



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳
۱۶ و ۱۷ اسفند

دفترچه
سؤال
آزمون ششم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

هندسه یازدهم
+ هندسه دوازدهم
ریاضی ۲
صفحه ۲ تا ۱۰
صفحه ۲۵ تا ۴۶
ریاضی ۳
صفحه ۱۲۱ تا ۱۴۲

مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - سوگند روشنی - محمد طاهر شعاعی - حسین شفیع زاده - مسعود شفیعی -
علی شهرابی - مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس

رسول محسنی منش

گزینشگر

رسول محسنی منش

مؤلف پاسخ‌نامه

علیرضا کاظمی بقا

کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

محسن فراهانی
محمد گودرزی

ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

زهرا جالینوسی
سجاد داوطلب
امیرحسین قنبری
ابوالفضل ناصری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با مرور نامه کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت جزوه جمع‌بندی، ترکیبی و تصویری در قالب مرور نامه، در اختیار دانش آموزان قرار می‌گیرد.

ریاضی (۳): صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۴۲، ریاضی (۲): صفحه‌های ۲ تا ۱۰ و ۲۵ تا ۴۶

۱- حجم حادث از دوران سطح محدود به دایره با معادله $x^2 + y^2 = 1$ و مربع با معادله $|x| + |y| = 2$ ، حول محور y ها کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) 6π (۴) 8π

۲- اگر اندازه یک زاویه لوزی 30° باشد و آن را حول قطرهاش دوران دهیم، آن گاه نسبت حجم دو شکل فضایی حاصل کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۳- فاصله هر کانون بیضی از هر رأس ناکانونی آن برابر ۱۳ و طول قطر کوچک آن 10 است. دایره‌ای به مرکز مرکز بیضی و شعاع ۱۲، بیضی را در نقطه P قطع می‌کند. فاصله P از قطر کانونی کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{12}$ (۲) $\frac{25}{6}$ (۳) $\frac{24}{5}$ (۴) ۴

۴- مرکز یک بیضی $O(-5, -3)$ و بر محورهای مختصات مماس است. خط $x = -3$ بیضی را در دو نقطه M و N قطع می‌کند. اگر A دورترین کانون بیضی از مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث AMN کدام است؟

- (۱) $2 / 4\sqrt{21}$ (۲) $3 / 6\sqrt{21}$ (۳) $4 / 8\sqrt{21}$ (۴) $6 / 4\sqrt{21}$

۵- اگر $F(3, 1)$ و $F'(-5, 1)$ کانون‌های یک بیضی و طول قطر بزرگ آن 10 باشد، طول نقطه M روی بیضی که فاصله‌اش از کانون F ، برابر نصف طول قطر کوچک باشد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۶- دایره‌ای به شعاع ۲ که مرکز آن روی خط $x - y + 3 = 0$ قرار دارد با دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ مماس خارج است. بیشترین فاصله مرکز این دایره از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{17}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۷- در یک بیضی به ترتیب طول قطر بزرگ، فاصله کانون‌ها و فاصله رئوس غیرکانونی، دنباله هندسی می‌سازند. خروج از مرکز بیضی، جذر کدام عدد است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

۸- نقطه $A(1, 3)$ بیرون دایره $x^2 + y^2 - 6x + by + b = 0$ قرار دارد. اگر b کم‌ترین مقدار صحیح ممکن باشد، مساحت دایره چند برابر $\frac{\pi}{16}$ است؟

- (۱) ۶۷ (۲) ۶۸ (۳) ۶۹ (۴) ۷۰

محل انجام محاسبات



۹- فرض کنید A و A' دو رأس قطر بزرگ، B و B' دو رأس قطر کوچک و F و F' کانون‌های یک بیضی باشند. اگر خط گذرنده از A' و B بر دایره‌ای به مرکز F و شعاع BF مماس باشد، خروج از مرکز بیضی چه قدر است؟

$$\frac{\sqrt{5}-2}{2} \quad (1) \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (4)$$

۱۰- نیمساز ناحیه اول و سوم یکی از قطرهای دایره $\frac{a}{4}y^2 + b^2y + c = (a-2)x^2 - 2bx + \frac{a}{4}y^2 + b^2y + c = 0$ است که دایره را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. اگر مرکز دایره، مبدأ مختصات نباشد و طول پاره خط AB برابر با ۶ باشد، فاصله مبدأ مختصات از تابع خطی $ax + by + c = 0$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

$$1/2 \quad (1) \quad 1/4 \quad (2) \quad 1/6 \quad (3) \quad 1/8 \quad (4)$$

۱۱- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نقاط B و C روی خط $3x + 4y - 7 = 0$ قرار دارند و نقطه A روی خط $y - x = 0$ است. اگر مساحت مثلث ABC، برابر $\frac{147\sqrt{3}}{25}$ باشد، نزدیک‌ترین فاصله نقطه A به مبدأ مختصات کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (1) \quad 3\sqrt{2} \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (4)$$

۱۲- معادله دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع $4x - 3y = 0$ ، $2x - y = 0$ و مختصات مرکز متوازی‌الاضلاع (۲، ۲) است. طول قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$8\sqrt{3} \quad (1) \quad 3\sqrt{10} \quad (2) \quad 4\sqrt{13} \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۱۳- ضلع AB از مربع ABCD روی خط $y = 3x + 1$ قرار دارد و D(-۶، ۳) یکی از رأس‌های مربع است. مجموع عرض‌های ممکن برای رأس B کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad -4 \quad (4)$$

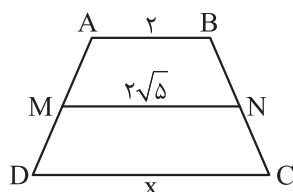
۱۴- خطوط $y = ax$ و $y + ax = 2$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y + 5x = 30$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند و مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، روی خط $y - 30 = -5x$ واقع است. اگر در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کنیم، نسبت طول دو پاره خط CH به BH کدام می‌شود؟ ($a > 0$)

$$1/75 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 2/25 \quad (3) \quad 2/75 \quad (4)$$

۱۵- در مثلث ABC، نیمساز نظیر رأس A بر میانه وارد بر AC عمود است. اگر طول اضلاع مثلث، سه عدد طبیعی متوالی باشد، محیط مثلث چه قدر است؟

$$9 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات



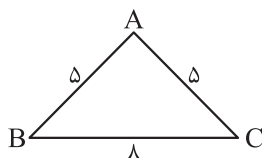
۱۶- در شکل روبه‌رو، پاره خط MN سطح دوزنقه ABCD را به دو دوزنقه هم‌مساحت تقسیم کرده است. مساحت محدود به دو قطر و یک ساق دوزنقه ABCD چند برابر مساحت دوزنقه است؟

$$\frac{1}{8} (2)$$

$$\frac{1}{16} (1)$$

$$\frac{1}{4} (4)$$

$$\frac{3}{16} (3)$$



۱۷- در مثلث متساوی‌الساقین با قاعده ۸ و ساق ۵ دو دایره رسم می‌کنیم که یکی از ۳ رأس می‌گذرد و دیگری بر ۳ ضلع مماس است. فاصله مراکز این دو دایره چه قدر است؟

