6&1&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&5&0&1\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{5}{6}&-\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}2&5&4\\1&3&2\\2&4&5\end{bmatrix}$ وارون آن را در صورت وجود بیابید.

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&5&4&1&0&0\\1&3&2&0&1&0\\2&4&5&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\2&5&4&1&0&0\\2&1&5&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&-1&0&1&-2&0\\0&-5&1&0&-2&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&-5&1&0&-2&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&-5&8&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&3&-5&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&-5&8&1\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}13&-21&-2\\-1&2&0\\-5&8&1\end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

فضای برداری:

مجموعه V را فضای برداری و اعضای آن را بردار گویند.

هرگاه دو عمل $\oplus$ و $\odot$ چنان وجود داشته باشند:

۱.) $\forall x,y\in V \;;\; (x\oplus y)\in V$

۲.) $\forall x,y\in V \;;\; (x\oplus y)=(y\oplus x)$

۳.) $\forall x,y,z\in V \quad (x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)$

۴.) $\exists \theta\in V \;;\; \forall x\in V \quad x\oplus\theta = x$

۵.) $\forall x\in V \quad \exists y\in V \quad x\oplus y = y\oplus x = \theta$

و همچنین

۱.) $\forall x\in V \;\&\; \forall c\in R \;;\; c\odot x\in V$

۲.) $\forall c,d\in R \;\&\; \forall x\in V \quad (cd)\odot x = c\odot(d\odot x)$

۳.) $\forall c\in R \;,\; \forall x,y\in V \quad c\odot(x\oplus y) = (c\odot x)\oplus(c\odot y)$

۴.) $\forall c,d\in R \;\&\; \forall x\in V \quad (c+d)\odot x = (c\odot x)\oplus(d\odot x)$

۵.) $\forall x\in V \quad 1\odot x = x$

برای مثال فرض کنید $V=\left\{ \begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} \middle| x,y,z\in R \right\}$

Subject :
Year : Month : Date :

V با اعمال + و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

$$V=\left\{\overset{x}{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}}\;\middle|\; a_1,a_2,a_3\in R\right\}$$

$$1.)\ \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\in V\ \checkmark$$

$$c\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\\ca_3\end{bmatrix}\in V\ \checkmark$$

$$\bullet\ V=\left\{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\;\middle|\; a_1,a_2\in R\right\}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\2\end{bmatrix}\ \times$$ فضای برداری نیست

عمل $\oplus$ برداری و $\odot$ را ضرب اسکالر گویند.

• قضیه: عضو خنثی عمل $\oplus$ یکتاست.

اثبات: فرض کنید θ ، θ' عضو خنثی عمل $\oplus$ فضای برداری V باشند در اینصورت

$$\theta'=\theta'+\theta=\theta$$

• قضیه: برای هر $x\in V$ تنها یک قرینه وجود دارد.

• برهان: فرض کنید y و z هر دو قرینه x باشند در نتیجه باید $\theta=x+z=x+y$

Subject :
Year : Month : Date :

$$y = y \oplus \theta = y \oplus (x \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z = \theta \oplus z = z$$

• قضیه: اگر $x \oplus y = x \oplus z$ آنگاه $y = z$

$$y = y \oplus \theta = y \oplus (x \oplus (-x))$$

$$= (y \oplus x) \oplus (-x) = (z \oplus x) + (-x)$$

$$= z \oplus (x + (-x))$$

$$= z \oplus \theta = z$$

• قضیه: $0 \odot x = \theta$

زیرا

$$(0 \odot x) = (0 \odot x) \oplus \theta$$

$$= (0 \odot x) \oplus (0 \odot x)$$

$$\Rightarrow \theta = (0 \odot x)$$

• قضیه: $-x = (-1) \odot x$

$$\theta = x \ominus (-x) = x \oplus ((-1) \odot x) = (1 \odot x) \oplus ((-1) \odot x)$$

$$= x \odot (1 + (-1)) = x \odot 0 = \theta$$

• تعریف: مجموعه W زیرمجموعه فضای برداری V را زیرفضای، فضای برداری V گویند.

اگر W با اعمال $\oplus$ و $\odot$ تعریف شده بر V یک فضای برداری باشد.

Subject :
Year : Month : Date :

مثلاً اگر $W=\left\{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2 \in R\right\}$ اولاً $W \notin R$ ولی W یک زیرفضای برداری V نیست.

اما اگر $U=\left\{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2 \in R\right\}$ آنگاه U یک زیرفضای برداری V است.

• قضیه: $W \subseteq V$ یک زیرفضای برداری V است اگر نسبت به $\oplus$ و $\odot$ تعریف شده بر V بسته باشد.

خطی بردارهای X را گستره X گویند و با نماد $sp(X)$ نمایش می‌دهند.

$$sp(X)=\{y \mid y=c_1x_1+\dots+c_kx_k,\ c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}\}$$

واضح است که $sp(X)\subseteq V$.

قضیه: $W=sp(X)$ یک زیرفضای برداری از V است.

برهان: فرض کنید y_1 و y_2 متعلق به $sp(X)$ است.

$$y_1=c_1x_1+\dots+c_kx_k$$
$$+$$
$$y_2=d_1x_1+\dots+d_kx_k$$

$$y_1+y_2=\underbrace{(c_1+d_1)}_{c_1'}x_1+\dots+\underbrace{(c_k+d_k)}_{c_k'}x_k$$

$$\Rightarrow y_1+y_2=c_1'x_1+\dots+c_k'x_k\in sp(X)$$

$$cy_1=cc_1x_1+cc_2x_2+\dots+cc_kx_k$$

$$\Rightarrow cy_1=c_1'x_1+\dots+c_k'x_k\in sp(X)$$

* تعریف: بردارهای x_1 و x_2 و ... و x_k از فضای برداری V را مستقل خطی گویند اگر هیچ‌کدام از آنها ترکیب خطی از بقیه بردارها نباشد.

به طور مثال: نشان دهید $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند.

Subject :
Year : Month : Date :

Subject :
Year : Month : Date :

جواب: اگر مستقل خطی نباشند باید $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ ولی چنین c وجود ندارد پس
مستقل خطی هستند.

در مثال قبل توجه کنید که $c_1\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=0$

$$c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2$$

$$3c_1+c_2=0$$

$$5c_1=0$$

چون می‌دانیم $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند معادله فوق زمانی برقرار است که $c_1=c_2=0$

تعریف: بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_k$ از فضای برداری V را مستقل خطی گویند اگر

$$c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k=0 \Rightarrow c_1=c_2=\dots=c_k=0$$

اگر $x_1, x_2, \dots, x_k$ مستقل خطی نباشند، آنها را وابسته خطی گویند.

مثال: نشان دهید که مجموعه $X=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$ از بردارهای R^3 وابسته خطی هستند.

