ریاضی یازدهم تجربی

علوم تجربی

مخصوص داوطلبان کنکور و امتحانات نهایی

جزوه سطح دشوار برای رتبه های زیر ۱۰۰۰

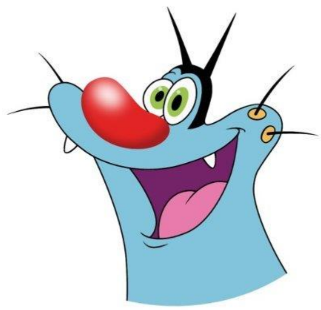
مولفین : گروه ریاضی با سرپرستی استاد میعاد دارستانی

تدریس آنلاین و حضوری دروس تخصصی تجربی در اکثر نقاط کشور

استاد میعاد دارستانی با سابقه ی تدریس ۱۰ ساله و عضو دیپارتمان طراحان آزمون های آزمایشی سازمان سنجش

جزوه ی ریاضیات یازدهم تجربی استاد میعاد دارستانی

اصل
جای داده
جز با تکرار
رسیدن
پس از



دکترین و پرستارهای محترم!!! ورود شما رو به ریاضیات یازدهم تبریک عرض می کنم. میشه گفت که داستان ریاضی تجربی ، همین ریاضی ۲ یازدهم می باشد که مسائل اساسی ریاضی یعنی تابع را در خود است. مباحث ریاضیات ۲ از مباحث آسون حساب میشه . کلا خیالیتون رو راحت کنم که ریاضی درسیه که و تمرین فراوان نمیشه اصلا در اون تسلط پیدا کرد. پس تست های منتخب این جزوه که صرفا برای شما به تسلط انتخاب شده رو حتما جدی بگیرد. امیداورم که با قبولیتون دل پدر و مادر و خانوادتون رو یک دوره ی سخت از زندگی شاد کنید. انشا الله.

توی این جزوه مباحث رو به چند سطح بیان کردیم. اول در سطح سوالات امتحانی کلاسی تالیفی. دوم نمونه سوال های امتحانی پایانی مدارس برتر کشور و سوم در سطح سوالات کنکور سراسری.تمامی نکاتی که ممکنه برای یک فصل مطرح بشه رو به صورت کامل در جزوه بیان کرده ایم.

البته هیچ جزوه ای خالی از ایراد و کم و کاستی نیست . شما می تونید این جزوه رو پرینت گرفته و در گوشه کنار جزوه مطالبی را که به نظرتون مفیده یادداشت کنید و به جزوه اضافه کنید.

نظرات و پیشنهادات خودتون رو میتونید با مهندس دارستانی با شماره تلفن ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷ در میان بگذارید.

بی جهد به عالم معانی نرسی

زنده به حیات جاودانی نرسی

تا همچو خلیل به آتش اندر نشوی

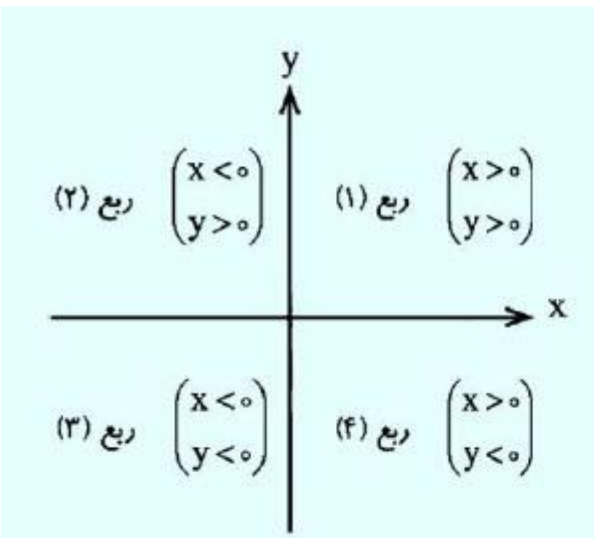
چون خضر به آب زندگانی نرسی

فصل ۱

هندسه تحلیل و جبری

یادگیری معادله خط و قوانین مربوط به خط علاوه بر انواع فصول ریاضی ، در درس فیزیک هم بسیار به کارتون میاد . خیلی از مسائل فصل حرکت شناسی فیزیک با کمک مفاهیم معادله خط قابل حل میشوند.

دستگاه مختصات : این دستگاه متشکل از دو محور عمود بر هم x و y می باشد که صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می کند. مختصات هر نقطه در داخل این صفحه به صورت (x,y) میباشد که یک نقطه یا یک زوج مرتب نامیده می شود.



*اگر نقطه ای روی محور x ها باشد مختصات عرض آن صفر است و به صورت (x,۰) می باشد.

*اگر نقطه ای روی محور y ها باشد طول آن نقطه صفر است و به صورت (۰,y) می باشد.

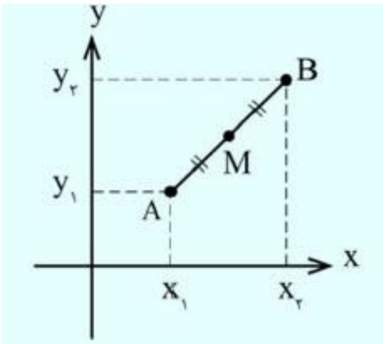
فاصله ی دو نقطه از یکدیگر:

فاصله ی دو نقطه به مختصات دلخواه (x_A, y_A) و (x_B, y_B) در محور مختصات به صورت زیر است.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ - (y_A - y_B)^۲}$$

مختصات وسط دو نقطه (وسط یک پاره خط)

مختصات وسط یک پاره خط یا میان دو نقطه برابر است با میانگین طول ها و عرض های آن دو نقطه .



$$x_m = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

- در تعدادی از سوالات محیط یا مساحت یک شکل فرضی در صفحه ی مختصات را مد نظر دارند. برای حل این سوالات از فاصله ی دو نقطه یا فاصله ی نقطه از خط و .... استفاده خواهیم کرد تا مجهولات مسائل پیدا شود.

مثال (امتحان نهایی)

نقاط $A(۰.۳)$ و $B(۴.۰)$ و $c(۰.۰)$ سه راس یک مثلث قائم الزاویه هستند که زاویه ی قائم در راس c قرار دارد. اندازه ی وتر را بیابید.

برای بعضی سوالات حلی امتحان نهایی سعی میکنیم نمره گذاری کنیم تا یاد بگیرید که چطوری برای امتحان نهایی بنویسید.

حل: خیلی آسان می توان پی برد که فاصله ی دو نقطه ی Aو B وتر را نشان می دهد.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ - (y_A - y_B)^۲} \quad (۰.۲۵)$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ - (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۰ - ۴)^۲ + (۳ - ۰)^۲} = ۵ \qquad (۱)$$

نوشتن فرمول ها رو در امتحان نهایی فراموش نکنید.

مثال (امتحان نهایی)

نقاط $A(-۳,۰)$ و $B(۶,۱۰)$ و $c(۰.۵ , -۲)$ سه راس یک مثلث هستند . اندازه ی میانه ی وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

پاسخ: اولا میانه پاره خطی که ضلع رو به ۲ قسمت مساوی تقسیم می کند. یک سوال معروف که مشابه تمرین کتابتون هم هست. ابتدا ما باید با توجه به نقاط b و c وسط ضلع BC رو پیدا کنیم.نقطه ی وسط BC را M نامگزاری میکنیم.

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۶ - ۳}{۲} = ۱.۵ \quad (\text{نمره}۰.۵)$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۱۰ - ۰}{۲} = ۵ \quad (\text{نمره } ۰.۵)$$

اکنون فاصله ی نقطه ی A از نقطه M برابر اندازه میانه خواهد بود. (۱ نمره)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ - (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۱.۵ - ۰.۵)^۲ + (۵ - (-۲))^۲} = \sqrt{۵۰}$$

در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های دو رأس روبرو با مجموع طول های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

به همین ترتیب مجموع عرض های دو رأس روبرو با مجموع عرض های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

نکته:در یک مثلث برای به دست آوردن محل برخورد میانه های مثلث ، میانگین طول ها ی هر سه راس مثلث برای طول نقطه ی برخورد و میانگین عرض های هر سه راس مثلث برای عرض نقطه ی برخورد میانه ها خواهد بود.

شیب خط

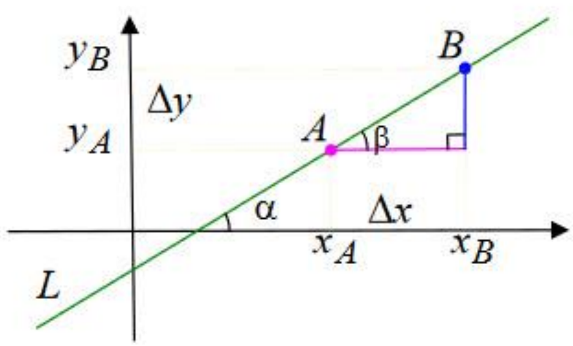
اگر B و A دو نقطه از خط L باشند. شیب (ضریب زاویه) خط L به صورت زیر تعریف می شود.

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی واضح است که $\angle\alpha = \angle\beta$. همچنین بنابر بر تعریف تانژانت زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه می توان نوشت.

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\beta) = \tan(\alpha)$$

لذا شیب هر خط ، تانژانت زاویه ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.



نکته : شیب هر خط موازی محور طول ها صفر است.

نکته: شیب هر خط موازی محور عرض ها تعریف نشده می باشد.

با حضور در کلاس های آنلاین و تهیه ی جزوات استاد دارستانی به جمع قبولی های پزشکی بپیوندید.

معادله خط

حالت استاندارد معادله خط

معادله ی استاندارد خط به صورت $y = ax + b$ می باشد که a شیب خط و b عرض از مبدا نام دارد (محل برخورد خط به محور y ها را عرض از مبدا می گویند.)

فرم کلی نوشتن معادله خط

برای به دست آوردن معادله ی خط ۲ راه بیشتر وجود ندارد.

الف) مقدار شیب (m) و مختصات یک نقطه $(x_., y_.)$ را داشته باشیم.

در این صورت معادله ی خط برابر است با:

$$y - y_. = m(x - x_.)$$

ب)مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم.

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

برای هر خط می توان معادله ای به صورت زیر نوشت:

$$ax + by + c = ۰$$

واضح است که این معادله را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

پس شیب خط برابر $m = \frac{-a}{b}$ و عرض از مبدأ آن $n = -\frac{c}{b}$ است. توجه داشته باشید که عرض نقطه تلاقی خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

وضعیت خطوط نسبت به همدیگر

الف) موازی : زمانی دو خط موازی هستند که شیب آنها برابر باشد.

ب) عمود بر هم : دو خط زمانی بر هم عمودند که حاصضرب شیب های آنها برابر ۱- باشد.

فاصله ی نقطه از خط :

فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_0, y_0)$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- فاصلهٔ نقطهٔ برخورد توابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-3}$ از خط $3x + 2 = 4y$، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۲ ۳) ۲/۲ ۴) ۴/۲

گزینه ۳ درست است.

$4^x = (\frac{1}{2})^{x-3} \to 2^{2x} = 2^{-x+3} \to 2x = -x + 3$ $\boxed{x = 1 \,,\, y = 4}$ مختصات برخورد دو تابع

فاصله نقطه تا خط $d = \frac{|3(1) - 4(4) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{11}{5} = 2/2$

تمرین (مخزن سوالات کنکور در سازمان سنجش)

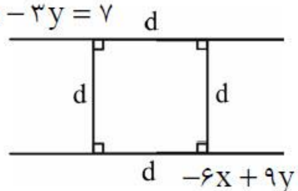
- دو ضلع مربعی بر خطوط $2x - 3y = 7$ و $-6x + 9y - 18 = 0$ منطبق است، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

تدریس ریاضی برای تک رقمی های کنکور ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

گزینه ۳ درست است.

$۲x-۳y=۷$



$-۶x+۹y-۱۸=۰ \xrightarrow{\div(-۳)} ۲x-۳y=-۶$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۷-(-۶)|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}\to \boxed{d=\sqrt{۱۳}\quad \text{ضلع مربع}}$$

$$S_{\square}=d^۲=(\sqrt{۱۳})^۲=۱۳$$

تمرین (امتحان نهایی)

دو خط به معادله ی $my-۲x=۱۰$ و $۴y+(m+۱)x+۵=۰$ مفروض هستند. M را به گونه ای تعیین کنید که

الف) دو خط عمود باشند　　　　　　　　ب) دو خط موازی باشند.

حل: برای مورد الف شرط این که دو خط عمود باشند اینه که حاصلضرب شیب ها برابر ۱- شود.