$$2/5 (2)$$

$$2/4 (1)$$

$$2/6 (4)$$

$$3 (3)$$

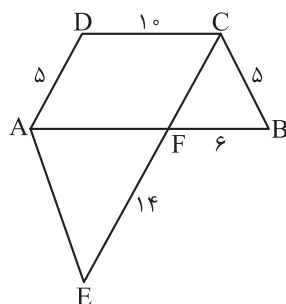
۱۸- دو نقطه M و N به ترتیب از نقاط A(1, -3) و B(5, 1) به فاصله ۵ و ۳ هستند. نسبت مساحت دو مثلث AMN و BMN کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} (4)$$

$$\frac{1}{3} (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$



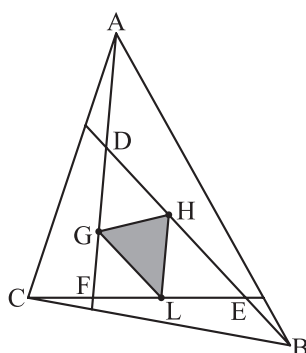
۱۹- در شکل مقابل، چهارضلعی‌های ABCD و AECD دوزنقه هستند. طول ضلع AE کدام است؟

$$5\sqrt{6} (1)$$

$$5\sqrt{5} (2)$$

$$11 (3)$$

$$8\sqrt{2} (4)$$



۲۰- در مثلث ABC شکل مقابل، $\hat{C}AF = \hat{B}CE = \hat{A}BD$ و $AB = 12$ و $DE = 8$ هستند. اگر $GF = GD$ و $DH = HE$ و $FL = LE$ ، مساحت مثلث GHL چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

$$\frac{1}{9} (2)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{3}{4} (4)$$

$$\frac{3}{8} (3)$$

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳
۱۶ و ۱۷ اسفند

دفترچه
پاسخ
آزمون ششم
ریاضی پلاس



بودجه‌بندی آزمون

هندسه یازدهم
+ هندسه دوازدهم
ریاضی ۲
صفحه ۲ تا ۱۰
صفحه ۲۵ تا ۴۶
ریاضی ۳
صفحه ۱۲۱ تا ۱۴۲

نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

کوروش اسلامی - سوگند روشنی - محمد طاهر شعاعی - حسین شفیع زاده - مسعود شفیعی -
علی شهرابی - مهرداد کیوان - محمد گودرزی - رسول محسنی منش - سروش موئینی - حسین نادری

درس ریاضی

مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
رسول محسنی منش	رسول محسنی منش	علیرضا کاظمی بقا	محسن فراهانی محمد گودرزی	زهره جالینوسی سجاد داوطلب امیرحسین قنبری ابوالفضل ناصری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

- ✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی
 - ✓ تنها آزمون ریاضی همراه با مرور نامه کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:
- دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت جزوه جمع‌بندی، ترکیبی و تصویری در قالب مرور نامه، در اختیار دانش آموزان قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۳): صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۴۲، ریاضی (۲): صفحه‌های ۲ تا ۱۰ و ۲۵ تا ۴۶

تست و پاسخ ۱

حجم حادث از دوران سطح محدود به دایره با معادله $x^2 + y^2 = 1$ و مربع با معادله $|x| + |y| = 2$ حول محور y ها کدام است؟

$$8\pi \quad (۴)$$

$$6\pi \quad (۳)$$

$$4\pi \quad (۲)$$

$$2\pi \quad (۱)$$

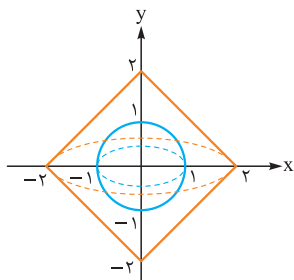
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: دایره با معادله $x^2 + y^2 = 1$ دارای مرکز $O(0,0)$ و شعاع ۱ است و همچنین در معادله داده شده برای مربع، اگر مقادیر زیر را به جای x و y جای گذاری کنیم، رئوس مربع به دست می آید:

$$|x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=0} |y| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x=0, y=2 \\ x=0, y=-2 \end{cases}$$

$$|x| + |y| = 2 \xrightarrow{y=0} |x| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=0 \\ x=-2, y=0 \end{cases}$$

گام دوم: دایره و مربع را در دستگاه مختصات رسم می کنیم:



گام سوم: اگر سطح محدود به دایره و مربع را حول محور y ها دوران دهیم، حجم ایجاد شده شامل دو مخروط به هم چسبیده به شعاع و ارتفاع ۲ است که به اندازه حجم یک کره به شعاع ۱ تو خالی است، پس حجم ایجاد شده برابر می شود با:

$$V_{\text{ایجاد شده}} = V_{\text{دو مخروط}} - V_{\text{کره}} = \frac{V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}{V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3} \rightarrow V_{\text{ایجاد شده}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi(2)^2(2)\right) - \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{16\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

تست و پاسخ ۲

اگر اندازه یک زاویه لوزی 30° باشد و آن را حول قطرهایش دوران دهیم، آن گاه نسبت حجم دو شکل فضایی حاصل کدام است؟

$$1 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

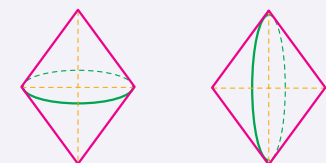
$$2 - \sqrt{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا فرض می کنیم که طول قطر بزرگتر لوزی $2n$ و طول قطر کوچکتر آن $2m$ است. پس:

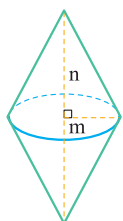
$$2m < 2n \Rightarrow m < n$$

نکته: حجم هندسی حاصل از دوران یک لوزی حول قطرهایش، دو مخروط به هم چسبیده است.



گام دوم: اگر لوزی را حول قطر بزرگتر دوران دهیم، شعاع مخروط های ایجاد شده برابر m و ارتفاع آن ها برابر n است، بنابراین حجم شکل فضایی حاصل از این دوران برابر است با:

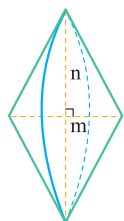
$$V_{\text{شکل حاصل}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi(m)^2(n)\right) = \frac{2}{3}\pi m^2 n \quad (۱)$$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس



گام سوم: اگر لوزی را حول قطر کوچک آن دوران دهیم، شعاع مخروطها برابر n و ارتفاع آنها برابر m خواهد شد، پس:

$$V_{\text{شکل حاصل}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi(n)^2(m)\right) = \frac{2}{3}\pi n^2 m \quad (2)$$

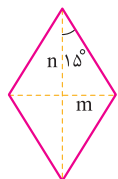
گام چهارم: همه گزینهها بین صفر و یک هستند. از طرف دیگر $m < n$ است، پس خواسته سؤال نسبت (۱) به (۲) است و داریم:

$$\text{خواسته سؤال} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{\frac{2}{3}\pi m^2 n}{\frac{2}{3}\pi n^2 m} = \frac{m}{n}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

نکته یکی از اتحادهای مثلثاتی به صورت مقابل است:

گام پنجم: در گام اول، قطرهای بزرگ و کوچک لوزی را $2m$ و $2n$ در نظر گرفتیم، همچنین یکی از زاویههای لوزی 30° است، قطر لوزی نیمساز است، با توجه به شکل واضح است که $\frac{m}{n} = \tan 15^\circ$.



$$\sin 30^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} \Rightarrow 1 + \tan^2 15^\circ = 4 \tan 15^\circ$$

$$\tan 15^\circ = t \rightarrow 1 + t^2 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 12, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}} t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{t = \tan 15^\circ < 1} \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۳

فاصله هر کانون بیضی از هر رأس ناکانونی آن برابر ۱۳ و طول قطر کوچک آن ۱۰ است. دایره‌ای به مرکز مرکز بیضی و شعاع ۱۲، بیضی را در نقطه P قطع می‌کند. فاصله P از قطر کانونی کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{24}{5}$ (۳)

$\frac{25}{6}$ (۲)

$\frac{25}{12}$ (۱)

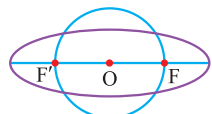
پاسخ: گزینه ۱

نکته فاصله هر کانون بیضی از هر رأس ناکانونی برابر است با a و یا نصف قطر بزرگ.