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=0$$

$$c_1+0+0+c_4=0 \Rightarrow c_1=-c_4$$

$$0+c_2+0+2c_4=0 \Rightarrow 2c_4=-c_2 \Rightarrow c_4=-\frac{c_2}{2}$$

Subject :
Year. Month.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a^{*}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ij} |A_{ik}| = ۰$$

$$\Rightarrow A' A^{*} = \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & |A| & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| I_n$$

$$\Rightarrow A' \left(\frac{A^{*}}{|A|} \right) = I_n$$

و این یعنی $\quad (A')^{-1} = \left(\frac{A^{*}}{|A|} \right)$

$$\Rightarrow \left((A')^{-1} \right)' = \frac{1}{|A|} (A^{*})'$$

$$\Rightarrow \left((A')' \right)^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^{*})' \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^{*})'$$

مثال: $\quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

$|A_{۱۱}| = (-1)^{۲}\, ۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ $\qquad$ $|A_{۲۱}| = (-1)^{۳} (۲) \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۲(۱-۱) = ۰$

$|A_{۱۲}| = (-1)^{۳}\, ۲ \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۲(۲) = -۴$ $\qquad$ $|A_{۲۲}| = (-1)^{۴} (۱) \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲$

$|A_{۱۳}| = (-1)^{۴} (۰) \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ $\qquad$ $|A_{۲۳}| = (-1)^{۵} (۱) \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۲$

Subject :
Year : Month : Date :

Subject :
Year. Month.

$$|A_{31}| = (-1)^{4}(0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{32}| = (-1)^{5}(1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) = -1$$

$$|A_{33}| = (-1)^{6}(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-4) = -2$$

SINACO

Subject :
Year : Month : Date :

$$0+0+C_3+3C_4=0 \Rightarrow 3C_4=-C_3 \Rightarrow C_4=-\frac{C_3}{3}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{C_2}{2}=\frac{C_3}{3}$$

$$C_3=3,\ C_2=2,\ C_1=1,\ C_4=-1$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که در مثال قبل اگر $X'=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ آنگاه X' یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی است و باید توجه کرد که گرچه $X'\subset X$ اما $sp(X')=sp(X)=\mathbb{R}^3$

تعریف: مجموعه X از بردارهای فضای برداری V را مولد زیرفضای برداری W از V گوئیم هرگاه X مستقل خطی باشد و $sp(X)=W$

تعریف: مجموعه $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ از بردارهای فضای برداری V را مولد زیرفضای برداری W گوئیم اگر $W=sp(X)$

مجموعه $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ را یک پایه برای زیرفضای برداری W گوئیم اگر X مستقل خطی و مولد W باشد.

قضیه: فرض کنید $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ و $X'=\{x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\}$ آنگاه $sp(X)=sp(X')$ اگر و تنها اگر x_n یک ترکیب خطی از بردارهای X' باشند. چون $X'\subset X$ پس $sp(X')\subseteq sp(X)$

Subject :
Year : Month : Date :

حال فرض کنید $y \in sp(X)$ در این صورت c_n و ... و c_1 چنان وجود دارند که

$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ و چون (طبق فرض) x_n یک ترکیب خطی از بردارهای X'

است پس d_{n-1} و ... و d_2 و d_1 چنان وجود دارند به طوری که:

$x_n = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{n-1}x_{n-1}$

$\Rightarrow y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n-1}x_{n-1} + c_n(d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{n-1}x_{n-1})$

$= (c_1 + c_nd_1)x_1 + \dots + (c_nd_{n-1} + c_{n-1})x_{n-1}$

$\Rightarrow y \in sp(X') \Rightarrow sp(X) \subseteq sp(X')$

حال فرض می‌کنیم $sp(X) = sp(X')$ در نتیجه: چون x_n یک بردار از $sp(X')$ است پس

اعداد c_{n-1} و ... و c_1 چنان وجود دارند که $x_n = c_1x_1 + \dots + c_{n-1}x_{n-1}$

از این رو x_n یک ترکیب خطی از بردارهای X' است.

مقدمه: فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای V

باشند، هر زیرمجموعه از X هم مستقل خطی است.

برهان: فرض می‌کنیم $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ و $r < n$ و فرض کنید X' وابسته خطی باشد

بنابراین اعداد c_r و ... و c_2 و c_1 که همگی صفر نیستند چنان وجود دارند که

$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_rx_r = 0 \Rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_rx_r + 0x_{r+1} + \dots + 0x_n = 0$

Subject :
Year : Month : Date :

و بعضی از c_iها صفر نیستند از این رو X مستقل خطی نیست و این تناقض است. (برای مستقل خطی بودن باید همه c_iها صفر باشند)

قضیه اساسی جبر خطی: فرض کنید $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد: الف) هر مجموعه مستقل خطی چون $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}=Y$ نیز یک پایه برای V است.

ب) هر مجموعه از بردارهای V شامل بیشتر از n بردار، مستقل خطی نیست. (مستقل خطی نباشد وابسته خطی است پس پایه نیستیم)

ج) هر مجموعه از بردارهای V شامل کمتر از n بردار، مولد V نیست.

الف) X یک پایه برای V باشد و $y_1 \in V$

$$\Rightarrow \exists\, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n} \in \mathbb{R}$$

$$\exists\, y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n$$

چون $y_1 \neq 0$ بنابراین حداقل یکی از c_iها $\neq 0$ در نتیجه فرض کنید $c_{11} \neq 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{c_{11}}y_1 - \frac{c_{12}}{c_{11}}x_2 - \cdots - \frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n$$

قرار دهید

$X' = \{y_1, x_1, \ldots, x_n\}$

$X'' = \{y_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Subject :
Year : Month : Date :

$V = sp(X) = sp(X') = sp(X'') \Rightarrow sp(X'') = V \qquad y_2 \in V$

در نتیجه: $y_2 = c_{21} y_1 + c_{22} x_2 + \dots + c_{2n} x_n$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{c_{22}} y_2 - \frac{c_{21}}{c_{22}} y_1 - \dots - \frac{c_{2n}}{c_{22}} x_n$

قرار دهید: $X_1 = \{y_2, y_1, x_2, \dots, x_n\}$

$X_2 = \{y_1, y_2, x_3, \dots, x_n\}$

$V = sp(X'') = sp(X_1) = sp(X_2)$

به همین طریق اگر ادامه دهیم $V = sp(y)$

اما y مستقل خطی است و از این رو y یک پایه برای V است.

ب) فرض کنید $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ و $k > n$ مستقل خطی است.

چون X یک پایه برای فضای برداری V است و $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ آنگاه:

$sp(X') = sp(X)$ یعنی: $x_k = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ و از این رو X' وابسته خطی است.

ج) فرض کنید $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ و $r < n$ مولد باشد از این رو:

$x_n = c_1 x_1 + \dots + c_r x_r$ و این یعنی X پایه نیست.

قضیه: فرض کنید X یک پایه برای فضای برداری V باشد آنگاه هر بردار V را تنها به یک صورت می‌توان ترکیب خطی از بردارهای X در نظر گرفت.

Subject :

Year : Month : Date :

یعنی اگر $y \in V$ باشد، چون X پایه پس اسپن باید $\exists y = (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n)$

یعنی اگر $y \in V$ را فرض کنید: $y = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

$y = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$

$\Rightarrow 0 = (c_1 - d_1) x_1 + \dots + (c_n - d_n) x_n$

$\Rightarrow c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_n - d_n = 0$

متعریف: بعد یک فضای برداری برابر است با تعداد بردارهای واقع در پایه‌ی فضای برداری

پایه هر چند تا بردار داره همونقدر هم بعدش میشه.

قضیه: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر یکی از بردارهای آن ترکیب خطی از بردارهای ماقبل خود باشد.