برای این که پینشها می کنم که عادت کنید خطوط را به حالت استاندارد تبدیل کنید.

$$my-۲x=۱۰\qquad y=\frac{۲}{m}x+۵$$

$$۴y+(m+۱)x+۵=۰\qquad y=\frac{-(m+۱)}{۴}x+\frac{۵}{۴}$$

$$\frac{۲}{m}\times\frac{-(m+۱)}{۴}=-۱\qquad m=۱$$

برای حالت دوم دو خط زمانی مساوی هستند که شیب ها با هم برابر باشند.

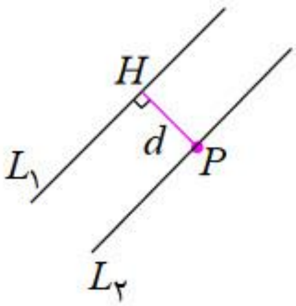
$$\frac{۲}{m}=\frac{-(m+۱)}{۴}\qquad\qquad -m^۲-m-۸=۰$$

چون دلتای معادله کوچکتر از صفر است به ازای هیچ مقدار m دو خط موازی نیستند.

فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ به شکل زیر است.

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

فاصله ی بین دو خط موازی



فاصله‌ی دو خط موازی ، طول پاره خطی است که از هر نقطه ی واقع بر یکی بر دیگری عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی دو خط منطبق بر هم برابر صفر است.

فاصله ی دو خط موازی به معادلات :

$L_1: ax+by+c_1=0$ و $L_2: ax+by+c_2=0$

به صورت زیر است.

$$d=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تمرین (امتحان نهایی)

خط $L: 3x-4y=0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2,-1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

$$R=\frac{|3(2)+4(-1)|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|6+4|}{5}=2$$

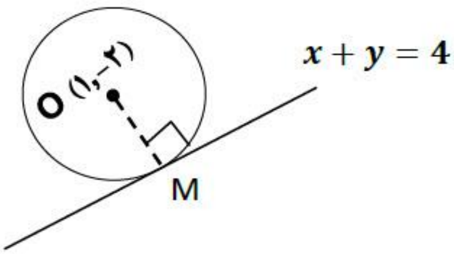
تدریس تخصصی ریاضیات و فیزیک تجربی ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (امتحان نهایی)

خط به معادله $x + y = 4$ بر دایره‌ای به مرکز (۲-,۱) O در نقطه M مماس است.

الف) معادله OM را بنویسید.

ب) طول OM را بیابید.



حل: چون om بر خط عمود است پس از طریق رابطه ی دو خط عمود شیب om را محاسبه می کنیم.چون شیب خط ۱- می باشد پس شیب om برابر ۱ می باشد . از طرفی یه خطا از آن را داریم .

$$y = x - ۳$$

شعاع دایره برابر فاصله ی مرکز دایره از خط مماس می باشد. :

$$d = \frac{|x + y - ۴|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

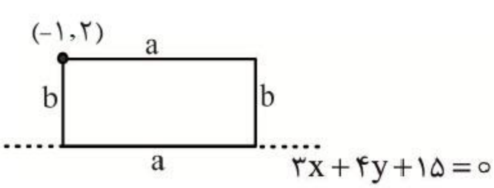
تمرین (مخزن سوالات کنکور سراسری سازمان سنجش)

- نقطهٔ (۲ , ۱-) رأس مستطیلی است که یک ضلع آن بر خط $۳x + ۴y + ۱۵ = ۰$ منطبق می‌باشد. اگر محیط مستطیل ۲۴ باشد، عدد مساحت آن کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

گزینه ۴ درست است.

نقطهٔ (۲ , ۱-) روی خط $۳x + ۴y + ۱۵ = ۰$ قرار ندارد، پس مستطیل به صورت مقابل است و داریم:



$$b = \frac{|-۳ + ۸ + ۱۵|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \xrightarrow{\text{محیط}=۲۴} ۲۴ = ۲(a + ۴) \Rightarrow a + ۴ = ۱۲ \Rightarrow a = ۸$$

پس مساحت مستطیل برابر $S = ۸ \times ۴ = ۳۲$ می‌باشد.

محاسبات

تمرین (مخزن سوالات کنکور سراسری در سازمان سنجش)

- **فاصلهٔ نقطهٔ A واقع بر نیمساز ناحیه دوم، از خط $d: ۴x+۳y-۲=۰$، برابر ۲ است. اگر از نقطهٔ A عمود AH را بر خط d رسم کنیم، طول نقطهٔ H کدام است؟**

۱) $-۷/۲$ ۲) $-۶/۴$

۳) $-۵/۶$ ۴) $-۴/۸$

گزینه ۲ درست است.

فرض نقطهٔ $A(-a,a)$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم باشد.

$$۲=\frac{|۴(-a)+۳(a)-۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}\Rightarrow |-a-۲|=۱۰\Rightarrow -a-۲=\pm۱۰\Rightarrow -a=\begin{cases}۱۲ & \text{غ ق ق}\\ -۸ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$a=۸\Rightarrow A(-۸,۸)$ روی نیمساز ناحیه دوم

$$H(x,\frac{۲-۴x}{۳})$$

$$AH=۲=\sqrt{(x+۸)^۲+(\frac{۲-۴x}{۳}-۸)^۲}\Rightarrow ۴=(x+۸)^۲+(\frac{-۴x-۲۲}{۳})^۲$$

$$x^۲+۱۶x+۶۴+\frac{۱۶x^۲+۱۷۶x+۴۸۴}{۹}=۴$$

$$۹x^۲+۱۴۴x+۵۷۶+۱۶x^۲+۱۷۶x+۴۸۴=۳۶$$

$$۲۵x^۲+۳۲۰x+۱۰۲۴=۰\xrightarrow{\Delta=۰}x=\frac{-۱۶۰}{۲۵}=-۶/۴$$

تمرین (امتحان نهایی)

درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) از نقطه ای خارج یک خط، می توان دو خط بر آن خط عمود کرد.

ب) اگر A و B دو نقطه ی هم طول در صفحه باشند، آن گاه $AB=|y_A-y_B|$

حل: الف اشتباه است چون از هر نقطه فقط یک عمود بر یک خط می توان رسم کرد

ب صحیح می باشد.

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم

معادله ی درجه دوم یک مبحث بسیار مهم و کاربردی که یادگیریش برای همه ضروریه .

یاد آوری : روش حل معادله به روش درجه دوم :

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد ، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب $x^۲$ را a، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\Delta = b^۲ - ۴ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad \text{و} \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{۲a}$$

اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

گاهی لازم می شود برای حل یک معادله از روش تغییر متغیر استفاده کرد. در این روش متغیر جدید را طوری در نظر می گیریم که روش حل معادله‌ی به دست آمده را می دانیم. با حل این معادله می توان ریشه های معادله‌ی اولیه را نیز به دست آورد.

مثال : معادله زیر را حل کنید.

$$x^۴ - ۳x^۲ - ۱۰ = ۰$$

حل : کافی است قرار دهیم، $x^۲ = t$. لذا خواهیم داشت:

$$t^۲ - ۳t - ۱۰ = ۰$$

$$(t-۵)(t+۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} t = ۵ \rightarrow x^۲ = ۵ \rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \\ t = -۲ \rightarrow x^۲ = -۲ \quad \text{غ م} \end{cases}$$

گاهی به جای تعیین مقدار ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ ، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه هـای آن اهمیت دارد. مجموع و حاصل ضرب ریشه های هر معادله‌ی درجه‌ی ۲ بـه شـکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ از رابطه های زیر به دست می آید.

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a}$$ مجموع ریشه ها

$$P = x_۱ \times x_۲ = \frac{c}{a}$$ حاصل ضرب ریشه ها

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند. می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$

تمرین (امتحان نهایی)

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\sqrt{۳}+۲$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$

$$x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

تمرین (امتحان نهایی)

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + mx + ۲ = ۰$ باشند و رابطهٔ $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۴$ برقرار باشد، مقدار m را محاسبه کنید.

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۴ \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۴ \Rightarrow \quad (۰/۲۵)$$

$$-\frac{m}{۲}=۴ \Rightarrow m=-۸ \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m \\ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=۲ \quad (۰/۵) \end{cases}$$

تمرین (امتحان نهایی)

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-۱}{x}-\frac{۲x-۱}{x^۲+x}=\frac{۱}{x+۱}$

ب) $۲+\sqrt{۱+x}=x-۳$

الف) $x(x+1)\left(\frac{x-1}{x}-\frac{2x-1}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}\right)\Rightarrow$

$$\underset{(0/25)}{x^2-1-2x+1=x}\Rightarrow \underset{(0/25)}{x^2-3x=0}\Rightarrow x(x-3)=0 \begin{cases} x=0 \times & \text{غ.ق.ق} \quad (0/5) \\ x=3 \checkmark \end{cases}$$

ب) $(\sqrt{1+x})^2=(x-5)^2\Rightarrow \underset{(0/25)}{1+x=x^2-10x+25}\Rightarrow \underset{(0/25)}{x^2-11x+24=0}$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8)=0 \begin{cases} x=3 & \text{غ.ق.ق} \quad (0/5) \\ x=8 \checkmark \end{cases}$$

تمرین (امتحان نهایی)

اگر β,α ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-4x+2=0$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

$\boldsymbol{\alpha^3\beta+\beta^3\alpha}$

$$\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=2((4)^2-2(2))=24$$

تمرین (مخزن سوالات کنکور سراسری)

- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+4=0$ کدام است؟

۱) 4 ۲) -4

۳) -2 ۴) 1

گزینه ۴ درست است.

با فرض $x^2-3x=t$ داریم:

$$t^2+5t+4=0\Rightarrow (t+1)(t+4)=0\Rightarrow t=-1, t=-4$$

$$\begin{cases} x^2-3x=-1\Rightarrow x^2-3x+1=0\xrightarrow{\Delta>0} \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} =1 \\ x^2-3x=-4\Rightarrow x^2-3x+4=0\xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه ندارد} \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} =1$$

تمرین (مخزن سوالات کنکور سراسری سنجش)

- اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ $4x^2 - mx - 1 = 0$ باشند و در رابطه $(\alpha+3)(\beta+3) = 4$ صدق کنند، m کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{19}{3}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $-\frac{19}{4}$

گزینه ۲ درست است.

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}, \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{m}{4}, \alpha\beta + 3(\alpha+\beta) + 9 = 4$$
$$\Rightarrow 3\times(\frac{m}{4}) - \frac{1}{4} = -5 \Rightarrow 3(\frac{m}{4}) = -\frac{19}{4} \Rightarrow m = -\frac{19}{3}$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 18\beta$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

گزینه ۳ درست است.

α و β ریشه‌های معادله هستند، پس $\alpha^2 = 4\alpha + 2$ و $4\beta = \beta^2 - 2$ است و داریم:

$$\alpha^3 = 4\alpha^2 + 2\alpha$$
$$4\beta = \beta^2 - 2 \Rightarrow 16\beta = 4\beta^2 - 8 \Rightarrow 18\beta = 4\beta^2 + 2\beta - 8$$
$$\Rightarrow \alpha^3 + 18\beta = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 2\alpha + 2\beta - 8$$
$$S = \alpha+\beta = 4, P = \alpha\beta = -2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 16 + 4 = 20$$
$$\Rightarrow \alpha^3 + 18\beta = 4(20) + 2(4) - 8 = 80$$

تمرین (مخزن سوالات کنکور سراسری)

- اگر معادله $ax^2 - 2\sqrt{3}x + a - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی نامنفی باشد، مجموع ریشه‌ها در کدام بازه خواهد بود؟

۱) $[\sqrt{3}, 2]$ ۲) $[1, 2\sqrt{3}]$ ۳) $[\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ ۴) $[2, 4\sqrt{3}]$

گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \rightarrow 12-4a(a-2) \geq 0 \rightarrow a^2-2a-3 \leq 0 \rightarrow -1 \leq a \leq 3 \\ P \geq 0 \rightarrow \dfrac{a-2}{a} \geq 0 \rightarrow a<0 \quad \text{یا} \quad a \geq 2 \\ S \geq 0 \rightarrow \dfrac{2\sqrt{3}}{a} \geq 0 \rightarrow a>0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2 \leq a \leq 3$$

$$S=\frac{2\sqrt{3}}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{[2,3]} \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq S \leq \sqrt{3}$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

· معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر حاصل‌ضرب این دو ریشه با مجموع آنها برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

گزینه ۳ درست است.

$$\underbrace{\frac{c}{a}}_{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} = \underbrace{\frac{-b}{a}}_{\text{مجموع ریشه‌ها}}$$

$$\frac{2-m}{3}=\frac{1-2m}{3} \rightarrow 2-m=1-2m \quad \boxed{m=-1}$$

تمرین (مخزن سوالات سنجش)

· به ازای چند مقدار صحیح k، معادلهٔ $\dfrac{k}{x}=\dfrac{x}{x-11}$ جواب <u>ندارد</u>؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

. گزینه ۳ درست است.