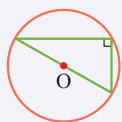
پاسخ تشریحی گام اول: فاصله هر کانون بیضی از رأس ناکانونی ۱۳ است، پس $a = 13$ و طول قطر کوچک ۱۰ است؛ در نتیجه $b = 5$ ، حالا c

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow c = 12$$

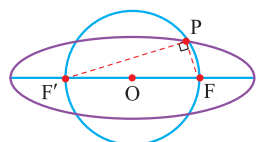
را به دست می‌آوریم:



گام دوم: با توجه به صورت سؤال، مرکز دایره همان مرکز بیضی است و شعاع آن ۱۲ است، در گام قبلی دیدیم که c یا همان فاصله مرکز تا کانون‌ها برابر ۱۲ شد، پس دایره از کانون‌های بیضی می‌گذرد. حالا شکل مناسب را رسم می‌کنیم.



نکته زاویه محاطی روبه‌رو به قطر در دایره برابر 90° است.

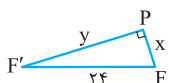


گام سوم: زاویه محاطی P روبه‌رو به قطر است، پس $\hat{P} = 90^\circ$ ، حالا فاصله نقطه P (محل تقاطع دایره و بیضی) تا کانون F را x و فاصله آن تا F' را y در نظر می‌گیریم.

$$PF + PF' = 2a \Rightarrow x + y = 26 \quad (1)$$

گام چهارم: در مثلث قائم‌الزاویه PFF' داریم:

$$x^2 + y^2 = 26^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 576 \quad (2)$$



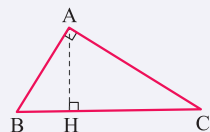


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

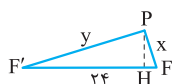
گام پنجم: با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow{x+y=26, x^2+y^2=576} 26^2 = 576 + 2xy \Rightarrow 676 = 576 + 2xy \Rightarrow xy = 50$$



$$AH \times BC = AB \times AC$$

نکته در مثلث قائم الزاویه ABC، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، خواهیم داشت:



$$PH \times FF' = xy \Rightarrow PH \times 24 = 50 \Rightarrow PH = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

گام ششم: خواسته سؤال فاصله P تا محور کانونی بیضی یا همان PH است. در نتیجه:

تست و پاسخ ۴

مرکز یک بیضی $O(-5, -3)$ و بر محورهای مختصات مماس است. خط $x = -3$ بیضی را در دو نقطه M و N قطع می کند. اگر A دورترین کانون بیضی از مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث AMN کدام است؟

$$6 / 4\sqrt{21} \quad (4)$$

$$4 / 8\sqrt{21} \quad (3)$$

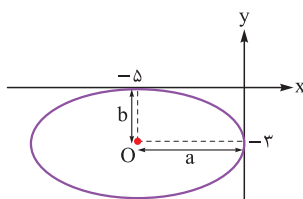
$$3 / 6\sqrt{21} \quad (2)$$

$$2 / 4\sqrt{21} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا شکل مناسب مسئله را رسم می کنیم؛ مرکز بیضی $O(-5, -3)$ و بیضی بر محورهای مختصات مماس است، پس $a = 5$ و $b = 3$ و در نتیجه:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{25 - 9} \Rightarrow c = 4$$



گام دوم: C برابر 4 شد، پس مختصات دو کانون بیضی به صورت $F(-9, -3)$ و $F'(-1, -3)$ است. مطابق شکل دورترین کانون از مبدأ مختصات F' است؛ پس F' همان A است، خط $x = -3$ بیضی را در M و N قطع می کند، محل برخورد خط $x = -3$ با قطر بزرگ بیضی را H می نامیم، فاصله M از F را x در نظر می گیریم و با توجه به فاصله M از دو کانون داریم:

$$MF + MA = 2a \Rightarrow x + MA = 10 \Rightarrow MA = 10 - x$$

گام سوم: با توجه به شکل رسم شده در گام قبلی، خط $x = -3$ دو واحد از مرکز فاصله دارد، پس $AH = 6$ و $HF = 2$ ، حال در دو مثلث قائم الزاویه AMH و MHF داریم:

$$\Delta AMH : MH^2 = AM^2 - AH^2 \Rightarrow MH^2 = (10 - x)^2 - 36 \quad (1)$$

$$\Delta MHF : MH^2 = MF^2 - FH^2 \Rightarrow MH^2 = x^2 - 4 \quad (2)$$

حال (۱) و (۲) را با یکدیگر برابر قرار می دهیم تا x را به دست آوریم:

$$(10 - x)^2 - 36 = x^2 - 4 \Rightarrow 100 - 20x + x^2 - 36 = x^2 - 4 \Rightarrow 20x = 68 \Rightarrow x = \frac{68}{20} = \frac{17}{5}$$

گام چهارم: $x = \frac{17}{5}$ را در (۲) جای گذاری می کنیم تا MH به دست آید:

$$MH^2 = x^2 - 4 \Rightarrow MH^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 - 4 \Rightarrow MH^2 = \frac{189}{25} \Rightarrow MH = \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

گام پنجم: M و N، دارای طول برابر هستند، پس $NH = MH = \frac{3\sqrt{21}}{5}$ ، در نتیجه $NH = \frac{6}{5}\sqrt{21}$ ، $MN = 2 \times \frac{3\sqrt{21}}{5} = \frac{6}{5}\sqrt{21}$. خواسته سؤال، مساحت مثلث AMN است که قاعده اش همان MN و ارتفاعش AH است، پس:

$$S_{\Delta AMN} = \frac{AH \times MN}{2} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{6 \times \frac{6}{5}\sqrt{21}}{2} = \frac{36}{10}\sqrt{21} = 3 / 6\sqrt{21}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۵

اگر $F'(-5, 1)$ و $F(3, 1)$ کانون‌های یک بیضی و طول قطر بزرگ آن ۱۰ باشد، طول نقطه M روی بیضی که فاصله‌اش از کانون F ، برابر نصف طول قطر کوچک باشد، کدام است؟

$$-\frac{3}{2} (4)$$

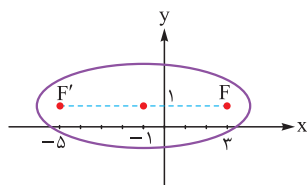
$$\frac{3}{2} (3)$$

$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$2 (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا شکل مناسب مسئله را رسم می‌کنیم:



$$FF' = 2c \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

طول FF' برابر ۸ است، ابتدا c را به دست می‌آوریم:

گام دوم: طبق صورت سؤال $2a = 10$ ، پس $a = 5$. حال به کمک رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در بیضی، b را به دست می‌آوریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

گام سوم: b همان نصف قطر کوچک است که برابر ۳ است، پس طبق فرض، فاصله M از F روی بیضی، برابر ۳ است. حال در بیضی داریم:

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow 3 + MF' = 10 \Rightarrow MF' = 7$$

نکته معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

گام چهارم: نقطه M محل تلاقی دایره‌هایی به مرکز F و F' به ترتیب با شعاع‌های ۳ و ۷ است. داریم:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \\ (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 49 \end{cases} \Rightarrow (x + 5)^2 - (x - 3)^2 = 49 - 9 \Rightarrow 10x + 25 + 6x - 9 = 40 \Rightarrow 16x = 24 \Rightarrow x_M = \frac{3}{2}$$

تست و پاسخ ۶

دایره‌ای به شعاع ۲ که مرکز آن روی خط $x - y + 3 = 0$ قرار دارد با دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ مماس خارج است. بیشترین فاصله مرکز این دایره از مبدأ مختصات کدام است؟

$$2\sqrt{5} (4)$$

$$\sqrt{17} (3)$$

$$4 (2)$$

$$3\sqrt{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: مرکز دایره اول روی خط $x - y + 3 = 0$ قرار دارد؛ پس اگر طول مرکز را α در نظر بگیریم، عرض آن $\alpha + 3$ خواهد شد، پس مختصات مرکز به صورت $O_1(\alpha, \alpha + 3)$ است.

نکته در معادله گسترده دایره به صورت $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$ (ضرایب x^2 و y^2 باید برابر یک باشد)، مختصات مرکز و شعاع

$$O = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

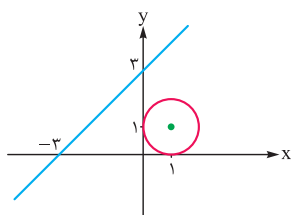
از رابطه‌های مقابل به دست می‌آید:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

گام دوم: مرکز دایره و شعاع دایره دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \rightarrow R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 - 4(1)} = 1 \\ O = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow O_2 = \left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{(-2)}{2}\right) = (1, 1) \end{cases}$$

شکل صورت سؤال به صورت مقابل است:





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: دو دایره با یکدیگر مماس خارج‌اند، پس $O_1O_2 = R_1 + R_2$ ، پس:

$$R_1 + R_2 = O_1O_2 \xrightarrow[\text{طبق گام دوم } R_2=1]{\text{طبق صورت سؤال } R_1=2} 2+1 = O_1O_2 \Rightarrow O_1O_2 = 3$$

گام چهارم: در گام اول دیدیم که مختصات O_1 به صورت $(\alpha, \alpha+3)$ است و با توجه به گام دوم، مختصات O_2 برابر $(1, 1)$ است، حال O_1O_2 را بر حسب α می‌نویسیم و آن را برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha+3-1)^2} \xrightarrow{O_1O_2=3} \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha+2)^2} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (\alpha-1)^2 + (\alpha+2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 9 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha+2)(\alpha-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

گام پنجم: حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم و فاصله مرکز دایره اول با مبدأ مختصات را یکبار با $\alpha = -2$ و یکبار با $\alpha = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\alpha = -2 \xrightarrow{O_1(\alpha, \alpha+3)} O_1(-2, 1) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = 1 \xrightarrow{O_1(\alpha, \alpha+3)} O_1(1, 4) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(1-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$$

پس بیشترین فاصله مرکز دایره اول تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{17}$ است.

تست و پاسخ ۷

در یک بیضی به ترتیب طول قطر بزرگ، فاصله کانون‌ها و فاصله رؤس غیر کانونی، دنباله هندسی می‌سازند. خروج از مرکز بیضی، جذر کدام عدد است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: با توجه به صورت سؤال، $2a$ (طول قطر بزرگ)، $2c$ (فاصله کانون‌ها) و $2b$ (فاصله رؤس غیر کانونی)، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند. دقت کنید که $a > c > b$. حال با توجه به قوانین مربوط به واسطه هندسی خواهیم داشت:

$$2b, 2c, 2a \xrightarrow{\text{واسطه هندسی } 2c} (2c)^2 = (2a)(2b) \Rightarrow 4c^2 = 4ab \Rightarrow c^2 = ab \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

گام دوم: رابطه مقابل برای a, b و c در بیضی همواره برقرار است:

$$a^2 = b^2 + ab \xrightarrow{\div a^2} 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}$$

گام سوم: (۱) را در (۲) جای گذاری می‌کنیم:

نکته خروج از مرکز بیضی به وسیله یکی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$e = \frac{c}{a} \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

گام چهارم: در رابطه به دست آمده در گام سوم، $\frac{b}{a}$ را برابر t در نظر می‌گیریم:

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{b}{a}=t} 1 = t^2 + t \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5} t_1, t_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{t = \frac{b}{a} > 0} t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

گام پنجم: با توجه به این که $\frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، خروج از مرکز بیضی را محاسبه می‌کنیم:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4}} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \xrightarrow{\text{مجذور}} e^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

تست و پاسخ ۸

نقطه $A(1, 3)$ بیرون دایره $x^2 + y^2 - 6x + by + b = 0$ قرار دارد. اگر b کم‌ترین مقدار صحیح ممکن باشد، مساحت دایره چند برابر $\frac{\pi}{16}$ است؟

$$70 \quad (4)$$

$$69 \quad (3)$$

$$68 \quad (2)$$

$$67 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر ۲ تقسیم می کنیم تا ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ شود:

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + by + b = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 3x + \frac{b}{2}y + \frac{b}{2} = 0$$

نکته با جای گذاری مختصات هر نقطه در سمت چپ معادله گسترده دایره به صورت $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ، موقعیت آن

نقطه (درون، بیرون و روی دایره) را نسبت به دایره معلوم می کنیم:

$$f(M) > 0 \Rightarrow M \text{ بیرون دایره}$$

$$f(M) = 0 \Rightarrow M \text{ روی دایره}$$

$$f(M) < 0 \Rightarrow M \text{ درون دایره}$$

گام دوم: نقطه $A(1, 3)$ ، بیرون دایره است، پس: $f(A) > 0 \Rightarrow (1)^2 + (3)^2 - 3(1) + \frac{b}{2}(3) + \frac{b}{2} > 0 \Rightarrow 7 + 2b > 0 \Rightarrow b > -\frac{7}{2}$

نکته با توجه به این که در معادله گسترده دایره، شعاع از رابطه $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ به دست می آید، معادله

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ در صورتی معادله یک دایره است که:}$$

گام سوم: معادله $x^2 + y^2 - 3x + \frac{b}{2}y + \frac{b}{2} = 0$ ، معادله یک دایره است، پس شرط زیر باید برقرار باشد:

$$(-3)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{b}{2}\right) > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}b^2 - 2b + 9}_{\Delta < 0} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

$b^2 > 0$ ضرب

گام چهارم: با توجه به گام دوم، مینیمم مقدار صحیح b ، برابر -3 است، حالا معادله دایره را بازنویسی می کنیم:

$$x^2 + y^2 - 3x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$$

گام پنجم: حال به کمک رابطه $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ ، شعاع را به دست می آوریم و سپس خواسته سؤال که مساحت دایره است را محاسبه می کنیم:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{69}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{69}{16}}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \left(\sqrt{\frac{69}{16}}\right)^2 = \frac{69}{16}\pi$$

گام ششم: حال به سراغ خواسته سؤال می رویم:

پس مساحت دایره ۶۹ برابر $\frac{\pi}{16}$ است.