فرض کنید $c_1, \dots, c_{i-1}$ چنان وجود داشته باشد که $x_i = c_1 x_1 + \dots + c_{i-1} x_{i-1}$

و بعضی از c ها صفر نیستند. $\Rightarrow c_1 x_1 + \dots + c_{i-1} x_{i-1} - x_i = 0$

$\Rightarrow c_1 x_1 + \dots + c_{i-1} x_{i-1} + 0 x_{i+1} + \dots + 0 x_n = 0$

و بعضی از c ها صفر نیست یعنی X وابسته خطی است.

حال فرض کنید X وابسته خطی باشد طبق تعریف: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$

بعضی از c_i ها صفر نیست.

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید i بزرگترین اندیسی باشد که $c_i \neq 0$.

$$x_i = \frac{c_1}{c_0} x_1 + c_2 x_2 + \dots + \frac{c_{i-1}}{c_i} x_{i-1}$$

و بعضی از ضرایب صفر نیست و از این رو x_i ترکیب خطی از بردارهای ما قبل خود است.

استخراج پایه: فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک زیرمجموعه از بردارها باشد. می‌خواهیم از بردارهای X یک پایه برای $W = Sp(X)$ بیابیم. اگر x_2 یک ترکیب خطی از x_1 بود آن را حذف می‌کنیم در غیر اینصورت نگه می‌داریم و اگر x_3 ترکیب خطی از x_1 و x_2 بود آن را حذف می‌کنیم در غیر اینصورت نگه می‌داریم و اگر به همین طریق ادامه دهیم یک مجموعه مستقل خطی از بردارها را داریم که مولد W است یعنی برای W پایه تولید کردیم.

متمم سازی پایه: فرض کنید می‌خواهیم پایه‌ای برای فضای برداری V چنان بیابیم که بردارهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_k$ جزء بردارهای آن باشند. برای این کار فرض کنید $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ یک پایه برای V باشد. مجموعه X' را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم: ابتدا $x_1, x_2, \dots, x_k$ را در X' قرار می‌دهیم. اگر y_1 از $x_1, x_2, \dots, x_k$ مستقل بود آن را در X' و اگر نبود در X' قرار نمی‌دهیم و به همین ترتیب تا y_n ادامه می‌دهیم. X' یک پایه برای V است.

Subject :
Year : Month : Date :

بعد فضای برداری V را با نماد $\dim(V)$ نمایش می‌دهیم و اگر $\dim(V)=n$ آنگاه فضای برداری را

با نماد V_n نمایش می‌دهیم، واضح است که:

مقضیه: فرض کنید اگر $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه از بردارهای فضای برداری V_n باشد و $sp(X)=V_n$

آنگاه X یک پایه برای V_n است.

توجه: اگر W یک زیرفضای فضای برداری V_n باشد آنگاه: $\dim(W)\leq n$

فرض کنید $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک پایه برای V_n باشد در نتیجه $W\subseteq sp(X)=V_n$

در اینصورت بعضی از ترکیبات خطی X درون W نیست و این نشان می‌دهد که زیرمجموعه‌ای از X

مولد W است و از این رو: $\dim(W)\leq\dim(V_n)\leq n$

مثلاً: $x\in V$ & $x\notin W$; $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

مقضیه: فرض کنید W زیرفضای برداری محض V_n باشد، در اینصورت:

$\dim(W)<n$

زیرا اگر فرض کنیم $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ یک پایه برای W باشد آنگاه اگر فرض کنیم: $k>n$

در اینصورت پایه V_n باید بیشتر از n بردار داشته باشد و این صحیح نیست پس $k\leq n$ از طرفی

$k=n$ آنگاه W زیرفضای محض V_n نیست بنابراین $k<n$.

تعریف: تابع $f: A\to B$ را پوشا گوییم اگر:

Subject :
Year : Month : Date :

$\forall y \in B \ , \exists x \in A \ ; f(x) = y$

تعریف: تابع $f: A \to B$ را یک به یک گویند:

$\forall x_1 \neq x_2 \in A \ , f(x_1) \neq f(x_2)$

قضیه: اگر f یک به یک و پوشا باشد آنگاه f^{-1} یک به یک و پوشا است.

تعریف: فرض کنید V با دو عمل $\odot$ و $\oplus$ و W با دو عمل $\boxdot$ و $\boxplus$ دو فضای برداری باشند،

گوییم V و W هم ریخت است، اگر تابع یک به یک و پوشای $L: V \to W$ بطوریکه:

$\forall x, y \in V \qquad L(x \oplus y) = L(x) \boxplus L(y)$

$\forall c \in \mathbb{R} \quad , \forall x \in V \ ; L(c \odot x) = c \boxdot L(x)$

مثال: فرض کنید $V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; a, b \in R \right\} , W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} ; a, b \in R \right\}$ فرض کنید

سپس $L: V \to W$ بصورت زیر تعریف شود:

$L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ از آنجاییکه:

$\forall \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \in W \qquad \exists \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in V \qquad \exists L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \in V \implies \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$

Subject :
Year :   Month :   Date :

$$L\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\0\end{bmatrix}=L\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\right)+L\left(\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\right)$$

$$L\left(c.\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ca_1\\cb_1\\0\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\0\end{bmatrix}=c.L\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

نتیجه: هر فضای برداری با خودش یکریخت است.

فرض کنید V در $L:V\to V$ بصورت $L(x)=x$ تعریف کنیم، این تابع یک به یک و پوشا است:

$$L(x+y)=x+y=L(x)+L(y)$$

$$L(c.x)=c.x=c.L(x)$$

نتیجه: اگر V با W یکریخت باشد W با V یکریخت است.

$$L:V\to W \quad , \forall x,y\in V$$

$$L(x\oplus y)=L(x)\boxplus L(y)$$

$$\forall c\in R \;;\; \forall x\in V \;;\; L(c\odot x)=c\odot L(x)$$

$$\forall x'\in W \quad , x'=L(x)$$

$$\Rightarrow L^{-1}(x')=L^{-1}(L(x))=x\in V$$

Subject :

Year : Month : Date :

$\forall x', y' \in W \; ; \; x' \boxplus y' = L(x \oplus y)$

$\Rightarrow L^{-1}(x' \boxplus y') = L^{-1}L(x \oplus y) = x \oplus y$

$\forall c \in R \;\&\; \forall x' \in W$

$c \odot x' = c \boxdot L(x) = L(c \odot x)$

$\Rightarrow L^{-1}(c \boxdot x') = L^{-1}L(c \odot x) = c \odot x$

• قضیه: اگر V با W و W با U یکریخت باشند آنگاه V با U یکریخت است.

• مختصات: فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد. اگر x متعلق به V باشد آنگاه: $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$

و بردار $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ را بردار مختصات x نسبت به پایه مرتب T گویند و با نماد $[x]_T$ نمایش می‌دهند.

if $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$

$$\Longleftrightarrow [x]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

مقضیه: $\forall x, y \in V ; [x \oplus y]_T = [x]_T + [y]_T$

$\forall c \in R ; x \in V ; [c \odot x]_T = c[x]_T$

برهان: فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد.

اگر x, z متعلق به V باشد. $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$

$L = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$

جمع $\Rightarrow (a_1+b_1)\alpha_1 + (a_2+b_2)\alpha_2 + \dots + (a_n+b_n)\alpha_n$

$[x \oplus y]_T = [x]_T + [y]_T$

مقضیه: $x = \theta$ اگر $[x]_T = 0$ و بالعکس.

فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots,]_n$ در اینصورت $x = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = \theta$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \quad \Rightarrow [x]_T = 0$

$0 = [x]_T \Rightarrow 0 \times \alpha_1 + \dots + 0 \times \alpha_n = 0 \Rightarrow x = 0$

مقضیه مهم: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $X' = \{[x_1]_T, \dots, [x_k]_T\}$ مستقل خطی باشد.

$a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

$\Rightarrow 0 \times [a_1]_T + \dots + 0 \times [a_k]_T = 0$

Subject :
Year : Month : Date :

وازاینرو X مستقل خطی است. بالعکس

$a_1[x_1]_T+\dots+a_k[x_k]_T=0 \Rightarrow a_1=\dots=a_k=0$

X مستقل خطی است.

• قضیه: V_n یک فضای برداری باشد آنگاه V_n با $\mathbb{R}^n$ یکریخت است.

زیرا اگر فرض کنیم $T=[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ یک پایه مرتب برای V_n و تعریف کنیم

$\forall x\in V_n \; ; L(x)=[x]_T\in\mathbb{R}^n$

L پوشا و یک به یک و دارای دو خاصیت در تعریف یکریختی می‌باشد.

• قضیه: اگر $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^m$ یکریخت باشد آنگاه $n=m$ و بالعکس.

• قضیه: فضاهای برداری V و W یکریختند اگر $dim(V)=dim(W)$.

اثبات: توجه کنید اگر V با $\mathbb{R}^n$ یکریخت باشد آنگاه $dim(V)=n$. از طرفی فرض کنید V با $\mathbb{R}^n$ و W با $\mathbb{R}^m$ یکریخت باشد.

$W\to\mathbb{R}^m$

① ; ② $W\to V\to\mathbb{R}^n$

$V\to\mathbb{R}^n$

$② \Rightarrow W\to\mathbb{R}^n \Rightarrow dim(W)=n$

$\Rightarrow dim(V)=n \Rightarrow dim(V)=dim(W)$

$dim(W)=dim(V)=n \Rightarrow V\to\mathbb{R}^n$

$W\to\mathbb{R}^m \Rightarrow W\to V$

Subject :
Year : Month : Date :

ماتریس انتقال:

فرض کنید T و S دو پایه مرتب متفاوت برای فضای برداری V باشند. اگر برای مختصات برداری چون $x \in V$ نسبت به T برای $[x]_T$ می‌خواهیم $[x]_S$ را بدست آوریم.

برای این کار فرض کنید $T=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ در اینصورت $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n$

چون α_1 و α_2 و ... و α_n خود بردارهایی از V می‌باشند.

با فرض $S=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ آنگاه $[\alpha_1]_S=\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$ (یعنی اگر $\alpha_1=c_{11}\beta_1+c_{21}\beta_2+\dots+c_{n1}\beta_n$) به همین طریق

$$[\alpha_2]_S=\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$[\alpha_n]_S=\begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[x]_S=a_1[\alpha_1]_S+a_2[\alpha_2]_S+\dots+a_n[\alpha_n]_S=C.\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

که در آن $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$ به عبارت دیگر $[x]_S=C[x]_T$

Subject :
Year : Month : Date :

مثال: فرض کنید $S=\left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$ و $T=\left[\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right]$

اولاً مختصات بردار $x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ را نسبت به T بدست آورید.

ثانیاً ماتریس انتقال از T به S را بدست آورید.

ثالثاً $[x]_S$ را بدست آورید.

$$x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$$

$$=a_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$-\begin{cases}2a_1+a_2+a_3=1\\a_1+2a_2+a_3=2\\a_1+a_2+2a_3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a_1+a_2+a_3=1\\-a_1-2a_2-a_3=-2\\a_1+a_2+2a_3=3\end{cases}$$

$$-a_2+a_3=1$$

$$a_3=1+a_2$$

$$2a_1+a_2+1+a_2=1$$

$$2a_1+2a_2=0 \Rightarrow 2a_1=-2a_2 \Rightarrow a_1=-a_2$$

$$-a_2+a_2+(1+a_2)2=3$$

$$2+2a_2=3 \Rightarrow 2a_2=1 \Rightarrow \boxed{a_2=\frac{1}{2}}$$

$$a_1=-\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow [x]_T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: ....

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = c_{11}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_{21}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_{31}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow c_{11} = ۲ \text{ و } c_{21} = ۱ \text{ و } c_{31} = ۱$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = c_{12}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_{22}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_{32}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow c_{12} = ۱ \text{ و } c_{22} = ۲ \text{ و } c_{32} = ۱$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = c_{13}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_{23}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_{33}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow c_{13} = ۱ \text{ و } c_{23} = ۱ \text{ و } c_{33} = ۲$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

• قضیه: ماتریس انتقال یکتاست، زیرا اگر $C \neq D$ و ماتریس انتقال از T به S باشند آنگاه:

$$[x]_S = C[x]_T$$

$$[x]_S = D[x]_T$$

$$\Rightarrow C[x]_T - D[x]_T = \theta \Rightarrow (C-D)[x]_T = \theta$$

$$\Rightarrow M[x]_T = 0 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow C = D$$

• قضیه: C وارون‌پذیر است،

و در نتیجه C وارون‌پذیر است. $C[x]_T = \theta \Rightarrow [x]_T = \theta$

قضیه: اگر ماتریس انتقال از T به S، C باشد، آنگاه ماتریس انتقال از S به T، C^{-1} است. زیرا:

$$[x]_S = C[x]_T$$

$$C^{-1}[x]_S = C^{-1}(C[x]_T) = [x]_T$$

مرتبه یک ماتریس:

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ باشد. مجموعه‌ی $X=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $Y=\{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$ را به ترتیب در نظر بگیرید. مجموعه X بردارهایی از فضای برداری R^m و مجموعه Y بردارهایی از فضای برداری R^n هستند.

$sp(X)$ را فضای ستونی ماتریس A و $sp(Y)$ را فضای سطری ماتریس گویند.

توجه کنید که:

۱) تعویض جای دو بردار در یک مجموعه از بردارها تأثیری در گستره آن ندارد.

۲) حاصل جمع

۳) ضرب یک بردار در عدد غیر صفر c از یک مجموعه از بردارها تأثیری در گستره آن ندارد.

قضیه: اگر $A \sim B$ آنگاه فضای سطری (ستونی) آنها با هم برابر است و بالعکس.

Subject :
Year : Month : Date :

تعریف: پایه فضای سطری A را رتبه سطری A گویند. پایه فضای ستونی A را رتبه ستونی A گویند.

قضیه: رتبه سطری (ستونی) A برابر رتبه سطری یا ستونی B است اگر و تنها اگر $A \sim B$

قضیه: رتبه سطری یک ماتریس برابر رتبه ستونی آن ماتریس

تعریف: رتبه ماتریس A را با نماد $r(A)$ نمایش می‌دهیم و آن برابر است با رتبه سطری A (رتبه ستونی A)

واضح است که اگر $[A]_{m\times n}$ آنگاه $r(A) \leq Min(m,n)$

تعریف: اگر $r(A) = Min(m,n)$، A را پر رتبه گویند.

واضح است که اگر $[A]_{n\times n}$ پر رتبه باشد آنگاه $A \sim I$ و در نتیجه A وارون‌پذیر و بالعکس.