حالت اول: اگر $k = 0$ باشد، معادله به‌صورت $\frac{x}{x-11} = 0$ درمی‌آید که جواب آن $x = 0$ و غیرقابل قبول است، زیرا مخرج کسر در طرف دوم معادله صفر می‌شود. پس به ازای $k = 0$ معادله جواب ندارد.

حالت دوم: اگر $k \neq 0$ باشد:

$$\frac{x}{x-11} = \frac{k}{x} \Rightarrow x^2 = kx - 11k$$

$$x^2 - kx + 11k = 0$$

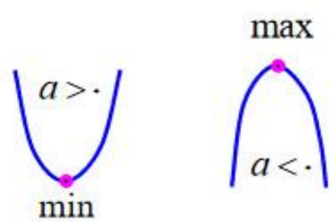
$\Delta = k^2 - 44k < 0$ شرط نداشتن جواب

$0 < k < 44$

با در نظر گرفتن حالت اول و دوم، با شرط $0 \leq k < 44$ معادله به ازای ۴۴ عدد صحیح **k** جواب ندارد.

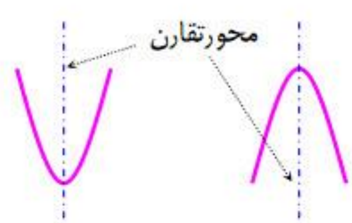
سهمی و نمودار درجه ۲

در سال گذشته به یاد دارید که هر تابع درجه‌ی ۲ دارای معادله ای به صورت $y = ax^2 + bx + c$ (که در آن $a \neq 0$ است.) می باشد. نمودار چنین توابعی یک منحنی رو به بالا یا رو به پایین می باشد. این منحنی را سهمی می نامند. نمودار هر سهمی دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه می باشد که آن را رأس سهمی می نامند.



الف : اگر $a > 0$ باشد نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و اگر $a < 0$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم)است.

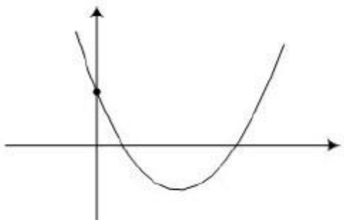
ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله‌ی آن بصورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد و همواره موازی محور y ها است.



همچنین معادله‌ی محور تقارن سهمی نیز بصورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد.

تمرین (امتحان نهایی)

نمودار سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در شکل زیر داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله $f(x)=۰$ را بیابید.



$a>۰$ ۰/۲۵

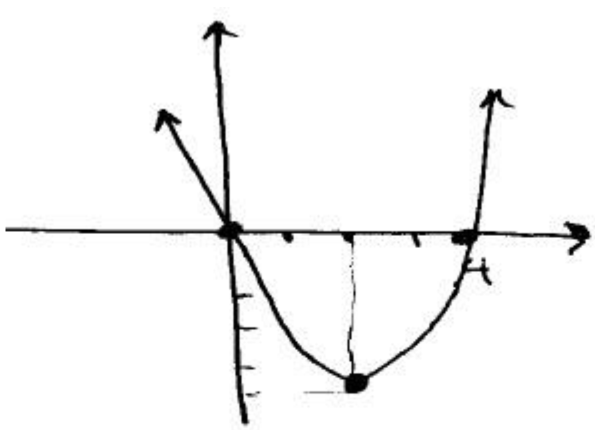
$c>۰$ ۰/۲۵

$\frac{-b}{۲a}>۰ \Rightarrow b<۰$ ۰/۲۵

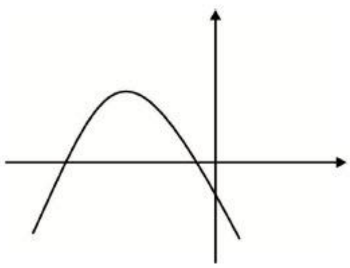
دو ریشه ۰/۲۵

تمرین (امتحان نهایی)

سهمی به معادله ی $y=x^{۲}-۴x$ را رسم کنید.



تمرین (مخزن سوالات سنجش)



· نمودار کدام سهمی به شکل زیر است؟

۱) $y=-x^{2}+3x+2$

۲) $y=-x^{2}+8x+2$

۳) $y=-x^{2}-x-1$

۴) $y=-x^{2}-4x-1$

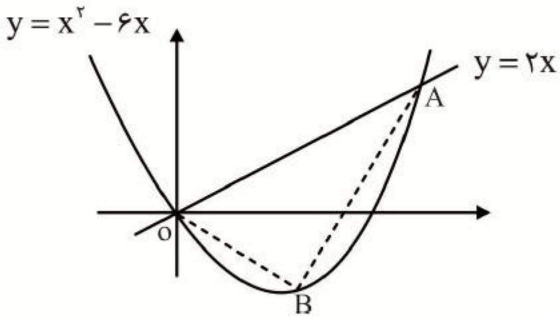
گزینه ۴ درست است.

گزینه ۱ و ۲ رد $x_S=-\frac{b}{2a}<0$

چون دو محل برخورد با محور x ها دارد، پس $\Delta>0$ و گزینه ۳ رد می‌شود.

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

· در شکل مقابل، نقطهٔ B روی منحنی $y=x^{2}-6x$ و پایین خط $y=2x$ حرکت می‌کند. بیشترین مقدار برای مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۵۲

۲) ۶۴

۳) ۹۶

۴) ۱۲۸

. گزینه ۲ درست است.

برای آن که مساحت مثلث OAB بیشترین شود باید فاصلهٔ نقطهٔ B از خط $y=۲x$ بیشترین مقدار ممکن باشد، پس:

$$B(x,x^۲-۶x)\Rightarrow p(x)=BH=\frac{\left|x^۲-۶x-۲x\right|}{\sqrt{۱+۴}}\Rightarrow p'(x)=۲x-۸\xrightarrow{p'(x)=۰}۲x-۸=۰\Rightarrow$$

$$x=۴\Rightarrow p(۴)=BH=\frac{۱۶}{\sqrt{۵}}$$

از طرفی $|OA|$ برابر است با:

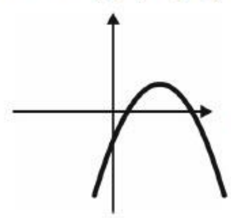
$$\begin{cases}y=۲x\\ y=x^۲-۶x\end{cases}\Rightarrow x^۲-۸x=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۸\Rightarrow\begin{cases}O(۰,۰)\\ A(۸,۱۶)\end{cases}\Rightarrow OA=\sqrt{۶۴+۲۵۶}=\sqrt{۳۲۰}=۸\sqrt{۵}$$

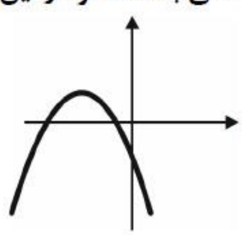
بنابراین بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB برابر است با:

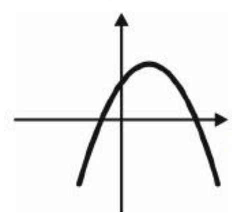
$$S=\frac{۱}{۲}\times۸\sqrt{۵}\times\frac{۱۶}{\sqrt{۵}}=۶۴$$

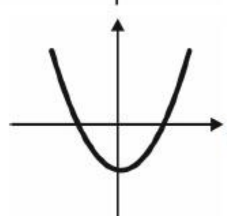
تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

. اگر در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ ضرایب c,b,a هر سه منفی باشد، نمودار این سهمی کدام مورد می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

. گزینه ۲ درست است.

چون $a<۰$ ،دهانه سهمی رو به پایین است، در نتیجه گزینه (۴) رد می‌شود.

از سوی دیگر چون $c<۰$ می‌باشد، نقطه برخورد سهمی با محور yها زیر مبدأ مختصات است. (رد گزینه (۳))

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}<۰\xrightarrow{\text{با توجه به مجموع ریشه‌ها}}$$

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a}>۰$$

$\Rightarrow x_۱,x_۲$ هر دو منفی (تأیید گزینه ۲)   رد گزینه (۱)

محاسبات

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

برای حل معادلات گویا و رادیکالی همانند معادلات درجه ۱ و درجه ۲ می باشد . چند نکته فقط درمورد آنها وجود دارد

الف) برای معادلات گویا هر ریشه ای که مخرج هر یک از کسرهای گویا را صفر کند غیر قابل قبول می باشد

ب) برای عبارت های رادیکالی فرجه زوج (برای شما فقط فرجه ۲ میاد) ریشه هایی که زیر رادیکال را منفی می کنند جزیی از دامنه نیستند و غیر قابل قبول هستند.

تمرین (امتحان نهایی)

معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}$$

حل:

$$\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}\Rightarrow\frac{x-x-۱}{x(x+۱)}=\frac{x-۲-x+۱}{(x-۱)(x-۲)}\Rightarrow\frac{-۱}{x^۲+x}=\frac{-۱}{x^۲-۳x+۲}$$

$$\Rightarrow -x^۲+۳x-۲=-x^۲-x\Rightarrow ۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$

ب) $\dfrac{2x}{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{2 - x}{x^2 - x}$

الف) $\sqrt{2 - x} = 1 - 2x \xrightarrow{()^2} 2 - x = 1 + 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -\frac{1}{4}} \\ x = 1 \times \end{cases}$

ب) $\left(\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2-x}{x(x-1)}\right) x(x-1)(x+1)$

$2x^2 + 2x(x-1) = (2-x)(x+1) \Rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \times \\ \boxed{x = -\frac{2}{5}} \end{cases}$

تمرین (امتحان نهایی)

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{t-1}{t+4} - \dfrac{2}{t-4} = \dfrac{7}{6}$

ب) $2\sqrt{4x + 1} - x = 4$

حل: آسان می باشد. حلش بر عهده ی خودتون !!

رزرو کلاس آنلاین استاد دارستانی ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

فصل ۲

هندسه

هندسه یکی از فصول نمره خیز و دشوار کنکور است چون معمولا خیلی از داوطلبان از این فصل و سایر فصول هندسه ریاضی صرف نظر می کنند.پس سعی کنید که شما این فصل رو به دید یک فرصت برای پیشرفت نمره و درصد خودتون در کنکور نگاه کنید.

گزاره : جمله ای خبری است که ممکن است درست یا نادرست باشد.

اصل: حقیقت یا عبارتی است که درستی آن را قبول دارد و برای درستی آن نیاز به اثبات نداریم.

چند مثال از اصل:

- از دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد.
- از هر نقطه خارج از یک خط فقط یک عمود از نقطه بر آن خط می توان رسم کرد.
- دو چیز مساوی با یک چیز با هم مساوی هستند
- دو طرف یک تساوی را می توان در یک عدد ضرب کرد.

استدلال : عمل دلیل آوردن برای اثبات یک گزاره را استدلال می گویند.

استدلال استقرایی: استدلالی است که ما را بر اساس تعداد محدودی مشاهده به یک نتیجه کلی می رساند.

توضیح استدلال استقرایی این است که با بررسی چند مثال از یک گزاره نتیجه می گیریم که احتمالا این گزاره صحیح باشد.

استدلال استنتاجی : استدلالی که بر اساس حقیقت های پذیرفته شده ما را به یک نتیجه کلی می رساند.

برای اثبات درستی یک گزاره باید استدلال کرد که لازم است این استدلال از نوع استدلال استنتاجی باشد.

برای رد درستی یک گزاره، ارائه یک مثال نقض (استثناء) کافی است.

مثال نقض به مثالی گفته می شود که درستی یک گزاره را رد کند.

قضیه : **هر گزاره درست که قبول درستی آن نیازمند برهان باشد را قضیه می گویند.**

هر قضیه معمولا از دو قسمت تشکیل شده است :

الف) فرض : آن قسمت از قضیه را گویند که درستی آن را قبول داریم.(اطلاعات داده شده در سوال)

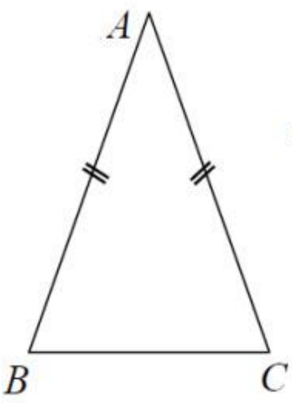
ب) حکم : آن قسمت از قضیه را گویند که باید درستی آن را نتیجه بگیریم.

در واقع هر قضیه یک جمله شرطی است که جواب شرط آن را اثبات می کنیم ولی شرط را قبول داریم.

به الگوی روبرو توجه کنید : قضیه : اگر $\boxed{\text{(فرض)}}$ آنگاه $\boxed{\text{(حکم)}}$

(قبول داریم.) (ثابت می‌کنیم.)