تست و پاسخ ۹

فرض کنید A و A' دو رأس قطر بزرگ، B و B' دو رأس قطر کوچک و F و F' کانون های یک بیضی باشند. اگر خط گذرنده از A' و B بر

دایره ای به مرکز F و شعاع BF مماس باشد، خروج از مرکز بیضی چه قدر است؟

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (3)$$

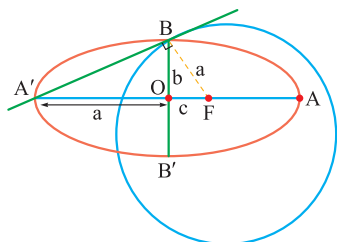
$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا شکل مناسب مسئله را رسم می کنیم، توجه کنید که فاصله B تا F

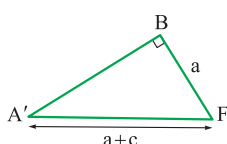
برابر با نصف قطر بزرگ یا همان a است و همچنین شعاع BF بر خط گذرنده از $A'B$ عمود است.



گام دوم: در شکل گام اول، مثلث قائم الزاویه $A'BF$ را در نظر می گیریم و رابطه فیثاغورس را برای آن می نویسیم:

$$A'F^2 = A'B^2 + BF^2 \Rightarrow (a+c)^2 = A'B^2 + a^2$$

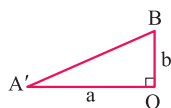
$$\Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = A'B^2 + a^2 \Rightarrow A'B^2 = c^2 + 2ac \quad (1)$$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس



گام سوم: در این جا مثلث قائم الزاویه $A'BO$ را در نظر می گیریم:

$$A'B^2 = A'O^2 + OB^2 \Rightarrow A'B^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{دربیزی}} \frac{b^2 = a^2 - c^2}{b^2 = a^2 - c^2} \Rightarrow A'B^2 = 2a^2 - c^2 \quad (2)$$

گام چهارم: سمت راست تساوی های (۱) و (۲) را مساوی یکدیگر قرار می دهیم:

$$(1), (2) \Rightarrow c^2 + 2ac = 2a^2 - c^2 \Rightarrow 2a^2 - 2c^2 - 2ac = 0 \xrightarrow{\div 2} a^2 - c^2 - ac = 0 \xrightarrow{\div a^2} 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0$$

گام پنجم: خروج از مرکز یا e برابر است با $\frac{c}{a}$ ، در معادله به دست آمده در گام قبلی قرار می دهیم $\frac{c}{a} = e$:

$$1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} = e} 1 - e^2 - e = 0 \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 5} e_1, e_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{e > 0} e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۰

نیمساز ناحیه اول و سوم یکی از قطرهای دایره $a^2x^2 - 2bx + \frac{a}{4}y^2 + b^2y + c = 0$ است که دایره را در نقطه های A و B قطع می کند. اگر مرکز دایره، مبدأ مختصات نباشد و طول پاره خط AB برابر با ۶ باشد، فاصله مبدأ مختصات از تابع خطی $ax + by + c = 0$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

۱/۸ (۴)

۱/۶ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$a - 2 = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} = 2 \Rightarrow a = 4$$

گام اول: در معادله گسترده دایره، ضرایب x^2 و y^2 باید برابر باشند؛ پس:

$$\xrightarrow{a=4} 2x^2 + 2y^2 - 2bx + b^2y + c = 0$$

معادله داده شده را بازنویسی می کنیم:

نکته در معادله گسترده دایره اگر نسبت به x مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، طول مرکز به دست می آید و اگر نسبت به y مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، عرض مرکز به دست می آید.

$$4x - 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2} \quad (\text{طول مرکز})$$

گام دوم: مختصات مرکز را به دست می آوریم:

$$4y + b^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{b^2}{4} \quad (\text{عرض مرکز})$$

گام سوم: قطر دایره نیمساز ناحیه اول و سوم است، مرکز دایره بر روی قطر قرار دارد، پس طول و عرض مرکز با یکدیگر برابرند، آن ها را مساوی

$$\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{4} \Rightarrow -2b^2 = 4b \Rightarrow b^2 + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

هم می گذاریم:

اگر $b = 0$ باشد، مرکز دایره مبدأ مختصات می شود، پس $b = -2$.

گام چهارم: در صورت سؤال گفته شده است که قطر دایره در نقاط A و B دایره را قطع کرده است و $AB = 6$ ، پس قطر دایره برابر ۶ است و شعاع آن برابر ۳ است.

گام پنجم: معادله دایره را با توجه به a و b به دست آمده بازنویسی می کنیم و طرفین رابطه را بر ۲ تقسیم می کنیم تا از رابطه

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + c = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2x + 2y + \frac{c}{2} = 0 \quad \text{استفاده کنیم: } r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(2)^2 + (2)^2 - 4\left(\frac{c}{2}\right)} \xrightarrow{\text{طبق گام قبلی}} r = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}\sqrt{8 - 2c} \Rightarrow \sqrt{8 - 2c} = 6 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 8 - 2c = 36 \Rightarrow c = -14$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

نکته فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط $Ax + By + C = 0$ از رابطه مقابل به دست می آید:

گام ششم: خط $ax + by + c = 0$ با توجه به مقادیر به دست آمده به صورت $4x - 2y - 14 = 0$ است. فاصله آن تا مبدأ مختصات را به دست می آوریم:

$$d = \frac{|4(0) - 2(0) - 14|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{20}} = \frac{14}{2\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 1/4\sqrt{5}$$

پس فاصله مبدأ تا خط $1/4$ برابر $\sqrt{5}$ است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۱

در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نقاط B و C روی خط $3x + 4y - 7 = 0$ قرار دارند و نقطه A روی خط $y - x = 0$ است. اگر مساحت مثلث

ABC برابر $\frac{147\sqrt{3}}{25}$ باشد، نزدیک ترین فاصله نقطه A به مبدأ مختصات کدام است؟

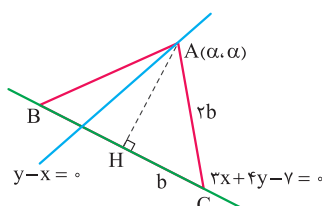
- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

نکته: ارتفاع و مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a از روابط مقابل به دست می آید:



پاسخ تشریحی: گام اول: طول هر ضلع مثلث را برابر 2b در نظر می گیریم. فاصله نقطه A از خط

$3x + 4y - 7 = 0$ برابر است با ارتفاع مثلث، پس:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}(2b) \Rightarrow h = \sqrt{3}b$$

پس فاصله نقطه A از خط $3x + 4y - 7 = 0$ برابر با $\sqrt{3}b$ است.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

گام دوم: نقطه A روی خط $y - x = 0$ یا $y = x$ قرار دارد، پس مختصات آن را (α, α) در نظر می گیریم و فاصله نقطه A تا خط $3x + 4y - 7 = 0$ را بر حسب α می نویسیم و آن را برابر $\sqrt{3}b$ قرار می دهیم:

$$\sqrt{3}b = d \xrightarrow{A(\alpha, \alpha)} \sqrt{3}b = \frac{|3\alpha + 4\alpha - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|7\alpha - 7|}{5} \Rightarrow \sqrt{3}b = \frac{7|\alpha - 1|}{5} \Rightarrow b = \frac{7|\alpha - 1|}{5\sqrt{3}}$$