و واضح است که اگر B و C نامنفرد باشند آنگاه:

$$r(BA) = r(CA) = r(A) \qquad B \sim I \sim C \Rightarrow BA \sim CA \sim A.$$

برهان قضیه: باید نشان دهیم که تعداد بردارهای واقع در پایه‌ی فضای سطری با تعداد بردارهای واقع در پایه فضای ستونی یکی است.

فرض کنید
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
و $X = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ یک پایه برای فضای ستونی

A باشد.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = c_{11}B_1 + c_{12}B_2 + \cdots + c_{1r}B_r$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = c_{21}B_1 + c_{22}B_2 + \cdots + c_{2r}B_r$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = c_{n1}B_1 + c_{n2}B_2 + \cdots + c_{nr}B_r$$

در واقع

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_{r1} \begin{bmatrix} \beta_{1r} \\ \beta_{2r} \\ \vdots \\ \beta_{mr} \end{bmatrix}$$

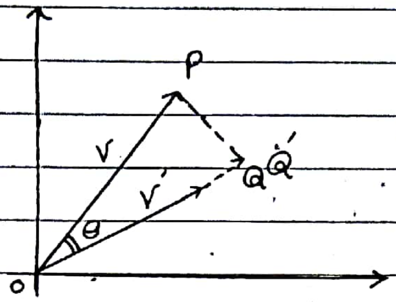
$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = c_{1n} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + c_{rn} \begin{bmatrix} \beta_{1r} \\ \beta_{2r} \\ \vdots \\ \beta_{mr} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

تصویر یک بردار:

به شکل زیر توجه کنید



بردار OQ' را تصویر بردار OP بر بردار OQ گویند و با نماد $OQ' = proj_{OQ}^{OP}$ نمایش می‌دهند

در واقع تصویر بردار V بر بردار V' برداری است هم جهت با V' که فاصله انتهای آن از بردار V کمترین

مقدار است یا به عبارت دیگر انتهای آن پای عمودی است که از V بر V' فرود می‌آید.

$$\cos\theta = \frac{|OQ'|}{|OP|}$$ زیرا $\underbrace{|OQ'|}_{proj_{V'}^{V}} = \underbrace{|OQ|}_{|V|} \cos\theta$

از آنجایی که $\cos\theta = V'.V / (\sqrt{V'V'}\sqrt{VV})$

$$\Rightarrow |OQ'| = |OP| . (V.V') / (\sqrt{V'.V'}\sqrt{V.V})$$

یعنی $|OP| = \sqrt{V.V}$

از طرفی طبق تعریف تصویر بردار $|OQ'| = C.|OQ|$

و چون $|OQ| = \sqrt{V'V'}$ پس $|OQ'| = C.\sqrt{V'V'}$

$$\Rightarrow C.\sqrt{V'V'} = \sqrt{V.V} . \frac{V'V}{\sqrt{V'V'}\sqrt{V.V}} \Rightarrow C = \frac{V'V}{(V'V')}$$

$$\Rightarrow proj_{V'}^{V} = \left(\frac{V'.V}{|V|^2}\right) V'$$

Subject :
Year : Month : Date :

در فرآیند گرام-اشمیت دیدیم که اگر $T=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد آنگاه $S=\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ یک پایه متعامد برای V است اگر طبق فرآیند گرام-اشمیت داشته باشیم:

$$\beta_1=\alpha_1 \Rightarrow \beta_2=\alpha_2-\left(\frac{\beta_1\alpha_2}{|\beta_1|^2}\right)\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\left(\frac{\beta_1\alpha_3}{|\beta_1|^2}\right)\beta_1-\left(\frac{\beta_2\alpha_3}{|\beta_2|^2}\right)\beta_2$$

یعنی

$\beta_1=\alpha_1$ $\beta_2=\alpha_2-($ تصویر α_2 بر $\beta_1)$

$\beta_3=\alpha_3-($ تصویر α_3 بر $\beta_1)-($ تصویر α_3 بر $\beta_2)$

مثال: فرض کنید $V_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $V_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ در اینصورت

$$proj_{V_2}^{V_1}=\left(\frac{V_1\cdot V_2}{|V_2|^2}\right)V^2=\left(\frac{4}{4}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $V_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $V_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ در اینصورت

$$proj_{V_2}^{V_1}=\left(\frac{V_1\cdot V_2}{|V_2|^2}\right)V^2=\left(\frac{7}{13}\right)\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{13}\\\frac{14}{13}\end{bmatrix}$$

از تعریف دیدیم که $proj_{V_2}^{V_1}$ برداری است به صورت CV_2 به طوری که فاصله آن از V_1 کمترین است.

فاصله $proj_{V_2}^{V_1}$ از V_1 برابر است با $|proj_{V_2}^{V_1}-V_1|=|CV_2-V_1|$

اگر $F(C)=|CV_2-V_1|^2=(CV_2-V_1)(CV_2-V_1)$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\Rightarrow f(c) = c^2|v_2|^2 - cv_1v_2 - cv_1v_2 + |v_1|^2$$

$$= c^2|v_2|^2 - 2cv_1v_2 + |v_1|^2$$

$$\Rightarrow 0 = f'(c) = 2c|v_2|^2 - 2v_1v_2$$

$$\Rightarrow c = \frac{v_1v_2}{|v_2|^2} \Rightarrow proj_{v_2}^{v_1} = \left(\frac{v_1v_2}{|v_2|^2}\right)v_2$$

فرض کنید V یک فضای برداری و x یک بردار از این فضای برداری باشد و W یک زیرفضای برداری از این فضای برداری باشد. منظور از تصویر x بر W برداری از W است که دارای کمترین فاصله با x است و آن را با $proj_W^x$ نمایش می‌دهیم.

حال فرض کنید $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد برای W باشد. اگر $y \in W$ باشد، آنگاه

$$y = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$$

اگر قرار باشد y تصویر x بر W باشد، باید فاصلهٔ y از x مینیمم باشد یعنی $|x-y|$ کمترین مقدار باشد. باید عبارت $(x-y)(x-y) = |x-y|^2$ کمترین باشد.

$$(x-y) = [x - (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n)]$$

$$\Rightarrow (x-y)(x-y) = \left[x - \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right]\left[x - \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right]$$

$$= |x|^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j$$

توجه کنید

Subject :
Year : Month : Date :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{n} c_j\alpha_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\alpha_i\alpha_j c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

زیرا $\alpha_i\alpha_i = 1$ و $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$ $i \neq j$

در نتیجه

$$|x-y|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + |x|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_i^2 - 2x c_i x_i) + |x|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_i^2 - 2x c_i x_i + |x\alpha_i|^2 - |x\alpha_i|^2) + |x|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_i - |x.\alpha_i|)^2 - \sum_{i=1}^{n} |x\alpha_i|^2 + |x|^2$$

$$\Longrightarrow \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n \;;\; c_i = |x\alpha_i|$$

$|x\alpha_i|$ مختصات x نسبت به T است.

Subject :
Year : Month : Date :

$$\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3 - \beta_1 \cdot \left(\frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{|\beta_1|^2}\right) - \beta_2 \left(\frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{|\beta_2|^2}\right)$$

$\vdots$

$$\beta_k = \alpha_k - \beta_1 \left(\frac{\alpha_k \beta_1}{|\beta_1|^2}\right) - \dots - \beta_{k-1} \left(\frac{\alpha_k \beta_{k-1}}{|\beta_{k-1}|^2}\right)$$

از این رو از مجموعه بردارهای $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ مجموعه متعامد $Y = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را ساختیم و توجه کنید که $sp(X) = sp(Y)$ و Y یک پایه متعامد برای $sp(X)$ است به شرط آنکه X یک پایه برای $sp(X)$ باشد.