مثال : قضیه : در هر مثلث متساوی الساقین ، دو زاویه مجاور به قاعده با هم برابرند.



به سادگی می توان این قضیه را به شکل زیر نوشت :

اگر مثلث متساوی الساقین باشد آنگاه دو زاویه مجاور به قاعده آن با هم برابرند.

فرض **حکم**

فرض : $AB = AC$ حکم : $\angle B = \angle C$

اگر حکم و فرض قضیه را بر عکس کنیم ، عکس قضیه نامیده می شود. عکس قضیه می تواند صحیح یا غلط باشد.

قضیه : **اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کند.**

عکس قضیه : **اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.**

قضیه های دو شرطی : قضیه هایی که در آن اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم ، باز هم قضیه ای به ما می دهد که از نظر منطقی درست است. قضیه های دو شرطی را با نماد $\longleftrightarrow$ (این نماد را می خوانیم : " اگر و تنها اگر") نشان می دهند. این نماد نشان دهنده آن است که هر کدام از طرفین می توانند طرف دیگر را نتیجه بدهند ; لذا یا هر دو طرف درست است یا هر دو طرف نادرست است.

در واقع در قضیه های دو شرطی، عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی است!

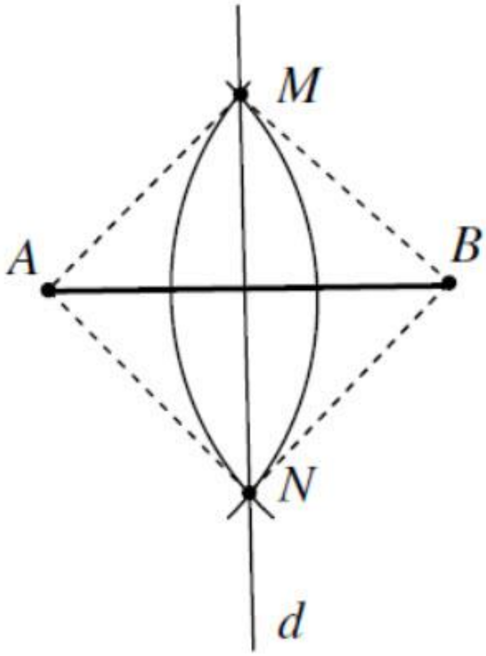
برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می شود، برهان غیر مستقیم یا برهان خلف نام دارد. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض میکنیم حکم درست نباشد (فرض خلف)و به یک تناقض یا یک نتیجه غیر ممکن می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود و خود حکم را می پذیریم.

۱- اگر $n \in N$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

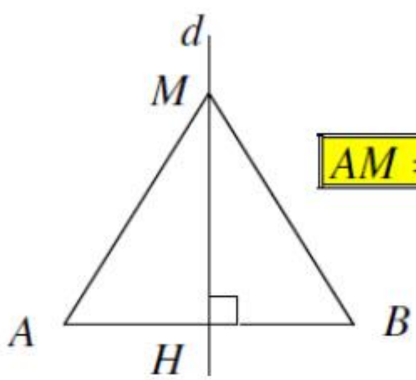
حل : **با استفاده از برهان خلف فرض کنیم که مساله نادرست باشد. یعنی n عددی فرد نباشد. بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می توان نوشت $n = 2k$ به طوری که k یک عدد طبیعی است. بنابراین $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مساله در تناقض است، لذا از ابتدا n نمی توانست عددی زوج باشد.**

رسم عمود منصف یک پاره خط



ابتدا دهانه پرگار را به اندازه ای باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد. سپس از دو سر پاره خط AB دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط N و M قطع کنند. چون دو نقطه N و M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند، پس روی عمود منصف AB قرار دارند. لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی خط d عمود منصف پاره خط AB است.

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر همان پاره خط به یک فاصله است.



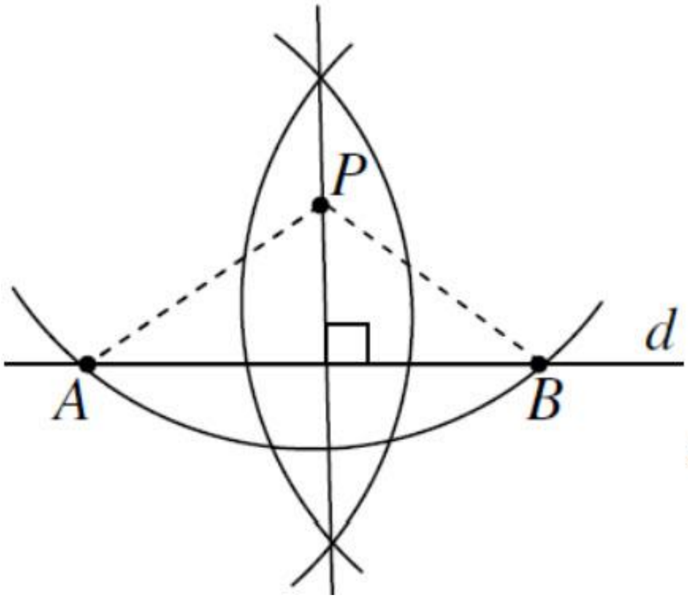
$\boxed{AM = BM}$

و هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف همان پاره خط قرار دارد.

به عبارت دیگر می توان گفت : " عمود منصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر همان پاره خط به یک فاصله است. "

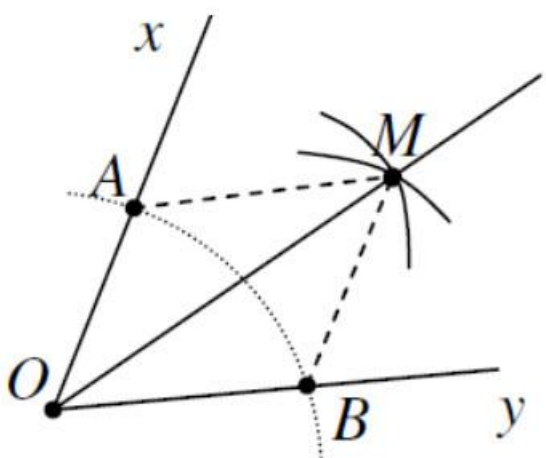
تمرین : با توجه به شکل بالا در قسمت نتیجه، نشان دهید نقطه M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.(استفاده از همنهشتی مثلث)

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ی خارج از آن



از نقطه P یک کمان را طوری رسم می کنیم که خط d را در نقاط B و A قطع کند، (برای رسم کمان دهانه پرگار را بیشتر از فاصله نقطه P تا خط d باز می کنیم و به مرکز P یک کمان میزنیم.) اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم و می دانیم که فاصله نقطه P از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است و عمود منصف رسم شده از نقطه P می گذرد و بر خط d عمود است.

رسم نیم ساز زاویه



از رأس زاویه xOy یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط B و A قطع کند. اکنون از نقاط B و A دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند. چون دو مثلث OBM و OAM با یکدیگر همنهشت هستند پس دو زاویه $\angle BOM$ و $\angle AOM$ با یکدیگر برابر هستند. پس OM نیمساز زاویه xOy می باشد و جواب مساله است.

نسبت و تناسب: یکی از خواص کاربردی کسر ها نسبت و تناسب می باشد.

الف) $ad = bc \Longleftarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (طرفین وسطین)

ب) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftarrow ad = bc$ (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

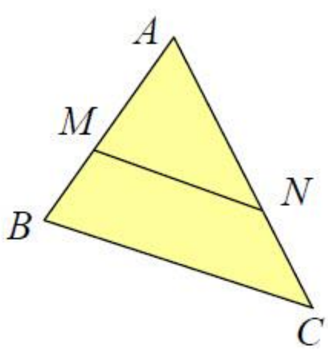
پ) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Longleftarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

قضیه ی تالس

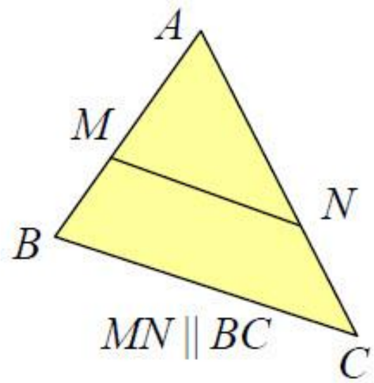
قضیه (قضیه‌ی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند روی آنها پاره خطهای متناسب بوجود می‌آورد.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

رابطه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت.



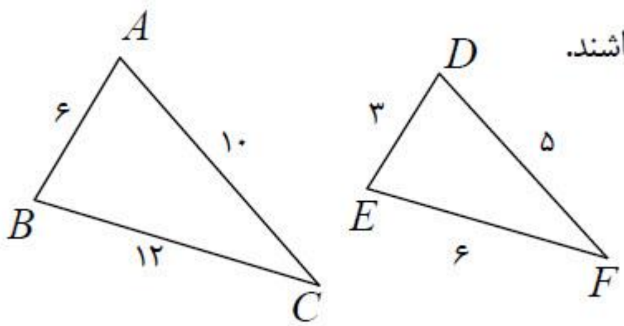
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

قضیه ی تشابه مثلث ها

دو مثلث را متشابه گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

الف : زاویه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

ب : اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.



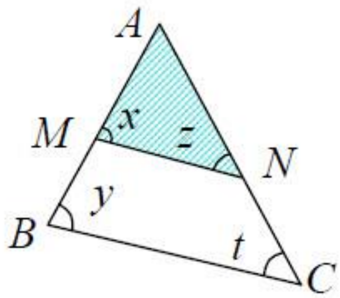
$$\left.\begin{array}{c} \angle A = \angle D , \angle B = \angle E , \angle C = \angle F \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$$

در دو مثلث متشابه ، نسبت دو ضلع متناظر[۱] را نسبت تشابه دو مثلث می نامند. در مثال فوق نسبت تشابه

می‌تواند $k = \frac{۶}{۳} = ۲$ یا $k = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ می باشد.

محاسبات

قضیه (قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث ها) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلثی بوجود می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

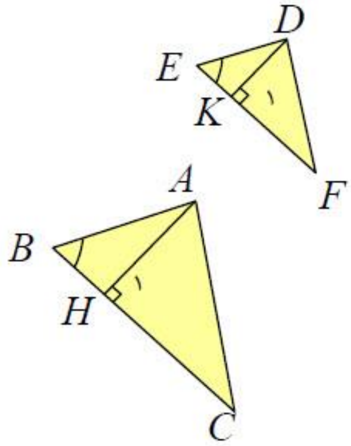
اثبات : کافی است که نشان دهیم ، دو شرط مربوط به تعریف تشابه را برقرارند.

شرط اوّل(تساوی زاویه‌های متناظر) : زاویه‌ی A در دو مثلث مشترک است. از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس $\angle z = \angle t$ و $\angle x = \angle y$. پس زاویه های نظیر مساویند.

شرط دوّم (تناسب اضلاع متناظر):

چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه‌ی تالس داریم $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$. در نتیجه اضلاع متناسبند.

قضیه : نسبت ارتفاع‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\Delta(ABC)\sim\Delta(DEF)$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$

حکم : $\frac{AH}{DK}=k$

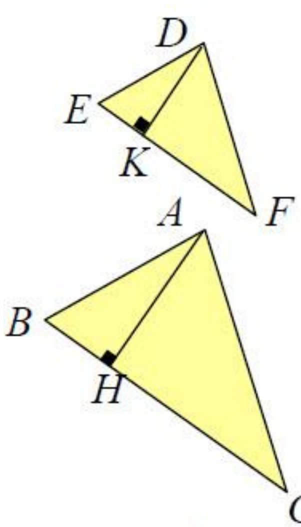
اثبات : چون دو مثلث ABC و DEF متشابهند، پس $\angle B=\angle E$

از طرفی $\angle H_۱=\angle K_۱=۹۰^\circ$ لذا

$$\Delta(ABH)\sim\Delta(DEK)\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{BH}{EK}=\frac{AH}{DK}$$

و چون $\frac{AB}{DE}=k$ پس $\frac{AH}{DK}=k$

قضیه : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.



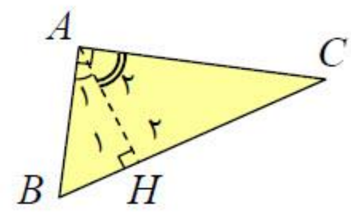
فرض: $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF}$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم : $\frac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}}=k^۲$

اثبات : با توجه به قضیه‌ی قبل داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC.AH}{\frac{۱}{۲}EF.DK}=\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AH}{DK}=k.k=k^۲$$

قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر تبدیل می کند. این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابهند.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ABH): \angle A_{۱} + \angle B = ۹۰^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = ۹۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{۱} = \angle C \\ \angle H_{۱} = \angle A = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ACH): \angle A_{۲} + \angle C = ۹۰^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle A_{۲} = \angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{۲} = \angle B \\ \angle H_{۲} = \angle A = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ACH)$$

قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث برابر است.

