



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳
۳۰ اسفند

دفترچه
سؤال
آزمون پنجم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

مشتق و کاربرد مشتق
ریاضی ۳
صفحه ۶۵ تا ۱۲۰

مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - حسین شفیع زاده - مسعود شفیعی - علی شهبازی - مهدی عزیزی -
مehرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی منش

گزینشگر

رسول محسنی منش

مؤلف پاسخ‌نامه

مسعود شفیعی

کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

محمد گودرزی

ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

امیرحسین ابومحبوب
زهرا جالینوسی
ماهان فنی‌فر
ابوالفضل ناصری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



ریاضی (۳): صفحه‌های ۶۵ تا ۱۲۰

۱- باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^3 - 4x$ به ترتیب $x^2 - x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $p'(-2) = 5$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x + 2$ کدام می‌شود؟

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۲- در مورد مشتق‌پذیری تابع $f(x) = (-1)^{|x|} |x - 1| (x - 2)$ در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ کدام توصیف درست است؟

(۱) در هر دو نقطه مشتق‌پذیر است.
(۲) در $x = 1$ مشتق‌پذیر، ولی در $x = 2$ مشتق‌ناپذیر
(۳) در هر دو نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
(۴) در $x = 1$ مشتق‌ناپذیر، ولی در $x = 2$ مشتق‌پذیر

۳- اگر $f: \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x^2) = 3x^3 - x + 1; x \geq 0$ ، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1}$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۴- اگر $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)(x^2 + ax - 1 - a)}$ و $f'(1) = \sqrt[3]{12}$ ، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵- تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و متناوب با دوره تناوب ۴ است. اگر خط به معادله $5x - 2y = 1$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر نمودار

تابع f مماس باشد، با فرض $g(x) = f\left(\frac{1-x}{4}\right) + 2f(3x-2) - \frac{1}{4}f(5x-24)$ ، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)$ در نقطه‌ای به طول ۳ روی آن کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) -۱۵ (۳) ۳۰ (۴) -۳۰

۶- فرض کنید $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ و $g(x) = f(x)(f(x) + xf'(x))$ ، مقدار $g'(\sqrt[4]{3})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) صفر (۴) ۳

۷- تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx-7}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 3/5^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c + 0/5$ و تابع f و f^{-1} در نقطه‌ای به

طول α بر هم مماس باشند، حاصل $\alpha - b$ کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

محل انجام محاسبات



۸- اگر $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ آن گاه تابع $f \circ f$ در چند نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق ندارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$ و تابع $g \circ f$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، مشتق راست تابع با ضابطه $y = [\frac{-5}{x}]g(x)$

در $x=3$ چند برابر مشتق چپ آن است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰- اگر $f(x) = \frac{x^2 - m}{|2 - x|}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} (f \circ g)(x)$ کدام است؟ ($m \neq 9$)

- (۱) ۲۶ (۲) -۲۶ (۳) ۳۶ (۴) -۳۶

۱۱- اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x - a}{4x^2 - 2x + 3a}$ در نقطه A برابر صفر و در نقاط B و C قرینه یکدیگر باشد،

مجموع طول‌های نقاط A, B و C برابر کدام است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/75$ (۳) $1/25$ (۴) $2/75$

۱۲- اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 4$ آن گاه $f'(1)$ برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳- تابع $f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^2 - 1}$ روی بازه $(0, \alpha)$ اکیداً نزولی است. اگر α بیشترین مقدار قابل قبول باشد، حاصل $f(\alpha+1)$

کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۱۴- مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ باشد، برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

محل انجام محاسبات



۱۵- فرض کنید $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. مجموع بیشترین و کمترین مقدار $f(x - \sqrt{1-x^2})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{15}{4}$

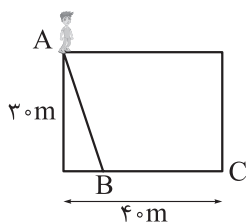
۱۶- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2+1}$ ، جزء صحیح عرض نقطه ماکزیمم نسبی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۱۷- به ازای چند مقدار صحیح m ، نقطه مینیمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{m-5}{x^2+2x+m}$ ، مینیمم مطلق تابع هم می باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۸- سرعت شخص درون محوطه مستطیلی پارک برابر ۱ و روی محیط آن $\sqrt{5}$ متر بر ثانیه است. کمترین زمان برای رسیدن از نقطه A به نقطه C چند ثانیه است؟



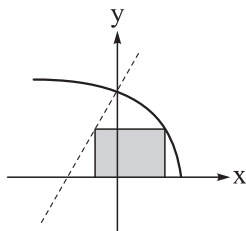
(۱) $30 + \sqrt{175}$

(۲) ۵۰

(۳) $20\sqrt{5}$

(۴) $24\sqrt{5}$

۱۹- مانند شکل زیر، یک رأس مستطیل روی نمودار $y = \sqrt{4-2x}$ و رأس دیگر روی خط گذرنده از $(0, 2)$ و $(-1, 0)$ قرار دارد و دو رأس دیگر روی محور x است. بیشترین مساحت این مستطیل، به ازای کدام مقدار عرض آن حاصل می شود؟



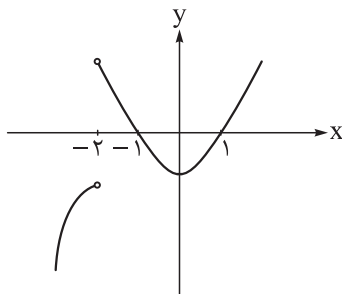
(۲) $\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6}$

(۱) $-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6}$

(۴) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}$

(۳) $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}$

۲۰- اگر نمودار مشتق تابع $f(x) = |(x-1)(ax^2+bx-4)|$ به شکل زیر باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع



$g(x) = |ax^2+bx+a-b|$ برابر کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{3}{2}$

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳
۳۰ اسفند

دفترچه
پاسخ
آزمون پنجم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

مشتق و کاربرد مشتق
ریاضی ۳
صفحه ۶۵ تا ۱۲۰

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - حسین شفیعی زاده - مسعود شفیعی - علی شهرابی - مهدی عزیزی -
مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی منش

گزینشگر

رسول محسنی منش

مؤلف پاسخ‌نامه

مسعود شفیعی

کارشناسان علمی - محتوایی
به ترتیب حروف الفبا

محمد گودرزی

ویراستاران
به ترتیب حروف الفبا

امیرحسین ابومحبوب
زهرا جالینوسی
ماهان فنی‌فر
ابوالفضل ناصری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با مرور نامه کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت جزوه جمع‌بندی، ترکیبی و تصویری در قالب مرور نامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۳): صفحه‌های ۶۵ تا ۱۲۰

تست و پاسخ ۱

باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^3 - 4x$ به ترتیب $x^2 - x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $p'(-2) = 5$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x + 2$ کدام می‌شود؟

$$\frac{7}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$p(x) = (x^3 - 4x)Q(x) + x^2 - x + 1$$

گام اول: ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$p'(x) = (3x^2 - 4)Q(x) + (x^3 - 4x)Q'(x) + 2x - 1$$

گام دوم: حالا از عبارت مشتق می‌گیریم:

$$p'(-2) = 8Q(-2) + 0 \times Q'(-2) - 5 \Rightarrow 5 = 8Q(-2) - 5 \Rightarrow Q(-2) = \frac{5}{4}$$

گام سوم: به جای x قرار می‌دهیم (-2) :

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x + 2$ برابر $\frac{5}{4}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲

در مورد مشتق‌پذیری تابع $f(x) = (-1)^{[x]} |x-1|(x-2)$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ کدام توصیف درست است؟

(۲) در $x=1$ مشتق‌پذیر، ولی در $x=2$ مشتق‌ناپذیر

(۱) در هر دو نقطه مشتق‌پذیر است.

(۴) در $x=1$ مشتق‌ناپذیر، ولی در $x=2$ مشتق‌پذیر

(۳) در هر دو نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا دقت کنید که f در $x=1$ و $x=2$ پیوسته است، چون:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1) \times \underbrace{(x-1)}_{\text{صفر}} \times \underbrace{(x-2)}_{-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{منفی}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 \times \underbrace{(-x+1)}_{\text{صفر}} \times \underbrace{(x-2)}_{-1} = 0 \\ f(1) &= (-1)^{[1]} \times |1-1| \times (1-2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 \times \underbrace{(x-1)}_1 \times \underbrace{(x-2)}_{\text{صفر}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1) \times \underbrace{(x-1)}_1 \times \underbrace{(x-2)}_{\text{صفر}} = 0 \\ f(2) &= (-1)^{[2]} \times |2-1| \times (2-2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x=2 \text{ پیوسته است.}$$

گام دوم: حالا سراغ مشتق چپ و راست f در $x=1$ می‌رویم:

$$x=1 \text{ در } f \text{ راست} \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^1 \times \underbrace{(x-1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \times (x-2)$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = (-1) \times 1 \times (1-2) = +1$$

$$x=1 \text{ در } f \text{ چپ} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^0 \times \underbrace{(-x+1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \times (x-2)$$

$$\Rightarrow f'_-(1) = 1 \times (-1) \times (1-2) = +1$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$f'_-(1) = f'_+(1)$ است؛ پس f در $x=1$ مشتق پذیر می شود.

گام سوم: در آخر مشتق چپ و راست f در $x=2$ را هم بررسی می کنیم:

$$x=2 \text{ در } f \text{ مشتق راست} \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^2 \times (x-1) \times \underbrace{(x-2)}_{\text{عامل صفرشونده}}$$

$$\Rightarrow f'_+(2) = 1 \times (2-1) \times 1 = 1$$

$$x=2 \text{ در } f \text{ مشتق چپ} \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^1 \times (x-1) \times \underbrace{(x-2)}_{\text{عامل صفرشونده}}$$

$$\Rightarrow f'_-(2) = -1 \times (2-1) \times 1 = -1$$

$f'_-(2) \neq f'_+(2)$ است؛ پس f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

تست و پاسخ ۳

اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x^2) = 3x^3 - x + 1; x \geq 0$ ، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1}$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: گام اول: اول سراغ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1}$ می رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{f(x) + f(1)}{x + 1} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}_{\text{تعریف مشتق}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + f(1)}{x + 1}}_{\frac{f(1)+f(1)}{1+1}=f(1)} = f'(1) \cdot f(1)$$

$$f(x^2) = 3x^3 - x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = 3$$

گام دوم: از طرفی:

$$\Rightarrow 2xf'(x^2) = 9x^2 - 1$$

گام سوم: حالا از طرفین معادله $f(x^2) = 3x^3 - x + 1$ مشتق می گیریم:

$$2f'(1) = 8 \Rightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow f(1) \cdot f'(1) = 3 \times 4 = 12$$

با جای گذاری $x=1$ در معادله بالا داریم:

روش دوم: حاصل حد داده شده در صورت سؤال را به کمک هویتال هم می توانیم محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f'(x)}{x} = f(1) \cdot f'(1)$$

ادامه مانند روش اول.