گام سوم: مساحت مثلث برابر است با $\frac{147\sqrt{3}}{25}$ ، با توجه به رابطه مساحت مثلث متساوی الاضلاع خواهیم داشت:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(2b)^2 \Rightarrow \frac{147\sqrt{3}}{25} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4b^2) \Rightarrow b^2 = \frac{147}{25} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{147}}{5}$$

$$\xrightarrow{b > 0} b = \frac{\sqrt{147}}{5} = \frac{\sqrt{3 \times 49}}{5} = \frac{7\sqrt{3}}{5} \xrightarrow{b = \frac{7|\alpha - 1|}{5\sqrt{3}}} \frac{7|\alpha - 1|}{5\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{5}$$

$$\Rightarrow |\alpha - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 4 \\ \alpha - 1 = -3 \Rightarrow \alpha = -2 \end{cases}$$

گام چهارم: فاصله نقطه $A(\alpha, \alpha)$ تا مبدأ را با $\alpha = 4$ و $\alpha = -2$ محاسبه می کنیم:

$$\alpha = 4 \Rightarrow A(4, 4) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32}$$

$$\alpha = -2 \Rightarrow A(-2, -2) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8}$$

پس نزدیک ترین فاصله A تا مبدأ برابر $\sqrt{8}$ است که همان $2\sqrt{2}$ است.

تست و پاسخ ۱۲

معادله دو ضلع یک متوازی الاضلاع $2x - y = 0$ ، $4x - 3y = 0$ و مختصات مرکز متوازی الاضلاع $(2, 2)$ است. طول قطر بزرگ متوازی الاضلاع

کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{10}$ (۳) $4\sqrt{13}$ (۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۳



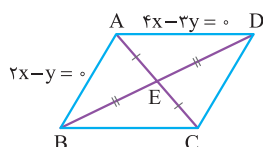
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

پاسخ تشریحی گام اول: فرض می‌کنیم معادله خط AB ، $2x - y = 0$ و معادله خط AD ، $4x - 3y = 0$ باشد؛ رأس A محل تلاقی این دو خط است، پس:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

گام دوم: مرکز را E می‌نامیم و فاصله AE را پیدا می‌کنیم:



$$\frac{E(2,2)}{A(0,0)} \rightarrow AE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

طول قطر AC ، دو برابر AE است، پس $AC = 4\sqrt{2}$.

گام سوم: نقطه D روی خط $4x - 3y = 0$ قرار دارد، آن را به صورت $(\alpha, \frac{4\alpha}{3})$ می‌نویسیم و به همین ترتیب B را به صورت $(\beta, 2\beta)$ می‌نویسیم. نقطه E وسط BD قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} x_E = \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \\ y_E = \frac{\frac{4\alpha}{3} + 2\beta}{2} = 2 \Rightarrow \frac{4\alpha}{3} + 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 8 \\ \frac{4\alpha}{3} + 2\beta = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله پایینی را از بالایی کم می‌کنیم.}} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 8 \\ 2\alpha - \frac{4\alpha}{3} = 8 - 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\alpha}{3} = 4 \Rightarrow \alpha = 6$$

$$\alpha + \beta = 4 \xrightarrow{\alpha=6} \beta = -2$$

حالا $\alpha = 6$ را در یکی از معادلات بالا جای‌گذاری می‌کنیم تا β به دست بیاید:

پس $D(6, 8)$ و $B(-2, -4)$.

گام چهارم: طول BD را به دست می‌آوریم: $BD = \sqrt{(-2-6)^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{4^2(2^2 + 3^2)} \Rightarrow BD = 4\sqrt{13}$ در گام دوم نیز طول AC را پیدا کردیم که برابر $4\sqrt{2}$ شد، پس بزرگ‌ترین قطر BD است که طولش $4\sqrt{13}$ است.

تست و پاسخ ۱۳

ضلع AB از مربع $ABCD$ روی خط $y = 3x + 1$ قرار دارد و $D(-6, 3)$ یکی از رأس‌های مربع است. مجموع عرض‌های ممکن برای رأس B کدام است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا معادله خطی که ضلع AD روی آن قرار دارد را می‌نویسیم، شیب این خط قرینه و معکوس شیب خط $y = 3x + 1$ است، پس شیب آن برابر $-\frac{1}{3}$ است.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\frac{D(-6,3)}{m=-\frac{1}{3}}} y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 6) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1$$

گام دوم: رأس A ، محل تلاقی خط‌های $y = 3x + 1$ و $y = -\frac{1}{3}x + 1$ است، پس:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3x + 1 = -\frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow \frac{10}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله یکی از خطوط}} y = 1$$

پس $A(0, 1)$ است.

گام سوم: فاصله $A(0, 1)$ و $D(-6, 3)$ از یکدیگر را به دست می‌آوریم که طول ضلع مربع است:

$$AD = \sqrt{(-6-0)^2 + (3-1)^2} \Rightarrow AD = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

گام چهارم: رأس B روی خط $y = 3x + 1$ قرار دارد، پس مختصات آن را به صورت $(\alpha, 3\alpha + 1)$ در نظر می‌گیریم و فاصله آن تا A را برابر $\sqrt{40}$ (طول ضلع مربع) قرار می‌دهیم:

$$AB = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (3\alpha + 1 - 1)^2} = \sqrt{40} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 9\alpha^2} = \sqrt{40} \Rightarrow \sqrt{10\alpha^2} = \sqrt{40} \xrightarrow{\text{توان } 2} 10\alpha^2 = 40$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

به ازای $\alpha = 2$ ، مختصات B برابر $(2, 7)$ و به ازای $\alpha = -2$ ، مختصات B برابر $(-2, -5)$ است. پس مجموع عرض‌های ممکن برای B برابر است با: $-5 + 7 = 2$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۴

خطوط $y = ax$ و $y + ax = 2$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y + 5x = 30$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند و مرکز دایره ای که از این سه نقطه می گذرد، روی خط $y - 30 = -5x$ واقع است. اگر در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کنیم، نسبت طول دو پاره خط CH به BH کدام می شود؟ ($a > 0$)

۲ / ۷۵ (۴)

۲ / ۲۵ (۳)

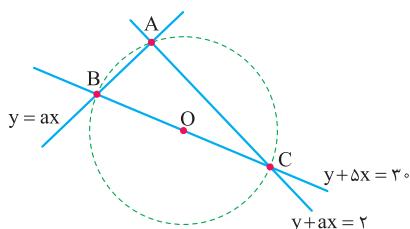
۲ (۲)

۱ / ۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: اگر به صورت سؤال دقت کنید، می بینید که مرکز دایره و B و

C بر روی خط $y + 5x = 30$ قرار دارند، این یعنی میانه وارد بر BC از رأس A ، نصف BC است، پس مثلث ABC قائم الزویه است و رأس A قائمه است.