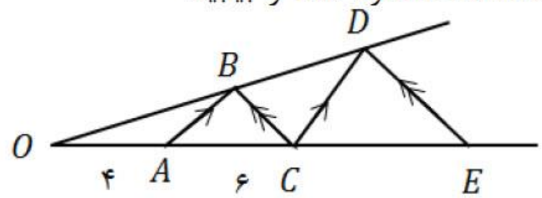
اثبات : کافی است مساحت مثلث قائم الزاویه را به دو شکل متفاوت محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}S(ABC) = \frac{۱}{۲}(AB)(AC) \\ S(ABC) = \frac{۱}{۲}(AH)(BC)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{۱}{۲}(AH)(BC) = \frac{۱}{۲}(AB)(AC)$$

$$\rightarrow (AH)(BC) = (AB)(AC)$$

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل زیر $AB \parallel CD$ و $BC \parallel DE$، $OA = ۴$ و $AC = ۶$ است. اندازهٔ CE را بیابید.



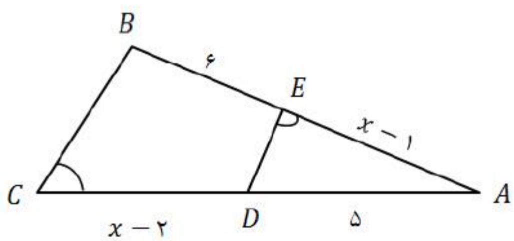
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OB}{BD} \\ BC \parallel DE \underset{(۰/۵)}{\Rightarrow} \dfrac{OC}{CE} = \dfrac{OB}{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OC}{CE}} \Rightarrow \dfrac{۴}{۶} = \dfrac{۱۰}{CE} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{CE = ۱۵}$$

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل زیر $\hat{E} = \hat{C}$ است.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AED و ABC متشابه‌اند.

ب) مقدار x را بیابید.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{C} = \hat{E} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array}\right\}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underset{\text{تساوی دو زاویه}}{\overset{\Delta}{AED} \sim \overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\dfrac{۵}{۵+x} = \dfrac{x-۱}{x+۳}} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{x^۲ - x - ۲۰ = ۰} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{x = ۵}$$

تمرین (امتحان نهایی)

در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ طول ارتفاع AH برابر ۸ و $CH = ۴$ می‌باشد. مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

$$AH^۲ = BH \cdot HC \Rightarrow ۶۴ = BH \times ۴ \Rightarrow BH = ۱۶ \qquad BC = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۸ = ۸۰ \quad (۰/۲۵)$$

محاسبات

تمرین (امتحان نهایی)

جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۲}\rightarrow\frac{a+b+c}{.........}=\frac{b}{.....}$

ب) اگر دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه بوده و $\frac{AB}{A'B'}=۳$ باشد، آن‌گاه $\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=.........$ و $\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=........$ می‌باشد.

الف) $\frac{a+b+c}{۱۰}=\frac{b}{۵}$ (۰/۵) ب) ۹ ، ۳ (۰/۵)

تمرین (امتحان نهایی)

ب) در ذوزنقهٔ $ABCD$، نقطه‌ای از دو سر قاعدهٔ CD به یک فاصله و هم‌چنین از ساق AD و قاعدهٔ CD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

۱) نیمسازهای زوایای C و D ۲) عمودمنصف‌های دو ساق

۳) عمودمنصف CD و نیمساز زاویهٔ D ۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز وسط‌های قاعده‌ها

پ) در اثبات قضیه‌ی «در مثلث ABC، اگر $AB\neq AC$ باشد، آن‌گاه $\hat{B}\neq\hat{C}$» به کمک برهان خلف، با کدام فرض اثبات را شروع می‌کنیم؟

۱) $\hat{B}>\hat{C}$ یا $\hat{B}<\hat{C}$ ۲) $AB>AC$ یا $AB<AC$

۳) $\hat{B}=\hat{C}$ ۴) $AB=AC$

ت) مثال نقض حدس کلی زیر کدام گزینه است؟

«چهارضلعی‌ای که دو ضلع آن برابر و دو ضلع دیگر آن موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.»

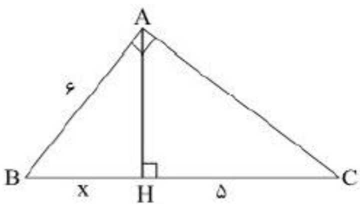
۱) مستطیل ۲) ذوزنقه متساوی‌الساقین ۳) ذوزنقه قائم‌الزاویه ۴) لوزی

محاسبات

ب) گزینهٔ ۳ (۰/۵)　　پ) گزینهٔ ۳ (۰/۲۵)　　ت) گزینهٔ ۲ (۰/۲۵)

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل مقابل $AB=۶$ و $CH=۵$ طول ارتفاع AH را به دست آورید.



$$AB^۲ = x(x+۵) \Rightarrow x^۲ + ۵x - ۳۶ = ۰ \qquad x = ۴$$

$(۰/۲۵)$　　$x = -۹$　　$(۰/۵)$

غ ق ق

$(۰/۲۵)$

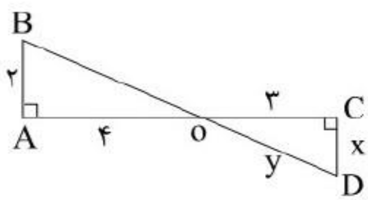
$$AH^۲ = x \times ۰/۵ = ۲۰ \Rightarrow AH = \sqrt{۲۰} \qquad (۰/۵)$$

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل مقابل:

الف) نشان دهید در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OCD}$ متشابهند.

ب) مقادیر x و y را به دست آورید.



الف) $\left.\begin{matrix}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{A} = \hat{C} = ۹۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{ODC} \qquad (۰/۵)$

ب) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$

$$\frac{۲}{x} = \frac{۴}{۳} = \frac{OB}{۶} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \qquad (۰/۵) \qquad ۲^۲ + ۴^۲ = OB^۲ \Rightarrow OB = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۲\sqrt{۵}}{y}$$

$$,\ y = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲} \qquad (۰/۵)$$

محاسبات

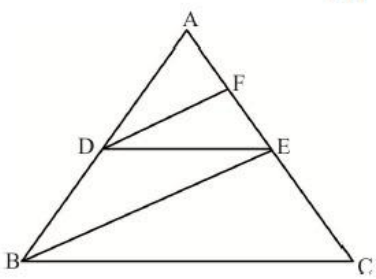
تمرین (امتحان نهایی)

با برهان خلف ثابت کنید اگر خط d_1 موازی d_2 و d_2 موازی d_3 باشد، آنگاه d_1 و d_3 موازیند.

فرض خلف: فرض می‌کنیم d_1 و d_3 موازی باشند پس همدیگر را قطع می‌کنند آنگاه چون d_1 و d_2 موازیند پس d_2 و d_3 نیز همدیگر را قطع می‌کنند که خلاف فرض است. (۱/۵ نمره)

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $DF \parallel BE$ است. اگر $BC = \frac{۵}{۲}DE$ باشد، مقدار $\frac{AE}{CF}$ کدام است؟



به کمک قضیهٔ تالس تعمیم یافته داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{\frac{۵}{۲}DE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{۲}{۵}$$

از طرفی به کمک قضیهٔ تالس تعمیم یافته در مثلث ABE داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow AF = ۲k \;,\; AE = ۵k \Rightarrow FE = ۳k$$

حال با بکارگیری دوبارهٔ قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

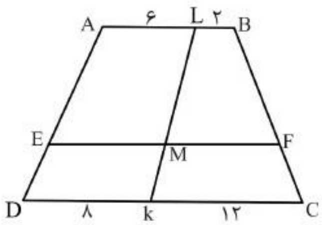
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۵k}{AC} \Rightarrow AC = ۱۲/۵k \Rightarrow CE = ۷/۵k$$

بنابراین داریم:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{۵k}{۷/۵k + ۳k} = \frac{۵}{۱۰/۵} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- در شکل مقابل ABCD ذوزنقه و پاره‌خط EF موازی قاعده‌ها می‌باشد. اگر M وسط پاره‌خط EF باشد، طول پاره خط EF کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۳

۳) ۱۴

۴) ۱۵

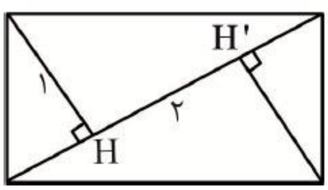
گزینه ۳ درست است.

با فرض $EM = MF = x$ داریم:

$$\frac{x-۲}{۱۲-x} = \frac{x-۶}{۸-x} \Rightarrow -x^۲ + ۱۰x - ۱۶ = -x^۲ + ۱۸x - ۷۲ \Rightarrow ۸x = ۵۶ \Rightarrow x = ۷ \Rightarrow EF = ۲ \times ۷ = ۱۴$$

تمرین (گنجینه ی سوالات سنجش)

- در مستطیل روبرو اگر فاصله پای عمودهای وارد بر قطر مستطیل برابر ۲ واحد باشد و محیط و مساحت مستطیل به ترتیب ۱۰ و ۴/۵ واحد باشند، نسبت تشابه مثلث‌های ۱ و ۲ برابر کدام گزینه است؟ $(HH' = ۲)$



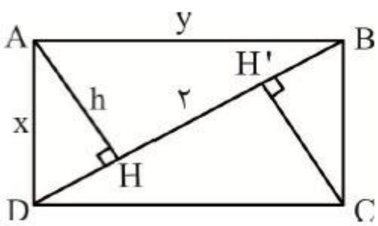
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۲

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

گزینه ۲ درست است.



$$\begin{cases} ۲(x+y) = ۱۰ \\ xy = ۴/۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = ۵ \\ xy = ۴/۵ \end{cases}$$

$$(x+y)^۲ = ۲۵ \rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy = ۲۵ \rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱۶$$

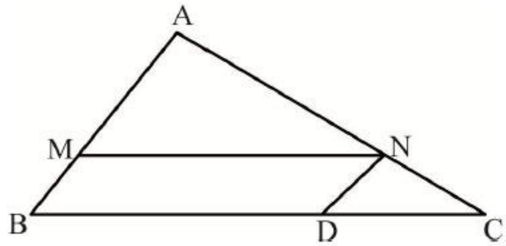
$$\rightarrow BD = ۴ \rightarrow DH = BH' = ۱$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{h}{DH'}$$

$$h^۲ = DH \times HB = ۱ \times ۳ = ۳ \rightarrow h = \sqrt{۳} \rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین (گنجینه ی سوالات سنجش)

در شکل روبه‌رو $\frac{AM}{MB}=\frac{۵}{۳}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع **MNDB** تقریباً چند درصد مساحت مثلث **ABC** است؟



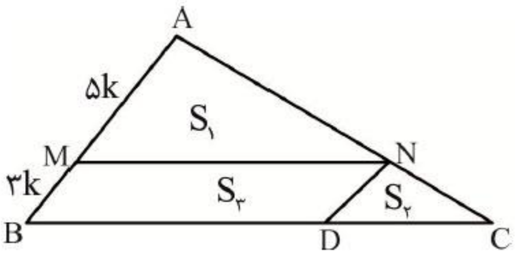
۱) ۵۲ درصد

۲) ۴۷ درصد

۳) ۴۱ درصد

۴) ۵۵ درصد

گزینه ۲ درست است.



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{۵}{۳}$$

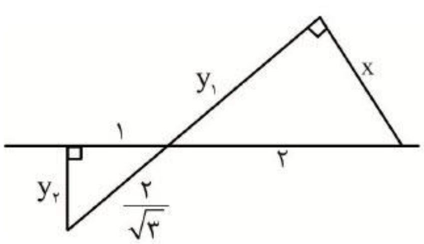
$$\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\rightarrow\frac{S_۱}{S}=(\frac{AM}{AB})^۲=(\frac{۵}{۸})^۲=\frac{۲۵}{۶۴}$$

$$\overset{\Delta}{NDC}\sim\overset{\Delta}{ABC}\rightarrow\frac{S_۲}{S}=(\frac{NC}{AC})^۲=(\frac{۳}{۸})^۲=\frac{۹}{۶۴}$$

$$\frac{S_۳}{S}=\frac{S-(S_۱+S_۲)}{S}=۱-\frac{S_۱}{S}-\frac{S_۲}{S}=۱-\frac{۲۵}{۶۴}-\frac{۹}{۶۴}=\frac{۳۰}{۶۴}\sim ۰/۴۷$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- با توجه به شکل مقابل مقدار **x** کدام است؟



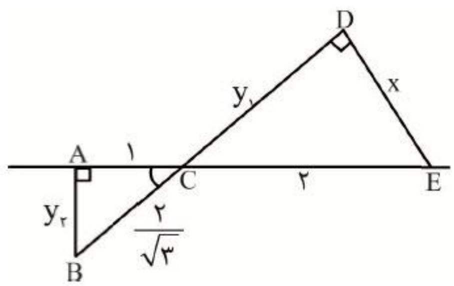
۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

گزینه ۱ درست است.