مثال: میدانیم که $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ یک پایه R^3 است. با استفاده از فرآیند گرام اشمیت یک پایه متعامد از روی X برای R^3 بسازید.

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \beta_1 \left(\frac{\alpha_2 \beta_1}{|\beta_1|^2}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{-4}{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{-4}{6} \end{bmatrix} = \frac{66}{36} = \frac{11}{6}$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \beta_1 \left(\frac{\beta_1 \alpha_3}{|\beta_1|^2}\right) - \beta_2 \left(\frac{\beta_2 \alpha_3}{|\beta_2|^2}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{5}{6}\right) - \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{-4}{6} \end{bmatrix} \left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{6}}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{10}{6} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{35}{66} \\ \frac{5}{66} \\ \frac{-20}{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{66} \\ \frac{-10}{66} \\ \frac{-10}{66} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{60}{66} \\ -\frac{90}{66} \\ -\frac{90}{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{66} \\ -\frac{24}{66} \\ -\frac{24}{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 + C_3 = 0 \\ 2C_1 + C_2 + C_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} C_2 - C_3 = 0 &\Rightarrow C_2 = C_3 \\ C_1 - C_2 = 0 &\Rightarrow C_1 = C_2 \end{aligned}$$

نکته: بردارهای متعامد مستقل خطی هستند.

مثال: $X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ و $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(\frac{12}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Subject :

Year : Month : Date :

نامساوی کشی - شوارتز:

اگر x و y متعلق به فضای اقلیدسی V_n باشند آنگاه $(x.y) \le |x||y|$

برهان: فرض کنید $Z = tx + y$ در این صورت:

$$0 \le Z^2 = (tx+y)(tx+y)$$

$$= t^2 x.x + y.y + 2t x.y$$

$$= t^2|x|^2 + 2t x.y + |y|^2$$

$$\Delta = 4|x.y|^2 - 4|x|^2|y|^2 \le 0$$

$$\Rightarrow |x.y|^2 \le |x|^2|y|^2$$

$$\Rightarrow (x.y) \le |x||y|$$

نامساوی مثلث: $|x+y| \le |x|+|y|$

زیرا: $|x+y|^2 = (x+y)(x+y) = |x|^2 + 2xy + |y|^2$

$$\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$= (|x|+|y|)^2$$

$$\Rightarrow |x+y| \le |x|+|y|$$

$$|x+y| \le |x|+|y| \Rightarrow |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y|$$

Subject :
Year : Month : Date :

حال فرض کنید $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ، قرار دهید: $\beta_1 = \alpha_1$ و β_2 را یک ترکیب خطی از α_2 و β_1 بگیریم بطوریکه بر β_1 عمود باشد.

یعنی: ۱) $\beta_2 = a_1\beta_1 + a_2\alpha_2$ ۲) $\beta_1 \cdot \beta_2 = 0$

$$\Rightarrow \beta_1\beta_2 = \beta_1(a_1\beta_1 + a_2\alpha_2) = 0$$

$$\Rightarrow a_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + a_2\alpha_2\beta_1 = 0$$

فرض کنید $a_2 = 1$ در نتیجه

$$a_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + \alpha_2\beta_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{(\beta_1\beta_1)}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{(\beta_1\beta_1)} \cdot \beta_1 + \alpha_2$$

حال β_3 را یک ترکیب خطی از α_3 و β_2 و β_1 می‌گیریم بطوریکه بر β_2 و بر β_1 عمود باشد

یعنی

$$\begin{cases} \beta_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3 \\ \beta_1(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3) = 0 \\ \beta_2(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + b_2\cancel{(\beta_1 \cdot \beta_2)} + b_3\alpha_3\beta_1 = 0 \\ b_1\cancel{(\beta_1 \cdot \beta_2)} + b_2(\beta_2 \cdot \beta_2) + b_3\alpha_3\beta_2 = 0 \end{cases}$$

فرض کنید $b_3 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{\alpha_3\beta_1}{(\beta_1 \cdot \beta_1)} \\ b_2 = \frac{\alpha_3\beta_2}{(\beta_2 \cdot \beta_2)} \end{cases}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$[x]_T' \, C \, [y]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1$$

• تعریف: مجموعه $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از بردارهایی که دو به دو بر هم عمودند را یک مجموعه متعامد از بردارها گویند و اگر طول بردارها یک باشد، X را یک مجموعه یکه متعامد از بردارها گویند.

توجه: اگر x یک بردار باشد، $y = \frac{1}{|x|} x$ برداری است به طول ۱.

• قضیه: هر مجموعه متعامد از بردارهای غیر صفر، مستقل خطی است و در نتیجه یک پایه برای گستره خود می‌باشد.

برهان: فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ یک مجموعه از بردارهای غیر صفر متعامد باشد که در این صورت:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \theta$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) = x_1 \cdot \theta$$

$$\Rightarrow c_1 \cdot x_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot \underbrace{\cancel{x_1 x_2}}_{0} + \dots + c_n \cdot \underbrace{\cancel{x_1 x_n}}_{0} = x_1 \cdot \theta$$

$$\Rightarrow c_1 |x_1|^2 = x_1 \cdot \theta = 0$$

زیرا

Subject :

Year : Month : Date :

$$(-1)\theta x = (-\theta)x = \theta x \Rightarrow \theta x = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ پس X مستقل خطی است.

حال فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه متعامد یکه برای V_n باشد.

$$\forall x \in V_n ,\quad x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots a_n\alpha_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 x = a_1|\alpha_1|^2 + a_2\alpha_1\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 x = a_1$$

بعبارتی $a_i = x.\alpha_i \; ; \; i = 1, 2, \dots, n$ یعنی

$$[x]_T = \begin{bmatrix} x\alpha_1 \\ x\alpha_2 \\ \vdots \\ x\alpha_n \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه متعامد یکه برای V_n باشد.

$$\forall x, y \in V_n \quad \exists \quad x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$$

$$y = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$$

$$\Rightarrow x.y = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = [x]_T [y]_T$$

زیرا

$$x.y = (a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n)(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n)$$

$$= a_1\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + a_2\alpha_2 \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + \dots + a_n\alpha_n \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\Rightarrow |OV_1||OV_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$$

$|OV_1||OV_2|\cos\theta$ را ضرب داخلی دو بردار V_1 و V_2 گوییم و می‌نویسیم:

$$V_1 \cdot V_2 = |OV_1||OV_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$$

توجه کنید $V_1 \cdot V_1 = x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1$

$$\Rightarrow |OV_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$V_2 \cdot V_2 = x_2^2 + y_2^2 \Rightarrow |OV_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{\sqrt{V_1 \cdot V_1}\sqrt{V_2 \cdot V_2}}$$

اگر فرض کنیم $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ از آنجا که $V_1 \cdot V_2 = [x_1x_2 + y_1y_2]$ بدون در نظر گرفتن تفاوت مابین یک ماتریس تک عضوی و یک عدد حقیقی گاهی به جای $V_1 \cdot V_2$ می‌نویسیم V_1V_2

توجه کنید:

۱) $V \cdot V > 0$ ۲) $V_1 \cdot V_2 = V_2 \cdot V_1$

۳) $V_1 \cdot (V_2 + V_3) = V_1V_2 + V_1V_3$ ۴) $CV_1 \cdot V_2 = C(V_1 \cdot V_2)$

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری باشد به طوری که عمل ضرب به صورت زیر باشد

$$V \times V \rightarrow R$$

Subject :
Year : Month : Date :

... وطول این بردار خاصیت فوق باشد. در اینصورت عمل فوق را ضرب درونی تعریف شده بر V گویند و V را یک فضای اقلیدسی نامند.