تست و پاسخ ۴

اگر $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)(x^2 + ax - 1 - a)}$ و $f'(1) = \sqrt[3]{12}$ ، آن گاه مقدار a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: عبارت زیر رادیکال را تجزیه می کنیم:

$$x^3 - 3x + 2 = \underbrace{x^3 - x^2}_{x^2(x-1)} + \underbrace{x^2 - 3x + 2}_{(x-1)(x-2)} = (x-1) \underbrace{(x^2 + x - 2)}_{(x-1)(x+2)} = (x-1)^2 (x+2)$$

$$x^2 + ax - 1 - a = \underbrace{x^2 - 1}_{(x-1)(x+1)} + \underbrace{ax - a}_{a(x-1)} = (x-1)(x+1+a)$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

بنابراین ضابطه f به شکل زیر می شود:

$$f(x) = \sqrt[3]{\underbrace{(x^3 - 3x + 2)}_{(x-1)^2(x+2)} \underbrace{(x^2 + ax - 1 - a)}_{(x-1)(x+1+a)}} = \sqrt[3]{(x-1)^3(x+2)(x+1+a)} = (x-1)\sqrt[3]{(x+2)(x+1+a)}$$

گام دوم: حالا به کمک عامل صفرشونده $x-1$ ، $f'(1)$ را محاسبه می کنیم:

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{(x+2)(x+1+a)} \Rightarrow f'(1) = 1 \times \sqrt[3]{(1+2)(1+1+a)} = \sqrt[3]{2(2+a)} = \sqrt[3]{12} \Rightarrow a = 2$$

عامل صفرشونده

تست و پاسخ ۵

تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و متناوب با دوره تناوب ۴ است. اگر خط به معادله $\Delta x - 2y = 1$ در نقطه ای به طول ۱- بر نمودار تابع f مماس باشد، با فرض $g(x) = f(\frac{1-x}{2}) + 2f(3x-2) - \frac{1}{2}f(\Delta x - 24)$ ، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)$ در نقطه ای به طول ۳ روی آن کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) -۱۵ (۳) ۳۰ (۴) -۳۰

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: خط $\Delta x - 2y = 1$ یا همان $y = \frac{\Delta x}{2} - \frac{1}{2}$ در نقطه ای به طول ۱- بر نمودار تابع f مماس است. شیب این خط برابر $\frac{\Delta x}{2}$ است و با جای گذاری $x = -1$ در آن، $y = -3$ می شود؛ پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -3 \\ f'(-1) = \frac{\Delta x}{2} \end{cases}$$

گام دوم: f تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ است؛ پس:

$$f(x) = f(x+4) \Rightarrow \dots = f(-9) = f(-5) = f(-1) = f(3) = \dots = -3$$

$$f'(x) = f'(x+4) \Rightarrow \dots = f'(-9) = f'(-5) = f'(-1) = f'(3) = \dots = \frac{\Delta x}{2}$$

از طرفی، چون f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، داریم:

$$g(x) = f(\frac{1-x}{2}) + 2f(3x-2) - \frac{1}{2}f(\Delta x - 24)$$

گام سوم: مقدار $g(3)$ را محاسبه می کنیم:

$$g(3) = \underbrace{f(-1)}_{-3} + 2\underbrace{f(7)}_{-3} - \frac{1}{2}\underbrace{f(-9)}_{-3} = -\frac{15}{2}$$

$$f(\frac{1-x}{2}) \xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{1}{2}f'(\frac{1-x}{2})$$

مشتق داخل

گام چهارم: حالا سراغ $g'(3)$ می رویم. اول باید از g مشتق بگیریم:

$$2f(3x-2) \xrightarrow{\text{مشتق}} 3 \times 2f'(3x-2) = 6f'(3x-2)$$

مشتق داخل

$$-\frac{1}{2}f(\Delta x - 24) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{\Delta x}{2} \times (-\frac{1}{2})f'(\Delta x - 24) = -\frac{\Delta x}{4}f'(\Delta x - 24)$$

مشتق داخل

$$g'(x) = -\frac{1}{2}f'(\frac{1-x}{2}) + 6f'(3x-2) - \frac{\Delta x}{4}f'(\Delta x - 24)$$

پس:

$$\Rightarrow g'(3) = -\frac{1}{2}\underbrace{f'(-1)}_{\frac{\Delta x}{2}} + 6\underbrace{f'(7)}_{\frac{\Delta x}{2}} - \frac{\Delta x}{4}\underbrace{f'(-9)}_{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{15}{2}$$

گام پنجم:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

نکته معادله خط مماس بر تابع f در نقطه ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن برابر است با:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پس با توجه به نکته بالا، معادله خط مماس بر تابع g در نقطه‌ای به طول $x = 3$ روی آن به صورت زیر است:

$$y - g(3) = g'(3)(x - 3) \Rightarrow y - (-\frac{15}{2}) = \frac{15}{2}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{15}{2} = \frac{15}{2}x - \frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{2}x - \frac{45}{2} - \frac{15}{2} \Rightarrow y = \frac{15}{2}x - \frac{60}{2}$$

عرض از مبدأ

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس برابر -30 است.

تست و پاسخ ۶

فرض کنید $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ و $g(x) = f(x)(f(x) + xf'(x))$. مقدار $g'(\sqrt{3})$ کدام است؟

۳ (۴)

صفر (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: اگر با دقت به عبارت $g(x) = f(x)(f(x) + xf'(x))$ نگاه کنیم، متوجه می‌شویم که $f(x) + xf'(x)$ همان مشتق $xf(x)$ است؛ پس $g(x) = f(x)(xf(x))'$ می‌شود.

گام دوم: $(xf(x))'$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow xf(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (xf(x))' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x)(xf(x))' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

گام سوم: $g(x)$ تابع ثابت $y = 1$ است؛ پس مقدار مشتق آن در همه نقاط (از جمله در $x = \sqrt{3}$) برابر صفر می‌شود.

تست و پاسخ ۷

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx-\gamma}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 3/5^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c + \frac{\gamma}{5}$ و تابع f و f^{-1} در نقطه‌ای به طول α بر هم مماس باشند، حاصل $\alpha - b$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: حد تابع f در $x = 3/5$ نامتناهی است؛ پس مخرج f (یعنی $cx - \gamma$) باید در $x = 3/5$ برابر صفر شود:

$$cx - \gamma = 0 \xrightarrow{x=3/5} 3/5c - \gamma = 0 \Rightarrow c = 2$$

گام دوم: حالا حاصل حد در بی‌نهایت f را (به کمک هم‌ارزی پرتوان) محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c + \frac{\gamma}{5} \xrightarrow{c=2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{2x-\gamma} = 2/5$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{2x} = 2/5 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2/5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow f(x) = \frac{5x+b}{2x-\gamma}$$

گام سوم:

نکته ضابطه وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$$f(x) = \frac{5x+b}{2x-\gamma} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\gamma x+b}{2x-5}$$

طبق نکته بالا، داریم:

گام چهارم: برای این که f و f^{-1} بر هم مماس باشند، باید معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ریشه مضاعف داشته باشد:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{5x+b}{2x-\gamma} = \frac{\gamma x+b}{2x-5} \Rightarrow 14x^2 + (2b-49)x - 7b = 10x^2 + (2b-25)x - 5b \Rightarrow 4x^2 - 24x - 2b = 0$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

دلتای این معادله باید برابر صفر باشد:

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 4(-2b) = 0 \Rightarrow 576 + 32b = 0 \xrightarrow{\div 32} 18 + b = 0 \Rightarrow b = -18$$

همچنین، ریشه مضاعف این معادله، همان طول رأس تابع درجه دوم، یعنی $x_s = -\frac{B}{2A} = \frac{24}{8} = 3$ است؛ پس طول نقطه تماس، یعنی α

هم برابر ۳ می شود.

$$\Rightarrow \alpha - b = 3 - (-18) = 21$$

تست و پاسخ ۸

اگر $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ آن گاه تابع fof در چند نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق ندارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: اول ضابطه f را کمی ساده تر می کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

$x \neq 0$
 $x \neq -1$
 $x \neq -\frac{1}{2}$

بنابراین دامنه f به صورت $\mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}\}$ می شود.

گام دوم: حالا دامنه fof را به دست می آوریم:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \cap f(x) \in D_f\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}\}\}}_{x \neq \{0, -1, -\frac{1}{2}\}} \cap \underbrace{\{\frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}\}\}}_{\frac{x+1}{2x+1} \neq \{0, -1, -\frac{1}{2}\}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \\ \frac{x+1}{2x+1} \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{2}{3} \\ \frac{x+1}{2x+1} \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$D_{fof} = \{x \notin \{0, -1, -\frac{1}{2}\} \cap x \notin \{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\}\} = x \notin \{0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\}$$

پس:

$$\Rightarrow D_{fof} = \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\}$$

گام سوم: حالا با توجه به این که fof تابعی گویا است، فقط در ۵ نقطه از $\mathbb{R}$ (نقاط ۰، -۱، $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{2}{3}$ و $-\frac{3}{4}$) مشتق ناپذیر است.

تست و پاسخ ۹

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \geq 1 \\ x+2 & , x < 1 \end{cases}$ و تابع gof در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، مشتق راست تابع با ضابطه $y = [\frac{-5}{x}]g(x)$ در $x = 3$ چند برابر

مشتق چپ آن است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases}$$

گام اول: اول پیوستگی f در $x=1$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x+2 = 3 \\ f(1) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است.}$$

گام دوم: مشتق چپ و راست f در $x=1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f \text{ در } x=1 \text{ مشتق‌ناپذیر است.} \Rightarrow \\ f(x) = 2x+1 \Rightarrow f'_+(1) = 2 \\ f(x) = x+2 \Rightarrow f'_-(1) = 1 \end{aligned} \right\}$$

گام سوم: f در تمام نقاط دامنه‌اش به جز در $x=1$ مشتق‌پذیر است و $\mathbb{R}$ در gof مشتق‌پذیر است، یعنی با این که f در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است، ولی gof در $x=1$ مشتق‌پذیر است؛ پس $(\text{gof})'_+(1) = (\text{gof})'_-(1)$ می‌شود.

$$\Rightarrow \underbrace{f'_+(1)}_2 \cdot \underbrace{(\text{gof})'_+(1)}_{g'(f(1^+))} = \underbrace{f'_-(1)}_1 \cdot \underbrace{(\text{gof})'_-(1)}_{g'(f(1^-))} \quad (*)$$

از طرفی:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 2 \times 1^+ + 1 = 2^+ + 1 = 3^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 1^- + 2 = 3^- \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2g'_+(3) = g'_-(3) \Rightarrow \frac{g'_+(3)}{g'_-(3)} = \frac{1}{2}$$

پس (*) به شکل مقابل می‌شود:

گام چهارم: در آخر، مشتق راست و چپ تابع $y = [-\frac{5}{x}]g(x)$ در $x=3$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{مشتق راست: } y = [-\frac{5}{x}]g(x) \Rightarrow y'_+(3) &= -2g'_+(3) \\ \text{مشتق چپ: } y = [-\frac{5}{x}]g(x) \Rightarrow y'_-(3) &= -2g'_-(3) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{y'_+(3)}{y'_-(3)} = \frac{-2g'_+(3)}{-2g'_-(3)} = \frac{g'_+(3)}{g'_-(3)} = \frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۰

اگر $f(x) = \frac{x^2 - m}{|2 - x|}[-x]$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} \frac{(f \circ g)(x)}{9x - 10}$ کدام است؟ ($m \neq 9$)

۳۶ (۴)

۳۶ (۳)

۲۶ (۲)

۲۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول: ابتدا دقت کنید که با جای‌گذاری $x = \frac{1}{9}$ در $\frac{(f \circ g)(x)}{9x - 10}$ ، مخارج برابر صفر می‌شود، ولی حاصل حد در همه گزینه‌ها عدد است؛ پس صورت هم باید برابر صفر شود:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} (f \circ g)(x) = 0$$

گام دوم: اول مقدار g در $x \rightarrow (\frac{1}{9})^-$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} - 1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

اما دقت کنید که باید حاصل حد را کمی دقیق تر محاسبه کنیم:

$$x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^- \Rightarrow x < \frac{1}{9} \Rightarrow x-1 < \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{رادیکال}} \sqrt{x-1} < \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} g(x) = 3^+$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - m}{|2-x|} \stackrel{\text{منفی}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - m}{x-2} \times (-4) = \frac{9-m}{1} \times (-4)$$

گام سوم: حالا داریم:

مقدار این حد باید برابر صفر باشد؛ پس $m = 9$ می شود.

گام چهارم: حالا که حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} \frac{f(g(x))}{9x-1} = 0$ برابر صفر صفرم است، می توانیم از هوییتال کمک بگیریم:

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} \frac{g'(x)f'(g(x))}{9} \quad (*)$$

گام پنجم: باید مقدار $g'(x)$ در $x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-$ را به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{9}-1\right)^3}} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{27}} = -\frac{27}{2} \quad (I)$$

گام ششم: حالا باید مقدار $f'(g(x))$ در $x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-$ را محاسبه کنیم. دقت کنید در گام دوم دیدیم که $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} g(x) = 3^+$ است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^-} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = f'_+(3)$$

برای محاسبه مشتق راست f در $x = 3$ داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{|2-x|} \xrightarrow{x \rightarrow 3^+ \Rightarrow [-x] = -4, |2-x| = x-2} f'(x) = \frac{2x}{x-2} \times (-4) \Rightarrow f'_+(3) = \frac{6}{1} \times (-4) = -24 \quad (II)$$

$$\frac{-\frac{27}{2} \times (-24)}{9} = 36$$

گام هفتم: در آخر با جای گذاری (I) و (II) در (*) داریم:

تست و پاسخ

اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x - a}{4x^2 - 2x + 3a}$ در نقطه A برابر صفر و در نقاط B و C قرینه یکدیگر باشد، مجموع طول‌های نقاط A ، B و C برابر کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: از f مشتق می گیریم تا آهنگ تغییر لحظه‌ای به دست آید:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - a}{4x^2 - 2x + 3a} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x-1)(4x^2 - 2x + 3a) - (2x^2 - x - a)(8x-2)}{(4x^2 - 2x + 3a)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{20ax - 5a}{(4x^2 - 2x + 3a)^2}$$

گام دوم: با توجه به ضابطه f' ، واضح است که مقدار f' فقط به ازای ریشه صورت، یعنی $x = \frac{1}{4}$ برابر صفر است؛ پس طول A برابر $\frac{1}{4}$ می شود.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: از طرفی، مخرج عبارتی درجه دوم است که معادله محور تقارن آن $x_s = \frac{1}{4}$ است و صورت، تابعی خطی است که ریشه آن برابر $\frac{1}{4}$ است؛ پس اگر α و β نسبت به $\frac{1}{4}$ قرینه باشند (یا به عبارتی دیگر $\frac{1}{4}$ واسطه حسابی α و β باشد)، مقدار f' در α و β قرینه هم می‌شوند. حالا طبق گفته سؤال، می‌خواهیم آهنگ تغییر لحظه‌ای f (یا همان مقدار f') در نقاط B و C قرینه باشد، پس x_C و x_B باید نسبت به $\frac{1}{4}$ قرینه باشند، بنابراین $\frac{1}{4}$ واسطه حسابی x_B و x_C می‌شود که در این صورت $x_B + x_C = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ است؛ پس جواب برابر 75% / $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۲

اگر f تابعی مشتق پذیر و $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 4$ ، آن گاه $f'(1)$ برابر است با:

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: گام اول: اول کمی معادله $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \Rightarrow f(x+y) - f(x) = f(y) + xy \xrightarrow{y \neq 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + \frac{xy}{y}$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f(y)}{y} + \frac{xy}{y} \right)$$

تعریف مشتق f در x

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{y}$$

گام سوم: حالا با توجه به این که $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 4$ است، می‌توانیم بگوییم حاصل $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y}$ هم برابر ۴ می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x) = 4 + x \Rightarrow f'(1) = 5$$

تست و پاسخ ۱۳

تابع $f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^2 - 1}$ روی بازه $(0, \alpha)$ اکیداً نزولی است. اگر α بیشترین مقدار قابل قبول باشد، حاصل $f(\alpha+1)$ کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3 \times (x^2 - 1) - (x^4 + 8) \times 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 16x}{(x^2 - 1)^2}$$

گام دوم: برای پیدا کردن بازه (یا بازه‌هایی) که f در آن‌ها نزولی اکید است، باید نامعادله $f'(x) < 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{2x^5 - 4x^3 - 16x}{(x^2 - 1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 8)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 - 4)(x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{2x(x-2)(x+2)(x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

	-۲	-۱	۰	۱	۲
x					
f'	-	+	+	-	+
f	↘	↗	↗	↘	↗



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت رسم شده، واضح است که f روی بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی است؛ پس حداکثر مقدار α برابر ۱ می شود. حالا باید مقدار $f(\alpha+1) = f(1+1) = f(2)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^2 - 1} \Rightarrow f(2) = \frac{16 + 8}{4 - 1} = 8$$

تست و پاسخ ۱۴

مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ باشد، برابر است با:

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: روش اول: گام اول: ابتدا به کمک بازه بندی داریم:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1} & x \geq 0 \\ -\frac{x}{x^2 + 1} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & x > 0 \\ -\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: از f مشتق می گیریم:

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1 \\ f'_-(0) &= -\frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{طول یکی از نقاط بحرانی است.} \Rightarrow f \text{ در } x = 0 \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

گام سوم: مشتق پذیری f در نقطه مرزی (همان $x = 0$) را بررسی می کنیم:

با جای گذاری $x = 0$ در $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ ، $f(0) = 0$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ شده؛ پس مختصات این نقطه بحرانی $A(0, 0)$ است.

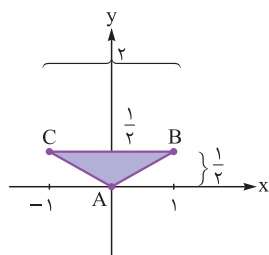
گام چهارم: حالا هر ضابطه تابع f' را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\text{ضابطه بالایی: } \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{با جای گذاری } x=1 \text{ در ضابطه } f, \\ & \text{عرض نقطه برابر } \frac{1}{2} \text{ می شود.} \end{cases} \rightarrow B(1, \frac{1}{2})$$

غ ق چون باید $x > 0$ باشد. $x = -1$

$$\text{ضابطه پایینی: } -\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{غ ق چون } x < 0 \text{ است.} \\ x = -1 & \text{با جای گذاری } x=-1 \text{ در ضابطه } f, \\ & \text{عرض نقطه برابر } \frac{1}{2} \text{ می شود.} \end{cases} \rightarrow C(-1, \frac{1}{2})$$

گام پنجم: این سه نقطه را روی محورهای مختصات مشخص می کنیم:



$$\Rightarrow S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

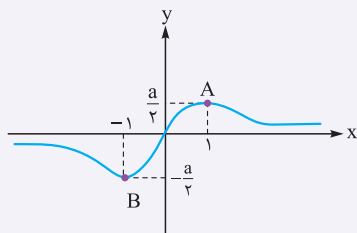


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

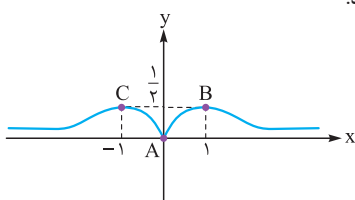
روش دوم:

نکته نمودار توابع به فرم $y = \frac{ax}{x^2 + 1}$ به شکل مقابل است ($a > 0$):



با توجه به نمودار رسم شده، واضح است که این توابع فقط دو نقطه بحرانی دارند.

گام اول: با توجه به نکته بالا، نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1} & x \geq 0 \\ -\frac{x}{x^2 + 1} & x < 0 \end{cases}$ به شکل زیر می شود:



گام دوم: با توجه به نمودار رسم شده، واضح است که f فقط سه نقطه بحرانی (در A مشتق ناپذیر است و در B و C مقدار مشتق آن برابر صفر است) دارد. محاسبه مساحت مثلث هم مثل گام آخر روش اول است.

تست و پاسخ ۱۵

فرض کنید $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. مجموع بیشترین و کمترین مقدار $f(x - \sqrt{1-x^2})$ کدام است؟

$$\frac{15}{4} \quad (4)$$

$$\frac{7}{4} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی گام اول: $x - \sqrt{1-x^2}$ را برابر $g(x)$ در نظر می گیریم؛ پس $f(x - \sqrt{1-x^2}) = f(g(x))$ می شود.

گام دوم: دامنه g به صورت زیر است:

$$g(x) = x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه ها}} x \in [-1, 1]$$

گام سوم: از g مشتق می گیریم و آن را برابر صفر قرار می دهیم تا طول نقاط بحرانی اش حاصل شود:

$$g(x) = x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = -x \xrightarrow{x \leq 0} 1-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \leq 0} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

گام چهارم: نقاط سر و ته بازه دامنه g و $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ طول نقاط بحرانی تابع اند:

$$g(x) = x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 - \sqrt{1-1^2} = 1 \\ g(-1) = -1 - \sqrt{1-(-1)^2} = -1 \\ g(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1-(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین حداقل و حداکثر مقدار g به ترتیب برابر $-\sqrt{2}$ و 1 هستند؛ پس برد g به صورت $[-\sqrt{2}, 1]$ می شود.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام پنجم: حالا که برد g به صورت $[-\sqrt{2}, 1]$ است، باید برد $f(x)$ را روی بازه $[-\sqrt{2}, 1]$ به دست آوریم (الان احتمالاً یهو میگی که هان؟! خوب ببین ما تابع $f(g(x))$ رو داشتیم. g مقادیر بازه $[-\sqrt{2}, 1]$ رو به ما می‌ده؛ پس همین مقادیر می‌شن ورودی‌های f ؛ پس برای به دست آوردن $\min$ و $\max f(g(x))$ ، کافیست برد $f(x)$ روی بازه $[-\sqrt{2}, 1]$ رو حساب کنیم).

گام هشتم: از f مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی آن به دست آیند:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

گام هفتم: نقاط سر و ته بازه (یعنی $x = -\sqrt{2}$ و $x = 1$) به همراه $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x = 0$ ، طول نقاط بحرانی تابع اند:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-\sqrt{2}) = 3 \\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{4} \\ f(0) = 1 \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{4} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

گام هشتم: حداقل و حداکثر مقدار f به ترتیب برابر $\frac{3}{4}$ و 3 هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۶

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2+1}$ ، جزء صحیح عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: گام اول: f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2+1} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+1} & x \geq 1 \\ -\frac{x^2-x}{x^2+1} & x < 1 \end{cases}$$

(حد چپ و راست و مقدار f در $x = 1$ برابر صفر است؛ پس f در $x = 1$ پیوسته می‌شود.)

گام دوم: از f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & x > 1 \\ -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{ضابطه بالایی: } f'_+(1) = \frac{1+2-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ضابطه پایینی: } f'_-(1) = -\frac{1+2-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

گام سوم: مشتق چپ و راست f در $x = 1$ را محاسبه می‌کنیم:

پس f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست و $x = 1$ طول یکی از نقاط بحرانی f می‌شود.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام چهارم: حالا باید هر دو ضابطه بالایی و پایینی را برابر صفر قرار دهیم تا طول نقاطی که f' در آن‌ها برابر صفر است، به دست آید:

$$\text{ضابطه بالایی: } \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=8} \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} & x \\ x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} & x \end{cases}$$

$$\text{ضابطه پایینی: } -\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=8} \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} & \checkmark \\ x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} & \checkmark \end{cases}$$

هر دو ریشه برای ضابطه بالایی غیر قابل قبول اند (چون $x > 1$ است)، ولی هر دو ریشه ضابطه پایینی قابل قبول اند؛ پس جدول تعیین علامت f' به صورت مقابل می‌شود:

	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	1	
x				
f'	-	+	-	+
	↘	↗	↘	↗

max
نسبی

بنابراین طول نقطه ماکزیمم نسبی برابر $-1 + \sqrt{2}$ است.

گام پنجم: در آخر کافی است در ضابطه f ، به جای x قرار دهیم $-1 + \sqrt{2}$ تا عرض نقطه ماکزیمم نسبی حاصل شود:

$$f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2+1} \Rightarrow f(-1+\sqrt{2}) = \frac{(-1+\sqrt{2})|(-1+\sqrt{2})-1|}{(-1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{(-1+\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})}{4-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{1/4-1}{2} = \frac{-3/4}{2} = -3/8 \xrightarrow{\text{جزء صحیح}} 0$$

تست و پاسخ ۱۷

به ازای چند مقدار صحیح m ، نقطه مینیمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{m-5}{x^2+2x+m}$ ، مینیمم مطلق تابع هم می‌باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: از f مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{m-5}{x^2+2x+m} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times (x^2+2x+m) - (m-5)(2x+2)}{(x^2+2x+m)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(-m+5)(2x+2)}{(x^2+2x+m)^2}$$

$x=-1$ ریشه

تنها ریشه f' ، $x = -1$ است؛ پس همین نقطه باید مینیمم نسبی تابع f باشد.

گام دوم: برای این که $x = -1$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f باشد، جدول تغییرات تابع f در اطراف $x = -1$ باید به صورت زیر شود:

	-1	
x		
f'	-	+
	↘	↗

min
نسبی



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: دقت کنید که مخرج f' همواره مثبت است و علامت $2x+2$ بعد از ریشه‌اش (همان -1) مثبت است؛ پس $-m+5$ باید مثبت باشد که نتیجه می‌دهد $m < 5$ است.

گام چهارم: حالا که $m < 5$ است، در ضابطه تابع یعنی $f(x) = \frac{m-5}{x^2+2x+m}$ ، علامت صورت منفی است؛ پس اگر مخرج ریشه داشته باشد (ریشه ساده یا مضاعف)، حد f در حداقل یکی از طرفین ریشه‌های مخرج برابر $-\infty$ می‌شود که در این صورت تابع دیگر مینیمم مطلق ندارد؛ پس دلتای مخرج باید منفی باشد:

$$\Delta = 4 - 4m < 0 \Rightarrow 4 < 4m \Rightarrow 1 < m$$

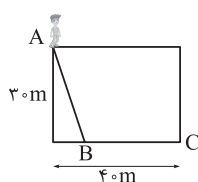
گام پنجم: با توجه به دو شرط $1 < m < 5$ و $m < 5$ می‌شود؛ پس ۳ مقدار صحیح برای m داریم.

دام‌تستی خواست باشه الان یهو نگی جواب می‌شه $\boxed{2}$ که تو دام بیفتی!

گام ششم: در تابع f ، در یک حالت دیگر هم مینیمم نسبی و مینیمم مطلق برابر می‌شوند (در چه حالتی؟). در حالتی که $m = 5$ باشد، چون در این صورت، صورت f برابر صفر می‌شود؛ پس f تابع ثابت $y = 0$ شده که در این صورت، همه نقاط آن مینیمم نسبی و مطلق هستند؛ بنابراین برای m ، چهار مقدار صحیح ۲، ۳، ۴ و ۵ را داریم و جواب درست $\boxed{3}$ است.

تست و پاسخ ۱۸

سرعت شخص درون محوطه مستطیلی پارک برابر ۱ و روی محیط آن $\sqrt{5}$ متر بر ثانیه است. کم‌ترین زمان برای رسیدن از نقطه A به نقطه C چند ثانیه است؟



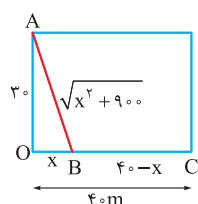
$$30 + \sqrt{175} \quad (1)$$

$$50 \quad (2)$$

$$20\sqrt{5} \quad (3)$$

$$24\sqrt{5} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا فرض کنید $BO = x$ باشد که در این صورت با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABO، $AB = \sqrt{x^2 + 900}$ می‌شود. به علاوه، طول CO برابر ۴۰ است که $BC = CO - BO = 40 - x$ می‌شود.

گام دوم: سرعت شخص در مسیر AB برابر ۱ است؛ پس مدت زمانی که از A به B می‌رود، برابر است با:

$$t_{AB} = \frac{x_{AB}}{v_{AB}} = \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{1} = \sqrt{x^2 + 900}$$

گام سوم: سرعت شخص در مسیر BC برابر $\sqrt{5}$ است؛ پس مدت زمانی که از B به C می‌رود، برابر است با:

$$t_{BC} = \frac{x_{BC}}{v_{BC}} = \frac{40 - x}{\sqrt{5}}$$

پس زمان رسیدن او از A به C برابر $t(x) = \sqrt{x^2 + 900} + \frac{40 - x}{\sqrt{5}}$ می‌شود.

گام چهارم: کم‌ترین زمان رسیدن از A به C را می‌خواهیم. از t مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی حاصل شود:

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{x>0} \frac{x^2}{x^2 + 900} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2 = x^2 + 900 \Rightarrow 4x^2 = 900 \Rightarrow x^2 = \frac{900}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{30}{2} = 15$$

گام پنجم: با جای گذاری $x = 15$ در t ، جواب حاصل می‌شود:

$$t(x) = \sqrt{x^2 + 900} + \frac{40 - x}{\sqrt{5}} \Rightarrow t(15) = \sqrt{1125} + \frac{25}{\sqrt{5}} = \sqrt{225 \times 5} + 5\sqrt{5} = 15\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$$

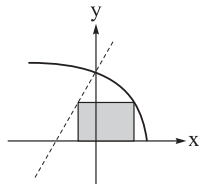


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۹

مانند شکل زیر، یک رأس مستطیل روی نمودار $y = \sqrt{4-2x}$ و رأس دیگر روی خط گذرنده از $(0, 2)$ و $(-1, 0)$ قرار دارد و دو رأس دیگر روی محور x است. بیشترین مساحت این مستطیل، به ازای کدام مقدار عرض آن حاصل می‌شود؟



$$\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3} \quad (3)$$

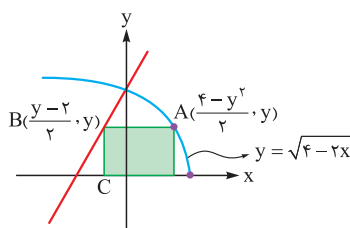
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: معادله خط گذرنده از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-1, 0)$ به صورت زیر است:

شیب: $\frac{2-0}{0-(-1)} = 2$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{m=2, (x_0, y_0)=(0, 2)} y - 2 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 2$$

گام دوم: عرض دو نقطه A و B را برابر y در نظر می‌گیریم که در این صورت $x_A = \frac{4-y^2}{2}$ و $x_B = \frac{y-2}{2}$ می‌شود.



گام سوم: حالا واضح است که طول مستطیل برابر $AB = \frac{4-y^2}{2} - \frac{y-2}{2} = -\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + 3$ و عرض آن برابر $BC = y$ است؛ پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(y) = \left(-\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + 3\right)y = -\frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + 3y, \quad 0 < y < 2$$

گام چهارم: از S مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی حاصل شود:

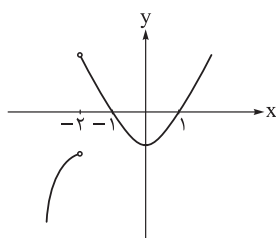
$$S'(y) = -\frac{3}{2}y^2 - y + 3 = 0 \xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})} y^2 + \frac{2}{3}y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3} \\ y = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

غفقی، چون منفی است.

پس بیشترین مساحت مستطیل وقتی حاصل می‌شود که عرض آن برابر $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}$ باشد.

تست و پاسخ ۲۰

اگر نمودار مشتق تابع $f(x) = |(x-1)(ax^2 + bx - 4)|$ به شکل زیر باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع $g(x) = |ax^2 + bx + a - b|$ برابر



کدام است؟

$$-2 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی

نکته تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ مشتق‌ناپذیر است.

گام اول: با توجه به نمودار رسم‌شده برای f' ، واضح است که f در $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است؛ پس باید ریشه ساده عبارت درون قدرمطلق یعنی $(x-1)(ax^2+bx-4)$ باشد؛ پس مقدار ax^2+bx-4 در $x = -2$ برابر صفر می‌شود: (I) $4a-2b-4=0$
گام دوم: از طرفی درون قدرمطلق $(x-1)$ داریم، ولی با توجه به نمودار f ، f' در $x = 1$ مشتق‌پذیر است؛ پس نباید ریشه ساده عبارت درون قدرمطلق باشد و ax^2+bx-4 هم باید در $x = 1$ برابر صفر شود (که در این صورت درون قدرمطلق $(x-1)^2$ داشته باشیم تا f در $x = 1$ مشتق‌پذیر شود):
 $a+b-4=0$ (II)

گام سوم: با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (I) و (II)، $a=2$ و $b=2$ می‌شود؛ پس ضابطه g به صورت زیر است:
 $g(x) = |ax^2+bx+a-b| = |2x^2+2x|$

گام چهارم:

نکته ریشه‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ ، نقاط بحرانی تابع $y = |f(x)|$ هستند (دقت کنید! اجتماع نقاطی که $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ است، نه اشتراک آن‌ها).

با توجه به نکته بالا داریم:

$$g(x) = |2x^2+2x| \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(x+1)=0 \Rightarrow x=0, -1 \\ (2x^2+2x)'=0 \Rightarrow 4x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین طول نقاط بحرانی تابع g ، صفر، -1 و $-\frac{1}{2}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ است.