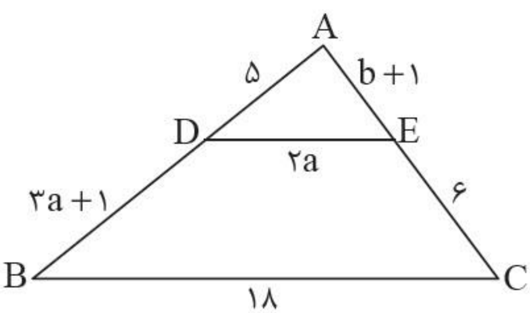
$$\begin{cases}\hat{C}_۱=\hat{C}_۲\\ \hat{A}=\hat{D}\end{cases}\rightarrow \overset{\Delta}{ACB}\sim\overset{\Delta}{CDE}$$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{CE}\rightarrow\frac{y_۲}{x}=\frac{۱}{y_۱}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲\rightarrow y_۲=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\qquad \frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{x}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}{۲}\rightarrow x=۱$$

تمرین (مخزن سوالات سنجش)

- در شکل زیر، در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $DE \parallel BC$ است. با توجه به اندازه های روی شکل، نسبت محیط مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به محیط مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ ، کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

گزینه ۱ درست است.

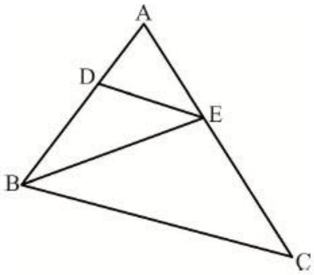
$$\frac{۵}{۳a+۶}=\frac{۲a}{۱۸}\Rightarrow ۳a^۲+۶a=۴۵\Rightarrow a^۲+۲a-۱۵=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۵ & \text{غ ق ق}\\ a=۳ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$\frac{۵}{۱۰}=\frac{b+۱}{۶}\Rightarrow b=۲$$

$$\begin{matrix}\overset{\Delta}{ADE}\ \text{محیط مثلث}=۵+۶+۳=۱۴\\ \overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط مثلث}=۱۵+۱۸+۹=۴۲\end{matrix}\Rightarrow\frac{۴۲}{۱۴}=۳$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- در شکل مقابل $BC \parallel DE$ و BE نیمساز زاویهٔ B است. اگر $BC = ۳$ و $BD = ۲$ باشد، طول ضلع AB کدام است؟



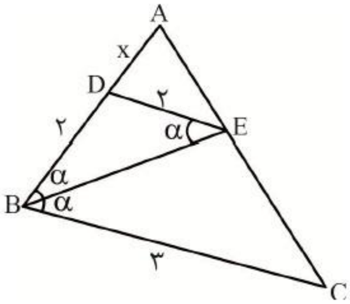
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

گزینه ۳ درست است.

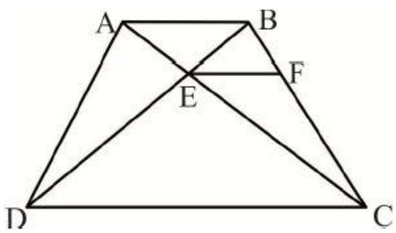


طبق قضیه خطوط موازی و مورب زاویهٔ E با زاویهٔ B در مثلث BDE برابر است، پس این مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. حال به کمک قضیهٔ تالس تعمیم یافته داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲x + ۴ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow AB = ۴ + ۲ = ۶$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- در ذوزنقهٔ $ABCD$ شکل مقابل، EF موازی قاعده‌ها است. اگر مساحت مثلث‌های ABE و CDE به ترتیب ۳ و ۱۲ باشد، مساحت مثلث BEF کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۲۵

۴) ۲/۵

حلش بر عهده ی خودتون

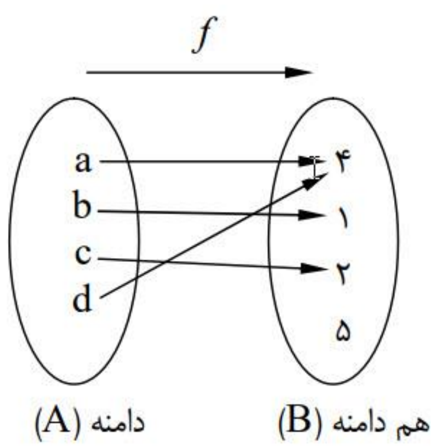
** میتوانید مجموعه ی پکیج بسیار مفید سوالات مخزن سازمان سنجش را برای دروس ریاضی و فیزیک نزد ما خریداری کنید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

فصل سوم

تابع

فصل آسان و تست خیز تابع . فصل تابع از فصل های آسان امتحان نهایی و کنکور می باشد که دانش آموزان سعی کنند که تمرکز کافی برای یادگیری این فصل را داشته باشند.

تابع : یک رابطه را هنگامی تابع می گوییم که به هر عضو مجموعه ی A بتوانیم یک عضو از مجموعه B را نظیر کنیم.در این حالت مجموعه ی A را دامنه ی تابع و مجموعه ی B را هم دامنه (برد) تابع می گویند.



$$f : A \to B$$

نمودار بالا سمت چپ را نمودار پیکانی یا نمودار ون نامیده می شود . زمانی یک نمودار ون تابع است که از هر عضو مجموعه ی اول A فقط یک پیکان خارج شود.

زوج مرتب : تابع را نیز به صورت زوج مرتب نیز نشان می دهند. (A,B) که در آن A مجموعه اعضای دامنه و B مجموعه اعضای هم دامنه (برد) می باشد.مثالی از یک تابع زوم مرتب:

F(x)={ (۱,۲),(٤,۹),(۸,۳)}

در تعریف تابع زوج مرتب ، اگر در دو زوج مرتب مولفه ی اول یکسان داشته باشیم ، باید مولفه ی دوم آنها هم یکسان باشد.

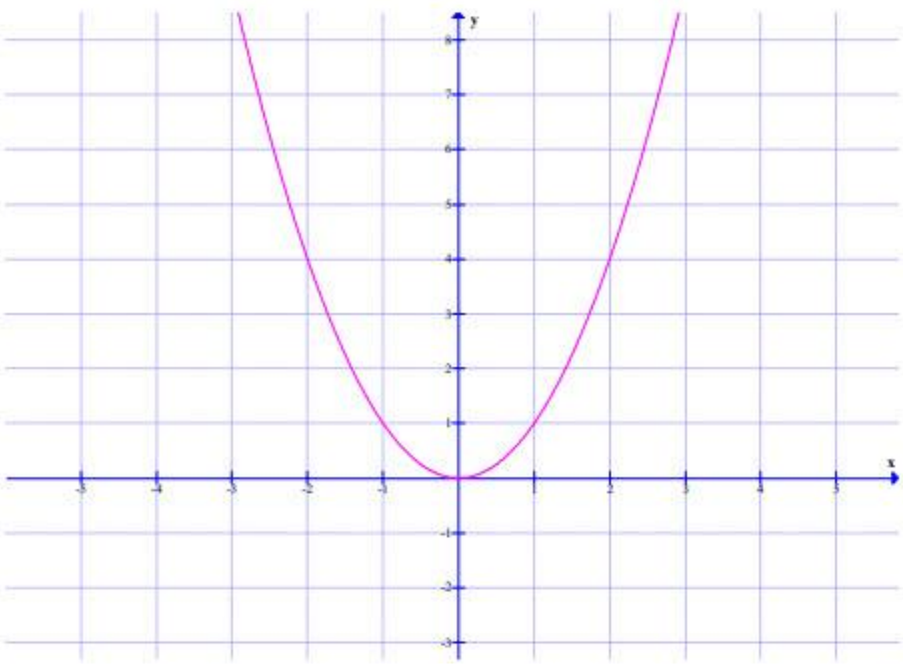
نمایش تابع از طریق ضابطه: معروف ترین و پرکاربرد ترین حالت نمایش تابع . که دامنه x و هم دامنه (برد) y نامیده می شود.مثالی از نمایش تابع به صورت ضابطه:

F(x)=x+۵

نمایش تابع به صورت هندسی (دکارتی)

اگـر مجموعـه ی f ، نمـایش زوج هـای مرتـب تـشکیل دهنـده ی یـک تـابع باشـد، هـر زوج مرتـب مانند $(a,b)\in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیـین محـل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

برای مثال نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ به شکل زیر است. که قبلاً آن را سهمی نامیده ایم.

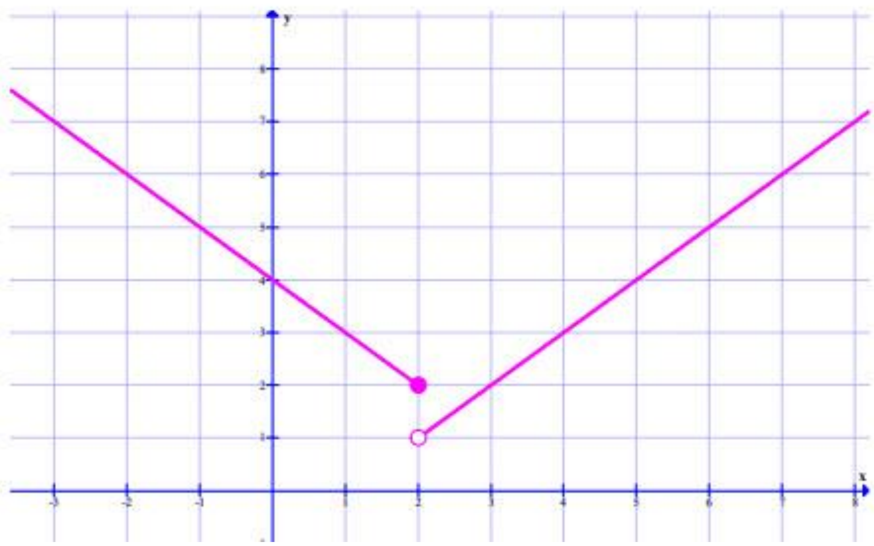


در نمایش هندسی تابع ، زمانی یک نمودار نمایش تابع را نشان می دهد که اگر هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم نمودار را فقط در یک نقطه قطع کند.

توجه: گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد. تابع زیر نمونه ای از یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x>۲ \\ ۴-x & x\le ۲ \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز به شکل زیر است.



در حقیقت توابع چند ضابطه ای توابعی هستند که در هر قسمتی از دامنه ی خود دارای ضابطه ی متفاوتی هستند.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای بوده و $Q(x)$ غیرصفر باشد، را تابع گویا می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، گویا هستند.

$$f(x)=\frac{x^{2}+3x-1}{x+5} \quad و \quad f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{5-x^{3}} \quad و \quad f(r)=\frac{1-r}{3r-7} \quad و \quad f(k)=5k-1$$

همچنین هر یک از توابع زیر گویا نمی باشند. (چرا؟)

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{2x-9} \qquad و \qquad f(u)=\sqrt{5u^{2}+3}$$

دامنه‌ی هر تابع گویا ، برابر مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

تابع رادیکالی

هر تابع به شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ که در آن عبارت $P(x)\geq 0$ باشد، را یک تابع رادیکالی می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، رادیکالی هستند.

$$f(x)=\sqrt{x^{2}+3x-1} \qquad و \qquad f(u)=\sqrt{3-u}$$

همچنین هر یک از توابع زیر رادیکالی نمی باشند.(چرا؟)

$$f(x)=2\sqrt{5}x^{3}+2x+1 \qquad و \qquad f(r)=5r^{2}+3$$

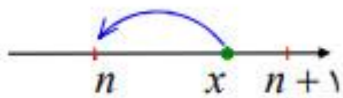
دامنه‌ی هر تابع رادیکالی ، برابر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که به ازای هر عضو آن زیر رادیکال منفی نشود.

$$D_f=\{x|P(x)\geq 0\}$$

هر تابع که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه طوری تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد، را تابع پله ای می نامند. مانند تابع زیر

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x\le -3 \\ -1 & -1\le x<4 \\ 2 & x\ge 4 \end{cases}$$

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x را جزء صحیح x می نامند و آن را با نماد $[x]$ نمایش می دهند.



$$n\le x<n+1\rightarrow [x]=n$$

مثال : نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[-2,3)$ رسم کنید.