بر یک فضای برداری چندین ضرب درونی را می‌توان تعریف کرد که ضرب درونی فوق را ضرب درونی متعارف گویند.

از آنجا که $0 = \cos\frac{\pi}{2}$ اگر x و y دو بردار باشند بطوریکه $0 = \langle x, y \rangle$ گوییم x و y متعامد می‌باشند. توجه کنید بردار صفر بر تمامی بردارهای فضای برداری عمود است.

فرض کنید a و b دو بردار از فضای برداری $\mathbb{R}^n$ و $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ یک ماتریس باشد، در اینصورت $a^t . C . b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$

زیرا

$$a^t . C . b = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} b_j \\ \sum_{j=1}^{n} c_{2j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{nj} b_j \end{bmatrix} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad ; \; d_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$$

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید V یک فضای برداری و $T=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب برای این فضای برداری باشد و فرض $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n$ و $y=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\dots+b_n\alpha_n$ دو بردار از این فضای برداری باشند. در اینصورت

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \sum_{j=1}^{n} b_j\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\alpha_i\alpha_j b_j$$

فرض کنید

$$C_{ij}=\alpha_i\alpha_j \Rightarrow x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$$

از طرفی:

$$[x]_T=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \text{ و } [y]_T=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

و طبق مطالب قبل $x\cdot y=[x]_T' C[y]_T$

از آنجا که $\alpha_i\alpha_j=\alpha_j\alpha_i \Longrightarrow C_{ij}=C_{ji}$ یعنی C یک ماتریس متقارن است.

ماتریس C را ماتریس حاصلضرب درونی V براساس پایه مرتب T گویند.

توجه کنید که C یک ماتریس متقارن است که $a'Ca>0$ و $\forall a\neq 0 ; a\in R^n$

و در اینصورت C را یک ماتریس مثبت مطلق گویند. $a'Ca$ را فرم درجه دو گویند.

$$x\cdot y=[x]_T' C[y]_T \qquad C^{-1}[x]_S=[x]_T$$

$$\Rightarrow x\cdot y=(C^{-1}[x]_S)' C(C^{-1}[y]_S)$$

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید $T=\left[\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right]$ یک پایه مرتب برای $\mathbb{R}^3$ باشد و فرض کنید $x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ و $y=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس حاصلضرب درونی $\mathbb{R}^3$ نسبت به T به صورت $\begin{bmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{bmatrix}$

برای اینکه $[x]_T$ را بیابیم:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{cases}a_1+2a_2+a_3=1\\2a_1+a_2+a_3=1\\a_1+a_2+2a_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}a_1+2a_2+a_3=1\\-2a_1-a_2-a_3=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow -a_1+a_2=0 \Rightarrow a_1=a_2$$

$$2a_2+2a_3=0 \Rightarrow a_3=-a_2$$

$$a_2=\frac{1}{2}\qquad a_3=\frac{-1}{2}\qquad a_1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow [x]_T=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}\qquad [y]_T=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

و در نتیجه: $x^t y=[1\ 1\ 0]\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=1$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\Rightarrow A=[a_1,a_2,\dots,a_n]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mr}\end{bmatrix}\times\begin{array}{c}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rn}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} C'_1\\ C'_2\\ \vdots\\ C'_r\end{array}$$

با فرض اینکه $T=\{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$ ضمیمه برقرار است.

دیدیم که اگر $A\sim B \iff r(A)=r(B)$ *

نتیجه: معادله $Ax=b$ دارای جواب یکتاست؛ اگر $A\sim[A\vdots b]$

زیرا معادله فوق دارای جواب یکتاست اگر از * نتیجه می‌شود که برای یافتن رتبه یک ماتریس آن را تبدیل به یک ماتریس پلکانی کاهش یافته می‌کنیم.

یعنی اگر:

$$A\sim\left[\begin{array}{c:c} I_k & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]$$

آنگاه رتبه ماتریس A برابر k است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{-2}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{-3}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -4 & -1 & \frac{7}{2}\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{8}\\4&0&0&1\end{bmatrix}\qquad\sim\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{8}\\0&-8&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{8}\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}\qquad\sim\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{8}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

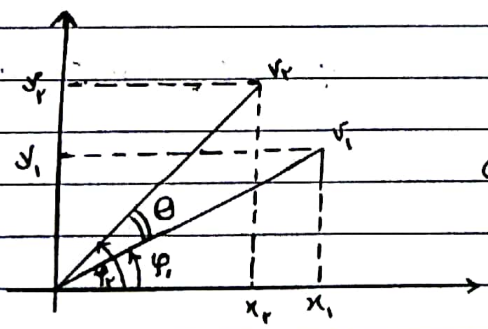
$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{12}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{8}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

فضاهای اقلیدسی:

در علم مکانیک بردار به کمیتی دارای جهت و اندازه گفته می‌شود.

حال اکنون سعی داریم مفاهیمی که در مکانیک بکار می‌بریم را به جبر خطی مجرد تعمیم دهیم.

به شکل زیر توجه کنید. فرض کنید v_1 و v_2 دو بردار در فضای برداری باشند.



$$\cos(\theta)=\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$=\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\sin\varphi_2\sin\varphi_1$$

$$\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{x_2}{|ov_2|}\,\frac{x_1}{|ov_1|}+\frac{y_2}{|ov_2|}\,\frac{y_1}{|ov_1|}$$

Subject :
Year : Month : Date :

• تعریف: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ آنگاه $|A|=|A^T|$

و $i=1,2,\dots,n$ $\qquad |A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$

که در آن $|A_{ij}|$ دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام A بدست آمده است.

به طور مثال فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$|A|=(-1)^2 a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^3 a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^4 a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^5 a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

مقصود: $|A|=|A^T|$

زیرا $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ji}|A'_{ji}|=|A^T|$

Subject :
Year : Month : Date :

• دترمینان:

دترمینان عددی است که به یک ماتریس مربع نسبت داده می‌شود.

• تعریف: فرض کنید $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ یک ماتریس مربع از مرتبه دو باشد. دترمینان

ماتریس A را با نماد $|A|$ نمایش می‌دهیم.

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

• تعریف: فرض کنید $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ آنگاه $|A|=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$

یعنی اگر $i=1$ بگیریم آنگاه $|A|=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|+(-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}|+(-1)^{1+3}a_{13}|A_{13}|$ *

توجه کنید $|A_{ij}|$ دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A

بدست آمده باشد.

* برابر است با $=(-1)^{2}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{3}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{4}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

فرمول * را بسط دترمینان A برحسب سطر iام گویند.

• قضیه: بسط دترمینان A برحسب سطر iام برابر است با بسط دترمینان A برحسب

سطر kام.

• قضیه: بسط دترمینان A برحسب سطر iام مساوی است با بسط دترمینان برحسب ستون

jام.

Subject :
Year. Month.

قضیه: فرض کنید B ماتریس A باشد به طوری که سطر iام آن در عدد c ضرب شده باشد. در این صورت $|B|=c|A|$

$$|B|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}|B_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}ca_{ij}|A_{ij}|=$$

$$=c\sum_{j=1}^{n}(-1)a_{ij}|A_{ij}|=c|A|$$

فرض کنید B ماتریس A باشد که جای سطر $i+1$ و iام آن عوض شده باشد.

قضیه: اگر جای دو سطر متوالی یک ماتریس عوض شود دترمینان در -1 ضرب می‌شود.

$$|B|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}|B_{ij}|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i+1,j}|A_{i+1,j}|$$

$$=(-1)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i+1,j}|A_{i+1,j}|=-|A|$$

نتیجه: اگر جای دو ستون متوالی یک ماتریس عوض شود دترمینان آن در یک منفی ضرب می‌شود.

قضیه: اگر جای دو سطر یک ماتریس عوض شود به تعداد عدد فردی جای سطرهای

Subject :
Year.　　Month.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A=\sum_{j=1}^{۳}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \qquad i=1$$

$$(-1)^{۲}۴\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}+(-1)^{۳}۵\begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}+(-1)^{۴}۳\begin{vmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۱۲-۳۵-۳=-۲۶$$

قضیه: اگر A یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی باشد، آنگاه $|A|=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$

زیرا اگر A پایین مثلثی باشد $|A|=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|$

از طرفی $|A_{11}|=(-1)^{۲+۲}a_{۲۲}|A'_{۲۲}| \Rightarrow |A|=a_{11}(a_{۲۲}|A'_{۲۲}|)\dots=a_{11}a_{۲۲}\dots a_{nn}$

و اگر A بالا مثلثی باشد A^T پایین مثلثی است و چون $|A|=|A^T|$ پس قضیه به اثبات می‌رسد.

نتیجه: اگر A یک ماتریس قطری باشد $|A|=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & 0 & \dots & 0 \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n۲} & a_{n۳} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

SINACO

Subject :
Year. Month.

ستون‌ها عوض می‌شود.

نتیجه: اگر جای دو سطر یک ماتریس عوض شود، دترمینان آن در یک منفی ضرب می‌شود.

(برای ستون هم صدق می‌کند)

قضیه: فرض کنید مضربی از سطر kام A به اضافه سطر iام آن شده است.

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} |B_{ij}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (c a_{kj} + a_{ij}) |A_{ij}|$$

$$= \cancel{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c a_{kj} |A_{ij}|} + \cancelto{A}{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|}$$

قضیه: فرض کنید ماتریس B همان ماتریس A باشد بطوری که مضربی از یک سطر آن با سطر دیگر جمع شده باشد در اینصورت $|B| = |A|$

برهان: فرض کنید c برابر سطر iام را با سطر kام جمع بسته‌ایم.

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} |B_{ij}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (c a_{kj} + a_{ij}) |A_{ij}|$$

Subject :
Year. Month.

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c a_{kj} |A_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$= c \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| + |A|$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}|$$ کافیست نشان دهیم

ابتدا توجه کنید که اگر دو سطر یک ماتریس با هم برابر باشند دترمینان ماتریس صفر است

زیرا $|A| = -|A| = 0$

حال فرض کنید سطر iام و سطر kام ماتریس A با هم برابر باشند در این صورت

$$0 = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}|$$

نتیجه: اگر یک سطر ماتریس A صفر باشد آنگاه $|A| = 0$

مقدمه: دترمینان ماتریس مقدماتی سطری غیرصفر است. زیرا $|I| = 1$

۱) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض جای دو سطر باشد آنگاه

$$|E| = -|I| = -1$$

۲) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب عدد $c \neq 0$ در یک سطر باشد

$$|E| = c|I| = c$$

SINACO

Subject :
Year. Month.

۳) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از جمع یک سطر با مضربی از سطر دیگر باشد:

$$|E| = |I| = 1$$

قضیه: فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی سطری و A یک ماتریس باشد:

$$|EA| = |E||A| \quad \text{و} \quad |AE| = |A||E|$$

نتیجه: اگر E_r و ... و E_2 و E_1 ماتریس های مقدماتی سطری باشند و A یک ماتریس مربع باشد:

$$|E_r \cdots E_1 A| = |E_r| \cdots |E_1||A|$$

قضیه: ماتریس مربع A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq 0$

برهان: فرض کنید $|A| \neq 0$ و A منفرد باشد. چون A منفرد است پس

$$A = E_r E_{r-1} \cdots E_1 C$$

که در آن C حاصل دارای یک سطر صفر است $\Rightarrow |A| = |E_r E_{r-1} \cdots E_1 C|$

$= |E_r| \cdots |E_1||C| = 0$ و این خلاف فرض است

از طرفی فرض کنید A وارون پذیر باشد در اینصورت $A = E_r \cdots E_1 I$

$\Rightarrow |A| \neq 0$

SINACO

Subject :
Year. Month.

• قضیه: اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند $|A\cdot B|=|A||B|$

• برهان: فرض کنید A وارون پذیر باشد پس $A=E_k\cdots E_1$

$$\Rightarrow |A\cdot B|=|E_k\cdots E_1B|=|E_k\cdots E_1||B|=|A||B|$$

فرض کنید A منفرد باشد در اینصورت $A\cdot B=E_k\cdots E_1CB$

و CB ماتریسی است که یک سطر آن صفر است.

در اینصورت $|A\cdot B|=|A||B|$ ، $|A||B|=0$ و $|A\cdot B|=0$

• ماتریس الحاقی: فرض کنید $\overset{*}{a}_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$

$$\Rightarrow |A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overset{*}{a}_{ij}$$

توجه کنید که اگر $A^*=[\overset{*}{a}_{ij}]_{n\times n}$ آنگاه

$$A'A^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n}\\ a^*_{21} & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a^*_{n1} & a^*_{n2} & \cdots & a^*_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{i1}a^*_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{i1}a^*_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{i1}a^*_{in}\\ \sum_{i=1}^{n}a_{i2}a^*_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{i2}a^*_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{i2}a^*_{in}\\ \vdots & & & \\ \sum_{i=1}^{n}a_{in}a^*_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{in}a^*_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{in}a^*_{in}\end{bmatrix}$$

توجه کنید $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a^*_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=|A|$


مهندس محمد حمیدی
رتبه برتر کنکور سراسری تجربی و ریاضی
رتبه ۱۷ ارشد پزشکی
رتبه ۲۷ ارشد ریاضی (آنالیز)
رتبه ۲۸ بیوانفورماتیک
رتبه ۲۱ ارشد ریاضی کاربردی
رتبه ۳۲ علوم داده
رتبه ۳۲ ارشد ریاضی (رمز کد)
رتبه ۵۰۰ مهندسی کامپیوتر
عضو انجمن ریاضی ایران
طراح ریاضی تمام آزمون‌های آزمایشی کانون، ماز ، سنجش، گاج و...
عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران
مؤلف کتاب ریاضی ریتیچ، کانون هندسه ۱-۲ ماز ، پیام نور و ۱۵۶۰ تست
عضو بنیاد ملی نخبگان کشور
مدرس برتر کشوری و مدرس پروازی ریاضی
طراح ریاضی مسابقات و انجمن ریاضی ایران وسنجش
۰۹۱۴۷۱۳۳۶۸۷
math_hamidi