گام دوم: با توجه به گام اول شیب دو خط $y = ax$ و $y + ax = 2$ قرینه و معکوس یکدیگرند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} y + ax = 2 \Rightarrow y = -a x + 2 \xrightarrow{\text{شیب}} -a \\ y = a x \xrightarrow{\text{شیب}} a \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} a(-a) = -1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

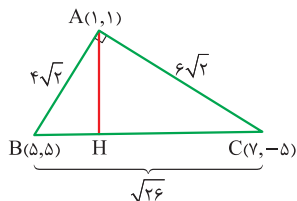
گام سوم: $a = 1$ را در معادله خطوط اولیه جای گذاری می کنیم و از تلاقی آن ها رأس A را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x = 1, y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

$$\begin{cases} y = x \\ y + 5x = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} B(5, 5)$$

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y + 5x = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} C(7, -5)$$

گام پنجم: طول اضلاع مثلث را محاسبه می کنیم و شکل آن را رسم می کنیم:



$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(7-1)^2 + (-5-1)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(7-5)^2 + (-5-5)^2} = 2\sqrt{26}$$

گام ششم: از روابط طولی در مثلث قائم الزویه داریم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= CH \times CB \Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = CH \times (2\sqrt{26}) \quad (2) \\ AB^2 &= BH \times BC \Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = BH \times (2\sqrt{26}) \quad (1) \end{aligned} \xrightarrow{\frac{(2)}{(1)}} \frac{CH \times (2\sqrt{26})}{BH \times (2\sqrt{26})} = \frac{36 \times 2}{16 \times 2} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{9}{4} = 2/25$$

تست و پاسخ ۱۵

در مثلث ABC ، نیمساز نظیر رأس A بر میانه وارد بر AC عمود است. اگر طول اضلاع مثلث، سه عدد طبیعی متوالی باشد، محیط مثلث چه قدر است؟

۱۲ (۴)

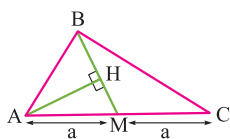
۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا شکل مناسب را رسم می کنیم، اگر AC را برابر $2a$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



گام دوم: AH بر BM عمود و نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، پس دو مثلث ABH و AMH متشابه اند، در نتیجه:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BH}{MH} = \frac{AH}{AH} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 1 \Rightarrow AB = a$$

گام سوم: طول اضلاع AB و AC به ترتیب برابر a و $2a$ می باشد (دقت کنید که طول ضلع سوم را نمی دانیم)، طبق صورت سؤال، طول اضلاع سه عدد طبیعی متوالی هستند پس با توجه به اندازه های AB و AC ، اندازه اضلاع یا برابر $1, 2, 3$ است و یا برابر $2, 3, 4$.

گام چهارم: با توجه به قانون نابرابری اضلاع مثلث، $1, 2, 3$ نمی تواند طول اضلاع یک مثلث باشد، پس اضلاع مثلث ABC برابر $2, 3, 4$ است

که محیط آن برابر می شود با: $2 + 3 + 4 = 9$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۶

در شکل روبه‌رو، پاره خط MN سطح دوزنقه $ABCD$ را به دو دوزنقه هم‌مساحت تقسیم کرده است.

مساحت محدود به دو قطر و یک ساق دوزنقه $ABCD$ چند برابر مساحت دوزنقه است؟

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

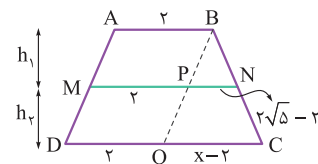
$$\frac{3}{16} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا خطی موازی AD از رأس B رسم می‌کنیم تا MN را در P و DC و

را در Q قطع کند، واضح است که $MP = DQ = 2$ ، $PN = 2\sqrt{5} - 2$ و $QC = x - 2$.



گام دوم: در مثلث BQC خط PN موازی QC است، طبق قضیه اساسی تشابه، دو مثلث BPN و BQC متشابه‌اند، نسبت ارتفاع این مثلث‌ها،

همان نسبت قاعده‌های نظیر آن‌ها است، پس:

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{x - 2} \quad (۱)$$

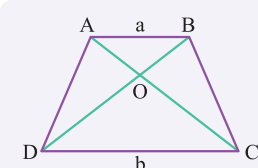
گام سوم: طبق صورت سؤال، مساحت دوزنقه $ABNM$ ، نصف دوزنقه $ABCD$ است؛ پس با استفاده از رابطه مساحت دوزنقه

(ارتفاع $\times$ مجموع دو قاعده) داریم:

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(2 + 2\sqrt{5})h_1}{(x + 2)(h_1 + h_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(2 + 2\sqrt{5})h_1}{(x + 2)(h_1 + h_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{x + 2}{2(2 + 2\sqrt{5})} \quad (۲)$$

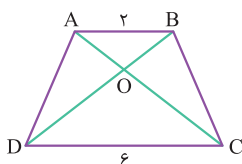
گام چهارم: سمت راست (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\sqrt{5} - 2}{x - 2} = \frac{x + 2}{2(2 + 2\sqrt{5})} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 4 = 2(20 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 = 32 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \xrightarrow{x > 0} x = 6$$



نکته اگر قطرهای یک دوزنقه به قاعده‌های a و b را رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{ABCD}} = \frac{ab}{(a + b)^2} \quad \text{یا} \quad \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{ABCD}} = \frac{ab}{(a + b)^2}$$



$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{ABCD}} = \frac{2(6)}{(2 + 6)^2} = \frac{3}{16}$$

گام پنجم: به سراغ خواسته سؤال می‌رویم:

تست و پاسخ ۱۷

در مثلث متساوی‌الساقین با قاعده ۸ و ساق ۵ دو دایره رسم می‌کنیم که یکی از ۳ رأس می‌گذرد و دیگری

بر ۳ ضلع مماس است. فاصله مراکز این دو دایره چه قدر است؟

$$2/5 \quad (۲)$$

$$2/4 \quad (۱)$$

$$2/6 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

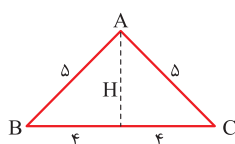
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: ارتفاع مثلث داده‌شده را رسم می‌کنیم، با توجه به اعداد فیثاغورسی ۳، ۴، ۵،

H برابر ۳ است. حال مساحت مثلث داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$



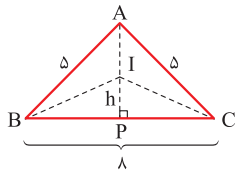


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

نکته مرکز دایره‌ای که بر اضلاع یک مثلث مماس است، بر روی محل تلاقی نیمسازهای داخلی آن مثلث است.

گام دوم: محل تلاقی نیمسازهای مثلث را I می‌نامیم، با توجه به خاصیت نیمساز، فاصله I از هر سه ضلع مثلث برابر است. این سه فاصله را برابر h در نظر می‌گیریم و با توجه به مساحت مثلث ABC داریم:

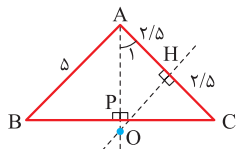


$$S_{\triangle ABC} = \frac{h \times BC}{2} + \frac{h \times AC}{2} + \frac{h \times AB}{2} \Rightarrow 48 = \frac{h(8 + 5 + 5)}{2} = 9h$$

$$\Rightarrow h = \frac{48}{9} = \frac{16}{3} \Rightarrow PI = \frac{4}{3} \quad (1)$$

نکته مرکز دایره‌ای که از رئوس یک مثلث می‌گذرد، بر روی محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع آن مثلث است.

گام سوم: محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث را O می‌نامیم، دو مثلث قائم‌الزاویه AHO و APC دارای زاویه حاده مشترک A هستند، پس متشابه‌اند. نسبت تشابه اضلاع نظیر را می‌نویسیم:



$$\frac{OH}{PC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AH}{AP} \Rightarrow \frac{AO}{5} = \frac{2/5}{3} \Rightarrow AO = \frac{25}{6}$$

$$\Rightarrow PO = AO - AP = \frac{25}{6} - 3 \Rightarrow PO = \frac{7}{6} \quad (2)$$

$$\frac{OP}{(2)} + \frac{PI}{(1)} = \frac{7}{6} + \frac{4}{3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2/5$$

گام چهارم: فاصله مرکزهای دو دایره (OI) برابر است با:

تست و پاسخ ۱۸

دو نقطه M و N به ترتیب از نقاط A(1, -3) و B(5, 1) به فاصله 3 و 5 هستند. نسبت مساحت دو مثلث AMN و BMN کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

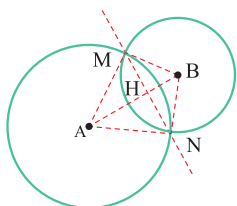
$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه O به فاصله R هستند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R.