حل : فاصله‌ی $[-2,3)$ را طوری به بازه های کوچکتر تقسیم می کنیم. که جزء صحیح تمام اعضای هر بازه یکسان باشد.

$$-2\le x<-1\xrightarrow{f(x)=[x]} y=-2 \qquad -1\le x<0\xrightarrow{f(x)=[x]} y=-1$$

$$0\le x<1\xrightarrow{f(x)=[x]} y=0 \qquad 1\le x<2\xrightarrow{f(x)=[x]} y=1$$

$$2\le x<3\xrightarrow{f(x)=[x]} y=2$$

دو تابع f و g را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) دامنه های هر دو تابع مجموعه های مساوی باشند. ($D_f = D_g$)

ب) به ازای هر x عضو دامنه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند. ($f(x) = g(x)$)

به عبارتی دیگر، دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودار های آنها در یک دستگاه مختصات دقیقاً بر هم منطبق شوند.

تابع یک به یک

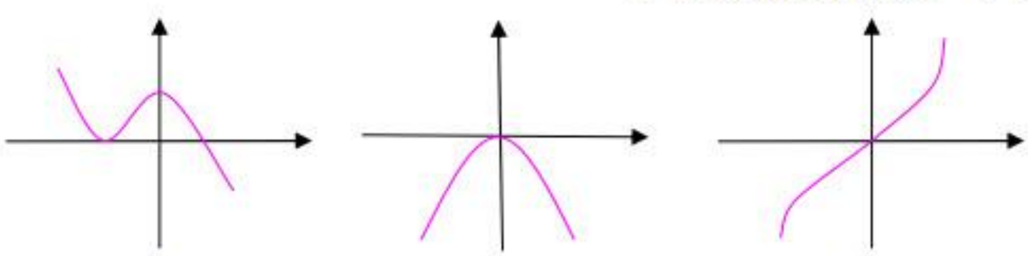
یک تابع زوج مرتب زمانی یک به یک است که هیچ مولفه ی دوم یکسانی نداشته باشد. اگر دو زوج مرتب مولفه دوم ی یکسانی در یک تابع یک به یک داشته باشند باید مولفه ی اول یکسانی نیز داشته باشند.

تابع $f = \{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ یک به یک است.

تابع $g = \{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ یک به یک نیست.

در نمودار دکارتی ، یک نمودار زمانی یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور x ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



(الف) (ب) (ج)

حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

اگر مؤلفه های اوّل و دوّم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اوّل) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدیـد را را تابع معکوس می نامند. مانند :

$f = \{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g = \{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع معکوس f

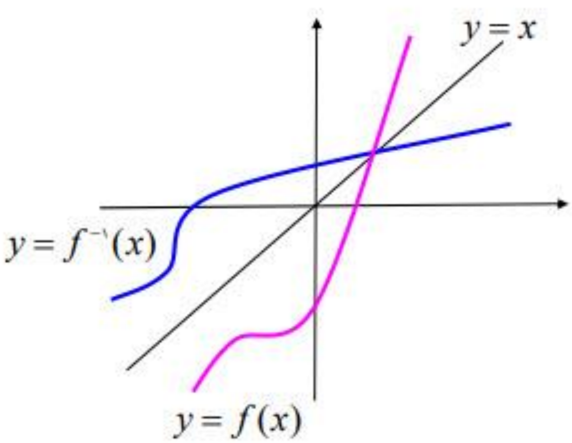
حالت دوّم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$f = \{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g = \{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اوّل وسوّم ($y = x$) متقارن هستند.



روش به دست آودن وارون ضابطه تابع : هر گاه بخواهیم وارون ضابطه تابع را به دست آوریم ، ابتدا با اعمال ریاضی مقدار x را در یک طرف تساوی به صروت تنها در می آوریم. در این حالت جای xوy را عوض میکنیم تابع به دست آمده وارون تابع نامیده می شود.

ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$x \xrightarrow{\times ۲} ۲x \xrightarrow{-۳} ۲x-۳ \xrightarrow{root} \sqrt{۲x-۳} \rightarrow y$$

$$y \leftarrow \frac{x^{۲}+۳}{۲} \xleftarrow{\div ۲} x^{۲}+۳ \xleftarrow{+۳} x^{۲} \xleftarrow{sqr} x$$

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳} \rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^{۲}+۳}{۲}$$

اعمال جبری روی تابع : توابع را میتوان با هم جمع و تفریق و تقسیم و ضرب کرد. قوانینی برای هر کدام وجود دارد.

اگر f و g دو تابع باشند، در این صورت اعمال زیر را می توان روی دامنه‌ی مشترک آنها تعریف کرد.

: جمع دو تابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

: تفریق دو تابع

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g$$

: ضرب دو تابع

$$(f \times g)(x)=f(x) \times g(x)$$

$$D_{f \times g}=D_f \cap D_g$$

: تقسیم دو تابع

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

*کنکوری های عزیز . سعی کنید نکات و درس ریاضی را در مثال ها و تمرین ها یاد بگیرید . درسنامه های طولانی و انبار کردن نکات زیاد در خیلی از کتاب هایی که در بازار وجود دارد هیچ یادگیری را در شما تقویت نمی کند.پس سعی کنید که درس را در تمرین ها و مثال ها یاد بگیرید.

تمرین (امتحان نهایی)

جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب تکمیل کنید.

پ) حاصل $[-\pi]+[۳/۲]+[-۵/۱]$ برابر .... است.

ت) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x-۳|$ روی بازهٔ $[x,+\infty)$ تابعی یک به یک است. بزرگ‌ترین مقدار x برابر .... است.

پ) ‎-۷ (۰/۵)   ت) ۳ (۰/۲۵)

تمرین (امتحان نهایی)

آیا دو تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ و $g(x)=x+۳$ با هم برابرند؟ چرا؟

$D_f=R-\{۳\}$ (۰/۲۵) $D_g=R$ (۰/۲۵) $D_f\neq D_g \Rightarrow$ (۰/۲۵) دو تابع برابر نیستند

تمرین (امتحان نهایی)

ابتدا نشان دهید تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۱}$ وارون‌پذیر است. سپس ضابطهٔ تابع وارون را به دست آورید.

$$\frac{۲x_۱}{x_۱+۱}=\frac{۲x_۲}{x_۲+۱}\Rightarrow ۲\cancel{x_۱x_۲}+۲x_۱=۲\cancel{x_۱x_۲}+۲x_۲\Rightarrow x_۱=x_۲$$

(۰/۲۵)   (۰/۲۵) یک به یک بوده پس وارون‌پذیر است

$$y=\frac{۲x}{x+۱}\Rightarrow yx+y=۲x\rightarrow x(۲-y)=y\rightarrow x=\frac{y}{۲-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲-x}$$

(۰/۲۵)   (۰/۲۵)

تمرین (امتحان نهایی)

اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ باشند:

الف) دامنه $\dfrac{f}{g}$ را بیابید.

ب) مقدار $(2f\times g)(3)$ را به دست آورید.

الف) $D_f=[-1,+\infty)$ (۰/۲۵) $D_g=R-\{2\}$ (۰/۲۵) $D_{\frac{f}{g}}=([-1,+\infty)\cap R-\{2\})-\{-1\}=(-1,2)\cup(2,+\infty)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $2f(3)\times g(3)=2\times 2\times 4=16$ (۰/۵)

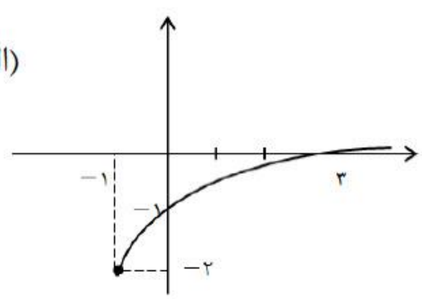
تمرین (امتحان نهایی)

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{x+1}-2$ (به کمک انتقال)

ب) $y=[x-1]$ در بازهٔ $[-2,1)$

الف) (۰/۷۵)



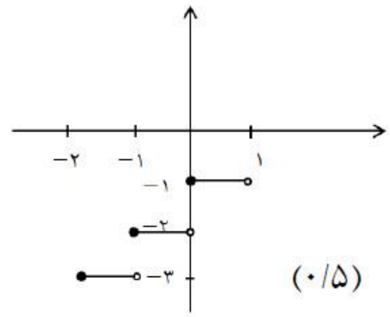
ب) $y=[x]-1$

$-2\le x<-1\to[x]=-2\to y=-3$

$-1\le x<0\to[x]=-1\to y=-2$

$0\le x<1\to[x]=0\to y=-1$

(۰/۵)



(۰/۵)

محاسبات

تمرین(امتحان نهایی)

دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\dfrac{x-۳}{x^۲-۵x+۶}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{x-۴}{۱-x}}$

(۲ نمره)

الف) $x^۵-۵x+۶\neq ۰$ $\qquad x=۲,۳$ $\qquad$ (۱ نمره)

$D_y=\mathbb{R}-\{۲,۳\}$

ب) $\dfrac{x-۴}{۱-x}\geq ۰$

		۱	۴	
$x-۴$	-	-	+	
$۱-x$	+	-	-	
	-	+	-	

تعریف نشده

$D_y=(۱,۴]$ $\qquad$ (۱نمره)

تمرین (امتحان نهایی)

وارون تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}-۱$ را بررسی کرده و تابع وارون آن را بیابید.

$$y_۱=y_۲\Rightarrow\sqrt{x_۱+۱}\cancel{-۱}=\sqrt{x_۲+۱}\cancel{-۱}=\boxed{x_۱=x_۲}$$

وارون‌پذیر $\qquad$ (۰/۵ نمره)

$$x=\sqrt{y+۱}-۱\Rightarrow x+۱=\sqrt{y+۱}$$

(۱ نمره)

$$(x+۱)^۲=y+۱\Rightarrow y=(x+۱)^۲-۱$$

تمرین (امتحان نهایی)

گزینه درست را انتخاب کنید.

۱) تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۲} - ۸x - ۱$ در بازه‌ی .... یک به یک است.

الف) $(-۳ ، + \infty)$ ب) $[۲ ، + \infty)$ ج) $[-۲ ، + \infty)$ د) $(-۵ ، ۶]$

۲) اگر $f = \{(۲ ، ۵) ، (۳ ، ۴) ، (۰ ، -۲)\}$ ، $g = \{(-۲ ، ۳) ، (۵ ، ۷) ، (۲ ، ۱)\}$ حاصل $f + g$ کدام است.

الف) $(۲ ، ۶)$ ب) $(۲ ، ۴) ، (۳ ، ۳)$ ج) $(۲ ، ۵)$ د) $(۳ ، ۶)$

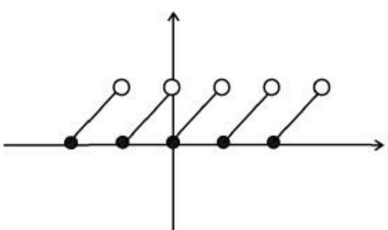
الف) $(2 ، 6)$ ب) $[4 ، + \infty)$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

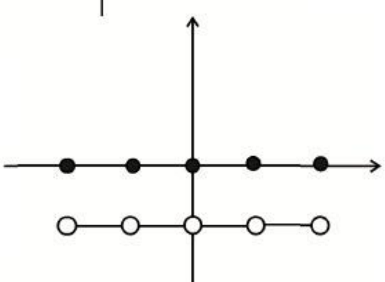
اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = [x] + [-x]$ باشد، ضابطهٔ تابع $(f \times g)(x)$ کدام است؟

۱) $[x] - x$ ۲) $x^{۲} - [-x]$ ۳) $x - [x]$ ۴) $x^{۲} + [-x]$

گزینه ۱ درست است.



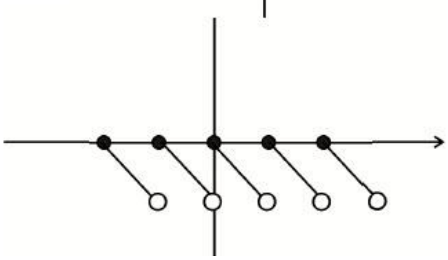
$$f(x) = x - [x] \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ ۰ < x - [x] < ۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$g(x) = [x] + [-x] \Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ < [x] - x < ۰ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f \times g)(x) = [x] - x$$



تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- اگر دو تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x-۲)(x+c)(x+b)}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{(x+۱)(bx^۲+dx+۴)}$ با هم برابر باشند، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

گزینه ۲ درست است.

$$ax+b=۱ \quad \Rightarrow \quad a=۰, b=۱$$

$$f(x)=\frac{۱}{(x-۲)(x+c)(x+۱)} \qquad g(x)=\frac{۱}{(x+۱)(x^۲+dx+۴)}$$

$$x^۲+dx+۴=(x-۲)(x+c)$$

$$\begin{array}{l|l} x^۲+dx+۴ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{\pm x^۲ \mp ۲x} & x+d+۲ \\ (d+۲)x+۴ & \\ \pm(d+۲)x\mp ۲(d+۲) & \\ ۲d+۴+۴=۰ \Rightarrow d=-۴ & \end{array}$$

$$d+۲=c \Rightarrow -۴+۲=c \Rightarrow c=-۲$$

$$a+b+c+d=۰+۱-۲-۴=-۵$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- دامنه تابع $f(x)=\dfrac{[۱+[x]]}{[x+[-x]]}$ ، کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

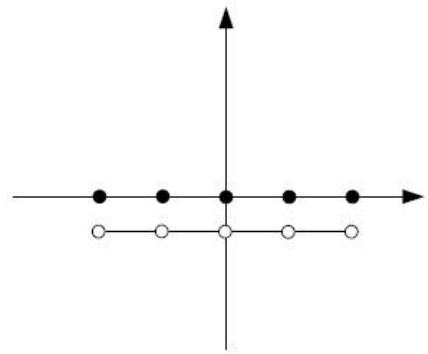
گزینه ۴ درست است.

$$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

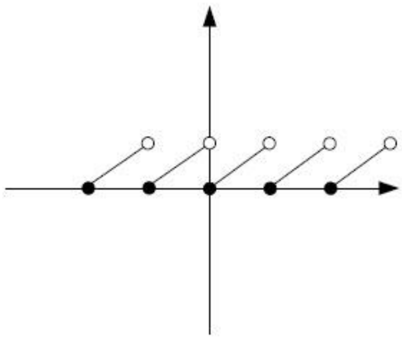
$$D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

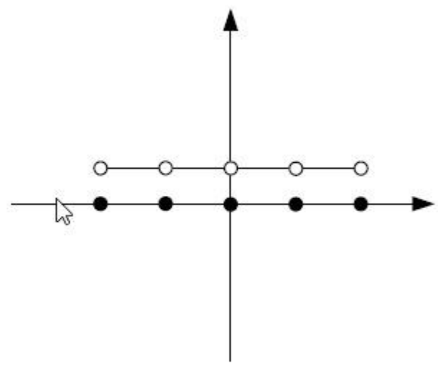
اگر $f(x)=x-[x]$ و $(f+g)(x)=x+[-x]$ باشد، نمودار تابع $g(x)$ کدام است؟



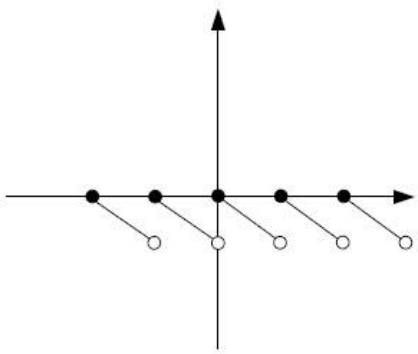
(۱



(۲



(۳



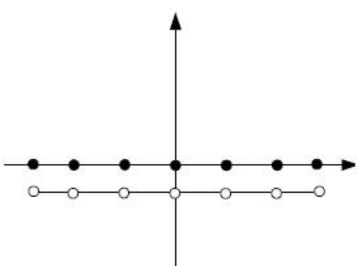
(۴

. گزینه ۱ درست است.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad D_f=D_g=\mathbb{R}$$

$$x+[-x]=x-[x]+g(x)\Rightarrow g(x)=\cancel{x}+[-x]-\cancel{x}+[x]$$

$$g(x)=[x]+[-x]$$



*انتخاب منابع و کتاب های کمک آموزشی مناسب برای شما ، از مهم ترین قدم های رسیدن به موفقیت است

تمرین (مخزن سوالات کنکور سراسری)

- ضابطه تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳x-۱}{۲} & -۱<x<۱\\ x^۲+۱ & ۱<x\le ۲\end{cases}$، کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{۳}x-۱ & -۲\le x\le ۱\\ -\sqrt{x-۱} & ۲<x\le ۵\end{cases}$

۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{۲x+۱}{۳} & -۲\le x\le ۱\\ \sqrt{x-۱} & ۲<x\le ۵\end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{۳}x-۱ & -۲\le x\le ۱\\ -\sqrt{x-۱} & ۱<x\le ۵\end{cases}$

۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{۲x+۱}{۳} & -۲\le x\le ۱\\ \sqrt{x-۱} & ۱<x\le ۵\end{cases}$

گزینه ۲ درست است.

$$y=\frac{۳x-۱}{۲}\Rightarrow ۳x=۲y+۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۱}{۳},-۲\le x\le ۱$$

$$y=x^۲+۱\Rightarrow x=\begin{cases}\sqrt{y-۱} & \text{ق ق}\\ -\sqrt{y-۱} & \text{غ ق ق}\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱},۲<x\le ۵$$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{۲x+۱}{۳} & -۲\le x\le ۱\\ \sqrt{x-۱} & ۲<x\le ۵\end{cases}$$

تمرین (مخزن سوالات گروه آموزشی آفتاب)

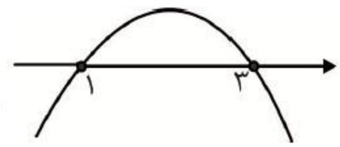
- اگر تمام دامنه تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{-x^۲+ax+b-c}}$ به صورت $[۱,۳]-\{۲\}$ باشد $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۸

گزینه ۱ درست است.

$$-x^{۲}+ax+b\geq ۰$$

۱ و ۳ ریشه‌های $-x^{۲}+ax+b$ هستند و ۲ ریشه مخرج است.



$$S=۱+۳=۴=a$$
$$P=(۱)(۳)=۳=-b\rightarrow b=-۳$$
$$\sqrt{-x^{۲}+ax+b}-c=۰\rightarrow \sqrt{-x^{۲}+ax+b}=c\rightarrow \sqrt{-x^{۲}+۴x-۳}=c$$
$$x=۲\rightarrow \sqrt{-۴+۸-۳}=c\rightarrow c=۱$$

تمرین (مخزن سوالات سازمان سنجش)

- نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۱}$ را یک واحد به راست منتقل کرده سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع $f(x)$ بدست آید. اگر $f(x)$ منحنی $y=\sqrt{x}+۱$ را در نقطه (α,β) قطع کند $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۲۱

گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=-\sqrt{۲(x-۱)+۱}+۳=-\sqrt{۲x-۱}+۳$$
$$-\sqrt{۲x-۱}+۳=\sqrt{x}+۱\rightarrow \sqrt{۲x-۱}=۲-\sqrt{x}$$
$$\rightarrow ۲x-۱=۴+x-۴\sqrt{x}\rightarrow x-۵=-۴\sqrt{x}\rightarrow x^{۲}-۱۰x+۲۵=۱۶x$$
$$\rightarrow x^{۲}-۲۶x+۲۵=۰\rightarrow x=۱\ ,\ x=۲۵$$

ق ق   غ ق ق

$$\rightarrow x=۱\rightarrow y=۲\rightarrow \alpha+\beta=۳$$

تمرین (مخزن سوالات استاد دارستانی)

- اگر $f(x)=|x|-b$ و $g(x)=ax[x]+۳[-x]$ در بازه $(-۲,-۱)$ مساوی باشند به ازاء کدام مقدار c فاصله رأس سهمی $y=۲ax^{۲}-(b+۱)x+c$ از نیمساز ربع اول و سوم برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۴ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) $\pm ۲\sqrt{۲}$

گزینه ۱ درست است.

$$-۲ < x < -۱ \to f(x) = -x - b$$

$$\to [x] = -۲, [-x] = ۱ \to g(x) = -۲ax + ۳$$

$$f(x) = g(x) \to -x - b = -۲ax + ۳ \to a = \frac{۱}{۲}, b = -۳$$

$$y = x^۲ + ۲x + c \Rightarrow s(-۱, c-۱)\ ,\ y = x$$

$$d = \frac{|-۱ - c + ۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \sqrt{۲} \to |-c| = ۲ \to c = \pm ۲$$

تمرین (مخزن سوالات استاد دارستانی)

. اگر توابع $f(x) = x + \sqrt{x-۱} - ۲$ و $g = \{(۱,۲)(۳,۵)(c+d,۸)(۱,b)(b+c,۵)\}$ وارون‌پذیر باشد و $f^{-۱}(۱) + g^{-۱}(a) = ۶$ باشد مقدار ad کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۱

گزینه ۱ درست است.

$$f^{-۱}(۱) = A \to f(A) = ۱ \to A + \sqrt{A-۱} - ۲ = ۱$$

$$\to \sqrt{A-۱} = ۳ - A \to A - ۱ = ۹ - ۶A + A^۲ \to A^۲ - ۷A + ۱۰ = ۰$$

$$\to (A-۲)(A-۵) = ۰ \to \underset{\text{ق ق}}{A = ۲}\ ,\ \underset{\text{غ ق ق}}{A = ۵}$$

$$\to \underline{f^{-۱}(۱) = ۲}$$

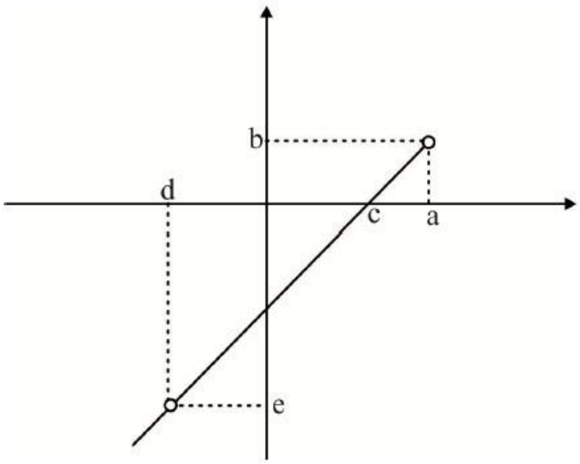
g تابع یک به یک است. $\boxed{b = ۲}$, $b + c = ۳ \to \boxed{c = ۱}$

$$\to g = \{(۱,۲)(۳,۵)(۱+d,۸)\}$$

$$f^{-۱}(۱) + g^{-۱}(a) = ۶ \to g^{-۱}(a) = ۴ \to g(۴) = a \to \begin{cases} ۱ + d = ۴ \\ \boxed{a = ۸} \end{cases} \to \boxed{d = ۳}$$

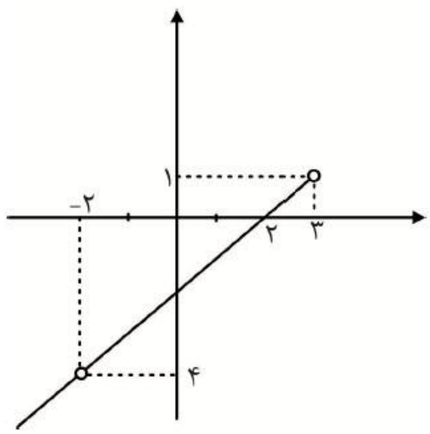
تمرین (مخزن سوالات استاد دارستانی)

- اگر $f(x)=(x^۲-۴)\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=(x+۲)\sqrt{۳-x}$ و نمودار $y=(\frac{f}{g})(x)$ به صورت زیر باشد حاصل $ac+bde$ کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۴
۳) -۲
۴) -۱۸

.گزینه ۲ درست است



$$D_{\frac{f}{g}}:(-\infty,۳)-\{-۲\}$$

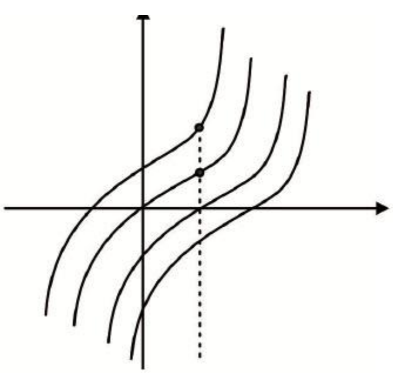
$$y=\frac{f}{g}=\frac{(x^۲-۴)\sqrt{۳-x}}{(x+۲)\sqrt{۳-x}}=x-۲$$

$$a=۳,c=۲,b=۱,d=-۲,e=-۴$$

تمرین (مخزن سوالات استاد دارستانی)

- وارون تابع $y=(x-۳)(x^۲+۳)+a$ فقط از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند محدوده a کدام است؟

۱) $a<۱۰$ ۲) $a>۱۰$ ۳) $a<۹$ ۴) $a>۹$



گزینه ۳ درست است.

وارون تابع از سه ناحیه اول و دوم و سوم عبور می‌کند پس خود تابع از سه ناحیه اول و چهارم و سوم عبور می‌کند.

$$y=x^۳-۳x^۲+۳x-۹+a=(x-۱)^۳+a-۸$$

باید عرض از مبدأ منفی باشد.

$$x=۰\rightarrow y=a-۹<۰\rightarrow a<۹$$

محاسبات