گام اول: با توجه به صورت سؤال نقاط M و N بر روی دایره‌های مقابل قرار دارند، معادله استاندارد دایره‌ها را نیز می‌نویسیم:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25 \quad (1) \quad \text{دایره‌ای به مرکز } A(1, -3) \text{ و شعاع } 5$$

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad (2) \quad \text{دایره‌ای به مرکز } B(5, 1) \text{ و شعاع } 3$$

گام دوم: از (1) و (2) معادله خط گذرنده از M و N که نقاط برخورد دو دایره هستند را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 25 \\ (2) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 9 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 8x + 8y = 32 \Rightarrow x + y = 4$$

گام سوم: حال معادله خط گذرنده از مراکز A و B را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{A(1, -3), B(5, 1)}{m = \frac{1+3}{5-1} = 1} \rightarrow y + 3 = x - 1 \Rightarrow x - y = 4$$

گام چهارم: دو معادله خط به دست آمده را با یکدیگر قطع می‌دهیم تا مختصات نقطه تلاقی یعنی H پیدا شود:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} x = 4 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y = 0 \Rightarrow H(4, 0)$$

گام پنجم: طول AH و BH را به دست می‌آوریم:

$$\frac{H(4, 0)}{A(1, -3)} \rightarrow AH = \sqrt{(4-1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{18}$$

$$\frac{H(4, 0)}{B(5, 1)} \rightarrow BH = \sqrt{(4-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

گام ششم: با توجه به شکل گام اول، نسبت مساحت دو مثلث AMN و BMN برابر است با:

$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\frac{1}{2} BH \times MN}{\frac{1}{2} AH \times MN} = \frac{BH}{AH} \xrightarrow{\text{طبق گام قبل}} \frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

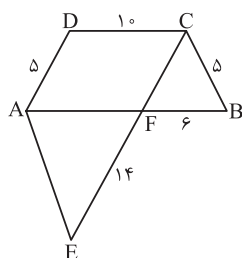


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

تست و پاسخ ۱۹

در شکل مقابل، چهارضلعی‌های ABCD و AECD دوزنقه هستند. طول ضلع AE کدام است؟



$$(۱) ۵\sqrt{۶}$$

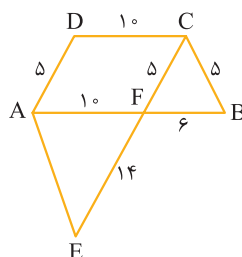
$$(۲) ۵\sqrt{۵}$$

$$(۳) ۱۱$$

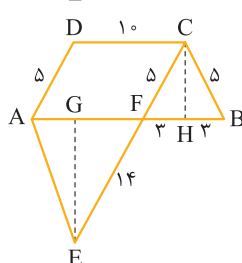
$$(۴) ۸\sqrt{۲}$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: گام اول: با توجه به اطلاعات سؤال چهارضلعی ADCF متوازی‌الاضلاع است، پس $FC = AD = ۵$ و $AF = DC = ۱۰$.



گام دوم: عمودهای CH و GE را رسم می‌کنیم، مثلث BCF متساوی‌الساقین است، با توجه به اعداد فیثاغورسی ۳، ۴، ۵، اندازه CH برابر ۴ است.



گام سوم: دو مثلث قائم‌الزاویه CFH و GFE متشابه‌اند ($\hat{F}$ متقابل به رأس و $CH \parallel GE$ ، EC مورب):

$$\frac{GE}{CH} = \frac{EF}{FC} \Rightarrow \frac{GE}{4} = \frac{14}{5} \Rightarrow GE = \frac{56}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{GF}{FH} = \frac{EF}{FC} \Rightarrow \frac{GF}{3} = \frac{14}{5} \Rightarrow GF = \frac{42}{5} \quad (۲)$$

$$AF = AG + \underbrace{GF}_{(۲)} \Rightarrow ۱۰ = AG + \frac{42}{5} \Rightarrow AG = \frac{8}{5} \quad (۳)$$

گام چهارم: در پاره‌خط AF داریم:

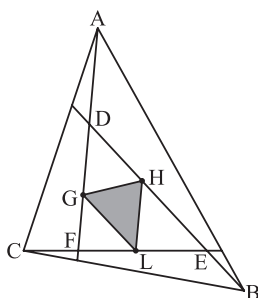
گام پنجم: در مثلث قائم‌الزاویه AGE رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم تا طول AE به دست آید:

$$AE^2 = AG^2 + GE^2 \xrightarrow{(۳), (۱)} AE^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{56}{5}\right)^2 = \frac{8^2(1+7^2)}{25} = \frac{64 \times 50}{25} = 128 \Rightarrow AE^2 = 128 \Rightarrow AE = \sqrt{128} \Rightarrow AE = 8\sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۲۰

در مثلث ABC شکل زیر، $\hat{C}AF = \hat{B}CE = \hat{A}BD$ ، $AB = ۱۲$ و $DE = ۸$ هستند. اگر $GF = GD$ ،

$DH = HE$ و $FL = LE$ ، مساحت مثلث GHL چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



$$(۱) \frac{1}{3}$$

$$(۲) \frac{1}{9}$$

$$(۳) \frac{3}{8}$$

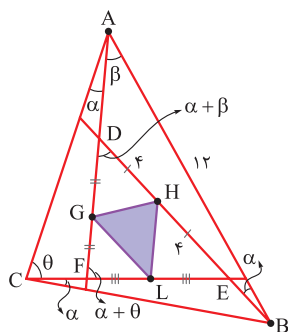
$$(۴) \frac{3}{4}$$

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس



پاسخ تشریحی گام اول: زوایای گفته شده در صورت سؤال را α و زوایای FAB و FCA را به ترتیب β و θ در نظر می گیریم و اطلاعات داده شده را بر روی شکل وارد می کنیم. زاویه BDF خارجی مثلث ADB است، پس $\widehat{FDE} = \alpha + \beta$. به همین ترتیب $\widehat{DFE} = \alpha + \theta$.

گام دوم: در گام اول دو زاویه از مثلث FDE با دو زاویه از مثلث ABC برابر شد (به اندازه های $\alpha + \beta$ و $\alpha + \theta$)، پس این دو مثلث متشابه اند:

$$\frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (1)$$

رو به $\alpha + \theta$

نکته اگر پای میانه اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می شود که مساحت هر کدام $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است.

$$\frac{S_{\triangle GHL}}{S_{\triangle FDE}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle FDE} = 4S_{\triangle GHL} \quad (2)$$

گام سوم: نقاط G، H و L پای میانه ها در مثلث FDE هستند، پس:

$$(1) \Rightarrow \frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \xrightarrow{(2)} \frac{4S_{\triangle GHL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \underbrace{\frac{S_{\triangle GHL}}{S_{\triangle ABC}}}_{\text{خواسته سؤال}} = \frac{1}{9}$$

گام چهارم: (2) را در (1) جای گذاری می کنیم: