www.konkur.in

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی
سال تحصیلی ۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون دوازدهم حضوری
دفترچه شماره ۱

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳
۱۴۰۲/۱۲/۲۵

حسابان و ریاضیات پایه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	هندسه
حسابان دوازدهم فصل چهارم: مشتق + فصل پنجم: کاربردهای مشتق صفحهٔ ۷۱ تا ۱۴۴	**ریاضیات گسستهٔ دوازدهم** فصل دوم: گراف و مدل‌سازی (از ابتدای مدل‌سازی با گراف تا پایان فصل) + فصل سوم: ترکیبیات (شمارش) صفحهٔ ۴۳ تا ۸۴	**هندسهٔ دوازدهم** فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی (از ابتدای سهمی تا پایان فصل) + فصل سوم: بردارها صفحهٔ ۵۰ تا ۸۶

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

حسابان (۲): صفحه‌های ۷۱ تا ۱۴۴

۱- هرگاه $f(x)=۲x^۲+ax+b$، به طوری که تساوی $f'of(x)=۸x^۲-۱۲x-۳$ برقرار باشد، مقدار $fof'(۲)$ چه عددی است؟

۱) ۳۵　　۲) ۲۵　　۳) ۱۵　　۴) ۳۰

۲- هرگاه $f''(۱)=۲f'(۱)+۳$، به طوری که $g(۳x)=f(\sqrt[۳]{x})$ مقدار $g''(۳)$ چه عددی است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۱}{۹}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{۲۷}$

۳- هرگاه $f(x)=\sin(\pi x).\cos(\frac{\pi x}{۲})$ باشد، حاصل $f''(۱)$ کدام است؟

۱) $-\pi^۲$　　۲) $\pi^۲$　　۳) $\frac{\pi^۲}{۲}$　　۴) $-\frac{\pi^۲}{۲}$

۴- اگر $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۲x^۲+۳x-۵$، به موازات کدام خط می‌توان بر نمودار تابع f، مماس رسم کرد؟

۱) $۳y+۴x=۵$　　۲) $y+۲x=۴$　　۳) $y=۳x-۲$　　۴) $y=-۴x+۵$

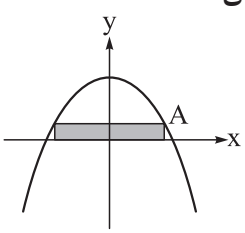
۵- امتداد مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول α، محور xها را در $A(-۴,۰)$ قطع می‌کند. مقدار α کدام است؟

۱) -۲　　۲) ۱　　۳) $\frac{-۱۱}{۴}$　　۴) $\frac{-۲۶}{۹}$

۶- اگر $f(x)=ax^۳+۳x^۲+b$، به طوری که $y=\begin{cases} f(x) & x\geq ۱ \\ xf'(x) & x<۱ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $۲a+b$ چه عددی است؟

۱) -۱　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) -۲

۷- در شکل زیر، نقطهٔ A روی سهمی $y=۶-x^۲$ در حال حرکت است، به طوری که مساحت مستطیل تابعی از طول نقطهٔ A است. وقتی طول نقطهٔ A برابر ۲ شود، آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت مستطیل چه عددی است؟



۱) -۴
۲) ۴
۳) ۱۲
۴) -۱۲

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸- آهنگ تغییر متوسط $f(x)=\sin^2 \pi x$ در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای f در دو نقطه با طول‌های α_1 و α_2، در همین بازه، برابر است. مقدار $\alpha_1+\alpha_2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹- هرگاه $f(x)=\frac{(a-1)x-9}{x-a+1}$ در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، جمع مقادیر به‌دست‌آمده برای عدد صحیح a چه عددی است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) صفر

۱۰- بیشترین مقدار $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

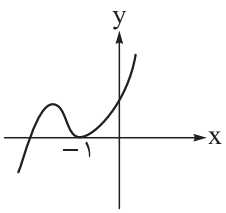
۱۱- تابع $f(x)=2\sin x-\cos^2 x$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ تعریف شده است. در کدام بازه، تابع صعودی اکید است و تقعر رو به پایین دارد؟

۱) $[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}]$ ۲) $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ ۳) $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$ ۴) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

۱۲- هرگاه $A(1,1)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^3+b\sqrt{x}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{6}{5}$

۱۳- بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+\frac{4}{3}$ در شکل زیر رسم شده است. کدام خط افقی نمودار تابع را در ۲ نقطه قطع می‌کند؟



۱) $y=\frac{5}{3}$ ۲) $y=\frac{4}{3}$

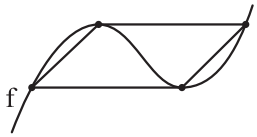
۳) $y=2$ ۴) $y=1$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

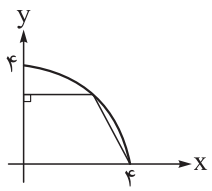
۱۴- نمودار $f(x)=x^3-3x^2+2$ در شکل زیر آورده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو رأس آن نقاط اکسترمم تابع هستند، چه عددی است؟ (دو ضلع از متوازی‌الاضلاع، موازی محور xهاست.)



۱) ۸　　۲) ۱۲

۳) ۴　　۴) ۱۰

۱۵- ذوزنقه‌ای مطابق شکل درون ربع دایره به شعاع $R=4$ محاط شده است. بیشترین مساحت ذوزنقه چه عددی است؟



۱) $8\sqrt{3}$

۲) $12\sqrt{3}$

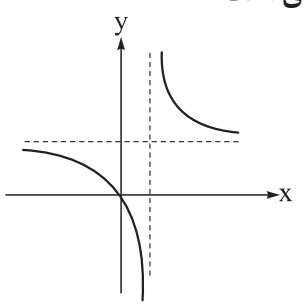
۳) $6\sqrt{3}$

۴) $4\sqrt{3}$

۱۶- هرگاه تابع درجه‌سوم $y=f(x)$ علاوه بر مبدأ مختصات در نقطهٔ $A(2,4)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقدار $f'(4)$ چه عددی است؟

۱) -12　　۲) -16　　۳) -24　　۴) -48

۱۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{4x^2+ax+b}{x^2+cx+9}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f(6)$ چه عددی است؟



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۸

۱۸- اگر نقطهٔ $A(2,-16)$، نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx$ باشد، حداقل مقدار تابع چه عددی است؟

۱) -90　　۲) -27

۳) -81　　۴) -36

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۴۳ تا ۸۴

۱۹- گراف P_7 چند مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمالِ چهارعضوی دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

۲۰- در گراف G از مرتبهٔ ۹، $\gamma(G) = 2$ است. در این گراف q_{max} (حداکثر اندازه) کدام است؟

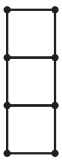
۱) ۳۶　　۲) ۳۴

۳) ۳۳　　۴) ۳۱

۲۱- مجموع عددهای احاطه‌گری گراف‌های زیر کدام است؟

(۱)

(۲)



(۳)

(۴)

۱) ۱۲　　۲) ۱۱

۳) ۸　　۴) ۷

۲۲- از بین ۴ کتاب ریاضی یکسان، ۵ کتاب فیزیک یکسان و ۸ کتاب شیمی یکسان، به چند طریق می‌توان ۶ کتاب انتخاب کرد؟

۱) ۲۰　　۲) ۲۲

۳) ۲۴　　۴) ۲۶

۲۳- معادلهٔ $(x_1 + x_2)^3 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$، چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۲۱۲　　۲) ۴۱۲

۳) ۴۲۰　　۴) ۸۲۰

۲۴- یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ است. می‌دانیم رمز بسته‌شده روی قفل به شکل $\overline{98ab}$ که در آن ارقام متمایز هستند، نیست و هم‌چنین حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود. اگر امتحان‌کردن هر رمز ۴رقمی، ۳۰ ثانیه طول بکشد، چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

۱) ۹۷۴ دقیقه　　۲) ۴۸۷ دقیقه

۳) حداکثر ۷ ساعت　　۴) حداقل ۳۰ ثانیه و حداکثر ۸ ساعت

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۵- چند مورد از موارد زیر صحیح است؟

الف) هر زیرمجموعهٔ ۱۳عضوی از مجموعهٔ $A = \{1,5,9,...,77,81,85\}$ حداقل دو عضو دارد که جمعشان ۹۰ است.

ب) در یک مدرسه با ۵۰۵ دانش‌آموز، حداقل ۷ دانش‌آموز وجود دارد که روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

پ) ۱۶ نقطه با مختصات صحیح در صفحه انتخاب کرده‌ایم. حداقل ۵ نقطه از آن‌ها به گونه‌ای هستند که مختصات نقطهٔ وسط دوبه‌دوی آن‌ها هم صحیح است.

ت) ۵ نقطه روی محیط و درون یک مربع به ضلع ۲ قرار دارند. حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از $\sqrt{2}$ است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲۶- دقیقاً ۵۴۰ تابع به شکل $f : A \to B$ می‌توان نوشت که در آن $B = R_f = \{1,2,3\}$ باشد. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۲۷- در دستگاه $\begin{cases} x+y+z=8 \\ v+w=7 \end{cases}$، چند عدد ۵رقمی به شکل $\overline{xyzvw}$ می‌توان نوشت که حداقل یک رقم صفر داشته باشد و بر ۳ بخش‌پذیر شود؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۲۸۸

۳) ۳۲۴ ۴) ۵۷۶

۲۸- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟ (A و B دو مربع لاتین هستند.)

الف) اگر A و B متعامد باشند و B' از جایگشتی بر روی B به وجود آمده باشد، A و B' نیز متعامدند.

ب) اگر A و B متعامد باشند و B' از جابه‌جایی سطر اول و دوم B به وجود آمده باشد، A و B' نیز متعامدند.

پ) در مربع لاتین چرخشی، همهٔ اعداد روی قطر اصلی برابر یک است.

ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارد.

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

هندسه (۳): صفحه‌های ۵۰ تا ۸۶

۲۹- خط به معادلهٔ $x = ۳$، خط هادی یک سهمی است. اگر این سهمی محور yها را با عرض‌های ۳ و -۳ قطع کند، طول رأس این سهمی کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱/۵　　۳) ۰/۵　　۴) ۲

۳۰- نقطهٔ $A(-۲,۱)$ واقع بر سهمی به معادلهٔ $x^۲ + mx + ۶y + n = ۰$ کم‌ترین فاصله را تا کانون سهمی دارد. حاصل $m + n$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) -۳　　۳) ۲　　۴) ۶

۳۱- اگر نقطهٔ $F(\frac{۳}{۲}, -۲)$ کانون سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ + ax + b$ باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) -۳　　۴) -۲

۳۲- یک شعاع نورانی بر یک آینهٔ سهمی‌شکل به معادلهٔ $y^۲ + ۲y - ۴x + ۵ = ۰$ تابیده است. اگر شعاع بازتابش بر روی خط $y = ۱$ قرار داشته باشد، معادلهٔ شعاع تابش کدام است؟

۱) $x = ۲$　　۲) $x = ۲y$　　۳) $x = -۲y$　　۴) $x = -۲$

۳۳- دایره به معادلهٔ $(x-۴)^۲ + y^۲ = ۵$ با سهمی به کانون $(\frac{۱}{۸}, ۰)$ و معادلهٔ خط هادی $۸x + ۱ = ۰$ در چهار نقطهٔ A، B، C و D متقاطع است. اگر $AB \parallel CD$، آن‌گاه فاصلهٔ دو خط AB و CD کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$　　۲) ۴　　۳) $\frac{۷}{۲}$　　۴) ۳

۳۴- نقطهٔ $A(m, n^۲ + ۱, mn^۲)$ در کدام ناحیه از دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌تواند قرار داشته باشد؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۳۵- نقطهٔ $A(x, y, z)$ به فاصلهٔ $۳\sqrt{۶}$ از مبدأ مختصات قرار دارد. اگر برای مختصات A داشته باشیم $\frac{x}{۱} = \frac{y+۶}{۴} = \frac{z-۹}{-۲}$، آن‌گاه بیشترین عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۶　　۴) ۸

۳۶- نقطهٔ A به ترتیب با طول و عرض ۱ و ۲ بر صفحهٔ xy و نقطهٔ B به ترتیب با عرض و ارتفاع ۱- و ۲- بر صفحهٔ yz مفروض‌اند. اگر O مبدأ مختصات باشد، کسینوس زاویهٔ AOB کدام است؟

۱) ۰/۴　　۲) $-۰/۴$　　۳) ۰/۲　　۴) $-۰/۲$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۷- اگر $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در جهت محورهای مختصات باشند، حاصل $(\vec{i}-\vec{k})\times(\vec{j}+\vec{k})).(\vec{i}-\vec{j})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۹

۳۸- برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم $|\vec{a}\times\vec{b}|=\vec{a}.\vec{b}=۲$. اگر $|\vec{a}|=۵$، آن‌گاه طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲/۵\sqrt{۲}$ ۴) ۲/۵

۳۹- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویهٔ بین آن‌ها حاده است، به ترتیب با اندازه‌های ۱ و ۵ مفروض‌اند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده بر دو بردار $۳\vec{a}-۲\vec{b}$ و $۵\vec{a}+\vec{b}$ برابر ۵۲ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۴۰- بر روی سه بردار $\vec{a}=۵\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$، $\vec{b}=m\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{c}=n\vec{i}+\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر حجم این متوازی‌السطوح برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه طول بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) ۷ ۴) $۳\sqrt{۵}$

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛
فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.
هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.
برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی
سال تحصیلی ۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون دوازدهم حضوری
دفترچه شماره ۲

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳
۱۴۰۲/۱۲/۲۵

فیزیک	شیمی
فیزیک دوازدهم فصل سوم: نوسان و موج (از ابتدای موج طولی و مشخصه‌های آن تا پایان فصل) + فصل چهارم: برهم‌کنش های موج + فصل پنجم: آشنایی با فیزیک اتمی + فصل ششم: آشنایی با فیزیک هسته‌ای صفحهٔ ۷۷ تا ۱۵۶	**شیمی دوازدهم** فصل سوم: شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری + فصل چهارم: شیمی راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر صفحهٔ ۶۷ تا ۱۲۳

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال ۸۰ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

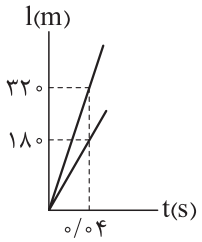
Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

فیزیک (۳): صفحه‌های ۷۷ تا ۱۵۶

۴۱- در یک زمین‌لرزه، نمودار مسافت پیموده‌شدهٔ امواج لرزه‌ای P و S برحسب زمان، مطابق شکل زیر است. اگر فاصلهٔ مرکز زمین‌لرزه تا محل لرزه‌نگار ۱۴۴ km بوده و موج‌ها روی خط راست حرکت کنند، کدام عبارت‌ها درست‌اند؟



الف) لرزه‌نگار ۱۸ s بعد از دریافت اولین موج زمین‌لرزه، اولین موج طولی را ثبت می‌کند.

ب) لرزه‌نگار ۳۲ s بعد از وقوع زمین‌لرزه، اولین موج طولی را ثبت می‌کند.

پ) لرزه‌نگار ۱۴ s بعد از دریافت اولین موج زمین‌لرزه، اولین موج عرضی را ثبت می‌کند.

ت) ۱۸ s بعد از وقوع زمین‌لرزه، موج P توسط لرزه‌نگار ثبت می‌شود.

۱) الف و ب
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) پ و ت

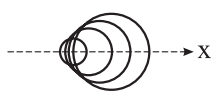
۴۲- تراز شدت صوت رسیده به پنجره‌ای به ابعاد ۱/۵ m در ۲ m، ثابت و برابر ۷۵ dB است. آهنگ متوسط انتقال انرژی صوتی که از پنجره عبور می‌کند، در SI کدام است؟ ($I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$)

۱) $3\sqrt{10}\times10^{-5}$
۲) $3\sqrt{10}\times10^{-4}$
۳) $\sqrt{10}\times10^{-5}$
۴) $\sqrt{10}\times10^{-3}$

۴۳- اگر فاصلهٔ شنونده‌ای از یک چشمهٔ صوت ۸ برابر شود، تراز شدت صوت دریافتی آن ۷۵ درصد تغییر می‌کند. شدت صوت دریافتی شنونده در حالت اول، چند برابر شدت مرجع است؟ (اتلاف انرژی در محیط ناچیز است.)

۱) ۲۵۶
۲) ۶۴
۳) ۱۶
۴) 8^8

۴۴- جبهه‌های موج متوالی حاصل از یک چشمهٔ صوت که با تندی v در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام مورد دربارهٔ جهت حرکت چشمه و مقایسهٔ تندی آن با تندی انتشار صوت در محیط (v')، درست است؟



۱) در جهت محور x ، $v < v'$
۲) در خلاف جهت محور x ، $v < v'$
۳) در جهت محور x ، $v' < v$
۴) در خلاف جهت محور x ، $v' < v$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۵- شکل‌های زیر، جهت حرکت یک چشمهٔ صوتی و یک ناظر (شنونده) را در چند وضعیت نشان می‌دهند. اگر بسامد صوت چشمه را با f_s، بسامدی که ناظر می‌شنود را با f_o، طول موج چشمهٔ ساکن را با λ_s و طول موجی را که ناظر دریافت می‌کند با λ_o نشان دهیم، کدام وضعیت‌ها درست بیان شده‌اند؟

	ناظر (o)	چشمه (s)
(a)	•	•→
(b)	←•	•→
(c)	←•	•
(d)	•→	←•

الف) در وضعیت (a)، $f_o > f_s$, $\lambda_o = \lambda_s$ است.

ب) در وضعیت (b)، $f_o = f_s$, $\lambda_o < \lambda_s$ است.

پ) در وضعیت (c)، $f_o > f_s$, $\lambda_o = \lambda_s$ است.

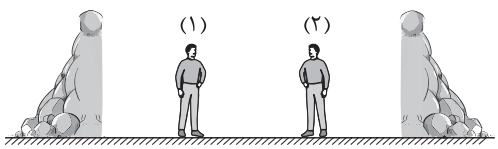
ت) در وضعیت (d)، $f_o < f_s$, $\lambda_o > \lambda_s$ است.

۱) الف و ب　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) پ و ت

۴۶- وال عنبر با استفاده از پژواک امواج فراصوتی با بسامد ۷۵ kHz و طول موج ۲ cm، مکان‌یابی می‌کند. اگر زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای مانعی برابر ۰/۱۲ s باشد، فاصلهٔ مانع از وال چند متر است؟

۱) ۹　　۲) ۹۰　　۳) ۱۸　　۴) ۱۸۰

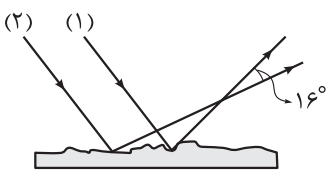
۴۷- مطابق شکل دو دانش‌آموز بین دو صخرهٔ قائم ایستاده‌اند. دانش‌آموز (۱) فریاد می‌زند و دانش‌آموز (۲) صدای فریاد مستقیم او را پس از ۰/۱ s می‌شنود، سپس اولین پژواک صدای او را ۰/۴ s بعد از آن و صدای پژواک دوم را ۰/۵ s بعد از پژواک اول می‌شنود. اگر تندی صوت در هوا ۳۲۰ m / s باشد، فاصلهٔ بین دو صخره چند متر است؟ (فاصلهٔ بین دو دانش‌آموز و صخره‌ها به اندازه‌ای است که دانش‌آموز دوم تمام پژواک‌ها را تشخیص می‌دهد.)



۱) ۴۵۸　　۲) ۲۴۰

۳) ۱۶۰　　۴) ۱۴۴

۴۸- در شکل زیر، دو پرتوی نور موازی (۱) و (۲) به سطح بازتابندهٔ ناهمواری می‌تابند. اگر زاویهٔ تابش پرتوی (۱) برابر ۴۰° باشد، زاویهٔ بازتابش پرتوی (۲) چند درجه است؟



۱) ۵۶

۲) ۴۸

۳) ۳۲

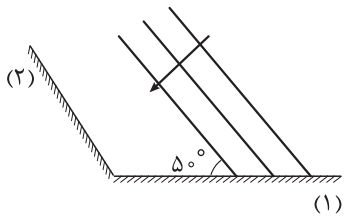
۴) ۲۴

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

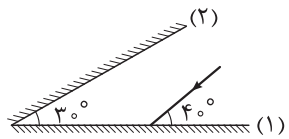
www.konkur.in

۴۹- در شکل زیر، جبهه‌های موج تختی به مانع تخت شمارهٔ (۱) تابیده و پس از بازتاب از آن، به مانع تخت شمارهٔ (۲) می‌رسد. زاویهٔ بین دو مانع تخت، چند درجه باشد تا جبهه‌های موج بازتابیده از مانع (۲)، موازی مانع (۱) باشند؟



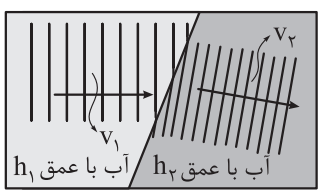
۱) ۱۰۵
۲) ۱۱۰
۳) ۱۱۵
۴) ۱۲۰

۵۰- پرتوی نوری مطابق شکل زیر به آینهٔ (۱) می‌تابد. زاویهٔ بازتاب آخرین برخورد این پرتو به آینه‌ها چند درجه است؟ (طول دو آینه به اندازهٔ کافی بلند است.)



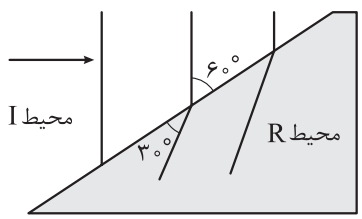
۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۷۰
۴) ۸۰

۵۱- شکل زیر، طرحی از شکست جبهه‌های موج سطحی در مرز آب با عمق‌های متفاوت h_1 و h_2 را نشان می‌دهد. اگر تندی انتشار آب در عمق h_1 را با v_1 و تندی انتشار آب در عمق h_2 را با v_2 نشان دهیم، کدام گزینه درست است؟



۱) $v_1 < v_2 \ , \ h_1 > h_2$
۲) $v_1 > v_2 \ , \ h_1 < h_2$
۳) $v_1 < v_2 \ , \ h_1 < h_2$
۴) $v_1 > v_2 \ , \ h_1 > h_2$

۵۲- جبهه‌های موج فرودآمده بر مرز دو محیط I و R به شکل زیر است. به ترتیب، طول موج و بسامد این موج در محیط I از راست به چپ چند برابر طول موج و بسامد این موج در محیط R است؟



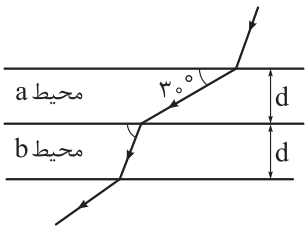
۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\sqrt{3}$
۳) ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) ۱ و $\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۳- مسیر عبور پرتوی نور از چند محیط شفاف با مرزهای موازی به شکل زیر است. اگر زمان حرکت پرتوی نور در دو محیط a و b یکسان باشد، ضریب شکست محیط b چند برابر ضریب شکست محیط a است؟



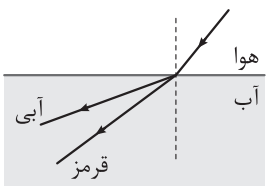
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

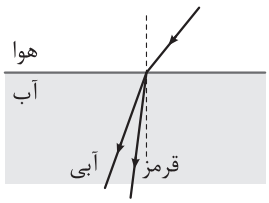
۲) $\sqrt{۲}$

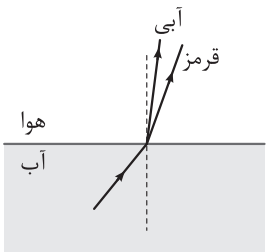
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

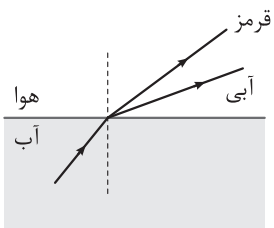
۴) $\sqrt{۳}$

۵۴- باریکهٔ نوری که شامل نورهای قرمز و آبی است، در آزمایش اول از هوا وارد آب و در آزمایش دوم از آب وارد هوا می‌شود. کدام شکل، شکست این باریکهٔ نور را به درستی نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵۵- کدام پرتوی تک‌رنگ و در کدام محیط، با عبور از شکافی به پهنای $۴\ \mu m$، پراش بارزتری ایجاد می‌کند؟

۱) نور آبی در آب ۲) نور قرمز در آب ۳) نور آبی در هوا ۴) نور قرمز در هوا

۵۶- کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ آزمایش یانگ نادرست است؟

۱) در نقطه‌هایی که موج‌های حاصل از پراش با یکدیگر تداخل سازنده دارند، روی پرده، فریزهای روشن تشکیل می‌شود.

۲) اگر آزمایش یانگ را در شرایط یکسان، بار اول در هوا و بار دوم در آب انجام دهیم، پهنای نوارهای تاریک و روشن در آب کاهش می‌یابد.

۳) در آزمایش یانگ اگر به جای نور تک‌فام سبز از نور تک‌فام آبی استفاده کنیم، پهنای نوارهای تداخلی افزایش می‌یابد.

۴) آزمایش تداخلی یانگ نشان داد که نور هم مانند صوت ماهیت موجی دارد.

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۷- تار ویولنی که طول آن ۱۵ cm و در دو انتها بسته شده است، در مُد $n = 1$ خود نوسان می‌کند. تندی موج عرضی در این تار $250\ m/s$ و تندی صوت در هوا $340\ m/s$ است. طول موج امواج صوتی گسیل‌شده از تار چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۵　　۲) ۳۰　　۳) ۲۰/۴　　۴) ۴۰/۸

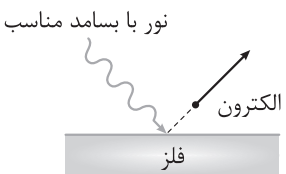
۵۸- رشته‌ای از بسامدهای تشدیدی یک تار با دو انتهای بسته، به طول ۸۰ cm و جرم ۱۶ g عبارت‌اند از: ۱۲۵ Hz، ۱۸۷/۵ Hz و ۳۱۲/۵ Hz. در این رشته دو بسامد (کم‌تر از ۳۲۰ Hz) جا افتاده است. به ترتیب از راست به چپ نیروی کشش تار چند نیوتون است و در حالتی که مجموع گره‌ها و شکم‌ها در طول تار ۹ عدد است، چند میلی‌ثانیه طول می‌کشد تا هر یک از ذرات تار، یک نوسان کامل انجام دهد؟

۱) ۴۰۰ و ۴　　۲) ۲۰۰ و ۴　　۳) ۴۰۰ و ۲　　۴) ۲۰۰ و ۲

۵۹- شدت تابش خورشید در سطح زمین $300\ W/m^2$ است. اگر طول موج متوسط فوتون‌های تابشی خورشید به سطح زمین ۶۰۰ nm باشد، در هر دقیقه چند فوتون به سطحی به مساحت $5\ m^2$ می‌رسد؟ ($h = 6\times10^{-34}\ J.s$ و $c = 3\times10^8\ m/s$)

۱) 3×10^{23}　　۲) 3×10^{24}　　۳) 6×10^{23}　　۴) 6×10^{24}

۶۰- در شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگ با بسامد مناسب، بر سطح یک فلز می‌تابد و سبب گسیل الکترون از سطح فلز می‌شود. اگر با ثابت‌ماندن بسامد نور، شدت آن را افزایش دهیم، به ترتیب از راست به چپ تعداد و بیشینهٔ انرژی فوتوالکترون‌ها چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش می‌یابد ـ تغییری نمی‌کند.
۲) تغییری نمی‌کند ـ افزایش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد ـ افزایش می‌یابد.
۴) تغییری نمی‌کند ـ تغییری نمی‌کند.

۶۱- در یک آزمایش فوتوالکتریک، با ۲ برابر کردن طول موج نور تابشی به سطح یک فلز، تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده، ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. اگر بسامد آستانهٔ فلز ۵۰۰ THz باشد، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها چند ژول تغییر کرده است؟ ($hc = 1200\ eV.nm$ ،$e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و $c = 3\times10^8\ m/s$)

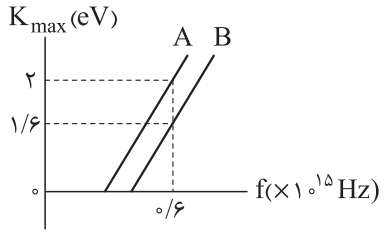
۱) $1/6\times10^{-19}$　　۲) $3/2\times10^{-19}$
۳) $4/8\times10^{-19}$　　۴) $6/4\times10^{-19}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

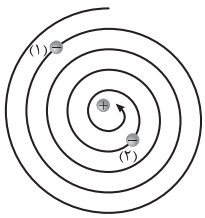
www.konkur.in

۶۲- نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح دو فلز A و B، برحسب بسامد نور فرودی، مطابق شکل زیر است. طول موج آستانهٔ فلز A چند برابر طول موج آستانهٔ فلز B است؟ ($h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s$)



۱) $\frac{۴}{۵}$　　۲) $\frac{۵}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) ۲

۶۳- در مدل اتمی رادرفورد، الکترون، با فرض آن‌که به دور هسته در گردش باشد، مسیری به شکل زیر را طی می‌کند. کدام مورد دربارهٔ انرژی الکترون (E) و بسامد موج الکترومغناطیسی گسیلی از آن (f) در دو نقطهٔ (۱) و (۲) از مسیرش درست است؟



۱) $f_۱ > f_۲$ و $E_۱ > E_۲$　　۲) $f_۲ > f_۱$ و $E_۱ > E_۲$

۳) $f_۱ > f_۲$ و $E_۲ > E_۱$　　۴) $f_۲ > f_۱$ و $E_۲ > E_۱$

۶۴- در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، شعاع مدار مانای الکترون در دومین حالت برانگیخته، چند برابر شعاع مدار مانای الکترون در سومین حالت برانگیخته است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۴}{۹}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۶۵- در اتم هیدروژن،کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n' برسد، ۹۰۰ nm است. بلندترین طول موج تابشی الکترونی که در مدار n' قرار دارد، چند نانومتر و چندمین خط کدام رشته است؟ (پایین‌ترین شمارهٔ مدار در طیف‌های لیمان و بالمر، به ترتیب ۱ و ۲ است و $R = ۰/۰۱\ (nm)^{-۱}$)

۱) ۱۱۲/۵، دومین خط رشتهٔ لیمان　　۲) ۱۱۲/۵، اولین خط رشتهٔ بالمر

۳) ۷۲۰، دومین خط رشتهٔ لیمان　　۴) ۷۲۰، اولین خط رشتهٔ بالمر

۶۶- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = ۴$ قرار دارد. فرض کنید، فقط گذارهای $\Delta n = ۱$ مجاز باشند. در این صورت اختلاف بسامد کم‌انرژی‌ترین و پرانرژی‌ترین فوتون گسیلی، تقریباً چند تراهرتز است؟ ($E_R = ۱۳/۶\ eV$ و $h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s$)

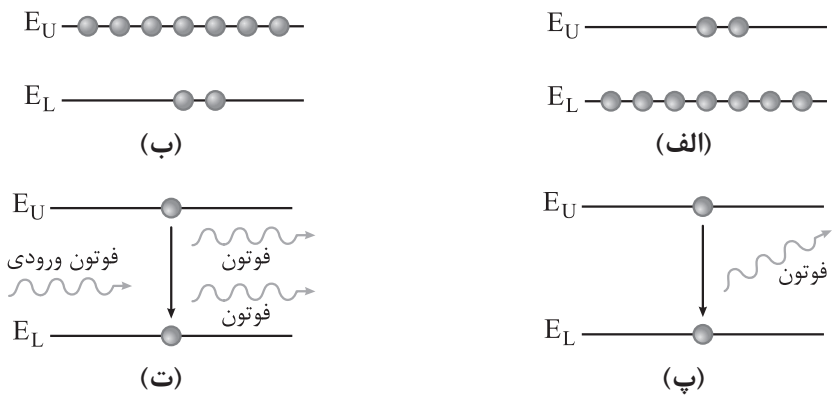
۱) ۴۸۴/۸　　۲) ۴۸۴۸　　۳) ۲۳۸/۵　　۴) ۲۳۸۵

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۷- در هر یک از شکل‌های زیر، مدل ساده‌ای از وضعیت الکترون‌ها در دو تراز انرژی مختلف، در یک محیط لیزری رسم شده است. به ترتیب از راست به چپ، در کدام شکل وضعیت وارونی جمعیت و در کدام شکل فرایند گسیل القایی، به درستی نشان داده شده است؟



۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) ب و ت

۶۸- اگر عدد اتمی برابر Z و عدد نوترونی برابر N باشد، به ترتیب از راست به چپ، کدام مورد دربارهٔ ایزوتوپ‌های پایدار سبک و ایزوتوپ‌های پایدار سنگین درست است؟

۱) $N > Z$ و $Z > N$　　۲) $N \simeq Z$ و $Z > N$　　۳) $N > Z$ و $Z \simeq N$　　۴) $Z > N$ و $Z \simeq N$

۶۹- کدام‌یک از واکنش‌های زیر دربارهٔ انرژی بستگی هسته‌ای درست است؟

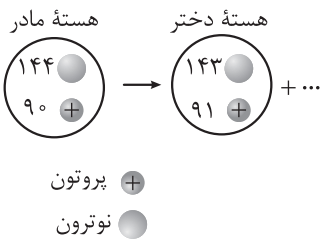
۱) نوکلئون‌های جدا از هم (جرم بیشتر) ← انرژی بستگی هسته‌ای + هسته (جرم کم‌تر)

۲) نوکلئون‌های جدا از هم (جرم کم‌تر) ← انرژی بستگی هسته‌ای + هسته (جرم بیشتر)

۳) هسته (جرم بیشتر) ← انرژی بستگی هسته‌ای + نوکلئون‌های جدا از هم (جرم کم‌تر)

۴) هسته (جرم کم‌تر) ← انرژی بستگی هسته‌ای + نوکلئون‌های جدا از هم (جرم بیشتر)

۷۰- در واکنش واپاشی شکل مقابل، ذرهٔ گسیل‌شده کدام است؟



۱) گاما

۲) آلفا

۳) الکترون

۴) پوزیترون

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

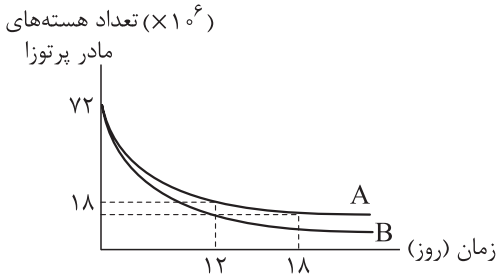
۷۱- اختلاف تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های یک هستهٔ مادر پرتوزا برابر ۱۰ است. از این هسته، ۲ ذرهٔ α و یک ذرهٔ β^+ گسیل می‌شود. اختلاف تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر حاصل کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) ۱۲

۷۲- نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا ۲s است. نمونه‌ای از این ماده در لحظهٔ $t = 0s$ شروع به واپاشی می‌کند. اگر در ۲ ثانیهٔ چهارم، ۵۰g از این نمونه دچار واپاشی شود، جرم فعال این نمونه در لحظهٔ $t = 10\,s$ چند گرم است؟

۱) ۶/۲۵　　۲) ۱۲/۵　　۳) ۲۵　　۴) ۵۰

۷۳- نمودار تعداد هسته‌های مادر پرتوزای دو نمونهٔ A و B برحسب زمان، به شکل زیر است. پس از چند روز از شروع واپاشی نمونهٔ B، ۹۳/۷۵ درصد از هسته‌های مادر آن به هستهٔ دختر تبدیل می‌شوند؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

۷۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در فرایند غنی‌سازی در یک نمونهٔ اورانیم، اورانیم ۲۳۵ به اورانیم ۲۳۸ تبدیل می‌شود.

ب) در فرایند غنی‌سازی در یک نمونهٔ اورانیم، اورانیم ۲۳۸ به اورانیم ۲۳۵ تبدیل می‌شود.

پ) از آن‌جایی که اورانیم ۲۳۸ فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم است، در سنگ معدن اورانیم واکنش شکافت زنجیری رخ نمی‌دهد.

ت) از آن‌جایی که اورانیم ۲۳۵ فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم است، در سنگ معدن اورانیم واکنش شکافت زنجیری رخ نمی‌دهد.

۱) الف و ت　　۲) ب و پ　　۳) پ　　۴) ت

۷۵- انرژی آزادشده در هر واکنش شکافت ^{235}U با یک نوترون کُند، در حدود ۲۰۲/۵ MeV و در هر واکنش گداخت دوتریم با تریتیم حدود ۱۷/۶ MeV است. انرژی آزادشده به ازای هر نوکلئون، در واکنش گداخت تقریباً چند برابر واکنش شکافت است؟

۱) ۴　　۲) ۲　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۴}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

شیمی (۳): صفحه‌های ۶۷ تا ۱۲۳

۷۶- در فرایند تولید آمونیاک به روش هابر، کدام عامل درصد مولی فراورده در مخلوط تعادلی را افزایش می‌دهد، اما بر مقدار ثابت تعادل واکنش بی‌تأثیر است؟

۱) افزایش فشار
۲) کاهش دما
۳) افزایش دما
۴) کاهش فشار

۷۷- مادهٔ خالصی در حالت مایع رسانای جریان برق است. کدام مطلب دربارهٔ این ماده به یقین درست است؟

۱) در حالت جامد شکننده است.
۲) برای توصیف آن می‌توان از واژهٔ شیمیایی نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.
۳) اگر در اثر ضربهٔ چکش خرد نشود، در حالت جامد نیز رسانای جریان برق است.
۴) واحدهای سازندهٔ آن، یون‌هایی با بار مثبت و منفی هستند.

۷۸- چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست است؟

- **نقطهٔ ذوب: الماس > سیلیسیم**
- **سختی: سیلیسیم‌کربید > سیلیسیم**
- **پایداری: سیلیس > سیلیسیم**
- **آنتالپی پیوند: $Si-C < Si-O$**
- **گرمای سوختن مولی: الماس >گرافیت**
- **شمار اتم‌ها در حجم برابر: گرافیت >الماس**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

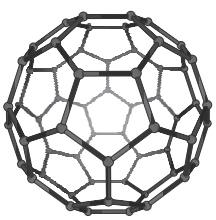
۷۹- کدام مطلب دربارهٔ سیلیسیم درست است؟

۱) شبه‌فلزی از خانوادهٔ کربن است و فراوان‌ترین عنصر پوستهٔ جامد زمین محسوب می‌شود.
۲) نقطهٔ ذوب بالاتری نسبت به دیگر عنصرهای هم‌دورهٔ خود دارد.
۳) در ترکیب با عنصر کربن، یک ترکیب یونی با نقطهٔ ذوب بالا به نام سیلیسیم‌کربید تشکیل می‌دهد که در تهیهٔ سنباده به کار می‌رود.
۴) در حالت خالص، کوارتز نامیده شده و در ساخت منشور و عدسی‌ها به کار می‌رود.

۸۰- مخلوطی شامل ترکیب A، ۵ درصد جرمی آب و مقداری ناخالصی است. اگر پس از مدتی بر اثر جذب رطوبت، درصد جرمی آب و A به ترتیب به ۱۵ و ۶۸ برسد، درصد جرمی ناخالصی در نمونهٔ اولیه کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۸۱- «باکی‌بال» یکی از آلوتروپ‌های کربن است که در ساختار آن ۳۰ پیوند $C=C$ و ۶۰ پیوند $C-C$ وجود دارد. جرم مولی باکی‌بال چند برابر جرم مولی الماس است؟ $(C = 12\ g.mol^{-1})$

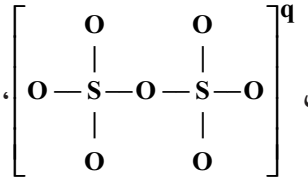

«باکی‌بال»

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۳۰
۴) ۶۰

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۲- اگر در ساختار یون  ، همهٔ اتم‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار رسیده باشند، نسبت q به بار یون سیلیکات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۸۳- عنصرهای X و Y به ترتیب متعلق به دورهٔ دوم و سوم جدول دوره‌ای عنصرها هستند. اگر شکل هندسی $XH_۳^-$ و $YO_۳$ به ترتیب مشابه آمونیاک و یون کربنات باشد، کدام مطلب نادرست است؟

۱) X و Y می‌توانند با یکدیگر مولکول ناقطبی به فرمول $XY_۲$ تشکیل دهند.
۲) X و Y هر دو در دمای اتاق به حالت جامدند.
۳) X در هیچ شکلی، رسانای جریان برق نیست.
۴) بین مولکول‌های $H_۲Y$، پیوند هیدروژنی برقرار نمی‌شود.

۸۴- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ مولکول‌های سه‌اتمی، درست است؟

- در این مولکول‌ها، هستهٔ هر سه اتم سازنده روی یک خط راست قرار دارد.
- اگر اتم‌های سازندهٔ این مولکول یکسان باشند، مولکول مورد نظر ناقطبی است.
- اگر این مولکول ناقطبی باشد، اتم‌های سازندهٔ آن دارای بار جزئی مثبت و منفی نیستند.
- در این مولکول‌ها، بار جزئی مثبت به یقین روی اتم‌های کناری قرار دارد.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۸۵- کدام مطلب نادرست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) در شرایط یکسان، گاز پروپان نسبت به گاز دی‌متیل اتر، دشوارتر به حالت مایع تبدیل می‌شود.
۲) درصد جرمی اکسیژن در یخ خشک، $\frac{۹}{۱۱}$ برابر درصد جرمی اکسیژن در یخ معمولی است.
۳) فرمول شیمیایی کلروفرم، کلرواتان و وینیل کلرید به ترتیب به صورت $CH_۳Cl$، $C_۲H_۵Cl$ و $C_۲H_۳Cl$ است.
۴) عدد اکسایش گوگرد در کربونیل سولفید و هیدروژن سولفید با هم برابر است.

۸۶- عنصرهای A، M و D به ترتیب سه عنصر متوالی دورهٔ سوم جدول دوره‌ای عنصرها هستند. اگر در بین یون‌های پایدار عنصرهای این دوره، یون پایدار عنصر M بیشترین چگالی بار را داشته باشد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) عنصر D در دما و فشار اتاق، نافلزی زردرنگ است.
ب) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور کلرید A کم‌تر از فسفید M است.
پ) شعاع یون پایدار M از $X^{۳-}$، کم‌تر است.
ت) اگر عدد اتمی عنصر D، برابر Z باشد، عنصر $E_{Z+۶}$ یک فلز واسطه است.

۱) ب ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۷- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **براساس گسترهٔ کاربری مواد، دورهٔ برنز قبل از دورهٔ آهن بوده است.**
- **امروزه در ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما از فولاد استفاده می‌شود.**
- **رنگ‌هایی که برای پوشش سطوح استفاده می‌شوند، نوعی کلوئید هستند.**
- **سازهٔ فلزی در ارتودنسی از جنس تیتانیم خالص است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۸- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- **در یک نمونهٔ خالص از فلز باریم، به ازای هر یون، دو الکترون در دریای الکترونی وجود دارد.**
- **در شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی، هیچ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها وجود ندارد.**
- **یکی از ویژگی‌های خاص همهٔ فلزهای واسطه در مقایسه با فلزهای اصلی، تنوع عدد اکسایش آن‌ها است.**
- **فلزها در حالت مذاب برخلاف ترکیب‌های یونی، بدون تجزیه‌شدن، جریان برق را از خود عبور می‌دهند.**

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست ۲) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست ۴) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۸۹- در نمونه‌ای از آلیاژ نیتینول که دارای نیکل و تیتانیم است، به ازای هر ۸ اتم نیکل، ۷ اتم تیتانیم وجود دارد. درصد جرمی فلزی با شمار الکترون‌های ظرفیتی بیشتر در این آلیاژ کدام است؟ ($_{22}Ti = 48, {}_{28}Ni = 58 : g.mol^{-1}$)

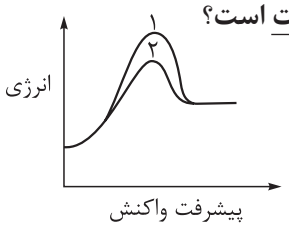
۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۵۸ ۴) ۶۴

۹۰- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **ترتیب تولید فراورده‌های حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان به صورت: «اوره ← آمونیاک ← مواد عایق گرما ← ویتامین A» است.**
- **دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود یکی از اکسیدهای نیتروژن است که عدد اکسایش اتم نیتروژن در آن برابر ۲+ است.**
- **طیف‌سنجی، روشی برای شناسایی ساختار مواد است و اساس آن برهم‌کنش میان مواد و پرتوهای الکترومغناطیسی است.**
- **ترتیب بالاترین غلظت چند آلاینده برحسب ppm در طول یک شبانه‌روز به صورت: $NO < O_3 < NO_2$ است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۱- نمودار مقابل مربوط به یک واکنش گازی در دو شرایط متفاوت است. کدام مطلب نادرست است؟



۱) واکنش مورد نظر مانند واکنش $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$، گرماگیر است.
۲) در شرایط (۲)، E_a واکنش کم‌تر بوده و سرعت واکنش بیشتر است.
۳) با افزایش دمای واکنش، نمودار انرژی پیشرفت واکنش از حالت (۱) به (۲) تغییر می‌کند.
۴) در این واکنش، مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده بیشتر از مواد فراورده است.

۹۲- در یک واکنش شیمیایی، اختلاف سطح انرژی سد انرژی، از واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، به ترتیب ۱۰۰ و ۷۰ کیلوژول است. ΔH این واکنش برحسب کیلوژول کدام است؟

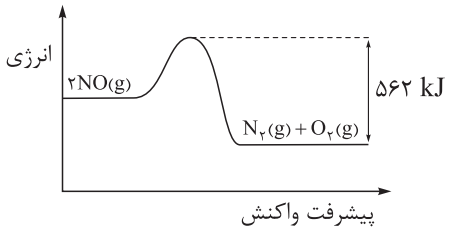
۱) ۳۰− ۲) ۳۰+ ۳) ۸۵+ ۴) ۸۵−

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۳- با توجه به نمودار و واکنش‌های داده‌شده، مقدار گرمای آزادشده به ازای مصرف ۰/۳ گرم NO در واکنش $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$ و حداقل انرژی لازم برای شروع این واکنش، به ترتیب از راست به چپ، چند کیلوژول است؟ $(N = 14, O = 16 : g.mol^{-1})$



$4NH_3(g) + 5O_2(g) \rightarrow 4NO(g) + 6H_2O(g) \quad \Delta H = -900kJ$

$2NH_3(g) \rightarrow N_2(g) + 3H_2(g) \quad \Delta H = 92kJ$

$2H_2O(g) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g) \quad \Delta H = 480kJ$

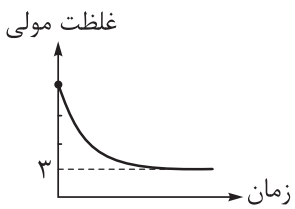
۱) ۳۸۴ ،۱/۷۸
۲) ۳۸۴ ،۰/۸۹
۳) ۱۹۲ ،۱/۷۸
۴) ۱۹۲ ،۰/۸۹

۹۴- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، درست است؟

- در آن برای حذف آلاینده‌ها، ۳ واکنش گرماده و از نوع اکسایش ـ کاهش انجام می‌شود.
- در آن‌ها برای حذف اکسیدهای نیتروژن از آمونیاک استفاده می‌شود.
- این مبدل‌ها از جنس فلزهای پلاتین، پالادیم و رودیم هستند.
- گاز اکسیژن در برخی از واکنش‌های انجام‌شده در آن، واکنش‌دهنده و در برخی، فراورده است.
- علی‌رغم حضور مبدل، به هنگام روشن‌شدن خودرو به‌ویژه در زمستان، مقدار آلاینده‌های بیشتری در گازهای خروجی از اگزوز مشاهده می‌شود.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۵- نمودار زیر مربوط به واکنش $2A(g) \rightleftharpoons 2B(g) + C(g)$ است که در لحظهٔ آغاز، فقط A در ظرف موجود بوده است. اگر مقدار ثابت تعادل این واکنش برابر ۴۰/۵ و در لحظهٔ تعادل، شمار مول‌های C برابر ۴/۵ باشد، مقدار اولیهٔ A چند مول بوده است؟



۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۱۰/۵
۴) ۶

۹۶- تعادل $A(g) \rightleftharpoons 2C(g)$، در ظرفی به حجم یک لیتر با ۳ مول C و ۱ مول A برقرار است. در همان دما ۲ مول A به ظرف واکنش اضافه می‌کنیم تا تعادل جدیدی برقرار شود. مقدار تعادلی C در تعادل جدید چند مول است؟

۱) ۴/۲۵
۲) ۴/۵
۳) ۴/۷۵
۴) ۵

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۷- کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

الف) طبق اصل لوشاتلیه، با افزودن ۰/۱ مول گاز اکسیژن به سامانهٔ تعادلی $4HBr(g)+O_2(g) \rightleftharpoons 2Br_2(g)+2H_2O(g)$، تعادل جابه‌جا شده و ۰/۲ مول برم تولید می‌شود.

ب) کاهش حجم مخلوط تعادلی $NO_2(g)+O_2(g) \rightleftharpoons NO(g)+O_3(g)$، اثری بر غلظت مولی مواد و جابه‌جایی تعادل ندارد.

پ) اگر تعادل $aA(g) \rightleftharpoons bB(g)$، با افزایش دما و کاهش فشار در جهت برگشت جابه‌جا شود، جرم مولی B بیشتر از جرم مولی A است.

ت) با کاهش دما، شدت رنگ قهوه‌ای در مخلوط تعادلی $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، کاهش می‌یابد.

۱) پ ـ ت ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ب

۹۸- تعادل: $A(g) \rightleftharpoons B(g)$، از قراردادن یک مول A در یک ظرف دربسته در دمای T حاصل شده و میزان پیشرفت واکنش در این دما ۵۰٪ است. اگر ثابت تعادل واکنش در همین ظرف در دمای T'، ۱/۵ برابر ثابت تعادل آن در دمای T باشد، پیشرفت واکنش در دمای T' چند برابر پیشرفت آن در دمای اولیه (T) خواهد بود؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴

۹۹- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- از کلرواتان به عنوان بی‌حس‌کنندهٔ موضعی استفاده می‌شود.
- اتانول یک ضدعفونی‌کننده است که از واکنش گاز اتن با آب در محیطی با $pH = 7$ تولید می‌شود.
- اتیل‌استات دارای دو اتم کربن با عدد اکسایش ۳- است و به عنوان حلال چسب کاربرد دارد.
- تهیهٔ کتون‌ها و آلدهیدها از الکل‌ها امکان‌پذیر نیست و تنها می‌توان از کربوکسیلیک اسیدها، آن‌ها را تهیه کرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰- واکنش هیدروژن‌دارکردن اتیلن یک واکنش تعادلی گازی است. اگر این واکنش در یک ظرف یک‌لیتری به حالت تعادل باشد، چند مورد از راه‌های پیشنهادی زیر، می‌تواند سبب افزایش غلظت تعادلی اتان شود؟

- افزایش دما
- انتقال مخلوط گازها به ظرف نیم‌لیتری
- افزودن مقداری گاز هیدروژن به ظرف
- افزایش فشار

پیوند	C = C	H—H	C—H	C—C
آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۶۱۴	۴۳۶	۴۱۵	۳۴۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱- در اثر واکنش آلکن A با آب، الکل B به دست می‌آید. اگر درصد جرمی کربن در الکل B برابر ۶۰ باشد، فرمول ترکیب حاصل از واکنش آلکن A با گاز هیدروژن کلرید کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) C_2H_5Cl ۲) C_3H_7Cl ۳) C_4H_9Cl ۴) $C_5H_{11}Cl$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۲- کدام مطلب نادرست است؟

۱) از ویژگی‌های پلاستیک‌ها، می‌توان به چگالی کم، قیمت کم و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.
۲) در ساختار واحد تکرارشوندهٔ پلیمر سازندهٔ بطری آب، شمار پیوندهای دوگانه نصف شمار اتم‌های کربن است.
۳) در ساختار همهٔ ترکیبات آلی، شمار پیوندهای $C-H$ با شمار اتم‌های هیدروژن برابر است.
۴) ترفتالیک اسید را برخلاف پارازایلن، اتن و بنزن، نمی‌توان از تقطیر نفت خام به دست آورد.

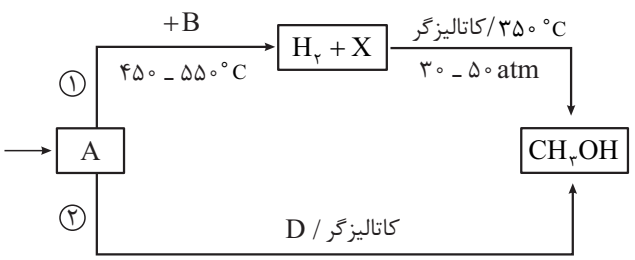
۱۰۳- نسبت تغییر مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در سوختن کامل ترفتالیک اسید به تغییر مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در سوختن کامل اتیلن‌گلیکول کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳ / ۴ ۳) ۴ / ۵ ۴) ۵

۱۰۴- در شرایط معین، بازده واکنش تبدیل ۲۴ / ۴ کیلوگرم پارازایلن به ترفتالیک اسید برابر ۸۰ درصد است. اگر ترفتالیک اسید حاصل از این فرایند برای تولید PET به‌کار رود، جرم اتیلن‌گلیکول مورد نیاز برای مصرف کامل ترفتالیک اسید، چند گرم خواهد بود؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۴۸۰ ۲) ۱۶۴۳ ۳) ۱۹۸۴ ۴) ۲۰۵۳

۱۰۵- با توجه به نمودار زیر که روش‌های تولید متانول را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟



الف) D، دومین گاز فراوان هواکره است.
ب) در ساختار لوویس X، نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به الکترون‌های ناپیوندی برابر $\frac{3}{2}$ است.
پ) A سازندهٔ اصلی گاز طبیعی است که در میدان‌های نفتی به فراوانی یافت می‌شود.
ت) B ماده‌ای است که در فرایند تولید PET نیز به عنوان فراوردهٔ جانبی تولید می‌شود.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ـ ت ۳) الف ـ پ ـ ت ۴) الف ـ ب

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛
فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.
هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.
برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

خیلی سبز! آزمون تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی ۱۴۰۳ - ۱۴۰۲

دفترچه پاسخ آزمون دوازدهم حضوری

علوم ریاضی و فنی

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۲/۱۲/۲۵

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدرضا حسینی‌فرد - محمدطاهر شعاعی - کیوان صارمی - حمید گلزاری - محسن میراسلامی
فیزیک	محمد باغبان - محسن توانا - علیرضا جباری - محمدرضا زارع - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمدجواد سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبداللهی - علیرضا علینقی - علیرضا گونه - حامد نبی‌منصور
شیمی	مجتبی ابراهیمی ـ امیرسامان بنی‌جمالی ـ یاسر راش ـ پارسا فراهانی ـ رضا فولادپور ـ مبینا شرافتی‌پور - یاسر عبداللهی - سیدعلی ناظمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی ـ محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	عاطفه خان‌محمدی	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی - ماهان فنی‌فر - امیرحسین قنبری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی‌فر - ابوالفضل ناصری - مریم نظری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	زهرا جالینوسی	امیرحسین ابومحبوب	علیرضا کاظمی‌بقا - ابوالفضل ناصری - مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان - علیرضا جباری - محمدجواد سورچی - علیرضا گونه	علیرضا جباری	مهدی بابائی- مهدی خوش‌نویس - سارا دانایی - احسان محمدی - امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	حمید ذبحی	محمد مرادی - فاطمه صیقلی	مهلا تابش‌نیا - هومن زندی - محمدمهدی صوفیان

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان (۲): صفحه‌های ۷۱ تا ۱۴۴

تست و پاسخ ۱

هرگاه $f(x)=۲x^۲+ax+b$، به طوری که تساوی $f'of(x)=۸x^۲-۱۲x-۳$ برقرار باشد، مقدار $fof'(۲)$ چه عددی است؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره پیشنهاد می‌کنیم درس‌نامه‌ها و نکته‌های این آزمون را به دقت بررسی کنید. یک جمع‌بندی خوب از نیم‌سال دوم حسابان دوازدهم است. حل گام‌به‌گام سؤالات، دید خوبی در رابطه با حل سؤالات کنکور به شما می‌دهد.

خودت حل کنی بهتره از تابع f، مشتق آن (f') را به دست بیاورید و در رابطهٔ داده‌شده، جای‌گذاری کنید.

درس نامه نکات مشتق در این درس‌نامه به طور کامل آمده است. آن‌ها را حفظ باشید.

۱) **مشتق مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم توابع:**

تابع	مشتق تابع	مثال
$y=cf(x)$	$y'=cf'(x)$	$y=۵(\sqrt{x}-\frac{۱}{x}) \Rightarrow y'=۵(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{x^۲})$
$y=f(x)+g(x)$	$y'=f'(x)+g'(x)$	$y=۳x^۳-۵x \Rightarrow y'=۹x^۲-۵$
$y=(f.g)(x)$	$y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$	$y=(۳x-۲x^۲)(۵+۴x)$ $\Rightarrow y'=(۳-۴x)(۵+۴x)+(۳x-۲x^۲)۴$
$y=(\frac{f}{g})(x)$	$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲}$, $g(x)\neq ۰$	$y=\frac{۲x-۴}{۳x^۲+۱} \Rightarrow y'=\frac{۲(۳x^۲+۱)-(۲x-۴)۶x}{(۳x^۲+۱)^۲}$

۲) **مشتق ترکیب توابع:**

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

به عبارت دیگر برای تابع مرکب $f(u)$ داریم:

$$(f(u))'=u'f'(u)$$

۳) **جدول مشتق‌گیری توابع:**

تابع	مشتق تابع	مثال
$y=u^n$	$y'=nu'\times u^{n-۱}$	$y=(x^۲+x)^۳ \Rightarrow y'=۳(۲x+۱)(x^۲+x)^۲$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^۳+۵} \Rightarrow y'=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۵}}$
$y=\sqrt[m]{u^n}$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y=\sqrt[۳]{(x^۲-x)^۲} \Rightarrow y'=\frac{۲(۲x-۱)}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-x)^۱}}$
$y=\frac{au+b}{cu+d}$	$y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}\times u'$	$y=\frac{\sqrt{x}+۲}{۳\sqrt{x}+۵} \Rightarrow y'=\frac{۵-۶}{(۳\sqrt{x}+۵)^۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تابع	مشتق تابع	مثال
$y=\sin u$	$y'=u'\times\cos u$	$y=\sin(x^2+1) \Rightarrow y'=2x\cos(x^2+1)$
$y=\cos u$	$y'=-u'\times\sin u$	$y=\cos\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$
$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan(\sin x) \Rightarrow y'=\cos x(1+\tan^2(\sin x))$
$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot(x^2-1) \Rightarrow y'=-2x(1+\cot^2(x^2-1))$

۴) قواعد خاص در مشتق‌گیری:

الف) در محاسبهٔ مشتق توابع قدرمطلقی در یک نقطه، اگر آن نقطه ریشهٔ داخل قدرمطلق نباشد، کافی است که قدرمطلق را در آن نقطه تعیین علامت کنید و سپس از تابع بدون قدرمطلق، مشتق بگیرید و مقدار مشتق را در آن نقطه بیابید. به طور کلی:

$$y=|u|=\begin{cases}u & u\geq 0\\ -u & u<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}u' & ,u>0\\ ? & ,u=0\\ -u' & ,u<0\end{cases}$$

تذکر در $u=0$، مشتق‌پذیری تابع y باید بررسی شود.

مثال: مشتق تابع $f(x)=|x^2-4x|$ در نقطهٔ $x=1$ را می‌یابیم. در همسایگی $x=1$، تابع داخل قدرمطلق منفی است، پس:

$$y=-(x^2-4x)=-x^2+4x$$

$$\Rightarrow y'=-2x+4 \Rightarrow f'(1)=-2+4=2$$

ب) در محاسبهٔ مشتق برخی از توابع جبری، می‌توانیم با استفاده از خواص جبری (اتحادها، فاکتورگیری، گویاکردن، تجزیهٔ کسرها)، عبارت را به فرم ساده‌تری بنویسیم و سپس مشتق بگیریم؛ مثلاً:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\xrightarrow[\text{صورت فاکتور می‌گیریم.}]{\text{از }\sqrt{x}\text{ در}} f(x)=\frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})}=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad ,\ 0<x<1$$

پ) در محاسبهٔ مشتق بعضی از توابع مثلثاتی، می‌توانیم از اتحادها برای ساده‌ترشدن تابع استفاده کنیم؛ مثلاً:

$$f(x)=\underbrace{\sin.\cos x}.\cos 2x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x.\cos 2x}=\frac{1}{4}\sin 4x \Rightarrow f'(x)=\cos 4x$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به تابع f داده‌شده، مشتق تابع، یعنی f'، را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=2x^2+ax+b \Rightarrow f'(x)=4x+a$$

گام دوم: حالا تابع $f'of(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f'of(x)=f'(f(x))=f'(2x^2+ax+b)=4(2x^2+ax+b)+a=8x^2+4ax+(4b+a)$$

با توجه به گام اول

گام سوم: از طرفی $f'of(x)=8x^2-12x-3$ داده شده است. با توجه به نتیجه‌ای که در گام دوم به دست آورده‌ایم، ضرایب توان‌های مختلف x را با هم برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$x^1\text{ ضریب}: 4a=-12 \Rightarrow a=-3 \qquad (*)$$

$$x^0\text{ ضریب}: 4b+a=-3 \xrightarrow{(*)} b=\frac{-a-3}{4}=0$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام چهارم: پس توابع f و f' به صورت زیر هستند:

$$f(x)=۲x^۲-۳x$$

$$f'(x)=۴x-۳$$

گام پنجم: مقدار $fof'(۲)$ را می‌یابیم:

$$f'(۲)=۸-۳=۵ \Rightarrow f(f'(۲))=f(۵)=۲\times۲۵-۱۵=۵۰-۱۵=۳۵$$

تست و پاسخ ۲

مشتق دوم تابع g در $x=۳$

هرگاه $f''(۱)=۲f'(۱)+۳$، به طوری که $g(۳x)=f(\sqrt[۳]{x})$ مقدار $g''(۳)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره از فرمول مشتق تابع مرکب استفاده کنید و از طرفین معادلهٔ داده‌شده، دو بار مشتق بگیرید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از طرفین رابطهٔ $g(۳x)=f(\sqrt[۳]{x})$، به کمک فرمول مشتق تابع مرکب، مشتق می‌گیریم، داریم:

$$(g(۳x))'=(f(\sqrt[۳]{x}))' \Rightarrow ۳g'(۳x)=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}f'(\sqrt[۳]{x}) \quad (*)$$

گام دوم: برای این‌که بتوانیم $g''(۳)$ را بیابیم، از رابطهٔ $(*)$، دوباره مشتق می‌گیریم:

$$۳\times۳g''(۳x)=\frac{۱}{۳}(-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}f'(\sqrt[۳]{x})+x^{-\frac{۲}{۳}}\times\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}f''(\sqrt[۳]{x}))$$

طرفین را در ۹ ضرب می‌کنیم. $\longrightarrow$ $$۸۱g''(۳x)=-۲x^{-\frac{۵}{۳}}f'(\sqrt[۳]{x})+x^{-\frac{۴}{۳}}f''(\sqrt[۳]{x}) \quad (**)$$

گام سوم: مقدار $g''(۳)$ را می‌خواهیم، پس در رابطهٔ $(**)$، $x=۱$ قرار می‌دهیم:

$$۸۱g''(۳)=-۲f'(۱)+f''(۱)$$

از طرفی در صورت سؤال، رابطهٔ $f''(۱)=۲f'(۱)+۳$ را داریم. با جای‌گذاری $f''(۱)$ در رابطه، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$۸۱g''(۳)=-\cancel{۲f'(۱)}+\cancel{۲f'(۱)}+۳ \Rightarrow g''(۳)=\frac{۱}{۲۷}$$

تست و پاسخ ۳

هرگاه $f(x)=\sin(\pi x).\cos(\frac{\pi x}{۲})$ باشد، حاصل $f''(۱)$ کدام است؟

۱) $-\pi^۲$ ۲) $\pi^۲$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۲}$ ۴) $-\frac{\pi^۲}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره به دست آوردن مشتق عامل صفرشونده، بارها و بارها در کنکور تجربی و ریاضی تکرار شده است. برای مشتق گرفتن، از نکته‌ای که در درس‌نامه آمده است، استفاده کنید.

درس‌نامه ●● مشتق‌گیری از عامل صفرشونده

اگر بخواهیم مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-a)g(x)$ را در $x=a$ پیدا کنیم، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم، زیرا $x=a$ عامل صفرکنندهٔ تابع f است و داریم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-۰}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)$$

بدیهی است که اگر تابع g در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f'(a)=g(a)$ است، یعنی وقتی $g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، می‌توانیم فقط از عامل صفرشونده، مشتق بگیریم و آن را در بقیهٔ عبارت‌ها ضرب کنیم و در نهایت به جای x، مقدار a را قرار دهیم.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مثال: در تابع $y=(x^۲+۵x+۴)(\sqrt[۳]{x}-۱)$، حاصل $y'(-۱)$ را بیابید.

مقدار $x=-۱$، عبارت $x^۲+۵x+۴$ را صفر می‌کند، پس از این عبارت مشتق گرفته و در $(\sqrt[۳]{x}-۱)$ ضرب می‌کنیم تا مشتق تابع y به دست بیاید. (فقط در نقاطی که تابع در آن‌ها صفر می‌شود، این راه حل درست است.)

$$y'=(۲x+۵)(\sqrt[۳]{x}-۱) \Rightarrow y'(-۱)=۳(-۲)=-۶$$

نکات ۱ هرگاه عامل صفرشونده بیش از یکی باشد، مشتق در آن نقطه برابر با صفر می‌شود؛ مثلاً در $y=\underbrace{(x^۲-۵x)}_{(۱)}\underbrace{|x-۵|}_{(۲)}$، هر دو عبارت (۱) و (۲)، به ازای $x=۵$ صفر می‌شوند، پس $y'(۵)=۰$ است.

۲ نکتهٔ مشتق عامل صفرشونده، فقط وقتی استفاده می‌شود که عبارت‌ها در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند.

پاسخ تشریحی راه اول: **گام اول**: به ازای $x=۱$، $f(۱)=۰$ می‌شود، پس $x=۱$، عامل صفرکننده است. با توجه به این موضوع، ابتدا از فرمول دو برابر کمان استفاده می‌کنیم تا $f(x)$ را ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x)=\sin(\pi x).\cos(\frac{\pi x}{۲})=۲\sin(\frac{\pi}{۲}x).\cos(\frac{\pi}{۲}x).\cos(\frac{\pi}{۲}x)=۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)\cos^۲(\frac{\pi}{۲}x)$$

گام دوم: فقط از عامل صفرکنندهٔ $\cos^۲(\frac{\pi}{۲}x)$، دو بار مشتق می‌گیریم:

$$y=\cos^۲(\frac{\pi x}{۲}) \Rightarrow y'=(۲\cos(\frac{\pi x}{۲}))(-\frac{\pi}{۲}\sin(\frac{\pi x}{۲}))=-\pi\sin(\frac{\pi x}{۲})\cos(\frac{\pi x}{۲})=-\frac{\pi}{۲}\sin\pi x$$

$$\Rightarrow y''(x)=-\frac{\pi}{۲}\times\pi\cos(\pi x)=\frac{-\pi^۲}{۲}\cos(\pi x)$$

گام سوم: پس مشتق دوم تابع f، با فرض $x=۱$ به صورت زیر می‌شود:

$$f''(x)=\underbrace{۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)}_{\text{بقیهٔ عبارت}}\underbrace{(-\frac{\pi^۲}{۲}\cos(\pi x))}_{\substack{\text{مشتق دوم}\\ \text{عامل صفرشونده}}}=-\pi^۲\sin(\frac{\pi x}{۲})\cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow f''(۱)=-\pi^۲\times(۱)\times(-۱)=\pi^۲$$

راه دوم: **گام اول**: از فرمول $f=gh \Rightarrow f'=g'h+gh'$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\sin(\pi x)\cos(\frac{\pi}{۲}x) \Rightarrow f'(x)=\pi\cos(\pi x)\cdot\cos(\frac{\pi}{۲}x)+\sin(\pi x)(-\frac{\pi}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x))$$

فرمول‌های دو برابر کمان ↓

$$=\pi(۱-۲\sin^۲(\frac{\pi}{۲}x))\cos(\frac{\pi}{۲}x)-\frac{\pi}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x)(۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)\cos(\frac{\pi}{۲}x))$$

$$=\pi\cos(\frac{\pi}{۲}x)-۳\pi\sin^۲(\frac{\pi}{۲}x)\cos(\frac{\pi}{۲}x)$$

گام دوم: از رابطهٔ $f'(x)$ به‌دست‌آمده، دوباره مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=\pi(-\frac{\pi}{۲})\sin(\frac{\pi}{۲}x)-۳\pi(۲\sin(\frac{\pi}{۲}x).\frac{\pi}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}x).\cos(\frac{\pi}{۲}x)+\sin^۲(\frac{\pi}{۲}x)(-\frac{\pi}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x)))$$

$$=\frac{-\pi^۲}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x)-۳\pi^۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)\cos^۲(\frac{\pi}{۲}x)+\frac{۳\pi^۲}{۲}\sin^۳(\frac{\pi}{۲}x)$$

$$f''(۱)=\frac{-\pi^۲}{۲}+\frac{۳\pi^۲}{۲}=\frac{۲\pi^۲}{۲}=\pi^۲$$

گام سوم: به ازای $x=۱$ داریم:

به همان نتیجهٔ راه اول رسیدیم، اما محاسبات طولانی‌تر بود!!

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۴

اگر $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۲x^۲+۳x-۵$، به موازات کدام خط می‌توان بر نمودار تابع f، مماس رسم کرد؟

۱) $۳y+۴x=۵$ ۲) $y+۲x=۴$ ۳) $y=۳x-۲$ ۴) $y=-۴x+۵$

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره حدود تغییرات مشتق تابع f را پیدا کنید.

نکته شیب خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $x=a$، همان مشتق تابع f در این نقطه است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم تا بفهمیم وضعیت شیب خطوط مماس بر تابع f چگونه است:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۲x^۲+۳x-۵ \Rightarrow f'(x)=x^۲-۴x+۳$$

گام دوم: برای این‌که محدودهٔ تغییرات $f'(x)$ را به دست بیاوریم، از روش مربع کامل استفاده می‌کنیم، داریم:

$$f'(x)=x^۲-۴x+۳=(x-۲)^۲-۱$$

می‌دانیم که همواره $(x-۲)^۲ \geq ۰$ و در نتیجه $f'(x) \geq -۱$ است.

گام سوم: از $f'(x) \geq -۱$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که شیب خط مماس حداقل برابر با -۱ است و در نتیجه تنها گزینهٔ قابل قبول، ۳ است که شیب خط داده‌شده برابر با ۳ است.

تست و پاسخ ۵

امتداد مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول α، محور xها را در $A(-۴,۰)$ قطع می‌کند. مقدار α کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{-۱۱}{۴}$ ۴) $\frac{-۲۶}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره از فصل مشتق، تا سه سؤال هم ممکن است در کنکور مطرح شود. یکی فرمول‌ها، یکی مشتق‌پذیری و دیگری خط مماس.

پاسخ تشریحی **گام اول:** باید معادلهٔ خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ را به دست آوریم. مختصات این نقطه در تابع f صدق می‌کند، پس مختصات این نقطه به صورت $B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \sqrt{\alpha+۳}\end{matrix}\right.$ است.

گام دوم: برای این‌که شیب خط مماس را به دست آوریم، از $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۳} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}} \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha+۳}}$$

گام سوم: معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

$$y-y_B=f'(\alpha)(x-x_B) \Rightarrow y-\sqrt{\alpha+۳}=\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha+۳}}(x-\alpha)$$

گام چهارم: نقطهٔ $A(-۴,۰)$ روی این خط قرار دارد، پس در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$۰-\sqrt{\alpha+۳}=\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha+۳}}(-۴-\alpha) \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم.}} -۲(\alpha+۳)=(-۴-\alpha)$$

$$\Rightarrow ۲\alpha+۶=۴+\alpha \Rightarrow \alpha=-۲$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۶

اگر $f(x)=ax^3+3x^2+b$، به طوری که $y=\begin{cases} f(x) & x\geq 1 \\ xf'(x) & x<1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $b+2a$ چه عددی است؟

۱) -1 ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره تابع y را تشکیل دهید و شرط مشتق‌پذیری را در نقطهٔ مرزی بررسی کنید.

درس نامه مشتق‌پذیری در توابع چندضابطه‌ای

اگر تابع دوضابطه‌ای $y=\begin{cases} f(x) & x\geq a \\ g(x) & x<a \end{cases}$، در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، دو شرط باید برقرار باشد.

۱) پیوستگی در $x=a$

۲) برابری مشتق چپ و راست در $x=a$، یعنی:

$$\underbrace{f'(a)}_{y'_+(a)}=\underbrace{g'(a)}_{y'_-(a)}$$

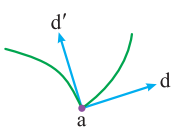
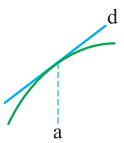
نکته دقت کنید که ارتباط پیوستگی و مشتق‌پذیری، به صورت ساختمان دو طبقهٔ مقابل است:

مشتق در a
پیوستگی در a

یعنی اگر f در a مشتق‌پذیر باشد (طبقهٔ دوم داشته باشد)، در a پیوسته است (طبقهٔ اول هم دارد).

نتیجه اگر f در a پیوسته نباشد (طبقهٔ اول را نداشته باشد)، مشتق هم ندارد؛ ولی اگر پیوسته باشد، ممکن است در a مشتق داشته باشد یا نه.

برای فهم بیشتر، به شکل‌های زیر توجه کنید.

		
در $x=a$ پیوسته است، اما مشتق چپ و راست آن در $x=a$ برابر نیست؛ پس در این نقطه مشتق موجود نیست.	در $x=a$ پیوسته است و مشتق چپ و راست آن برابر است، پس $f'(a)$ وجود دارد که برابر با شیب خط d است.	در $x=a$ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق موجود نیست.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا مشتق تابع f را می‌یابیم تا تابع y را تشکیل دهیم:

$$f(x)=ax^3+3x^2+b \Rightarrow f'(x)=3ax^2+6x$$

گام دوم: تابع y را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y=\begin{cases} ax^3+3x^2+b & x\geq 1 \\ 3ax^3+6x^2 & x<1 \end{cases}$$

گام سوم: شرط آن‌که تابع y در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، این است که در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد. برای این منظور، شرط اول این است که باید تابع y در $x=1$، پیوسته باشد. شرط پیوستگی را می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^-} y=y(1) \Rightarrow a+3+b=3a+6 \Rightarrow 2a-b=-3 \quad (*)$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام چهارم: شرط دوم هم این است که مشتق چپ و راست در $x=1$ باید با هم برابر باشند. از y، مشتق می‌گیریم:

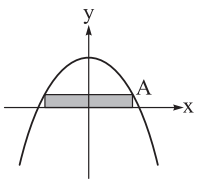
$$y'=\begin{cases}3ax^2+6x & x>1\\ 9ax^2+12x & x<1\end{cases}$$

$$y'_+(1)=y'_-(1) \Rightarrow 3a+6=9a+12 \Rightarrow 6a=-6 \Rightarrow a=-1 \xrightarrow{(*)} b=1$$

گام پنجم: مقدار $b+2a=1-2=-1$ می‌شود.

تست و پاسخ ۷

در شکل زیر، نقطهٔ A روی سهمی $y=6-x^2$ در حال حرکت است، به طوری که مساحت مستطیل تابعی از طول نقطهٔ A است. وقتی طول نقطهٔ A برابر ۲ شود، آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت مستطیل چه عددی است؟



مشتق مساحت مستطیل

۱) -4
۲) 4
۳) 12
۴) -12

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره مساحت مستطیل را با توجه به مختصات نقطهٔ A به دست آورید.

درس‌نامه ●● آهنگ تغییر لحظه‌ای و آهنگ تغییر متوسط

۱) آهنگ تغییر متوسط، نسبت تغییرات y به تغییرات x است.

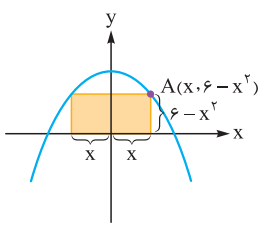
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

۲) آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=a$، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا مساحت مستطیل را برحسب مختصات نقطهٔ A که روی سهمی $y=6-x^2$ قرار دارد، می‌نویسیم:

گام دوم: با توجه به طول‌های مشخص‌شده روی شکل، مساحت مستطیل برابر است با:



$$S_{\text{مستطیل}}=\text{طول}\times\text{عرض}=\left|2x(6-x^2)\right|=\left|12x-2x^3\right|$$

گام سوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت مستطیل را زمانی که $x=2$ شد، می‌خواهیم؛ پس از S مشتق می‌گیریم و به جای x، مقدار ۲ را قرار می‌دهیم:

$$S(2)>0 \Rightarrow S(x)=12x-2x^3 \Rightarrow S'(x)=12-6x^2 \Rightarrow S'(2)=12-6\times 4=-12$$

تست و پاسخ ۸

آهنگ تغییر متوسط $f(x)=\sin^2\pi x$ در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای f در دو نقطه با طول‌های α_1 و α_2، در همین بازه، برابر است. مقدار $\alpha_1+\alpha_2$ کدام است؟

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — f'

۱) $\frac{1}{8}$
۲) 1
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره از آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای معمولاً هر چند سال یک بار در کنکور سؤال می‌آید. این سؤال نمونهٔ خوبی از این مبحث است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ پیدا می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}-\sin^2 0}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

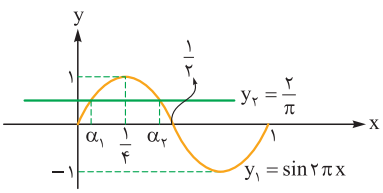
گام دوم: برای پیداکردن آهنگ تغییر لحظه‌ای، از $f(x)$، مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sin^2\pi x \Rightarrow f'(x)=2\pi\sin(\pi x).\cos(\pi x)=\pi\sin(2\pi x)$$

گام سوم: آهنگ تغییر متوسط به‌دست‌آمده، با آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقاط با طول‌های α_1 و α_2 برابر است؛ یعنی:

$$\pi\sin 2\pi x = 2 \Rightarrow \sin 2\pi x = \frac{2}{\pi}$$

گام چهارم: برای این‌که طول نقاط α_1 و α_2 را در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ بیابیم، از رسم نمودار دو تابع $y_1=\sin 2\pi x$ و $y_2=\frac{2}{\pi}$ استفاده می‌کنیم. تابع y_1، یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{|2\pi|}=1$ است:



از شکل مشخص است که خط $x=\frac{1}{4}$ در وسط دو نقطهٔ α_2 و α_1 قرار دارد، بنابراین:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۹

هرگاه $f(x)=\frac{(a-1)x-9}{x-a+1}$ در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، جمع مقادیر به‌دست‌آمده برای عدد صحیح a چه عددی است؟

$f'>0$

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) صفر

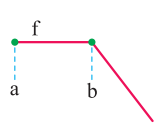
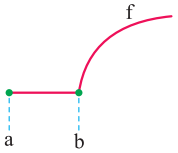
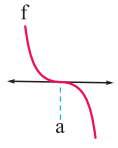
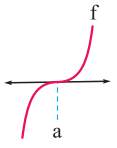
پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره کاربرد مشتق شامل موضوعات: ۱) یکنوایی تابع ۲) نقاط بحرانی ۳) نقاط اکسترمم نسبی ۴) نقاط اکسترمم مطلق ۵) بهینه‌سازی ۶) رسم نمودار است. از این‌ها معمولاً دو سؤال می‌آید. مطالب این فصل پیوستگی زیادی به یکدیگر دارند و برای حل هر یک تست، تقریباً باید روی کل نکات، مسلط باشید.

درس‌نامه

وضعیت تابع f در یک بازه	وضعیت تابع f'
اکیداً صعودی	$f'>0$ (ممکن است در نقطه‌ای مماس بر محور xها هم باشد.)
اکیداً نزولی	$f'<0$ (ممکن است در نقطه‌ای مماس بر محور xها هم باشد.)

نکته حواستان باشد که در توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، f' نمی‌تواند در یک بازه تماماً صفر باشد، ولی می‌تواند در تعدادی متناهی نقطه صفر شود؛ اگرچه در توابع صعودی و نزولی، f' می‌تواند در یک بازه، تماماً صفر شود:

			
f نزولی است. f' در بازهٔ (a,b) صفر است. در نقاط دیگر $f'<0$. تابع f در $x=a$ و $x=b$ مشتق‌پذیر نیست.	f صعودی است. f' در بازهٔ (a,b) صفر است. در نقاط دیگر $f'>0$. تابع f در $x=a$ و $x=b$ مشتق‌پذیر نیست.	f اکیداً نزولی است. f' فقط در $x=a$ صفر است. در نقاط دیگر $f'<0$.	f اکیداً صعودی است. f' فقط در $x=a$ صفر است. در نقاط دیگر $f'>0$.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای تابع اکیداً صعودی، رابطهٔ $f'(x)\geq 0$ را داریم (دقت کنید که در تعداد نقاط محدودی می‌تواند مشتق آن صفر شود)؛ پس ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{(a-1)x-9}{x-a+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(a-1)(-a+1)-(-9)}{(x-a+1)^2}=\frac{-(a-1)^2+9}{(x-a+1)^2}$$

گام دوم: رابطهٔ $f'(x)\geq 0$ باید برقرار باشد، پس داریم:

$$\frac{-(a-1)^2+9}{(x-a+1)^2}\geq 0$$

اولاً مخرج نامنفی است، پس برای این‌که نامعادله برقرار باشد، باید صورت نامنفی باشد:

$$-(a-1)^2+9\geq 0 \Rightarrow (a-1)^2\leq 9 \Rightarrow |a-1|\leq 3 \Rightarrow -3\leq a-1\leq 3 \Rightarrow -2\leq a\leq 4 \quad (I)$$

ثانیاً، ریشهٔ مخرج که برابر با $x=a-1$ است، نباید در بازهٔ $(1,+\infty)$ قرار بگیرد. پس:

$$a-1\leq 1 \Rightarrow a\leq 2 \quad (II)$$

گام سوم: از طرفی تابع f نباید یک تابع ثابت باشد، زیرا مشتق آن در یک بازه برابر با صفر می‌شود و تابع اکیداً صعودی نمی‌شود؛ پس شرط زیر را نیز در تابع هموگرافیک f باید در نظر بگیریم:

$$AD-BC\neq 0 \Rightarrow (a-1)(-a+1)\neq -9 \Rightarrow (a-1)^2\neq 9 \Rightarrow |a-1|\neq 3 \Rightarrow \begin{cases} a-1\neq 3 \\ , \\ a-1\neq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\neq 4 \\ , \\ a\neq -2 \end{cases} \quad (III)$$

گام چهارم: از اشتراک محدودیت‌های به‌دست‌آمده برای a، داریم:

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (III),(II),(I)}} -2<a\leq 2$$

پس مقادیر صحیح برای a می‌توانند $-1, 0, 1, 2$ باشد که مجموع آن‌ها برابر با ۲ است.

تست و پاسخ ۱۰

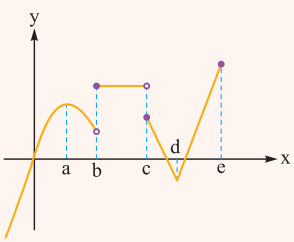
بیشترین مقدار $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه **به دست آوردن اکسترمم مطلق تابع پیوسته در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$**

۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم. ۲) مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. ۳) بزرگ‌ترین مقدار به‌دست‌آمده، ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق تابع در بازهٔ مورد نظر خواهد بود.



نکته تفاوت اکسترمم مطلق و اکسترمم نسبی: مقدار اکسترمم نسبی تنها در یک همسایگی بررسی می‌شود، در حالی که برای پیداکردن اکسترمم مطلق باید مقدار تابع در یک نقطه را با مقدار تابع در کل دامنه مقایسه کنیم.

در جدول زیر، وضعیت نقاط در نمودار تابع $f(x)$ داده‌شده، نوشته شده است.

طول نقطه	a	b	c	d	e
Max مطلق	×	×	×	×	✓
Min مطلق	×	×	×	×	×
Max نسبی	✓	✓	×	×	×
Min نسبی	×	×	×	✓	×
نقطهٔ بحرانی	✓ ↓ $f'=0$	✓ ↓ f' موجود نیست. (ناپیوستگی)	✓ ↓ f' موجود نیست. (ناپیوستگی)	✓ ↓ f' موجود نیست. (گوشه)	✓ ↓ (نقطهٔ انتهای بازه)

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای این‌که بیشترین مقدار تابع f را بیابیم، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم. از تابع f، مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} \sqrt[3]{x}=2\sqrt[3]{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم.}} x=8x^2 \xrightarrow{x\neq 0} x=\frac{1}{8}$$

دقت کنید که به ازای $x=0$، f' بی‌نهایت می‌شود و مشتق در این نقطه وجود ندارد، پس $x=0$ هم نقطهٔ بحرانی تابع است.

گام دوم: تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد. یکی $x=0$ که در آن f'، بی‌نهایت می‌شود و موجود نیست و یکی $x=\frac{1}{8}$ که در آن f'، برابر با صفر می‌شود.

جدول تعیین علامت را برای تابع f' رسم می‌کنیم:

برای این‌که وضعیت تابع f را در کل $\mathbb{R}$ ببینیم، جدول تعیین علامت روبه‌رو را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت، تابع f در نقطهٔ $x=\frac{1}{8}$، مقدار ماکزیمم خود را دارد، پس بیشترین مقدار این تابع برابر است با:

$$f(\frac{1}{8})=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\sqrt[3]{(\frac{1}{8})^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

تست و پاسخ ۱۱

تابع $f(x)=2\sin x-\cos^2 x$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ تعریف شده است. در کدام بازه، تابع صعودی اکید است و تقعر رو به پایین دارد؟

۱) $[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}]$ ۲) $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ ۳) $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$ ۴) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه ●● تعیین یکنوایی و تقعر

۱) وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را از تعیین علامت f' به دست می‌آوریم.

۲) وضعیت تقعر تابع را از تعیین علامت f'' به دست می‌آوریم:

مثال نموداری تابع f				
f'	$+$ (صعودی)	$+$ (صعودی)	$-$ (نزولی)	$-$ (نزولی)
f''	$+$ (تقعر رو به بالا) (خطوط مماس زیر منحنی)	$-$ (تقعر رو به پایین) (خطوط مماس بالای منحنی)	$+$ (تقعر رو به بالا)	$-$ (تقعر رو به پایین)

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع f در بازه‌ای صعودی اکید است که در آن $f'(x)\geq 0$ باشد، پس مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2\sin x-\cos^2 x \Rightarrow f'(x)=2\cos x-(-\sin x)\times(2\cos x)$$

$$=2\cos x(1+\sin x)\geq 0$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

از آن‌جایی که همواره $-۱ \le \sin x + ۱ \le ۲$ است، $f'(x)$ زمانی نامنفی می‌شود که $\cos x \ge ۰$ باشد.

چون تابع f در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ تعریف شده است، برای این‌که این شرط برقرار باشد، باید $۰ < x \le \frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲} \le x < ۲\pi$ باشد.

گام دوم: برای این‌که تقعر تابع رو به پایین باشد، باید مشتق دوم تابع f، نامثبت باشد، داریم:

$$f''(x) = ۲(-\sin x(۱+\sin x) + \cos x(\cos x)) = ۲(\cos^۲ x - \sin^۲ x - \sin x) =$$

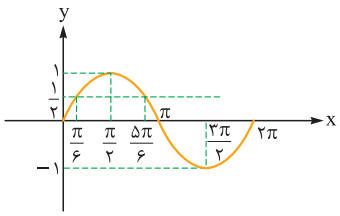
$$۲(۱ - \sin^۲ x - \sin^۲ x - \sin x) = ۲(۱ - \sin x - ۲\sin^۲ x) = -۲(۲\sin^۲ x + \sin x - ۱) = -۲(۲\sin x - ۱)(\sin x + ۱) \le ۰$$

همواره $-۱ \le \sin x + ۱ \le ۲$ است؛ پس باید شرط $-۲(۲\sin x - ۱) \le ۰$ برقرار باشد.

داریم:

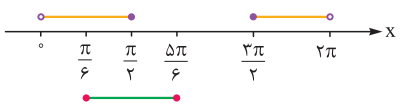
$$۲\sin x - ۱ \ge ۰ \Rightarrow \sin x \ge \frac{۱}{۲}$$

از نمودار تابع سینوس کمک می‌گیریم:



با توجه به نمودار، $\frac{\pi}{۶} \le x \le \frac{۵\pi}{۶}$ به دست می‌آید.

گام سوم: از اشتراک بازه‌های به‌دست‌آمده در گام اول و دوم برای x داریم:



$$\Rightarrow x \in [\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}]$$

تست و پاسخ ۱۲

هرگاه $A(۱,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = ax^۳ + b\sqrt{x}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه ●● به دست آوردن نقاط اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر

- **تعریف max نسبی:** تابع f در $x = a$، $\max$ نسبی دارد، هرگاه عرض آن از نقاط همسایگی‌اش بیشتر یا (مساوی) باشد.
- **تعریف min نسبی:** تابع f در $x = a$، $\min$ نسبی دارد، هرگاه عرض آن از نقاط همسایگی‌اش کم‌تر (یا مساوی) باشد.
- f' را تعیین علامت می‌کنیم. اگر در $x = a$، مشتق تغییر علامت بدهد، $x = a$ اکسترمم نسبی است و در غیر این صورت، خیر.

x		a	
f'	+	۰	−
f	↗	max نسبی	↘

x		a	
f'	−	۰	+
f	↘	min نسبی	↗

برخی نکات در مورد اکسترمم نسبی:

۱) نقاط ابتدا یا انتهای بازه یا دامنهٔ تابع، اکسترمم نسبی به حساب نمی‌آیند، چون تابع در همسایگی آن‌ها تعریف نشده است.

۲) تابع در نقاط اکسترمم نسبی ممکن است مشتق داشته باشد یا نداشته باشد، اما اگر مشتق داشته باشد، حتماً صفر است.

نتیجه این‌که تمام نقاط اکسترمم نسبی، بحرانی هستند.

نکته ویژگی مهم نقاط اکسترمم نسبی: اگر تابع f در نقطهٔ (α, β) مشتق‌پذیر بوده و دارای اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه:

۱) $f(\alpha) = \beta$

۲) $f'(\alpha) = ۰$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که نقطهٔ $A(1,1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، پس مختصات آن در تابع f صدق می‌کند؛ یعنی $f(1)=1$ می‌شود:

$$f(1)=a+b=1 \quad (I)$$

گام دوم: در این نقطه، مشتق تابع برابر با صفر است (چون تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است)، یعنی: $f'(1)=0$

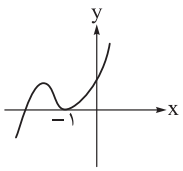
$$f(x)=ax^3+b\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=3ax^2+\frac{b}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} 3a+\frac{b}{2}=0 \quad (II)$$

گام سوم: دستگاه حاصل از (I) و (II) را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+\frac{b}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=\frac{6}{5} \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۳

بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+\frac{4}{3}$ در شکل زیر رسم شده است. کدام خط افقی نمودار تابع را در ۲ نقطه قطع می‌کند؟



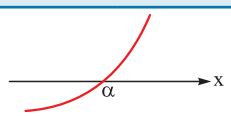
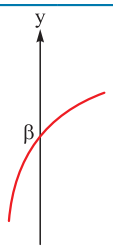
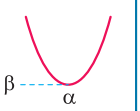
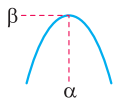
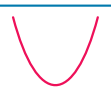
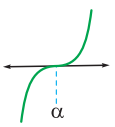
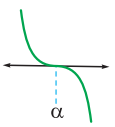
۱) $y=\frac{5}{3}$
۲) $y=\frac{4}{3}$
۳) $y=2$
۴) $y=1$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره سؤال نمودار در فصل کاربرد مشتق، ترکیبی از تمام موضوعات این فصل است. اگر در حل آن‌ها به مشکل برخوردید، مقداری روی سایر موضوعات مطرح‌شده در فصل کاربرد مشتق کار کنید.

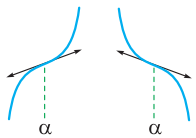
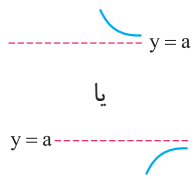
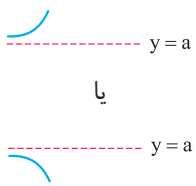
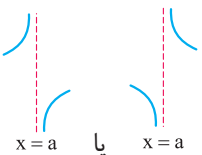
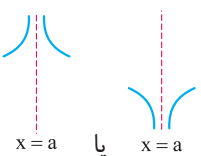
خودت حل کنی بهتره نقطهٔ $(-1,0)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

درس‌نامه اطلاعات به‌دست‌آمده از روی نمودار f

نمودار f	f	f'	f''
	$f(\alpha)=0$	$f'(\alpha)>0$ (شیب مماس مثبت)	$f''(\alpha)>0$ (تقعر رو به بالا)
	$f(0)=\beta$	$f'(0)>0$ (شیب مماس مثبت)	$f''(0)<0$ (تقعر رو به پایین)
 	$f(\alpha)=\beta$	$f'(\alpha)=0$ (مماس افقی)	 $f''(\alpha)>0$ $f''(\alpha)<0$
 	—	$f'(\alpha)=0$ (مماس در عطف افقی)	عطف ↑ $f''(\alpha)=0$ (مشتق دوم در α تغییر علامت می‌دهد.)

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

نمودار f	f	f′	f″
	—	(شیب مماس در عطف غیرصفر است.)	$f''(\alpha)=0$ (α مشتق دوم در تغییر علامت می‌دهد.)
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$	—	—
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$	—	—
	در $x=a$، تابع f تعریف نشده است.	حد f' در $x=a$ از یک طرف $+\infty$ و از طرف دیگر $-\infty$ است.	—
	در $x=a$، تابع f تعریف نشده است.	حد f' در $x=a$ از دو طرف $+\infty$ یا $-\infty$ است.	—

پاسخ تشریحی **گام اول:** از نمودار متوجه می‌شویم که نقطهٔ $(0,-1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است؛ پس دو شرط داریم:

۱) $f(-1)=0$

۲) $f'(-1)=0$ (مشتق در این نقطه برابر با صفر است.)

گام دوم:

۱) $f(-1)=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}+a-b+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow a-b=-1$

۲) $f'(-1)=0 \Rightarrow f'(x)=x^2+2ax+b \Rightarrow 1-2a+b=0 \Rightarrow -2a+b=-1$

گام سوم: از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a-b=-1 \\ -2a+b=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} -a=-2 \Rightarrow a=2, b=3$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

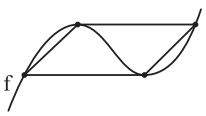
گام چهارم: پس $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳+۲x^۲+۳x+\frac{۴}{۳}$ می‌شود. از نمودار مشخص است که خطوط افقی که از نقاط اکسترمم تابع عبور می‌کنند، تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس نقطهٔ اکسترمم دیگر تابع f را می‌یابیم:

$$f(x)=x^۲+۴x+۳=(x+۱)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۰ \\ x=-۳ \Rightarrow f(-۳)=\frac{۱}{۳}(-۲۷)+۲(۹)-۹+\frac{۴}{۳}=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

پس خطوط $y=\frac{۴}{۳}$ و $y=۰$، نمودار تابع f را در دو نقطه قطع می‌کنند.

تست و پاسخ ۱۴

نمودار $f(x)=x^۳-۳x^۲+۲$ در شکل زیر آورده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو رأس آن نقاط اکسترمم تابع هستند، چه عددی است؟ (دو ضلع از متوازی‌الاضلاع، موازی محور xهاست.)



۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۱۰

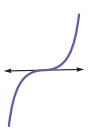
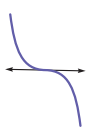
پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره از کاربرد مشتق، سؤال نمودار، پای ثابت سؤالات کنکور است. در بین نمودارها، نمودار تابع‌های درجه‌سوم و هموگرافیک مهم‌تر از بقیه هستند! این سؤال یک سؤال ترکیبی خوب از مبحث کاربرد مشتق و هندسهٔ تحلیلی است.

خودت حل کنی بهتره از f مشتق بگیرید و نقاط اکسترمم را پیدا کنید.

درس نامه

نمودار تابع‌های درجه‌سوم $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$

	$a>۰$	$a<۰$	نکات
$\Delta_{f'}>۰$			۱) اگر مشتق اول دو ریشه داشته باشد، تابع دو اکسترمم نسبی دارد. ۲) نقطهٔ عطف، وسط دو اکسترمم قرار دارد. ۳) اگر $a>۰$، اول max و بعد min اتفاق می‌افتد (اگر $a<۰$ بالعکس).
$\Delta_{f'}=۰$			۱) اگر مشتق اول ریشهٔ مضاعف داشته باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد. ۲) خط مماس در نقطهٔ عطف افقی است. ۳) اگر $a>۰$، اول تقعر رو به پایین و بعد رو به بالاست (اگر $a<۰$ بالعکس).
$\Delta_{f'}<۰$			۱) اگر مشتق اول ریشه نداشته باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد. ۲) خط مماس در نقطهٔ عطف غیرافقی است. ۳) اگر $a>۰$، اول تقعر رو به پایین و بعد رو به بالاست (اگر $a<۰$ بالعکس).

نکات

۱) تابع درجه‌سوم، همواره یک نقطهٔ عطف دارد که ریشهٔ $f''(x)$ است.

۲) نقطهٔ عطف از رابطهٔ $x_۰=-\frac{b}{۳a}$ به دست می‌آید.

۳) اگر $\Delta_{f'}\leq ۰$ باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

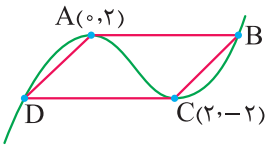
پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا نقاط اکسترمم تابع f را پیدا می‌کنیم. با مشتق‌گیری از تابع f داریم:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۲ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۶x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow f(۰)=۲ \\ x=۲ \Rightarrow f(۲)=۸-۳\times۴+۲=-۲ \end{cases}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام دوم: نقاط اکسترمم را روی شکل مشخص می‌کنیم:



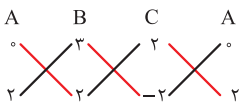
عرض نقطهٔ B برابر با عرض نقطهٔ A است، پس:

$$B: f(x)=۲ \Rightarrow x^۳-۳x^۲+۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۳ \Rightarrow B(۳,۲) \end{cases}$$

نیازی به محاسبهٔ مختصات نقطهٔ D نیست، گام بعدی را ببینید.

گام سوم: مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD، ۲ برابر مساحت مثلث ABC است.

با توجه به فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک مختصات رأس‌ها داریم:

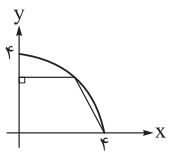


$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}|(۰-۶+۴)-(۶+۴)|=\frac{۱}{۲}|-۲-۱۰|=۶$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=۲S_{\triangle ABC}=۱۲$$

تست و پاسخ ۱۵

ذوزنقه‌ای مطابق شکل درون ربع دایره به شعاع $R=۴$ محاط شده است. بیشترین مساحت ذوزنقه چه عددی است؟

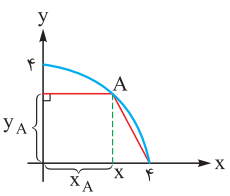


۱) $۸\sqrt{۳}$
۲) $۱۲\sqrt{۳}$
۳) $۶\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره کتاب درسی حسابان در موضوع بهینه‌سازی، تمرین‌های زیادی ندارد، اما در عوض کتاب ریاضی (۳) تجربی یک درس را به این موضوع اختصاص داده است. خوب است نگاهی به تمرین‌های آن کتاب داشته باشید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در شکل مقابل، باید مختصات نقطهٔ A را پیدا کنیم. معادلهٔ دایرهٔ داده‌شده، به صورت $x^۲+y^۲=۴^۲$ است، پس:



نقطهٔ A روی دایره است، پس مختصات آن به صورت $A(\underbrace{x}_{x_A}, \underbrace{\sqrt{۱۶-x^۲}}_{y_A})$ می‌شود.

گام دوم: با توجه به شکل، مساحت ذوزنقه را می‌نویسیم:

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{\text{ارتفاع}}{۲}(\text{مجموع دو قاعده})=\frac{y_A}{۲}(x_A+۴)=\frac{\sqrt{۱۶-x^۲}}{۲}(x+۴)$$

گام سوم: برای این‌که بیشترین مقدار مساحت ذوزنقه را پیدا کنیم، از S مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'=\frac{۱}{۲}\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۶-x^۲}}\times(x+۴)+\sqrt{۱۶-x^۲}\times ۱\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{-x^۲-۴x+۱۶-x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}\right)=\frac{-x^۲-۲x+۸}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۸=۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ x=۲ \end{cases}$$

با توجه به این‌که x مثبت است، $x=۲$ قابل قبول است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام چهارم: با جای‌گذاری مقدار x به‌دست‌آمده در فرمول S، بیشترین مقدار مساحت را به دست می‌آوریم:

$$S_{max} = \frac{\sqrt{۱۶-۴}}{۲}(۲+۴) = ۳\sqrt{۱۲} = ۶\sqrt{۳}$$

تست و پاسخ ۱۶

هرگاه تابع درجه‌سوم $y=f(x)$ علاوه بر مبدأ مختصات در نقطهٔ $A(۲,۴)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقدار $f'(۴)$ چه عددی است؟

۱) -۱۲
۲) -۱۶
۳) -۲۴
۴) -۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی راه اول:

گام اول: تابع درجه‌سوم را به صورت $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ در نظر می‌گیریم:

گام دوم: این تابع در نقطهٔ $(۰,۰)$ اکسترمم نسبی دارد، پس اولاً از این نقطه عبور می‌کند، در نتیجه $d=۰$ و دوماً مشتق تابع در این نقطه صفر است؛ یعنی:

$$f'(x)=۳ax^۲+۲bx+c \Rightarrow f'(۰)=c=۰$$

گام سوم: پس تابع f به صورت $f(x)=ax^۳+bx^۲$ می‌شود.

گام چهارم: نقطهٔ $A(۲,۴)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است، پس:

$$\begin{cases} ۱)\ f(۲)=۴ \Rightarrow ۸a+۴b=۴ \\ ۲)\ f'(۲)=۰ \Rightarrow ۱۲a+۴b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۳ \end{cases}$$

پس $f(x)=-x^۳+۳x^۲$ می‌شود.

گام پنجم: مقدار $f'(۴)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=-۳x^۲+۶x$$
$$\Rightarrow f'(۴)=-۳\times۱۶+۶\times۴=-۴۸+۲۴=-۲۴$$

راه دوم:

گام اول: چون نقطهٔ $(۰,۰)$، مختصات اکسترمم نسبی تابع درجه‌سوم $y=f(x)$ است، پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=ax^۲(x-b)$ است.

گام دوم: نقطهٔ $A(۲,۴)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی است، پس:

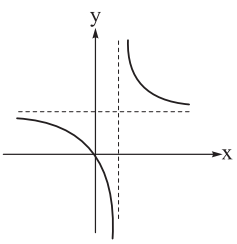
$$۱)\ f(۲)=۴ \Rightarrow ۴a(۲-b)=۴ \Rightarrow a(۲-b)=۱$$
$$۲)\ f'(۲)=۰ \Rightarrow f'(x)=a(۳x^۲-۲bx) \Rightarrow f'(۲)=a(۱۲-۴b)=۰ \Rightarrow b=۳$$

در نتیجهٔ $a=-۱$ می‌شود، پس $f(x)=-(x^۳-۳x^۲)=۳x^۲-x^۳$ و $f'(x)=۶x-۳x^۲$ می‌شود.

گام سوم: مقدار $f'(۴)=۲۴-۴۸=-۲۴$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۷

نمودار تابع $f(x)=\frac{۴x^۲+ax+b}{x^۲+cx+۹}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f(۶)$ چه عددی است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

خودت حل کنی بهتره $f(x=0)=0$ و تابع f فقط در یک نقطه تعریف نشده است، پس مخرج ریشهٔ مضاعف دارد.

درس نامه

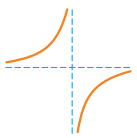
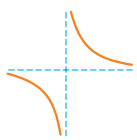
تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0, c\neq 0)$ در یک نگاه:

۱) $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

۲) تابع یک مجانب قائم دارد که ریشهٔ مخرج است: $cx+d=0 \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$

۳) تابع یک مجانب افقی دارد که نسبت ضرایب x صورت به مخرج است: $y=\frac{a}{c}$

۴) نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

شرط	نمودار	وضعیت یکنواختی	وضعیت تقعر (نقطهٔ عطف ندارد.)
$ad-bc>0$		در هر شاخه صعودی	ابتدا رو به بالا و بعد رو به پایین
$ad-bc<0$		در هر شاخه نزولی	ابتدا رو به پایین و بعد رو به بالا

۵) $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ (برای وارون جای d و a را عوض کرده و آن‌ها را قرینه می‌کنیم.)

۶) اگر $c=0$، تابع هموگرافیک نبوده و تبدیل به تابع خطی می‌شود.

۷) اگر $ad-bc=0$ باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع تبدیل به تابع ثابت می‌گردد.

۸) اگر بازه‌ای شامل مجانب قائم یک تابع هموگرافیک باشد، تابع در آن بازه، غیریکنوا است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از شکل مشخص است که نمودار تابع از نقطهٔ $(0,0)$ عبور می‌کند. داریم:

$$f(0)=\frac{b}{9}=0 \Rightarrow b=0$$

پس $f(x)=\frac{4x^2+ax}{x^2+cx+9}$ است.

گام دوم: تابع f فقط در یک نقطه تعریف نشده است (آن‌جایی که مجانب قائم دارد)؛ پس مخرج باید دارای یک ریشه باشد و این یعنی $\Delta=0$ است:

$$x^2+cx+9=0 \Rightarrow \Delta=c^2-36=0 \Rightarrow \begin{cases} c=6 \\ \text{یا} \\ c=-6 \end{cases}$$

گام سوم: از طرفی مجانب قائم این تابع، عددی مثبت است، پس مقدار $c=-6$ قابل قبول است که به ازای آن $x=3$، مجانب قائم تابع (ریشهٔ مضاعف مخرج) می‌شود.

گام چهارم: تا به این‌جا $f(x)=\frac{4x(x+\frac{a}{4})}{(x-3)^2}$ می‌شود. می‌بینیم که تابع f ریشهٔ دیگری به‌جز $x=0$ ندارد، پس باید $x+\frac{a}{4}$ برابر با $x-3$ باشد تا عامل $x-3$ از صورت و مخرج حذف شود:

$$\frac{a}{4}=-3 \Rightarrow a=-12 \Rightarrow f(x)=\frac{4x(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{4x}{x-3}$$

گام پنجم: در نتیجه مقدار $f(6)$ برابر با $f(6)=\frac{4\times 6}{6-3}=\frac{24}{3}=8$ می‌شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۱۸

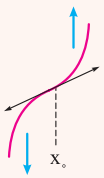
اگر نقطهٔ $A(۲,-۱۶)$، نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx$ باشد، حداقل مقدار تابع چه عددی است؟

۱) -۹۰
۲) -۲۷
۳) -۸۱
۴) -۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره در نقطهٔ عطف تابع، $f''(x)=۰$ است.

درس نامه نقطهٔ عطف



نقطهٔ $x=x_۰$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه:

۱) f در $x_۰$ پیوسته باشد.

۲) جهت تقعر تغییر کند (علامت f'' تغییر کند).

۳) خط مماس واحد داشته باشد (نقطه ناپیوسته یا گوشه نباشد، ولی مماس قائم می‌تواند داشته باشد).

روش تعیین نقاط عطف در تابع‌هایی که مشتق دوم دارند

۱) $f''(x)$ را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

۲) جواب‌های $f''(x)=۰$ را به دست آورده و f'' را تعیین علامت می‌کنیم.

۳) اگر f'' در ریشه‌ای تغییر علامت بدهد، آن ریشه نقطهٔ عطف است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون نقطهٔ $A(۲,-۱۶)$، نقطهٔ عطف تابع است، دو شرط زیر را داریم:

۱) $f(۲)=-۱۶$

۲) $f''(۲)=۰$

گام دوم: از (۱) داریم:

$$f(۲)=۱۶+۸a+۲b=-۱۶ \Rightarrow ۴a+b=-۱۶$$

گام سوم: مشتق دوم تابع f را پیدا می‌کنیم و از (۲) استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=x^۴+ax^۳+bx \Rightarrow f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+b \Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲+۶ax$$

$$f''(۲)=۴۸+۱۲a=۰ \Rightarrow a=-۴$$

گام چهارم: از گام دوم، مقدار $b=۰$ به دست می‌آید، پس $f(x)=x^۴-۴x^۳$ است.

گام پنجم: برای پیداکردن حداقل مقدار تابع، نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم و در تابع f جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲=۰ \Rightarrow ۴x^۲(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow f(۰)=۰ \\ x=۳ \Rightarrow f(۳)=۸۱-۴\times ۲۷=-۲۷ \end{cases}$$

پس حداقل مقدار تابع برابر با $f(۳)=-۲۷$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۴۳ تا ۸۴

تست و پاسخ ۱۹

گراف P_7 چند مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمالِ چهارعضوی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

- **مجموعه‌های احاطه‌گر:** زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را یک مجموعهٔ احاطه‌گر می‌گوییم هرگاه هر رأسی از گراف که در D نباشد، دست‌کم با یکی از رأس‌های عضو D مجاور باشد.
- **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم:** در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌نامیم.
- **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال:** مجموعهٔ احاطه‌گری که با حذف هر کدام از عضوهایش دیگر احاطه‌گر نباشد را یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.
- **گراف P_n:** گرافی که فقط از یک مسیر nرأسی تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می‌دهیم:

نکات

۱) در گراف‌هایی به شکل P_n، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر $\left[\frac{n}{2}\right]$ عضو دارد.

۲) اگر n فرد باشد، گراف P_n فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با $\left[\frac{n}{2}\right]$ عضو دارد.

۳) اگر $n = 3k$ باشد، آن‌گاه گراف P_n تنها یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد.

پاسخ تشریحی حداکثر تعداد اعضای یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای P_7 دارای $\left[\frac{7}{2}\right] = 4$ عضو است، حالا چون ۷ فرد است، P_7 فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با $\left[\frac{7}{2}\right] = 4$ عضو دارد:

تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال چهارعضوی $\{a, c, e, g\}$:

تست و پاسخ ۲۰

در گراف G از مرتبهٔ ۹، $\gamma(G) = 2$ است. در این گراف q_{max} (حداکثر اندازه) کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه به تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، عدد احاطه‌گری می‌گوییم و با γ نمایش می‌دهیم.

نکات

۱) اگر در گراف G، $\gamma = 1$ باشد، $\Delta = P - 1$ است.

۲) اگر در گراف G، $\gamma = 2$ باشد، $\Delta \leq P - 2$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در گراف G، $\gamma(G) = 2$ است؛ پس $\Delta \leq P - 2 = 9 - 2 = 7$ می‌شود.

گام دوم: برای این‌که اندازهٔ گراف حداکثر باشد، باید سعی کنیم درجهٔ رئوس را تا حد امکان بزرگ در نظر بگیریم. در این گراف ۹ رأس داریم، اما نمی‌توانیم همهٔ رئوس را از درجهٔ ۷ فرض کنیم، چون در این صورت تعداد رئوس فرد، *فردتا* می‌شود، پس درجهٔ یکی از رئوس را برابر ۶ در نظر می‌گیریم: *(یادتون که هست* $q = \frac{\text{جمع درجهٔ رئوس}}{2}$ *؟!)*

$$\underbrace{7,7,7,7,7,7,7,7}_{\text{۸تا}},6 \Rightarrow q_{max} = \frac{7\times 8 + 6}{2} = \frac{62}{2} = 31$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۲۱

مجموع عددهای احاطه‌گری گراف‌های زیر کدام است؟

(۱) (۲) (۳) (۴)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۷

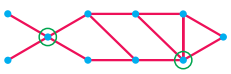
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه کران پایین عدد احاطه‌گری

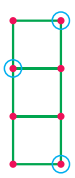
در هر گراف p رأسی داریم: $\gamma \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$

پاسخ تشریحی **گام اول:** عدد احاطه‌گری هر گراف را به دست می‌آوریم:

- در (۱)، $p=10$ و $\Delta=4$ است؛ پس $\gamma \geq \left\lceil \frac{10}{5} \right\rceil = 2$ می‌شود. حالا با انتخاب دو رأس مشخص‌شده این گراف احاطه می‌شود؛ پس $\gamma = 2$ است:



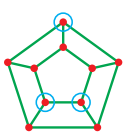
- در (۲)، $p=8$ و $\Delta=3$ است، پس $\gamma \geq \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$ می‌شود، اما هیچ دو رأسی در این گراف وجود ندارد که همهٔ رئوس این گراف را احاطه کند، ولی با ۳ رأس می‌توانیم این گراف را احاطه کنیم؛ پس $\gamma = 3$ می‌شود:



نکته عدد احاطه‌گری گراف‌های C_n و P_n برابر $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است.

- در (۳)، یک C_7 داریم؛ پس عدد احاطه‌گری آن برابر $\left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3$ می‌شود.

- در (۴)، $p=10$ و $\Delta=3$ است، پس $\gamma \geq \left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3$ می‌شود، حالا با انتخاب ۳ رأس مشخص‌شده این گراف احاطه می‌شود؛ پس $\gamma = 3$ است:



گام دوم: بنابراین جمع عدد احاطه‌گری این گراف‌ها برابر $3+3+3+2=11$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۲

از بین ۴ کتاب ریاضی یکسان، ۵ کتاب فیزیک یکسان و ۸ کتاب شیمی یکسان، به چند طریق می‌توان ۶ کتاب انتخاب کرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره کافیه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z=6$ با شرط $x \leq 4$ و $y \leq 5$ را به دست آورید.

درس‌نامه

- تعداد حالات توزیع n شیء یکسان بین k نفر، برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ است.
- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد کتاب‌های ریاضی، فیزیک و شیمی انتخاب‌شده را به ترتیب x، y و z در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ۶ کتاب انتخاب کنیم؛ پس باید $x+y+z=6$ باشد.

گام دوم: باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z=6$ را به دست آوریم، ولی باید حواسمان باشد که $x\le 4$ و $y\le 5$ است.(*چرا؟ چون فقط ۴ تا کتاب ریاضی داریم و ۵ تا کتاب فیزیک! پس x نمی‌تونه بزرگ‌تر از ۴ و y نمی‌تونه بزرگ‌تر از ۵ باشه!*)

گام سوم: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z=6$ برابر است با:

$$\left.\begin{matrix}k=3\\ n=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8}{2}=28$$

اما در بین این ۲۸ جواب، ۴ جواب $(x=6,y=0,z=0)$، $(x=0,y=6,z=0)$، $(x=5,y=1,z=0)$، $(x=5,y=0,z=1)$ غیر قابل قبول‌اند؛ پس جواب برابر $28-4=24$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۳

معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30$، $(x_1+x_2)^3+x_3+x_4+x_5$، چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۲۱۲
۲) ۴۱۲
۳) ۴۲۰
۴) ۸۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

استراتژی حل: باید برحسب مقدار x_1+x_2 حالت‌بندی کنید.

درس‌نامه

تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** برحسب مقدار x_1+x_2 حالت‌بندی می‌کنیم. x_1 و x_2 طبیعی‌اند، پس x_1+x_2 می‌تواند برابر ۴،۳،۲ یا ... باشد، اما دقت کنید به ازای $x_1+x_2\ge 4$، معادله جواب طبیعی ندارد (*چون x_3، x_4 و x_5 نمی‌تونن طبیعی باشن*)؛ پس فقط دو حالت $x_1+x_2=2$ یا $x_1+x_2=3$ را داریم.

گام دوم: اگر $x_1+x_2=2$ باشد، داریم:

$$\underbrace{(x_1+x_2)^3}_{8}+x_3+x_4+x_5=30\Rightarrow x_3+x_4+x_5=22$$

به‌علاوه در این حالت چون $x_1+x_2=2$ است، برای x_1 و x_2 هم فقط یک حالت $x_1=x_2=1$ را داریم.

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی}\xrightarrow[n=22]{k=3}\binom{n-1}{k-1}=\binom{21}{2}=210$$

و اگر $x_1+x_2=3$ باشد، داریم:

$$\underbrace{(x_1+x_2)^3}_{27}+x_3+x_4+x_5=30\Rightarrow x_3+x_4+x_5=3$$

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی}\xrightarrow[n=3]{k=3}\binom{n-1}{k-1}=\binom{2}{2}=1$$

اما در این حالت برای $x_1+x_2=3$، دو حالت $(x_1=1,x_2=2)$ و $(x_1=2,x_2=1)$ را داریم. بنابراین، این معادله $210\times 1+1\times 2=212$ جواب طبیعی دارد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۲۴

یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ است. می‌دانیم رمز بسته‌شده روی قفل به شکل $\overline{۹۸ab}$ که در آن ارقام متمایز هستند، نیست و هم‌چنین حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود. اگر امتحان‌کردن هر رمز ۴رقمی، ۳۰ ثانیه طول بکشد، چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

۱) ۹۷۴ دقیقه
۲) ۴۸۷ دقیقه
۳) حداکثر ۷ ساعت
۴) حداقل ۳۰ ثانیه و حداکثر ۸ ساعت

این‌جای سؤال یعنی این‌که رمز قفل، چهاررقمی و شامل حداقل یک رقم ۷ و ۸ است، ولی به شکل $\overline{۹۸ab}$ که چهار رقم متمایز باشند و حداقل یکی از a و b برابر ۷ باشد، نیست!

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** اول تعداد رمزها به شکل $\overline{۹۸ab}$ را که a و b متفاوت و کوچک‌تر از ۸ باشند و شامل حداقل یک رقم ۷ و ۸ باشد، می‌شماریم. رقم ۸ را که داریم، پس باید کاری کنیم تا عدد شامل یک رقم ۷ باشد، حالا با توجه به این‌که a و b متمایزند، یکی از a و b باید برابر ۷ باشد که دو حالت دارد (مثلاً a). حالا رقم دیگر باید از ۸ کوچک‌تر و مخالف ۷ باشد، پس ۷ حالت (۰ تا ۶) را دارد؛ بنابراین $۲\times۷=۱۴$ عدد به این شکل داریم.

گام دوم: حالا تعداد رمزهای ۴رقمی شامل حداقل یک رقم ۷ و ۸ را می‌شماریم:

A: رمزهای ۴رقمی فاقد ۸

B: رمزهای ۴رقمی فاقد ۷

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n(A)=۹\times۹\times۹\times۹=۶۵۶۱ \\ n(B)=۹\times۹\times۹\times۹=۶۵۶۱ \\ n(A\cap B)=۸\times۸\times۸\times۸=۴۰۹۶ \end{array}\right\} \Rightarrow n(A\cup B)=\underbrace{n(A)}_{۶۵۶۱}+\underbrace{n(B)}_{۶۵۶۱}-\underbrace{n(A\cap B)}_{۴۰۹۶}=۹۰۲۶$$

$$n(U)=۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{n(A'\cap B')}_{\text{رمزهایی که حداقل یک رقم ۷ و ۸ دارند.}}=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰۰۰-۹۰۲۶=۹۷۴$$

گام سوم: از طرفی رمزهای به شکل $\overline{۹۸ab}$ را باید کم کنیم که $۹۶۰-۱۴=۹۷۴$ رمز می‌شود. اگر خوش‌شانس باشیم در ۳۰ ثانیه، با امتحان‌کردن رمز اول قفل باز می‌شود، اما اگر بدشانس باشیم باید ۹۶۰×۳۰ ثانیه یا به عبارت دیگر $\frac{۹۶۰\times۳۰}{۳۶۰۰}=۸$ ساعت باید تلاش کنیم تا قفل باز شود.

تست و پاسخ ۲۵

چند مورد از موارد زیر صحیح است؟

الف) هر زیرمجموعهٔ ۱۳عضوی از مجموعهٔ $A=\{۱,۵,۹,\ldots,۷۷,۸۱,۸۵\}$ حداقل دو عضو دارد که جمعشان ۹۰ است.

ب) در یک مدرسه با ۵۰۵ دانش‌آموز، حداقل ۷ دانش‌آموز وجود دارد که روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

پ) ۱۶ نقطه با مختصات صحیح در صفحه انتخاب کرده‌ایم. حداقل ۵ نقطه از آن‌ها به گونه‌ای هستند که مختصات نقطهٔ وسط دوبه‌دوی آن‌ها هم صحیح است.

ت) ۵ نقطه روی محیط و درون یک مربع به ضلع ۲ قرار دارند. حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از $\sqrt{۲}$ است.

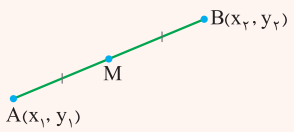
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱) اگر n کبوتر وارد k لانه شوند، لانه‌ای وجود دارد که شامل حداقل $\left[\frac{n}{k}\right]$ کبوتر است.

۲) مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB به صورت روبه‌رو است:



$$\Rightarrow M\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی هر مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) مجموعهٔ A را به صورت زیر می‌نویسیم:

$\{۱\}, \{۴۵\}, \{۴۱,۴۹\}, \{۳۷,۵۳\}, \{۳۳,۵۷\}, \{۲۹,۶۱\}, \{۲۵,۶۵\}, \{۲۱,۶۹\}, \{۱۷,۷۳\}, \{۱۳,۷۷\}, \{۹,۸۱\}, \{۵,۸۵\}$

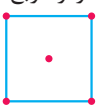
همان‌طور که می‌بینید ۱۲ دسته داریم. حالا اگر از یک دستهٔ دوتایی، هر دو عضوش انتخاب شود، دو عضو داریم که جمعشان ۹۰ است. ۱۲ دسته داریم، پس اگر ۱۳ عدد انتخاب کنیم، طبق اصل لانهٔ کبوتری، دسته‌ای وجود دارد که هر دو عضو آن انتخاب شده و به هدفمان می‌رسیم؛ پس «الف» درست است.

ب) تعداد لانه‌ها را برابر تعداد روزهای هفته و ماه‌های سال، یعنی $۷\times۱۲=۸۴$ در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانهٔ کبوتری حداقل $\left[\frac{۵۰۵}{۸۴}\right]=۷$ نفر وجود دارند که روز هفته و ماه تولدشان یکسان است؛ پس «ب» هم درست است.

پ) این گزاره نادرست است. به عنوان مثال نقض، ۱۶ نقطهٔ مقابل را در نظر بگیرید:

$(۱,۱)\quad (۱,۲)\quad (۲,۱)\quad (۲,۲)$
$(۳,۳)\quad (۳,۴)\quad (۴,۳)\quad (۴,۴)$
$(۵,۵)\quad (۵,۶)\quad (۶,۵)\quad (۶,۶)$
$(۷,۷)\quad (۷,۸)\quad (۸,۷)\quad (۸,۸)$

ت) این گزاره هم نادرست است. به عنوان مثال نقض ۵ نقطه را به این صورت در نظر می‌گیریم: (۴ نقطه روی رئوس و یک نقطه در مرکز مربع)



در این حالت، فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای کم‌تر از $\sqrt{۲}$ نیست؛ بنابراین فقط دو مورد درست است.

تست و پاسخ ۲۶

دقیقاً ۵۴۰ تابع به شکل $f: A \to B$ می‌توان نوشت که در آن $B = R_f = \{۱,۲,۳\}$ باشد. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی برابر است با: $۳^n - ۳\times۲^n + ۳$

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای این‌که $B = R_f = \{۱,۲,۳\}$ باشد، باید تابعی پوشا از A به $\{۱,۲,۳\}$ داشته باشیم.

گام دوم: فرض کنید مجموعهٔ A دارای n عضو است؛ پس می‌خواهیم تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی برابر ۵۴۰تا باشد:

$$\Rightarrow ۳^n - ۳\times۲^n + ۳ = ۵۴۰ \xrightarrow{\text{امتحان گزینه}} n = ۶$$

تست و پاسخ ۲۷

در دستگاه $\begin{cases} x+y+z=۸ \\ v+w=۷ \end{cases}$، چند عدد ۵رقمی به شکل $\overline{xyzvw}$ می‌توان نوشت که حداقل یک رقم صفر داشته باشد و بر ۳ بخش‌پذیر شود؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۲۸۸ ۳) ۳۲۴ ۴) ۵۷۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا دقت کنید $x+y+z+v+w=۸+۷=۱۵$ است (که بر ۳ بخش‌پذیر است)، پس هر عدد به شکل $\overline{xyzvw}$ مضرب ۳ است، پس فقط باید کاری کنیم تا این عدد شامل حداقل یک رقم صفر باشد، یعنی یکی از مقادیر (به‌جز x) برابر صفر شود.

گام دوم: اول تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی دستگاه $\begin{cases} x+y+z=۸ \\ v+w=۷ \end{cases}$ با شرط $x>۰$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x>۰ \xrightarrow[\text{با جای‌گذاری داریم:}]{\text{تغییر متغیر}} x = x'+۱ \Rightarrow x' \geq ۰$$

$$\begin{cases} x'+۱+y+z=۸ \\ v+w=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'+y+z=۷ \Rightarrow \begin{cases} k=۳ \\ n=۷ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶ \\ v+w=۷ \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ n=۷ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۸}{۱} = ۸ \end{cases}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پس دستگاه $۲۸۸ = ۸ \times ۳۶$ جواب دارد.

گام سوم: حالا تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه را می‌شماریم:

$$\begin{cases} x+y+z=۸ \Rightarrow \begin{cases} k=۳ \\ n=۸ \end{cases} \Rightarrow \binom{n-۱}{k-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱ \\ v+w=۷ \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ n=۷ \end{cases} \Rightarrow \binom{n-۱}{k-۱} = \binom{۶}{۱} = ۶ \end{cases}$$

پس دستگاه $۱۲۶ = ۶ \times ۲۱$ جواب دارد.

گام چهارم: حالا تعداد جواب‌های دستگاه به شرطی که حداقل یکی از متغیرها (به‌جز x) برابر صفر شود، برابر $۱۶۲ = ۱۲۶ - ۲۸۸$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۸

چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟ (A و B دو مربع لاتین هستند.)

الف) اگر A و B متعامد باشند و B' از جایگشتی بر روی B به وجود آمده باشد، A و B' نیز متعامدند.

ب) اگر A و B متعامد باشند و B' از جابه‌جایی سطر اول و دوم B به وجود آمده باشد، A و B' نیز متعامدند.

پ) در مربع لاتین چرخشی، همهٔ اعداد روی قطر اصلی برابر یک است.

ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکات

۱) اگر A و B متعامد باشند و B' از جایگشتی بر روی B به وجود آمده باشد، A و B' نیز متعامدند.

۲) مربع لاتین چرخشی به شکل زیر است که با توجه به آن، همهٔ اعداد روی قطر اصلی برابر یک هستند:

۱	۲	۳	.....	n−۱	n
n	۱	۲		n−۲	n−۱
n−۱	n	۱	.....	n−۳	n−۲
۳	۴	۵	.....	۱	۲
۲	۳	۴	.....		۱

۳) هیچ دو مربع لاتین متعامدی از مرتبهٔ ۱، ۲ و ۶ نداریم.

پاسخ تشریحی با توجه به سه نکتهٔ بالا واضح است که موردهای «الف»، «پ» و «ت» درست‌اند، اما مورد «ب» درست نیست. به عنوان مثال نقض دو مربع لاتین A و B را در نظر بگیرید که متعامدند:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

A

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

B

با جابه‌جایی سطر اول و دوم B به مربع مقابل می‌رسیم که واضح است با A متعامد نیست.

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

B'

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

هندسه (۳): صفحه‌های ۵۰ تا ۸۶

تست و پاسخ ۲۹

خط به معادلهٔ $x = ۳$، خط هادی یک سهمی است. اگر این سهمی محور yها را با عرض‌های ۳ و -۳ قطع کند، طول رأس این سهمی کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۰/۵
۴) ۲

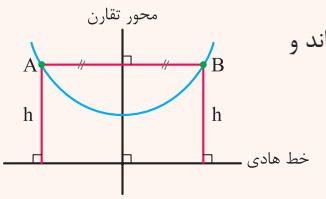
پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره تعاریف اصلی و قضیه‌های پایه‌ای کتاب درسی شاید سؤال مستقیم در کنکور نداشته باشد، ولی همیشه احتمال این‌که با یک سؤال مفهومی از آن غافلگیر شوید وجود دارد.

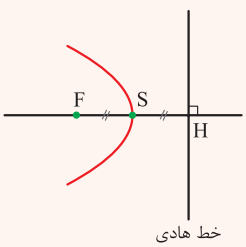
درس‌نامه

۱) **تعریف سهمی:** سهمی مکان هندسی نقاطی است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت به نام کانون با فاصلهٔ آن‌ها از خط ثابتی به نام خط هادی یکسان است.

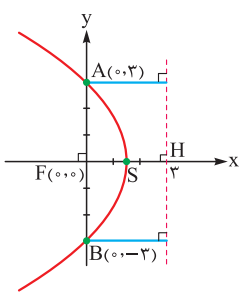
۲) اگر دو نقطه از سهمی، فاصلهٔ برابر از خط هادی داشته باشند، نسبت به محور تقارن سهمی، قرینه‌اند و وسط پاره‌خط واصل آن‌ها روی محور تقارن قرار می‌گیرد:



۳) محل تقاطع سهمی با محور تقارن آن، رأس سهمی نامیده می‌شود. توجه کنید که رأس سهمی، وسط پاره‌خطی است که از کانون بر خط هادی عمود شود.



پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل مسئله و رسم شکل):** سؤال گفته خط $x = ۳$ خط هادی سهمی و نقاط $A(۰,۳)$ و $B(۰,-۳)$ نقاطی از سهمی هستند؛ پس شکل مسئله به صورت مقابل است. اولاً چون A و B دو نقطهٔ متقارن از سهمی هستند، طبق مورد (۲) درس‌نامه، خط عبوری از کانون و رأس سهمی که محور تقارن سهمی است، از نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، یعنی $(۰,\frac{-۳+۳}{۲}) = (۰,۰)$ می‌گذرد. ثانیاً طبق مورد (۱) درس‌نامه، چون فاصلهٔ A و B از خط هادی برابر فاصلهٔ A و B از نقطهٔ $(۰,۰)$ است (فاصله $= ۳$)؛ پس $(۰,۰)$ همان کانون سهمی است.



گام دوم (حل خواستهٔ سؤال): طبق مورد (۳) درس‌نامه، رأس سهمی وسط کانون و خط هادی است؛ پس:

$$x_S = \frac{x_F + x_H}{۲} \Rightarrow x_S = \frac{۰+۳}{۲} = ۱/۵$$

تست و پاسخ ۳۰

نقطهٔ $A(-۲,۱)$ واقع بر سهمی به معادلهٔ $x^۲ + mx + ۶y + n = ۰$ کم‌ترین فاصله را تا کانون سهمی دارد. حاصل $m+n$ کدام است؟

A همان رأس سهمی است.

۱) صفر
۲) -۳
۳) ۲
۴) ۶

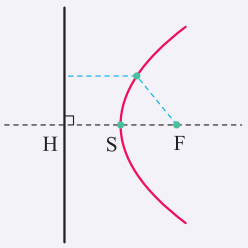
پاسخ: گزینهٔ ۳

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ سهمی را استاندارد کنید و رأس سهمی را به دست آورید.

نکته کم‌ترین فاصلهٔ نقاط روی سهمی از خط هادی و کانون سهمی در رأس سهمی اتفاق می‌افتد:



$$SH = SF$$

پاسخ تشریحی معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(x^2+mx)+6y+n=0 \Rightarrow (x+\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}+6y+n=0$$

$$\Rightarrow (x-\underbrace{(-\frac{m}{2})}_{h})^2=-6(y-\underbrace{(-\frac{n}{6}+\frac{m^2}{24})}_{k})$$

همان‌طور که در نکتهٔ بالا گفتیم نقطهٔ $A(-2,1)$ کم‌ترین فاصله تا کانون سهمی را دارد، پس همان رأس سهمی است؛ بنابراین:

$$S\begin{cases}-\frac{m}{2}=-2 \Rightarrow m=4 \quad (*)\\ -\frac{n}{6}+\frac{m^2}{24}=+1\end{cases}$$

$$-\frac{n}{6}+\frac{m^2}{24}=+1 \xrightarrow{(*)} \frac{n}{6}=\frac{16}{24}-1=\frac{-8}{24}=\frac{-1}{3} \Rightarrow n=-2$$

پس مقدار $m+n=4-2=2$ است.

تست و پاسخ ۳۱

اگر نقطهٔ $F(\frac{3}{2},-2)$ کانون سهمی به معادلهٔ $y=x^2+ax+b$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) -3
۴) -2

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره با مشتق‌گرفتن نسبت به x، از معادلهٔ سهمی S رو به دست بیاور و سپس افقی و قائم بودن و سمت دهانهٔ سهمی را مشخص کن.

درس نامه

۱) ساده‌ترین راه به دست آوردن مختصات رأس سهمی از روی معادلهٔ گستردهٔ آن، مشتق‌گرفتن نسبت به مجهول درجهٔ ۲ در معادله است، مثلاً در معادلهٔ سهمی $x^2+ax+by+c=0$ اگر از معادله نسبت به x مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، طول رأس سهمی به دست می‌آید و با جای‌گذاری x در معادله، عرض رأس را هم به دست می‌آوریم.

۲) هر وقت معادلهٔ گستردهٔ یک سهمی را داشتید و P را می‌خواستید از رابطهٔ زیر استفاده کنید:

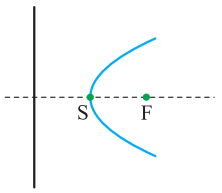
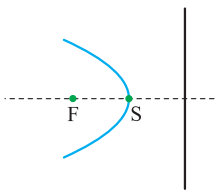
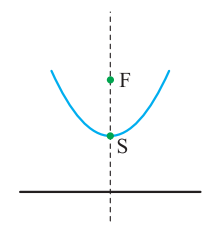
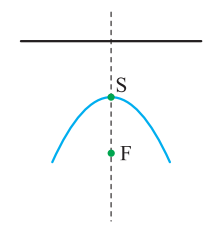
$$P=\left|\frac{\text{ضریب متغیر درجهٔ ۱}}{۴\times \text{ضریب متغیر درجهٔ ۲}}\right|$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

۳) جدول زیر هر چی راجع به سهمی می‌خوای رو بهت می‌گه:

	نمودار	دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	مختصات کانون (F)	رأس سهمی (S)	معادلهٔ استاندارد سهمی ($P>0$)
۱		رو به راست (سهمی افقی)	$y=\beta$	$x=-P+\alpha$	$(P+\alpha,\beta)$	(α,β)	$(y-\beta)^2=4P(x-\alpha)$
۲		رو به چپ (سهمی افقی)	$y=\beta$	$x=P+\alpha$	$(-P+\alpha,\beta)$	(α,β)	$(y-\beta)^2=-4P(x-\alpha)$
۳		رو به بالا (سهمی قائم)	$x=\alpha$	$y=-P+\beta$	$(\alpha,P+\beta)$	(α,β)	$(x-\alpha)^2=4P(y-\beta)$
۴		رو به پایین (سهمی قائم)	$x=\alpha$	$y=P+\beta$	$(\alpha,-P+\beta)$	(α,β)	$(x-\alpha)^2=-4P(y-\beta)$

پاسخ تشریحی **گام اول (به دست آوردن مختصات رأس):** طبق مورد (۱) درس‌نامه، از معادلهٔ سهمی $x^2+ax-y+b=0$ نسبت به x مشتق می‌گیریم تا مختصات رأس را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+ax-y+b=0 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به x}} 2x+a=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{2} \\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} (-\frac{a}{2})^2+a(-\frac{a}{2})-y+b=0 \Rightarrow y=-\frac{a^2}{4}+b \end{array}\right\} \Rightarrow S(-\frac{a}{2},-\frac{a^2}{4}+b)$$

گام دوم (محاسبهٔ مقدار a^2): طبق مورد (۲) درس‌نامه، مقدار P برابر است با:

$$P=\left|\frac{\text{ضریب متغیر درجهٔ ۱}}{\text{ضریب متغیر درجهٔ ۲}\times 4}\right|=\left|\frac{(-1)}{4(1)}\right|=\frac{1}{4}$$

گام سوم (تعیین جهت سهمی و محاسبهٔ مختصات کانون): با توجه به این‌که در معادلهٔ گستردهٔ سهمی مجهول x از درجه‌دوم است، پس سهمی قائم است و چون $P=\frac{1}{4}>0$ پس دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ در نتیجه باید از ردیف شمارهٔ ۳ جدول مورد (۳) درس‌نامه برای محاسبهٔ کانون استفاده کنیم، داریم:

$$F(\alpha,P+\beta) \Rightarrow F(\frac{-a}{2},\frac{1}{4}-\frac{a^2}{4}+b)=(\frac{3}{2},-2)$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-3 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{-a^2}{4}+b+\frac{1}{4}=-2 \xrightarrow{(1)} \frac{-9}{4}+\frac{1}{4}+2=-b \Rightarrow b=0$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در نتیجه مقدار $a+b$ برابر است با:

$$a+b=-3+0=-3$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۳۲

یک شعاع نورانی بر یک آینهٔ سهمی‌شکل به معادلهٔ $y^۲ + ۲y - ۴x + ۵ = ۰$ تابیده است. اگر شعاع بازتابش بر روی خط $y = ۱$ قرار داشته باشد، معادلهٔ شعاع تابش کدام است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $x = ۲y$ ۳) $x = -۲y$ ۴) $x = -۲$

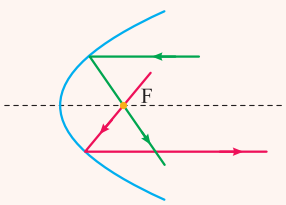
پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره این سؤال مربوط به یک نکتهٔ مطرح‌شده در کتاب درسی است که اتفاقاً خود کتاب هم تمرینی از آن ارائه نکرده، ولی طراح کنکور قبلاً از آن سؤال داده!

خودت حل کنی بهتره شعاع بازتابش موازی محور تقارن سهمی است؛ پس شعاع تابش از کانون سهمی می‌گذرد.

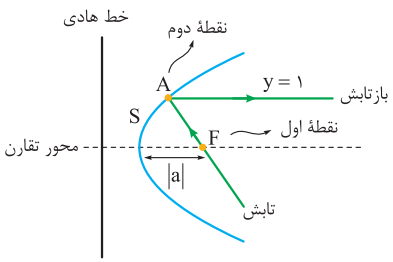
درس نامه

یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون بگذرد و به بدنهٔ سهمی بتابد، موازی با محور تقارن سهمی بازتاب می‌شود و برعکس؛ یعنی هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه بتابد، بازتابش از کانون سهمی عبور می‌کند:



پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال)**: با دقت در معادلهٔ سهمی به راحتی می‌فهمیم که نمودار این سهمی افقی است، پس محور تقارن آن موازی با محور xها است و با خط $y = ۱$ که شعاع بازتابش ما روی آن قرار دارد موازی است؛ پس طبق درس‌نامه، شعاع تابش حتماً از نقطهٔ کانون سهمی عبور می‌کند.

برای نوشتن معادلهٔ تابش کافی است مختصات نقطهٔ تلاقی $y = ۱$ با معادلهٔ سهمی و هم‌چنین نقطهٔ کانون را داشته باشیم.



گام دوم (به دست آوردن مختصات کانون): سهمی $y^۲ + ۲y - ۴x + ۵ = ۰$ افقی است. حالا کافی است مختصات S و مقدار a را پیدا کنیم:

$$y^۲ + ۲y - ۴x + ۵ = ۰ \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} ۲y + ۲ = ۰ \Rightarrow y_S = -۱ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} (-۱)^۲ + ۲(-۱) - ۴x + ۵ = ۰ \Rightarrow x_S = ۱$$

در نتیجه مختصات رأس کانون $S(۱,-۱)$ است.

از طرفی a از رابطهٔ روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$a = \left|\frac{\text{ضریب متغیر درجهٔ ۱}}{(\text{ضریب متغیر درجهٔ ۲}) \times ۴}\right| \Rightarrow a = \left|\frac{-۴}{۴ \times ۱}\right| = ۱$$

پس مختصات کانون برابر است با:

نقطهٔ اول: $F(۱ + a, -۱) \Rightarrow F(۲,-۱)$

گام سوم (به دست آوردن خواستهٔ سؤال): خط $y = ۱$ را با معادلهٔ سهمی قطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ A به دست آید:

$$\left.\begin{array}{l} y = ۱ \\ y^۲ + ۲y - ۴x + ۵ = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow (۱)^۲ + ۲(۱) - ۴x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow A(۲,۱)$$

با توجه به شکل گام اول، شعاع تابش از دو نقطهٔ $A(۲,۱)$ و $F(۲,-۱)$ می‌گذرد؛ پس معادلهٔ آن به صورت $x = ۲$ است.

تست و پاسخ ۳۳

دایره به معادلهٔ $(x-۴)^۲ + y^۲ = ۵$ با سهمی به کانون $(\frac{۱}{۸}, ۰)$ و معادلهٔ خط هادی $۸x + ۱ = ۰$ در چهار نقطهٔ A، B، C و D متقاطع است. اگر $AB \parallel CD$، آن‌گاه فاصلهٔ دو خط AB و CD کدام است؟

معادلهٔ سهمی را می‌توانیم به دست آوریم.

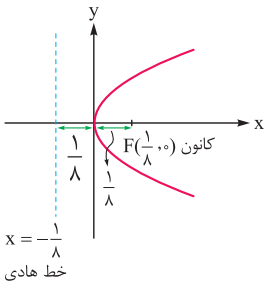
۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی را در دستگاه مختصات نشان می‌دهیم تا بتوانیم معادلهٔ سهمی را بنویسیم. از روی این شکل سه نکته را متوجه می‌شویم:



الف) رأس سهمی در وسط کانون و خط هادی است و مختصات آن $S(0,0)$ است.

ب) فاصلهٔ بین کانون تا خط هادی برابر است با:

$$2|a|=2\times\frac{1}{8}\Rightarrow|a|=\frac{1}{8}$$

پ) سهمی افقی و رو به راست است؛ پس a مثبت است و داریم:

$$4a=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

گام دوم (نوشتن معادلهٔ سهمی): حالا با داشتن $S(0,0)$ و $4a=\frac{1}{2}$ معادلهٔ سهمی به صورت روبه‌رو نوشته می‌شود:

$$y^2=\frac{1}{2}x$$

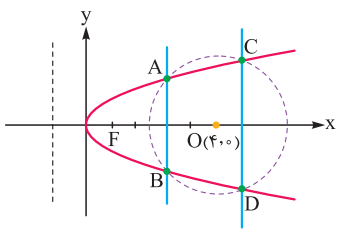
گام سوم (به دست آوردن طول نقاط تقاطع با دایره): برای به دست آوردن نقاط تقاطع دایره و سهمی، معادلات آن را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{matrix}y^2=\frac{1}{2}x\\ y^2+(x-4)^2=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}x+(x-4)^2=5\xrightarrow{\times2}x+2(x-4)^2=10\Rightarrow2x^2-15x+22=0\Rightarrow(x-2)(2x-11)=0$$

$$\Rightarrow x=2\quad,\quad x=\frac{11}{2}$$

گام چهارم (خواستهٔ سؤال): خوب به شکل مقابل دقت کنید. نقاط برخورد دایره با سهمی روی دو خط موازی به معادله‌های $x=2$ و $x=\frac{11}{2}$ واقع است؛ بنابراین نیازی به به دست آوردن عرض نقاط تقاطع نداریم. فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$\frac{11}{2}-2=\frac{7}{2}$$



تست و پاسخ ۳۴

نقطهٔ $A(m,n^2+1,mn^2)$ در کدام ناحیه از دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌تواند قرار داشته باشد؟

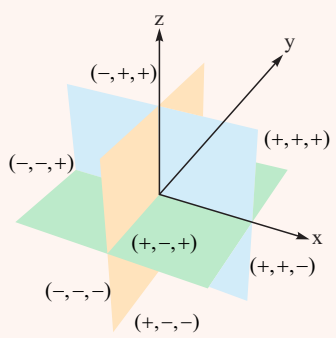
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره اگر ناحیهٔ روی دستگاه مختصات سه‌بُعدی را بلد نیستید حتماً درس‌نامه را بخوانید.

درس‌نامه

صفحه‌های $z=0$، $y=0$ و $x=0$ که به ترتیب آن‌ها را صفحه‌های xy، xz و yz می‌نامیم، فضای مختصات را مطابق شکل به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند که علامت طول، عرض و ارتفاع نقاط واقع بر این هشت ناحیه را در جدول زیر می‌بینید.



شمارهٔ ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی در نقطهٔ $A(m,n^۲+۱,mn^۲)$ مؤلفهٔ y همواره مثبت است $(n^۲+۱>۰)$ و مؤلفه‌های x و z وابسته به علامت m و همواره هم‌علامت‌اند؛ پس مختصات نقطهٔ A به دو حالت $(+,+,+)$ یا $(-,+,-)$ است که طبق درس‌نامه می‌تواند در ناحیهٔ ۱ یا ۶ از دستگاه مختصات سه‌بُعدی قرار بگیرد.

تست و پاسخ ۳۵

نقطهٔ $A(x,y,z)$ به فاصلهٔ $۳\sqrt{۶}$ از مبدأ مختصات قرار دارد. اگر برای مختصات A داشته باشیم $\frac{x}{۱}=\frac{y+۶}{۴}=\frac{z-۹}{-۲}$، آن‌گاه بیشترین عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ در فضا برابر است با: $AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$

و فاصلهٔ بین نقطهٔ $A(x,y,z)$ با مبدأ مختصات به صورت مقابل است: $OA=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال)**: سؤال گفته فاصلهٔ $A(x,y,z)$ از مبدأ مختصات $O(۰,۰,۰)$ برابر $۳\sqrt{۶}$ است؛ پس طبق درس‌نامه داریم:

$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۳\sqrt{۶}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x^۲+y^۲+z^۲=۵۴\quad(*)$$

گام دوم (استفاده از فرضیات سؤال برای رسیدن به پاسخ): از طرفی رابطهٔ زیر بین مؤلفه‌های A برقرار است:

$$x=\frac{y+۶}{۴}=\frac{z-۹}{-۲}\Rightarrow\begin{cases}y=۴x-۶\\z=-۲x+۹\end{cases}$$

حالا مقادیر y و z را در معادلهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^۲+(۴x-۶)^۲+(-۲x+۹)^۲=۵۴\Rightarrow x^۲+۱۶x^۲+۳۶-۴۸x+۴x^۲+۸۱-۳۶x=۵۴$$

$$\Rightarrow ۲۱x^۲-۸۴x+۶۳=۰\xrightarrow{\div ۲۱}x^۲-۴x+۳=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\text{ یا }x=۳$$

$$\xrightarrow{x=۴}A(۱,-۲,۷)$$

$$\xrightarrow{x=۳}B(۳,۶,۳)$$

پس دو نقطه با این شرایط وجود دارد:

که بیشترین عرض مربوط به نقطهٔ B و برابر ۶ است.

تست و پاسخ ۳۶

نقطهٔ A به ترتیب با طول و عرض ۱ و ۲ بر صفحهٔ xy و نقطهٔ B به ترتیب با عرض و ارتفاع ۱− و ۲− بر صفحهٔ yz مفروض‌اند. اگر O مبدأ مختصات باشد، کسینوس زاویهٔ AOB کدام است؟

$z=۰$ ← ۱) ۰/۴ ۲) −۰/۴ ۳) ۰/۲ ۴) −۰/۲ ← $x=۰$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱) الف) معادلهٔ صفحهٔ xoy به صورت $z=۰$ است، زیرا هر نقطه که روی این صفحه قرار بگیرد، ارتفاع آن صفر است.

ب) معادلهٔ صفحهٔ xoz به صورت $y=۰$ است، زیرا هر نقطه که روی این صفحه قرار بگیرد، عرض آن صفر است.

پ) معادلهٔ صفحهٔ yoz به صورت $x=۰$ است، زیرا هر نقطه که روی این صفحه قرار بگیرد، طول آن صفر است.

۲) برای به دست آوردن زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳}{(\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲})(\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲})}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل صورت سؤال):** نقطهٔ A روی صفحهٔ xy قرار دارد، پس طبق مورد (الف) درس‌نامه مختصات آن به صورت $A(۱,۲,۰)$ و نقطهٔ B روی صفحهٔ yz قرار دارد؛ پس طبق مورد (پ) درس‌نامه مختصات آن به صورت $B(۰,-۱,-۲)$ است.

گام دوم (به دست آوردن خواستهٔ سؤال): طبق مورد (۲) درس‌نامه، کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ (همان زاویهٔ AOB) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{(۱,۲,۰).(۰,-۱,-۲)}{(\sqrt{۱^۲+۲^۲+۰^۲})(\sqrt{۰^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲})}=\frac{۰+(-۲)+۰}{(\sqrt{۵})(\sqrt{۵})}=\frac{-۲}{۵}=-۰/۴$$

تست و پاسخ ۳۷

اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در جهت محورهای مختصات باشند، حاصل $(\vec{i}-۲\vec{j}).((۲\vec{i}-\vec{k})\times(\vec{j}+۲\vec{k}))$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

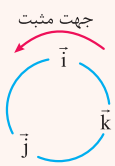
درس‌نامه

۱) می‌دانیم $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ که در آن، θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

۲) ضرب داخلی هر بردار یکه در خودش برابر ۱ و هر دو بردار یکه متفاوت در یکدیگر برابر صفر است، مثلاً: با توجه به قسمت قبل، $\vec{k}.\vec{j}=۰$ یا $\vec{i}.\vec{k}=۰$ یا $\vec{i}.\vec{i}=|i|^۲=۱$.

۳) حاصل‌ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است، مثلاً: $\vec{k}\times\vec{k}=۰$

۴) اگر سه بردار $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را به ترتیب زیر روی یک دایره بکشیم:



آن‌گاه حاصل‌ضرب خارجی هر دو بردار متوالی، برابر بردار سوم است. حالا اگر حرکت از طرف بردار اول به دوم پادساعتگرد باشد، علامت مثبت و اگر ساعتگرد باشد، علامت منفی است. مثلاً: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ و $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

۵) خاصیت پخشی در ضرب داخلی و خارجی برقرار است:

- $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$
- $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}.(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}.(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{d}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{d}$

پاسخ تشریحی راه حل اول: حاصل‌ضرب صورت سؤال را ساده کرده و از نکات درس‌نامه در ضرب آن‌ها استفاده می‌کنیم:

$$(\vec{i}-۲\vec{j}).((۲\vec{i}-\vec{k})\times(\vec{j}+۲\vec{k}))=(\vec{i}-۲\vec{j}).(\overbrace{۲\vec{i}\times\vec{j}}^{+\vec{k}}+\overbrace{۴\vec{i}\times\vec{k}}^{-\vec{j}}-\overbrace{\vec{k}\times\vec{j}}^{-\vec{i}}-\overbrace{۲\vec{k}\times\vec{k}}^{\vec{0}})$$

$$=(\vec{i}-۲\vec{j}).(۲\vec{k}-۴\vec{j}+\vec{i}-۰)=۲\overbrace{\vec{i}.\vec{k}}^{۰}-۴\overbrace{\vec{i}.\vec{j}}^{۰}+\overbrace{\vec{i}.\vec{i}}^{۱}-۴\overbrace{\vec{j}.\vec{k}}^{۰}+۸\overbrace{\vec{j}.\vec{j}}^{۱}-۲\overbrace{\vec{i}.\vec{j}}^{۰}=+۱+۸=۹$$

راه حل دوم: می‌دانیم اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آن‌گاه:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_۱&a_۲&a_۳\\b_۱&b_۲&b_۳\end{vmatrix}\xrightarrow[\vec{b}=(۰,۱,۲)]{\vec{a}=(۲,۰,-۱)}\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&۰&-۱\\۰&۱&۲\end{vmatrix}=(۱,-۴,۲)=\vec{v}$$

می‌دانیم اگر $\vec{u}=(u_۱,u_۲,u_۳)$ و $\vec{v}=(v_۱,v_۲,v_۳)$، آن‌گاه:

$$\vec{u}.\vec{v}=u_۱v_۱+u_۱v_۲+u_۳v_۳\xrightarrow[\vec{v}=(۱,-۴,۲)]{\vec{u}=(۱,-۲,۰)}\vec{u}.\vec{v}=۱+۸+۰=۹$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۳۸

برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم $|\vec{a}\times\vec{b}|=۲$. $\vec{a}.\vec{b}$. اگر $|\vec{a}|=۵$، آن‌گاه طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲/۵\sqrt{۲}$ ۴) ۲/۵

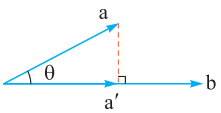
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

فرمول حاصل‌ضرب داخلی و خارجی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت مقابل است:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** احتمالاً اولین چیزی که به ذهنتان آمده، فرمول طول تصویر بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$، یعنی $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ است، ولی برای حل این سؤال مناسب نیست. حالا خوب به شکل زیر دقت کنید:



اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد و θ زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$، آن‌گاه:

$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|}\Rightarrow|\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta$$

(در حالت کلی چون θ می‌تواند منفرجه باشد، داریم: $|\vec{a}'|=|\vec{a}||\cos\theta|$)

ما طول بردار $|\vec{a}|=۵$ را داریم و کافی است زاویهٔ θ را به دست آوریم.

گام دوم (محاسبهٔ θ): رابطهٔ $\vec{a}.\vec{b}=۲|\vec{a}\times\vec{b}|$ را با استفاده از درس‌نامه باز می‌کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=۲|\vec{a}\times\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۲|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱}{۲}$$

از طرفی از روابط مثلثات در ریاضی (۱) یاد گرفتیم که:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$
$$\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): پس طول $\vec{a}'$ برابر است با:

$$|\vec{a}'|=|\vec{a}||\cos\theta|=۵\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

تست و پاسخ ۳۹

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویهٔ بین آن‌ها حاده است، به ترتیب با اندازه‌های ۱ و ۵ مفروض‌اند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده بر دو بردار $۳\vec{a}-۲\vec{b}$ و $۵\vec{a}+\vec{b}$ برابر ۵۲ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

۱) حاصل‌ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر بردار صفر است.

۲) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

۳) اتحادهای جبری در ضرب داخلی بردارها برقرار است، برای مثال:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}$$

۴) مساحت متوازی‌الاضلاعی که با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با: $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** برای محاسبهٔ اندازهٔ $\vec{a}-\vec{b}$ نیاز به اندازه‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و زاویهٔ بین این دو بردار داریم. صورت سؤال اندازه‌ها را به ما داده ($|\vec{a}|=۱$,$|\vec{b}|=۵$)، فقط کافی است زاویهٔ بین آن‌ها را به دست آوریم.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام دوم (محاسبهٔ زاویهٔ بین a و b): مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده با بردارهای $3\vec{a}-2\vec{b}$ و $5\vec{a}+\vec{b}$ طبق مورد (۴) درس‌نامه برابر است با:

$$|(5\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-2\vec{b})|=|15\overset{\circ}{\vec{a}\times\vec{a}}-10\overbrace{\vec{a}\times\vec{b}}^{-b\times a}+3\vec{b}\times\vec{a}-2\overset{\circ}{\vec{b}\times\vec{b}}|=|13\vec{b}\times\vec{a}|=52 \Rightarrow |\vec{b}\times\vec{a}|=4$$

حاصل‌ضرب خارجی $\vec{b}\times\vec{a}$ برابر است با:

$$|\vec{b}\times\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta=4 \xrightarrow[|\vec{b}|=5]{|\vec{a}|=1} 5\times 1\sin\theta=4$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{4}{5} \xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1} \cos\theta=\pm\frac{3}{5} \xrightarrow{0<\theta<90^\circ} \cos\theta=\frac{3}{5}$$

گام سوم (محاسبهٔ اندازهٔ بردار $\vec{a}-\vec{b}$): طبق مورد (۳) درس‌نامه، به کمک اتحاد برداری می‌توانیم بنویسیم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}=1^2+5^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=26-10\cos\theta=26-10\times\frac{3}{5}=20$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

تست و پاسخ ۴۰

بر روی سه بردار $\vec{a}=5\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$، $\vec{b}=m\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{c}=n\vec{i}+\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر حجم این متوازی‌السطوح برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه طول بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) ۷ ۴) $3\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع و حجم متوازی‌السطوح از کاربردهای مهم ضرب خارجی است که سؤالات روتین و ساده‌ای دارد و ارزش دارد که فرمول محاسبهٔ آن را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ حجم متوازی‌السطوح را محاسبه کنید.

درس نامه

۱) حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$، $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|$$

۲) اندازهٔ (طول) بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (استفاده از فرمول حجم متوازی‌السطوح)**: حجم متوازی‌السطوح بناشده روی سه بردار a، b و c برابر $V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ است.

پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{vmatrix} 5 & m & n\\ m & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{vmatrix}\right| \xrightarrow{\text{بسط دترمینان نسبت به سطر اول}} |=|5-m(m-0)+n(0-n)|=|5-m^2-n^2|$$

طبق فرض مسئله حجم برابر ۱۸ است؛ پس:

$$|5-m^2-n^2|=18 \Rightarrow \begin{cases} 5-m^2-n^2=18 \Rightarrow m^2+n^2=-13<0 & \text{غیرممکن}\\ 5-m^2-n^2=-18 \Rightarrow m^2+n^2=23 \quad (*)\end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ طول بردار a): حالا طول بردار a طبق مورد (۲) درس‌نامه، برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{5^2+m^2+n^2} \overset{(*)}{=} \sqrt{25+23}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

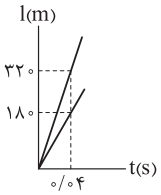
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

فیزیک (۳): صفحه‌های ۷۷ تا ۱۵۶

تست و پاسخ ۴۱

در یک زمین‌لرزه، نمودار مسافت پیموده‌شدهٔ امواج لرزه‌ای P و S برحسب زمان، مطابق شکل زیر است. اگر فاصلهٔ مرکز زمین‌لرزه تا محل لرزه‌نگار ۱۴۴ km بوده و موج‌ها روی خط راست حرکت کنند، کدام عبارت‌ها درست‌اند؟



الف) لرزه‌نگار ۱۸ s بعد از دریافت اولین موج زمین‌لرزه، اولین موج طولی را ثبت می‌کند.

ب) لرزه‌نگار ۳۲ s بعد از وقوع زمین‌لرزه، اولین موج طولی را ثبت می‌کند.

پ) لرزه‌نگار ۱۴ s بعد از دریافت اولین موج زمین‌لرزه، اولین موج عرضی را ثبت می‌کند.

ت) ۱۸ s بعد از وقوع زمین‌لرزه، موج P توسط لرزه‌نگار ثبت می‌شود.

۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

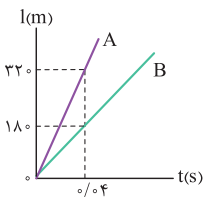
خودت حل کنی بهتره به کمک شیب نمودارها، تندی انتشار موج طولی (v_P) و تندی انتشار موج عرضی (v_S) را به دست آورید. سپس به کمک رابطهٔ $l = vt$ مدت‌زمانی را که طول می‌کشد تا موج عرضی و موج طولی به لرزه‌نگار برسند، به دست آورید.

درس نامه

امواج لرزه‌ای، امواج مکانیکی‌ای هستند که از اعماق زمین حرکت می‌کنند و به سطح زمین می‌رسند. این امواج به دو دسته تقسیم می‌شوند.

انواع امواج لرزه‌ای
- امواج اولیه (P) ← طولی هستند و تندی انتشار آن‌ها بیشتر از امواج (S) است.
- امواج ثانویه (S) ← عرضی هستند و تندی انتشار آن‌ها کم‌تر از امواج (P) است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک شیب نمودار مسافت – زمان، تندی انتشار امواج را به دست می‌آوریم. توجه کنید نموداری که شیب بیشتری دارد، مربوط به موج اولیهٔ (P) است؛ چون تندی آن از موج ثانویهٔ (S) بیشتر است.



$$v_P = A \text{ خط شیب} = \frac{۳۲۰}{۰/۰۴} = ۸۰۰۰ \, m/s$$

$$v_S = B \text{ خط شیب} = \frac{۱۸۰}{۰/۰۴} = ۴۵۰۰ \, m/s$$

گام دوم: با توجه به این‌که فاصلهٔ مرکز زمین‌لرزه تا محل لرزه‌نگار ۱۴۴ km است، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا موج اولیه (P) و موج ثانویه (S) از مرکز زمین‌لرزه به لرزه‌نگار برسند را به دست می‌آوریم: درستی «ت»

$$l = v_P t_P \Rightarrow ۱۴۴۰۰۰ = ۸۰۰۰ \times t_P \Rightarrow t_P = ۱۸ \, s$$

$$l = v_S t_S \Rightarrow ۱۴۴۰۰۰ = ۴۵۰۰ \times t_S \Rightarrow t_S = ۳۲ \, s$$

بنابراین ۱۸s پس از وقوع زلزله، لرزه‌نگار موج اولیه (P، موج طولی) را ثبت می‌کند و ۳۲s پس از وقوع زلزله، لرزه‌نگار موج ثانویه (S، موج عرضی) را ثبت می‌کند.

به بیان دیگر، لرزه‌نگار ۱۴s (= ۳۲ − ۱۸) پس از دریافت اولین موج زمین‌لرزهٔ (P) اولین موج عرضی (S) را دریافت می‌کند. ($\Delta t = t_S - t_P = ۱۴ \, s$). (درستی «پ»)

تست و پاسخ ۴۲

تراز شدت صوت رسیده به پنجره‌ای به ابعاد ۱/۵ m در ۲ m، ثابت و برابر ۷۵ dB است. آهنگ متوسط انتقال انرژی صوتی که از پنجره عبور می‌کند، در SI کدام است؟ ($I_0 = ۱۰^{-۱۲} \, W/m^۲$)

۱) $۳\sqrt{۱۰} \times ۱۰^{-۵}$ ۲) $۳\sqrt{۱۰} \times ۱۰^{-۴}$ ۳) $\sqrt{۱۰} \times ۱۰^{-۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰} \times ۱۰^{-۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره به روابط ابتدایی لگاریتم مسلط باشید. در بحث تراز شدت صوت، محاسبات لگاریتم می‌تواند نقش کلیدی داشته باشد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطهٔ $\beta = ۱۰\log(\frac{I}{I_۰})$، شدت صوت را به دست آورید و سپس به کمک رابطهٔ $I = \frac{P_{av}}{A}$، آهنگ متوسط انتقال انرژی (P_{av}) را محاسبه کنید.

درس نامه

- به لگاریتم نسبت شدت صوت (I) به شدت مرجع $(I_۰)$، تراز شدت صوت می‌گوییم. تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\beta = ۱۰\log(\frac{I}{I_۰})$$

- به نسبت آهنگ متوسط انرژی (P_{av}) به واحد سطح عمود بر راستای انتشار صوت، شدت صوت (I) گفته می‌شود که به صورت زیر به دست می‌آید.

$$I = \frac{P_{av}}{A} = \frac{E}{At}$$

یکای شدت صوت در SI، $\frac{W}{m^۲}$ است.

- روابط مقدماتی از لگاریتم که باید بدانیم:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n\log a$$

$$\log a = x \Rightarrow ۱۰^x = a$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $\beta = ۱۰\log(\frac{I}{I_۰})$، شدت صوت رسیده به پنجره را به دست می‌آوریم:

$$\beta = ۱۰\log(\frac{I}{I_۰}) \Rightarrow ۷۵ = ۱۰\log(\frac{I}{I_۰}) \Rightarrow ۷/۵ = \log(\frac{I}{۱۰^{-۱۲}})$$

$$\Rightarrow ۷/۵ = \log I - \log(۱۰^{-۱۲}) \Rightarrow ۷/۵ = \log I + ۱۲\log ۱۰ \Rightarrow -۴/۵ = \log I$$

$$\Rightarrow I = ۱۰^{-۴/۵} = ۱۰^{-\frac{۹}{۲}} = \sqrt{۱۰^{-۹}} = \sqrt{۱۰\times ۱۰^{-۱۰}} = \sqrt{۱۰}\times ۱۰^{-۵}\ \frac{W}{m^۲}$$

گام دوم: حال با استفاده از رابطهٔ $I = \frac{P_{av}}{A}$، آهنگ متوسط انرژی (توان متوسط) را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{P_{av}}{A} \Rightarrow \sqrt{۱۰}\times ۱۰^{-۵} = \frac{P_{av}}{۱/۵\times ۲} \Rightarrow P_{av} = ۳\sqrt{۱۰}\times ۱۰^{-۵}\ W$$

تست و پاسخ ۴۳

اگر فاصلهٔ شنونده‌ای از یک چشمهٔ صوت ۸ برابر شود، تراز شدت صوت دریافتی آن ۷۵ درصد تغییر می‌کند. شدت صوت دریافتی شنونده در حالت اول، چند برابر شدت مرجع است؟ (اتلاف انرژی در محیط ناچیز است.)

۱) ۲۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۱۶ ۴) $۸^۸$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا نسبت شدت صوت (I) را با تغییر فاصله به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ $\Delta\beta = ۱۰\log(\frac{I_۲}{I_۱})$، $\beta_۱$ و در نهایت نسبت $(\frac{I_۱}{I_۰})$ را به دست آورید.

درس نامه

- شدت صوت (I) با مربع دامنهٔ صوت (A) و مربع بسامد صوت (f) رابطهٔ مستقیم و با مربع فاصلهٔ چشمهٔ صوت تا ناظر (r) رابطهٔ عکس دارد؛ به عبارتی داریم:

$$I \propto \frac{A^۲f^۲}{r^۲} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{A_۲}{A_۱}\times\frac{f_۲}{f_۱}\times\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

اگر شدت صوتی از I_1 به I_2 تغییر کند، تراز شدت صوت از β_1 به β_2 تغییر می‌کند؛ در این صورت تغییر شدت صوت برحسب دسی‌بل به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta\beta = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10\log\left(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_2}{f_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 20\log\left(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_2}{f_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت ۸ برابر شده است، نسبت شدت صوت در حالت دوم به حالت اول را به دست می‌آوریم:

$$I \propto \frac{A^2f^2}{r^2} \xrightarrow{\text{فقط فاصله از چشمهٔ صوت تغییر کرده است.}} \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{8r_1}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

گام دوم: از آن‌جا که فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت بیشتر شده، تراز شدت صوت کاهش یافته است *(منظور طراح از این‌که تراز شدت صوت ۷۵ درصد تغییر کرده اینه که ۷۵ درصد کم شده.)*

$$\beta_2 = 0/25\beta_1$$

گام سوم: از رابطهٔ $\Delta\beta = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$ برای محاسبهٔ نسبت شدت صوت در حالت اول به شدت مرجع (I_0) استفاده می‌کنیم *(دنبال $\frac{I_1}{I_0}$ هستیم.)*

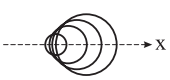
$$\Delta\beta = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \Rightarrow 0/25\beta_1 - \beta_1 = 10\log\left(\frac{1}{64}\right) \Rightarrow -\frac{3}{4}\beta_1 = -10\log(64)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\beta_1 = 10\log(64) \xrightarrow{\beta_1 = 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)} \frac{3}{4}\times 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\log(64)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = \frac{4}{3}\log(64) = \log(64^{\frac{4}{3}}) \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 64^{\frac{4}{3}} = (2^6)^{\frac{4}{3}} = 2^8 = 256$$

تست و پاسخ ۴۴

جبهه‌های موج متوالی حاصل از یک چشمهٔ صوت که با تندی v در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام مورد دربارهٔ جهت حرکت چشمه و مقایسهٔ تندی آن با تندی انتشار صوت در محیط (v')، درست است؟

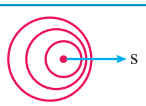
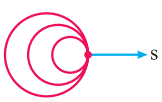


۱) در جهت محور x ، $v < v'$
۲) در خلاف جهت محور x ، $v < v'$
۳) در جهت محور x ، $v' < v$
۴) در خلاف جهت محور x ، $v' < v$

پاسخ: گزینهٔ ۴

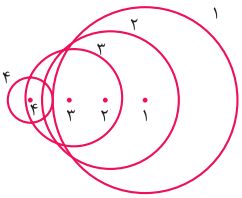
درس‌نامه

شکل جبهه‌های موج یک منبع صوت، به سرعت منبع صوت و مقایسهٔ آن با سرعت انتشار صوت در محیط وابسته است و می‌تواند به چهار صورت زیر باشد:

وضعیت منبع صوت	شکل جبهه‌های موج	توضیحات
چشمهٔ صوت ساکن باشد.		جبهه‌های موج هم‌مرکز هستند.
تندی چشمهٔ صوت (s) کم‌تر از تندی صوت در محیط است.		جبههٔ موجی که جلوتر است (دایرهٔ بزرگ‌تر) سریع‌تر از چشمهٔ صوت (s) حرکت می‌کند و از آن دور می‌شود.
تندی چشمهٔ صوت (s) با تندی صوت در محیط برابر است.		تندی جبههٔ موجی که جلوتر است (دایرهٔ بزرگ‌تر) با تندی چشمهٔ صوت برابر است؛ بنابراین در جهت حرکت چشمهٔ صوت با هم مماس می‌شوند.
تندی چشمهٔ صوت (s) از تندی صوت در محیط بیشتر است.		جبههٔ موجی که جلوتر است (دایرهٔ بزرگ‌تر) کندتر از چشمهٔ صوت حرکت می‌کند و نسبت به جبههٔ موج جدیدتر (دایرهٔ کوچک‌تر) عقب‌تر است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in



پاسخ تشریحی مطابق شکل، چشمه ابتدا موج (۱) را در مرکز (۱) و سپس موج (۲) را در مرکز (۲) و به همین ترتیب موج‌های بعدی را تولید می‌کند (موج‌ها با شعاع بزرگ‌تر، زودتر تولید شده‌اند.)

همان‌طور که مشخص است، چشمهٔ صوت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (به ترتیب به مراکز امواج ۱، ۲، ۳ و ۴ توجه کنید.)

از آن‌جا که جبهه‌های موج جدید از جبهه‌های موج قدیمی جلوتر هستند، تندی حرکت چشمهٔ صوت از تندی انتشار صوت بیشتر است $(v_{\text{صوت}} > v_{\text{چشمه}})$

تست و پاسخ ۴۵

شکل‌های زیر، جهت حرکت یک چشمهٔ صوتی و یک ناظر (شنونده) را در چند وضعیت نشان می‌دهند. اگر بسامد صوت چشمه را با f_s، بسامدی که ناظر می‌شنود را با f_o، طول موج چشمهٔ ساکن را با λ_s و طول موجی را که ناظر دریافت می‌کند با λ_o نشان دهیم، کدام وضعیت‌ها درست بیان شده‌اند؟

چشمه (s)	ناظر (o)
(a) ●→	●
(b) ●→	←●
(c) ●	←●
(d) ←●	●→

الف) در وضعیت (a)، $f_o > f_s$, $\lambda_o = \lambda_s$ است.

ب) در وضعیت (b)، $f_o = f_s$, $\lambda_o < \lambda_s$ است.

پ) در وضعیت (c)، $f_o > f_s$, $\lambda_o = \lambda_s$ است.

ت) در وضعیت (d)، $f_o < f_s$, $\lambda_o > \lambda_s$ است.

۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

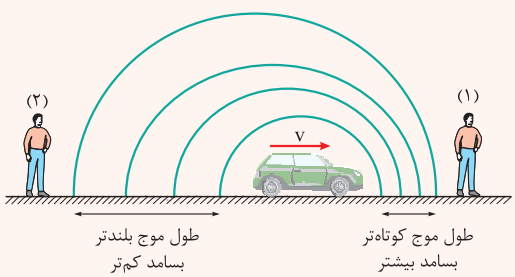
درس‌نامه

اگر چشمهٔ صوت و ناظر (شنونده) نسبت به هم حرکت داشته باشند، بسامد صوتی که به ناظر (شنونده) می‌رسد با بسامدی که ناظر در حالت سکون هر دو دریافت می‌کند، متفاوت است. به این پدیده اثر دوپلر می‌گوییم.

دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

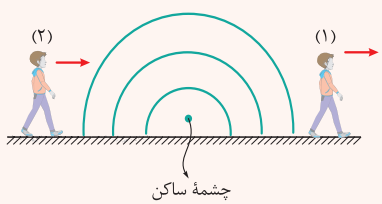
۱) چشمه متحرک و ناظر ساکن است:

مطابق شکل زیر، اگر ماشین (چشمه) به سمت راست حرکت کند، جبهه‌های صوت در جلوی ماشین به هم نزدیک‌تر و در عقب ماشین از هم دورتر می‌شوند، بنابراین طول موج در جلوی ماشین کوچک‌تر از حالت سکون و در عقب ماشین بزرگ‌تر از حالت سکون می‌شود و در نتیجه بسامدی که ناظر (۱) دریافت می‌کند، بیشتر از ناظر (۲) است.



۲) چشمه ساکن و ناظر متحرک است:

اگر چشمه ساکن باشد، طول موج در جلو و عقب چشمه برابر است و ناظری که به چشمه نزدیک می‌شود (ناظر ۲)، تعداد جبهه‌های موج بیشتری را دریافت می‌کند؛ بنابراین بسامد دریافتی این ناظر بیشتر از حالت سکون است. ناظری که از چشمه دور می‌شود، (ناظر ۱)، تعداد جبهه‌های موج کم‌تری را دریافت می‌کند و بسامد دریافتی کم‌تر از حالتی است که این ناظر ساکن بوده است.



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی **گام اول:** در وضعیت‌های a، b و c، ناظر و چشمه به هم نزدیک می‌شوند، بنابراین بسامد صوت دریافتی توسط ناظر بیشتر از حالت سکون چشمه است $(f_o > f_s)$ در وضعیت d که ناظر و چشمه از هم دور می‌شوند، بسامد صوت دریافتی توسط ناظر کم‌تر از حالت سکون چشمه است $(f_o < f_s)$؛ در نتیجه مورد «ب» نادرست است و ۱ و ۳ رد می‌شوند.

گام دوم: تنها در حالتی که چشمه ساکن است، طول موج در عقب و جلوی چشمه برابر است و تغییر نمی‌کند، بنابراین مورد «الف» نادرست است و ۲ هم رد می‌شود.

تست و پاسخ ۴۶

وال عنبر با استفاده از پژواک امواج فراصوتی با بسامد ۷۵ kHz و طول موج ۲ cm، مکان‌یابی می‌کند. اگر زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای مانعی برابر ۰/۱۲ s باشد، فاصلهٔ مانع از وال چند متر است؟

۱) ۹
۲) ۹۰
۳) ۱۸
۴) ۱۸۰

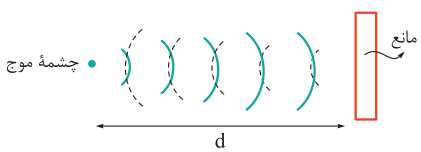
پاسخ : گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، تندی انتشار صوت ایجادشده توسط وال عنبر را به دست آورید. سپس به کمک رابطهٔ $l = vt$، مسافت طی‌شده در رفت و برگشت موج را محاسبه کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به بسامد موج ایجادشده توسط وال عنبر و طول موج آن، تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow ۰/۰۲ = \frac{v}{۷۵\times۱۰^{۳}} \Rightarrow v = ۱۵۰۰\,m/s$$

گام دوم: اگر فاصلهٔ مانع تا وال عنبر را d فرض کنیم و زمان رفت و برگشت موج، $\Delta t = ۰/۱۲s$ باشد، در این صورت موج مسافت ۲d را طی می‌کند تا به مانع بخورد و دوباره به چشمه (وال عنبر) برگردد. شکل زیر وضعیت چشمهٔ موج (وال عنبر) و مانع را نمایش می‌دهد.

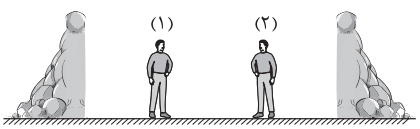


$$۲d = v\Delta t$$
$$\Rightarrow ۲d = ۱۵۰۰\times۰/۱۲$$
$$\Rightarrow ۲d = ۱۸۰ \Rightarrow d = ۹۰\,m$$

دام تستی اگر به ۰/۱۲s به عنوان زمان رفت و برگشت توجه نمی‌کردیم، آن‌گاه مسافت را d در نظر می‌گرفتیم و جواب، به اشتباه ۱۸۰m به دست می‌آمد.

تست و پاسخ ۴۷

مطابق شکل دو دانش‌آموز بین دو صخرهٔ قائم ایستاده‌اند. دانش‌آموز (۱) فریاد می‌زند و دانش‌آموز (۲) صدای فریاد مستقیم او را پس از ۰/۱ s می‌شنود، سپس اولین پژواک صدای او را ۰/۴ s بعد از آن و صدای پژواک دوم را ۰/۵ s بعد از پژواک اول می‌شنود. اگر تندی صوت در هوا ۳۲۰ m/s باشد، فاصلهٔ بین دو صخره چند متر است؟ (فاصلهٔ بین دو دانش‌آموز و صخره‌ها به اندازه‌ای است که دانش‌آموز دوم تمام پژواک‌ها را تشخیص می‌دهد.)



۱) ۴۵۸
۲) ۲۴۰
۳) ۱۶۰
۴) ۱۴۴

پاسخ : گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $\ell = vt$، ابتدا فاصلهٔ دو شخص را به دست آورید. سپس فاصلهٔ شخص ۲ از صخرهٔ سمت راست و همچنین صخرهٔ سمت چپ را حساب کنید. در انتها نیز فاصلهٔ دو صخره از هم را به دست آورید.

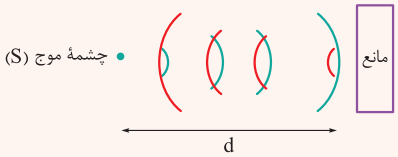
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه

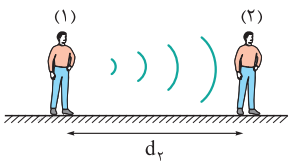
به صوتی که پس از بازتاب از یک مانع و با تأخیر زمانی نسبت به صوت اصلی، دوباره به چشمهٔ صوت برمی‌گردد، پژواک گفته می‌شود.



$$l = v \times t$$
$$\Rightarrow 2d = v \times \Delta t$$

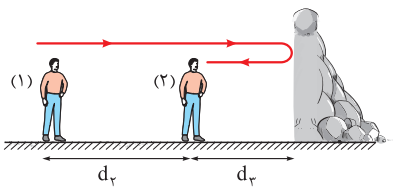
منظور از Δt، مدت‌زمان رفت و برگشت موج است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که صدای دانش‌آموز (۱) پس از ۱s / ۰ مستقیماً به دانش‌آموز (۲) می‌رسد، فاصلهٔ دو شخص (d_2) را به دست می‌آوریم:



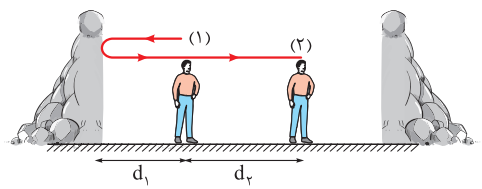
$$l = v_{\text{صوت}} \times t$$
$$\Rightarrow d_2 = 320 \times 0/1 = 32\,m$$

گام دوم: دانش‌آموز (۲)، ۰ / ۴s پس از شنیدن صدا به صورت مستقیم (۰ / ۵s پس از صوت اولیه)، پژواک اول را می‌شنود. مسیر صوت در شکل زیر مشخص شده است:



$$l = v_{\text{صوت}} \times t$$
$$\Rightarrow (d_2 + 2d_3) = 320 \times (0/4 + 0/1)$$
$$\Rightarrow 32 + 2d_3 = 160$$
$$\Rightarrow d_3 = 64\,m$$

گام سوم: دانش‌آموز (۲)، ۰ / ۵s پس از شنیدن صدای پژواک اول (۱s پس از صوت اولیه)، صدای پژواک دوم را می‌شنود. مسیر صوت در پژواک دوم به در شکل مقابل مشخص شده است:



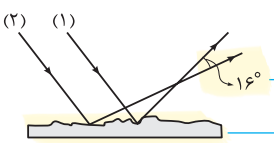
$$l = v_{\text{صوت}} \times t$$
$$\Rightarrow (2d_1 + d_2) = 320 \times 1 \Rightarrow 2d_1 + 32 = 320$$
$$\Rightarrow d_1 = 144\,m$$

گام چهارم: فاصلهٔ دو صخره را به دست می‌آوریم.

$$\text{فاصلهٔ دو صخره} = d_1 + d_2 + d_3 = 144 + 32 + 64 = 240\,m$$

تست و پاسخ ۴۸

در شکل زیر، دو پرتوی نور موازی (۱) و (۲) به سطح بازتابندهٔ ناهمواری می‌تابند. اگر زاویهٔ تابش پرتوی (۱) برابر 40° باشد، زاویهٔ بازتابش پرتوی (۲) چند درجه است؟



اختلاف زاویهٔ پرتوهای بازتابش دو پرتو، 16° است.

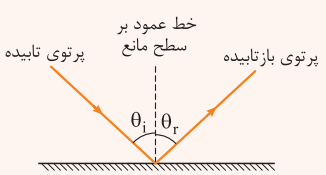
با توجه به ناهموار بودن سطح، پرتوهای تابش موازی به صورت موازی بازتاب نمی‌شوند.

۱) ۵۶
۲) ۴۸
۳) ۳۲
۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

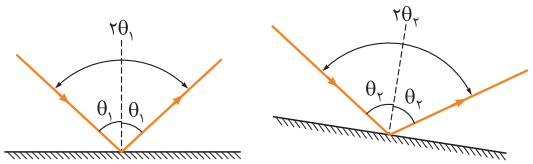
قانون بازتاب عمومی: برای هر وضعیت مانع و همهٔ انواع موج، همواره زاویهٔ بازتابش برابر با زاویهٔ تابش است. یعنی: $\theta_i = \theta_r$



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی



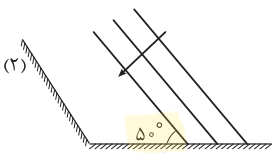
$$۲\theta_۲ - ۲\theta_۱ = ۱۶^\circ \Rightarrow \theta_۲ - \theta_۱ = ۸^\circ \xrightarrow{\theta_۱ = ۴۰^\circ} \theta_۲ - ۴۰^\circ = ۸^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_۲ = ۴۸^\circ$$

تست و پاسخ ۴۹

در شکل زیر، جبهه‌های موج تختی به مانع تخت شمارهٔ (۱) تابیده و پس از بازتاب از آن، به مانع تخت شمارهٔ (۲) می‌رسد. زاویهٔ بین دو مانع تخت، چند درجه باشد تا جبهه‌های موج بازتابیده از مانع (۲)، موازی مانع (۱) باشند؟

۱) ۱۰۵
۲) ۱۱۰
۳) ۱۱۵
۴) ۱۲۰



پرتوی بازتابیده از مانع (۲) باید بر مانع (۱) عمود باشد.

زاویهٔ تابش پرتوی فرودی ۵۰° است.

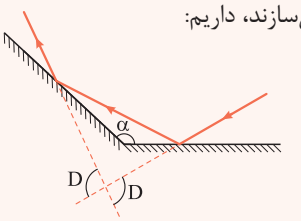
پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره *یاد بگیر در کنار مفهومی حل کردن، تکنیک حل یه سری سؤالا مثل این تست رو بلد باشی تا به راحتی از پسش بربیای!*

درس نامه

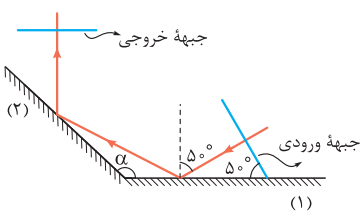
۱) زاویهٔ بین جبههٔ موج فرودی با مانع، همان زاویهٔ تابش است.

۲) در برخورد یک پرتو به دو مانع تخت متقاطع که مطابق شکل زیر با هم زاویهٔ منفرجه $(\alpha > ۹۰^\circ)$ می‌سازند، داریم:

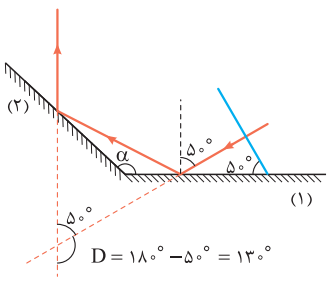


$D = ۲(۱۸۰^\circ - \alpha)$: زاویهٔ انحراف

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا پرتوهای ورودی و خروجی و جبهه‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم.



گام دوم: زاویهٔ انحراف را حساب می‌کنیم:



گام سوم: زاویهٔ بین دو مانع (α) را با داشتن زاویهٔ انحراف به دست می‌آوریم:

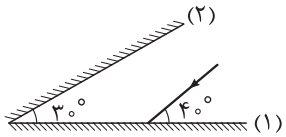
$$D = ۲(۱۸۰^\circ - \alpha) \Rightarrow ۱۳۰^\circ = ۲(۱۸۰^\circ - \alpha) \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \alpha = ۶۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۱۵^\circ$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۵۰

پرتوی نوری مطابق شکل زیر به آینهٔ (۱) می‌تابد. زاویهٔ بازتاب آخرین برخورد این پرتو به آینه‌ها چند درجه است؟ (طول دو آینه به اندازهٔ کافی بلند است.)



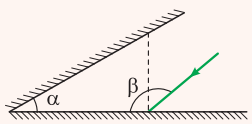
۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۷۰
۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره *بذار یه چیزی بگم خیالتو راحت کنم. اگه توی چنین سؤالایی تکنیک حل بلد نباشی، با یه شکل شلوغ و راه‌حل طولانی روبه‌رو میشی. نکات گفته‌شده توی پاسخ‌نامه رو با دقت بخون.*

درس‌نامه

مطابق شکل زیر، وقتی یک پرتو به سطح یکی از دو آینه تخت متقاطع می‌تابد، برای این‌که تعداد برخورد به آینه‌ها (n) را به دست آوریم، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



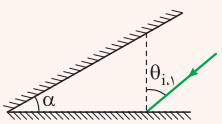
$$\hat{\beta} = \hat{\theta}_{i,1} + 90^\circ$$

$\hat{\alpha}$: زاویهٔ بین دو آینه

عدد صحیح باشد $\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow n = \frac{\beta}{\alpha}$

عدد صحیح نباشد $\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow n = \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] + 1$

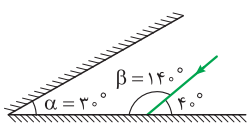
مطابق شکل زیر، برای محاسبهٔ زاویهٔ بازتاب در n امین برخورد یک پرتو به آینه‌های متقاطع که با هم زاویهٔ حاده $(\alpha < 90^\circ)$ می‌سازند، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



$$\hat{\theta}_{r,n} = |(n-1)\alpha - \hat{\theta}_{i,1}|$$

$\hat{\theta}_{r,n}$: زاویهٔ بازتاب در n امین برخورد

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تعداد برخورد به آینه‌ها را حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



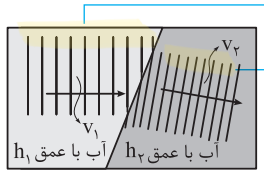
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{140}{30} \Rightarrow n = \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] + 1 = \left[\frac{140}{30}\right] + 1 = 5$$

گام دوم: زاویهٔ بازتاب در آخرین برخورد پرتو (برخورد پنجم) را به دست می‌آوریم:

$$\hat{\theta}_{r,n} = |(n-1)\alpha - \hat{\theta}_{i,1}| \Rightarrow \hat{\theta}_{r,5} = |(5-1)30^\circ - (90^\circ - 40^\circ)| = 120^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

تست و پاسخ ۵۱

شکل زیر، طرحی از شکست جبهه‌های موج سطحی در مرز آب با عمق‌های متفاوت h_1 و h_2 را نشان می‌دهد. اگر تندی انتشار آب در عمق h_1 را با v_1 و تندی انتشار آب در عمق h_2 را با v_2 نشان دهیم، کدام گزینه درست است؟



فاصلهٔ جبهه‌ها زیادتر ← طول موج زیادتر

فاصلهٔ جبهه‌ها کم‌تر ← طول موج کم‌تر

۱) $v_1 < v_2 , h_1 > h_2$
۲) $v_1 > v_2 , h_1 < h_2$
۳) $v_1 < v_2 , h_1 < h_2$
۴) $v_1 > v_2 , h_1 > h_2$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره *این قسمت از کتاب بکر و دست‌نخورده‌ست و تا حالا توی کنکور نیومده. پس حواست بوش باشه. نگی نگفتیا!*

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

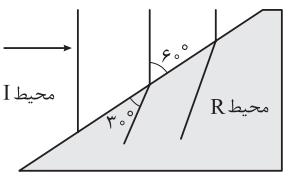
درس‌نامه

در آب‌های سطحی، با افزایش عمق، تندی انتشار موج افزایش و با توجه به ثابت‌ماندن بسامد موج، طول موج نیز افزایش می‌یابد.

پاسخ تشریحی طبق نکتهٔ اشاره‌شده در درس‌نامه، چون فاصلهٔ جبهه‌ها در آب با عمق h_1، بیشتر از فاصلهٔ جبهه‌های موج در آب با عمق h_2 است، در می‌یابیم $v_1 > v_2$ بوده و $h_1 > h_2$ است.

تست و پاسخ ۵۲

جبهه‌های موج فرودآمده بر مرز دو محیط I و R به شکل زیر است. به ترتیب، طول موج و بسامد این موج در محیط I از راست به چپ چند برابر طول موج و بسامد این موج در محیط R است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۱ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

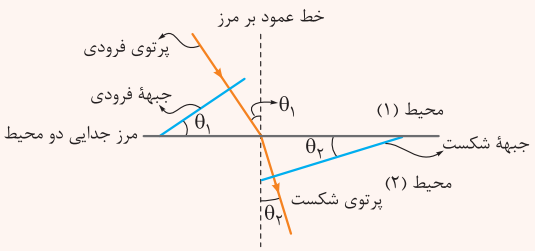
۴) ۱ و $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره *مبحث شکست موج بسیار پرتکراره، چه در کنکور چه در امتحان نهایی. پس خوب هواستو جمع کن و درس‌نامه رو بخون تا بتونی به سوالاتش جواب بدی.*

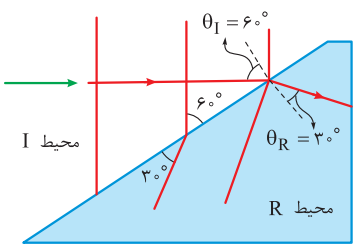
درس‌نامه

وقتی یک پرتو از محیط (۱) به محیط (۲) وارد می‌شود، در اثر تغییر تندی موج، پدیدهٔ شکست موج اتفاق می‌افتد. مطابق شکل زیر و براساس قانون شکست عمومی داریم:



$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \xrightarrow[\lambda=\frac{v}{f}]{f_1=f_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

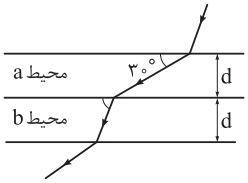
پاسخ تشریحی می‌دانیم در اثر ورود موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد تغییر نمی‌کند، چون از ویژگی‌های چشمهٔ موج است؛ بنابراین $\frac{f_I}{f_R} = ۱$ است. از طرفی با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\frac{\lambda_I}{\lambda_R} = \frac{v_I}{v_R} = \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_R} \Rightarrow \frac{\lambda_I}{\lambda_R} = \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_R} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

تست و پاسخ ۵۳

مسیر عبور پرتوی نور از چند محیط شفاف با مرزهای موازی به شکل زیر است. اگر زمان حرکت پرتوی نور در دو محیط a و b یکسان باشد، ضریب شکست محیط b چند برابر ضریب شکست محیط a است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۴) $\sqrt{۳}$

چون مسافتی که پرتو در محیط a طی می‌کند، بیشتر است، پس تندی در محیط a بیشتر از تندی در محیط b است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

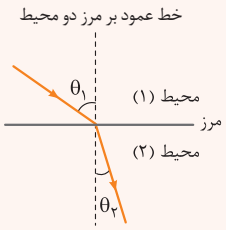
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره *بعضی مباحث توی فیزیک با هم مرتبطن و باید کنار هم یادشون بگیری. مثل همین قانون شکست عمومی و قانون شکست اسنل که توی این سؤال با هم ترکیب شدن.*

درس‌نامه

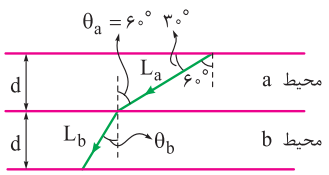
ترکیب قانون شکست عمومی و قانون شکست اسنل:

به شکل مقابل نگاه کنید. وقتی یک پرتو از محیط (۱) وارد محیط (۲) می‌شود، می‌توانیم بگوییم:



$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از رابطهٔ تندی و قانون شکست عمومی، زاویهٔ θ_b را به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر، داریم:



$$v=\frac{L}{t}\Rightarrow t=\frac{L}{v}$$

$$\xrightarrow{t_a=t_b}\frac{L_a}{v_a}=\frac{L_b}{v_b}\Rightarrow\frac{v_a}{v_b}=\frac{L_a}{L_b}$$

$$\xrightarrow[L_b=\frac{d}{\cos\theta_b}]{L_a=\frac{d}{\sin ۳۰^\circ}=۲d}\frac{v_a}{v_b}=\frac{۲d}{\frac{d}{\cos\theta_b}}=۲\cos\theta_b$$

$$\xrightarrow[\sin\theta_a=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}]{\text{قانون شکست عمومی}:\frac{v_a}{v_b}=\frac{\sin\theta_a}{\sin\theta_b}}\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin\theta_b}=۲\cos\theta_b$$

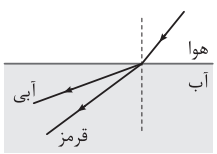
$$\Rightarrow ۲\sin\theta_b.\cos\theta_b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{۲\sin\theta_b.\cos\theta_b=\sin ۲\theta_b}\sin ۲\theta_b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۲\theta_b=۶۰^\circ\Rightarrow\theta_b=۳۰^\circ$$

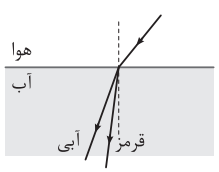
گام دوم: با استفاده از قانون شکست اسنل، $\frac{n_b}{n_a}$ را به دست می‌آوریم:

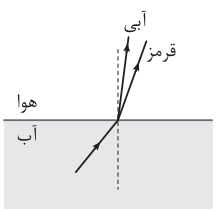
$$\frac{n_b}{n_a}=\frac{\sin\theta_a}{\sin\theta_b}\Rightarrow\frac{n_b}{n_a}=\frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

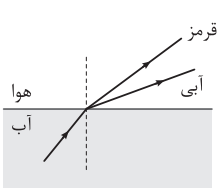
تست و پاسخ ۵۴

باریکهٔ نوری که شامل نورهای قرمز و آبی است، در آزمایش اول از هوا وارد آب و در آزمایش دوم از آب وارد هوا می‌شود. کدام شکل، شکست این باریکهٔ نور را به درستی نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴

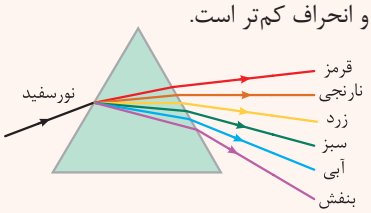
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

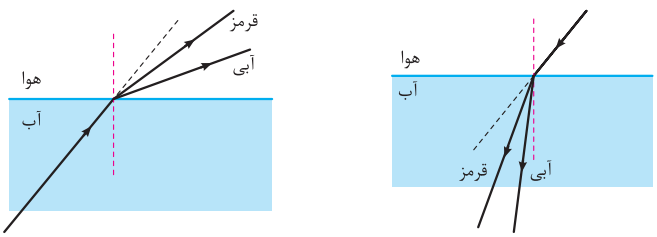
درس‌نامه پاشندگی نور

می‌دانیم ضریب شکست یک محیط شفاف به‌جز خلأ، برای طول موج‌های متفاوت فرق دارد و هر چه طول موج کم‌تر باشد، ضریب شکست بیشتر است؛ این تفاوت در ضریب شکست، باعث می‌شود که وقتی یک باریکهٔ نور از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود، رنگ‌های سازنده‌اش از هم جدا شوند. شکل زیر باریکه‌ای از نور سفید را نشان می‌دهد که پس از عبور از منشور شیشه‌ای، مؤلفه‌های رنگی آن از هم جدا می‌شوند. با توجه به این شکل، درمی‌یابیم که هرچه طول موج بیشتر باشد، ضریب شکست و انحراف کم‌تر است.



پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی یک پرتو از محیطی با ضریب شکست کم‌تر به محیطی با ضریب شکست بیشتر برود، به خط عمود بر مرز دو محیط نزدیک‌تر می‌شود و وقتی یک پرتو از محیطی با ضریب شکست بیشتر به محیطی با ضریب شکست کم‌تر برود، از خط عمود بر مرز دو محیط دورتر می‌شود. بنابراین ۱ و ۳ نادرست هستند.

گام دوم: از طرفی چون طول موج نور آبی کم‌تر از طول موج نور قرمز است، بنابراین انحراف نور آبی بیشتر از انحراف نور قرمز است؛ در نتیجه ۲ نادرست است. شکل‌های زیر هر دو آزمایش را به درستی نشان می‌دهد:



تست و پاسخ ۵۵

کدام پرتوی تک‌رنگ و در کدام محیط، با عبور از شکافی به پهنای ۴ μm، پراش بارزتری ایجاد می‌کند؟

۱) نور آبی در آب ۲) نور قرمز در آب ۳) نور آبی در هوا ۴) نور قرمز در هوا

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته پدیدهٔ پراش در صورتی اتفاق می‌افتد که پهنای شکاف یا ابعاد مانع، در حدود طول موجِ موج فرودی باشد. هرچه پهنای شکاف کوچک‌تر و طول موج بزرگ‌تر باشد، پراش بارزتری را مشاهده می‌کنیم.

پاسخ تشریحی طبق نکته‌ای که گفتیم، برای این‌که پراش بارزتری را مشاهده کنیم باید طول موج بیشتری داشته باشیم. از طرفی می‌دانیم تندی انتشار و در نتیجه طول موج نور در آب، از هوا کم‌تر است؛ ضمناً طول موج نور قرمز از نور آبی بیشتر است؛ بنابراین پراش حاصل از نور قرمز در هوا بارزتر است.

تست و پاسخ ۵۶

کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ آزمایش یانگ نادرست است؟

۱) در نقطه‌هایی که موج‌های حاصل از پراش با یکدیگر تداخل سازنده دارند، روی پرده، فریزهای روشن تشکیل می‌شود.

۲) اگر آزمایش یانگ را در شرایط یکسان، بار اول در هوا و بار دوم در آب انجام دهیم، پهنای نوارهای تاریک و روشن در آب کاهش می‌یابد.

۳) در آزمایش یانگ اگر به جای نور تک‌فام سبز از نور تک‌فام آبی استفاده کنیم، پهنای نوارهای تداخلی افزایش می‌یابد.

۴) آزمایش تداخلی یانگ نشان داد که نور هم مانند صوت ماهیت موجی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه تداخل امواج نوری (آزمایش یانگ)

اگر تداخل دو موج نوری، سازنده باشد، در آن ناحیه یک نوار (فریز) روشن و اگر ویرانگر باشد، در آن ناحیه یک نوار (فریز) تاریک تشکیل می‌شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

نکته پهنای هر نوار تاریک یا روشن، متناسب با طول موج نور به‌کاررفته در آزمایش است؛ به طوری که هرچه طول موج به‌کاررفته بیشتر باشد، پهنای نوار بیشتر است.

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامه‌ای که گفتیم، با کم‌ترشدن طول موج، پهنای نوارهای تداخلی کاهش می‌یابد؛ بنابراین وقتی به جای نور سبز از نور آبی که طول موج کم‌تری دارد استفاده کنیم، پهنای نوارهای تاریک و روشن کاهش می‌یابد. (۳ نادرست)

تست و پاسخ ۵۷

تار ویولنی که طول آن ۱۵ cm و در دو انتها بسته شده است، در مُد $n = 1$ خود نوسان می‌کند. تندی موج عرضی در این تار ۲۵۰ m / s و تندی صوت در هوا ۳۴۰ m / s است. طول موج امواج صوتی گسیل‌شده از تار چند سانتی‌متر است؟

این امواج در هوا گسیل شده و بسامد آن‌ها تغییری نمی‌کند.

۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۲۰ / ۴
۴) ۴۰ / ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

برای محاسبهٔ بسامدهای تشدیدی در ریسمان کشیده‌ای که بین دو نقطه ثابت شده است، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_n = \frac{n\,v}{2L}$$

(f_n: بسامدهای تشدیدی تار (Hz)، n: عدد هماهنگ، v: تندی موج در تار (m/s)، L: طول تار (m))

پاسخ تشریحی **گام اول:** بسامد تار را حساب می‌کنیم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f_1 = \frac{1 \times 250}{2 \times 0/15} = \frac{2500}{3}\ \text{Hz}$$

گام دوم: طول موج صوت در هوا را حساب می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{340}{\frac{2500}{3}} = 0/408\ \text{m} = 40/8\ \text{cm}$$

حواستون باشه *خواست به دام ۲ باشه، طول موج صوت در هوا رو ازت می‌پرسه نه طول موج تار.*

تست و پاسخ ۵۸

رشته‌ای از بسامدهای تشدیدی یک تار با دو انتهای بسته، به طول ۸۰ cm و جرم ۱۶ g عبارت‌اند از: ۱۲۵ Hz، ۱۸۷ / ۵ Hz و ۳۱۲ / ۵ Hz. در این رشته دو بسامد (کم‌تر از ۳۲۰ Hz) جا افتاده است. به ترتیب از راست به چپ نیروی کشش تار چند نیوتون است و در حالتی که مجموع گره‌ها و شکم‌ها در طول تار ۹ عدد است، چند میلی‌ثانیه طول می‌کشد تا هر یک از ذرات تار، یک نوسان کامل انجام دهد؟

۱) ۴۰۰ و ۴
۲) ۲۰۰ و ۴
۳) ۴۰۰ و ۲
۴) ۲۰۰ و ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱) تندی انتشار موج عرضی در تار تحت کشش، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

(F: نیرو (N)، L: طول تار (m)، m: جرم (kg))

۲) اختلاف دو بسامد تشدیدی متوالی در تار دو انتهابسته، برابر با بسامد تشدیدی هماهنگ اول است.

$$f_{n+1} - f_n = f_1$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳) بسامد تشدیدی هماهنگ n ام در تار دوانتهابسته، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

در رابطهٔ بالا، تعداد شکم برابر با عدد هماهنگ (n) است.

پاسخ تشریحی ابتدا بسامدهای تشدیدی در تار دوانتها بسته را به صورت زیر می‌نویسیم تا بهتر بتوانیم راجع به آن‌ها صحبت کنیم:

$$f_C = 312/5\,Hz \;,\; f_B = 187/5\,Hz \;,\; f_A = 125\,Hz$$

طبق صورت سؤال، در رشته بسامدهای تشدیدی بالا، دو بسامد کم‌تر از $320\,Hz$ جا افتاده است. باید به دنبال این دو بسامد بگردیم تا بتوانیم مقدار f_1 را پیدا کنیم.

اختلاف دو بسامد تشدیدی f_A و f_B و سپس f_B و f_C را به دست می‌آوریم:

$$f_B - f_A = 187/5 - 125 = 62/5\,Hz$$
$$f_C - f_B = 312/5 - 187/5 = 125\,Hz = 2\times 62/5\,Hz$$

با کمی دقت در این اختلاف‌ها، می‌بینیم که چون اختلاف f_B و f_C بیشتر از اختلاف f_A و f_B است، پس باید یک بسامد تشدیدی بین f_B و f_C باشد و با کمی تفکر بیشتر، متوجه می‌شویم که اگر $f_1 = 62/5\,Hz$ باشد، دو بسامد جاافتاده ظاهر می‌شوند و دستهٔ بسامدهای تشدیدی متوالی در این تار دو انتها بسته به صورت مقابل می‌شود: $f_1 = 62/5\,Hz$، $f_2 = 125\,Hz$، $f_3 = 187/5\,Hz$، $f_4 = 250\,Hz$ و $f_5 = 312/5\,Hz$.

بنابراین $f_1 = 62/5\,Hz$ است و حالا می‌توانیم با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، اندازهٔ تندی انتشار موج عرضی در تار را محاسبه کنیم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow[n=1,\,L=0/8\,m]{f_1=62/5\,Hz} \frac{625}{10} = \frac{v}{2\times 0/8} \Rightarrow v = 100\,m/s$$

در ادامه نیروی کشش تار را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \Rightarrow 100 = \sqrt{\frac{F\times(0/8)}{16\times 10^{-3}}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 10^4 = \frac{0/8F}{16\times 10^{-3}} \Rightarrow F = 200\,N$$

۱ و ۳ پَرا!

نکته در موج تشکیل‌شده در تار دوانتهابسته، تعداد گره‌ها یک عدد بیشتر از تعداد شکم‌هاست. تعداد گره‌ها = تعداد شکم‌ها + ۱

با توجه به نکتهٔ مطرح‌شده، ابتدا تعداد شکم‌ها را در حالتی که مجموع تعداد گره‌ها و شکم‌ها در طول تار برابر با ۹ است، به دست می‌آوریم تا بتوانیم با استفاده از آن، عدد هماهنگ بسامد تشدیدی تار را پیدا کنیم.

$$\text{تعداد گره‌ها} + \text{تعداد شکم‌ها} = 9 \xrightarrow[n=\text{تعداد شکم‌ها}]{\text{تعداد گره‌ها} = \text{تعداد شکم‌ها} + 1} 2n + 1 = 9 \Rightarrow n = 4$$

حالا عدد هماهنگ بسامد تشدیدی تار در این حالت را فهمیدیم $(n = 4)$؛ پس می‌توانیم بسامد تشدیدی هماهنگ چهارم این تار دوانتهابسته را محاسبه کنیم.

$$f_4 = \frac{4v}{2L} \xrightarrow[L=0/8\,m]{v=100\,m/s} f_4 = \frac{4\times 100}{2\times 0/8} = 250\,Hz$$

ما مدت‌زمانی را می‌خواهیم که طول می‌کشد تا در این حالت، هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام دهد یعنی دورهٔ تناوب موج در این حالت!

$$T_4 = \frac{1}{f_4} \xrightarrow{f_4 = 250\,Hz} T_4 = \frac{1}{250}\,s = 0/004\,s = 4\,ms$$

حواستون باشه دورهٔ تناوب هر یک از ذرات محیط برابر با دورهٔ تناوب موج است.

تست و پاسخ ۵۹

شدت تابش خورشید در سطح زمین $300\,W/m^2$ است. اگر طول موج متوسط فوتون‌های تابشی خورشید به سطح زمین $600\,nm$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به سطحی به مساحت $5\,m^2$ می‌رسد؟ $(h = 6\times 10^{-34}\,J.s \text{ و } c = 3\times 10^8\,m/s)$

۱) 3×10^{23} ۲) 3×10^{24} ۳) 6×10^{23} ۴) 6×10^{24}

پاسخ: گزینهٔ ۱

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

درس‌نامه

انرژی n فوتون از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{n h c}{\lambda}$$

ثابت پلانک (J.s) ↑ — تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ (m/s) → c

↓ طول موج فوتون (m) → λ

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا توان تابشی خورشید در سطح زمین را که به سطحی با مساحت $5\,m^2$ می‌رسد، به دست می‌آوریم:

$$P=300\frac{W}{m^2}\times 5\,m^2=1500\,W$$

گام دوم: حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، تعداد فوتون‌هایی را که در هر دقیقه به این سطح می‌رسد، محاسبه می‌کنیم:

$$E=\frac{nhc}{\lambda}\xrightarrow{E=Pt}Pt=\frac{nhc}{\lambda}\Rightarrow 1500\times 60=n\times\frac{6\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{600\times10^{-9}}\Rightarrow n=3\times10^{23}$$

تست و پاسخ ۶۰

در شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگ با بسامد مناسب، بر سطح یک فلز می‌تابد و سبب گسیل الکترون از سطح فلز می‌شود. اگر با ثابت‌ماندن بسامد نور، شدت آن را افزایش دهیم، به ترتیب از راست به چپ تعداد و بیشینهٔ انرژی فوتوالکترون‌ها چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد ـ تغییری نمی‌کند.
۲) تغییری نمی‌کند ـ افزایش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد ـ افزایش می‌یابد.
۴) تغییری نمی‌کند ـ تغییری نمی‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی شکل داده‌شده در سؤال، اثر فوتوالکتریک را نشان می‌دهد که نور تابیده‌شده بر سطح این فلز، باعث جداشدن الکترون از سطح فلز شده است. اگر شدت نور تابشی را با ثابت ماندن بسامد نور افزایش دهیم، تعداد فوتوالکترون‌ها (الکترون‌های کنده‌شده از سطح فلز) **افزایش می‌یابد** و اگر بسامد نور ثابت بماند، انرژی فوتوالکترون‌ها هم ثابت می‌ماند و **تغییر نمی‌کند.**

تست و پاسخ ۶۱

در یک آزمایش فوتوالکتریک، با ۲ برابر کردن طول موج نور تابشی به سطح یک فلز، تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده، ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. اگر بسامد آستانهٔ فلز ۵۰۰ THz باشد، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها چند ژول تغییر کرده است؟

($c=3\times10^{8}\ m/s$ و $e=1/6\times10^{-19}\,C$ ،$hc=1200\ eV.nm$)

۱) $1/6\times10^{-19}$ ۲) $3/2\times10^{-19}$ ۳) $4/8\times10^{-19}$ ۴) $6/4\times10^{-19}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$K_{max}=hf-hf_0$$

بسامد فوتون (Hz) ↙ — ↘ بسامد آستانهٔ فلز (Hz)

(معادلهٔ فوتوالکتریک)

پاسخ تشریحی با ۲ برابر کردن طول موج نور تابشی به سطح یک فلز، طبق رابطهٔ $\lambda=\frac{c}{f}$، بسامد نور تابشی به فلز $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود. کافی است دو حالت را در معادلهٔ فوتوالکتریک جای‌گذاری کنیم و دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل بدهیم.

$$K_{max}=hf-hf_0\Rightarrow\begin{cases}K_{max_1}=hf-hf_0 & (1)\\ K_{max_2}=\frac{hf}{2}-hf_0 & (2)\end{cases}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

همچنین با توجه به این‌که تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز، ۵۰ درصد کاهش یافته است، می‌توانیم K_{max_2} را برحسب K_{max_1} به دست آوریم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow \frac{K_{max_2}}{K_{max_1}}=\left(\frac{v_{max_2}}{v_{max_1}}\right)^2 \xrightarrow{v_{max_2}=\frac{1}{2}v_{max_1}} K_{max_2}=\frac{1}{4}K_{max_1}$$

حالا مقدار به‌دست‌آمده را در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم و دستگاه دو معادله و دو مجهول را دوباره می‌نویسیم:

$$\begin{cases} K_{max_1}=hf-hf_\circ & (1)\\ \frac{1}{4}K_{max_1}=\frac{hf}{2}-hf_\circ & (3)\end{cases}$$

طرفین رابطهٔ (۱) را در $-\frac{1}{2}$ ضرب کرده و با رابطهٔ (۳) جمع می‌کنیم:

$$-\frac{1}{2}K_{max_1}+\frac{1}{4}K_{max_1}=\frac{hf_\circ}{2}-hf_\circ$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}K_{max_1}=-\frac{hf_\circ}{2} \Rightarrow K_{max_1}=2hf_\circ \quad (4)$$

حالا رابطهٔ (۴) را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2hf_\circ=hf-hf_\circ \Rightarrow hf=3hf_\circ \Rightarrow f=3f_\circ \xrightarrow{f_\circ=5\times10^{12}Hz} f=3\times5\times10^{12}=15\times10^{14}Hz$$

بسامد نور تابشی اولیه را به دست آوردیم. پس طول موج نور تابشی اولیه را نیز می‌توانیم محاسبه کنیم.

$$\lambda=\frac{c}{f} \xrightarrow[f=15\times10^{14}Hz]{c=3\times10^8 m/s} \lambda=\frac{3\times10^8}{15\times10^{14}}=\frac{1}{5}\times10^{-6}m=200nm$$

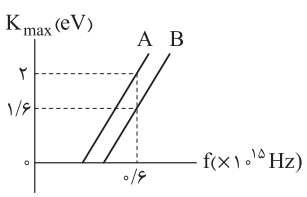
سؤال از ما اختلاف بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز، در این دو حالت را برحسب ژول می‌خواهد (یعنی اختلاف رابطه‌های (۱) و (۲)). پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\underbrace{K_{max_1}-K_{max_2}}_{\Delta K}=\frac{hf}{2} \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} \Delta K=\frac{hc}{2\lambda} \xrightarrow[\lambda=200nm]{hc=1200eV.nm} \Delta K=\frac{1200}{2\times200}=3eV$$

$$\xrightarrow{1eV=1/6\times10^{-19}J} \Delta K=3\times1/6\times10^{-19}=4/8\times10^{-19}J$$

تست و پاسخ ۶۲

نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح دو فلز A و B، برحسب بسامد نور فرودی، مطابق شکل زیر است. طول موج آستانهٔ فلز A چند برابر طول موج آستانهٔ فلز B است؟ ($h=4\times10^{-15}$ eV.s)

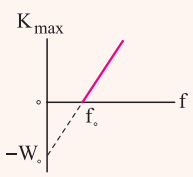


۱) $\frac{4}{5}$
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برحسب بسامد نور فرودی:



پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به اطلاعات داده‌شده در نمودار و با جای‌گذاری آن‌ها در معادلهٔ فوتوالکتریک، بسامد آستانهٔ فلزهای A و B را به دست می‌آوریم:

$$K_{max}=hf-hf_\circ \Rightarrow \begin{cases} K_{max_A}=hf_A-hf_{\circ A}\\ K_{max_B}=hf_B-hf_{\circ B}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=4\times10^{-15}\times0/6\times10^{15}-4\times10^{-15}f_{\circ A}\\ 1/6=4\times10^{-15}\times0/6\times10^{15}-4\times10^{-15}f_{\circ B}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\times10^{-15}f_{\circ A}=0/4\\ 4\times10^{-15}f_{\circ B}=0/8\end{cases} \Rightarrow f_{\circ A}=10^{14}Hz \ , \ f_{\circ B}=2\times10^{14}Hz$$

Telegram: @konkur_in

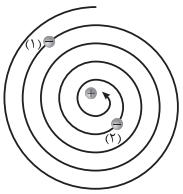
www.konkur.in

گام دوم: در آخر خواستهٔ سؤال یعنی نسبت $\frac{\lambda_{\circ A}}{\lambda_{\circ B}}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{\lambda_{\circ A}}{\lambda_{\circ B}} = \frac{f_{\circ B}}{f_{\circ A}} = \frac{۲ \times ۱۰^{۱۴}}{۱۰^{۱۴}} = ۲$$

تست و پاسخ ۶۳

در مدل اتمی رادرفورد، الکترون، با فرض آن‌که به دور هسته در گردش باشد، مسیری به شکل زیر را طی می‌کند. کدام مورد دربارهٔ انرژی الکترون (E) و بسامد موج الکترومغناطیسی گسیلی از آن (f) در دو نقطهٔ (۱) و (۲) از مسیرش درست است؟



۱) $f_۱ > f_۲$ و $E_۱ > E_۲$
۲) $f_۲ > f_۱$ و $E_۱ > E_۲$
۳) $f_۱ > f_۲$ و $E_۲ > E_۱$
۴) $f_۲ > f_۱$ و $E_۲ > E_۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی مدل اتمی رادرفورد با چالش‌هایی مواجه شد. یکی از این چالش‌ها این بود که اگر الکترون‌ها، مانند سیاره‌های منظومهٔ خورشیدی که دور خورشید می‌چرخند، به دور هسته در گردش باشند، این حرکت پایدار نمی‌ماند، زیرا حرکت مداری الکترون به دور هسته، شتاب‌دار است. بنابر فیزیک کلاسیک، این حرکت شتاب‌دار الکترون سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود که بسامد آن با بسامد حرکت مداری الکترون برابر است. با تابش موج الکترومغناطیسی توسط الکترون، از انرژی آن کاسته می‌شود $(E_۲ < E_۱)$. این کاهش انرژی باعث می‌شود که شعاع مدار الکترون به دور هسته، به‌تدریج کوچک‌تر و بسامد حرکت آن به‌تدریج بیشتر شود. این افزایش تدریجی بسامد حرکت مداری الکترون‌ها، سبب می‌شود تا بسامد موج الکترومغناطیسی گسیل‌شده نیز به تدریج زیاد شود $(f_۲ > f_۱)$.

تست و پاسخ ۶۴

در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، شعاع مدار مانای الکترون در دومین حالت برانگیخته، چند برابر شعاع مدار مانای الکترون در سومین حالت برانگیخته است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

۱) شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$r_n = a_\circ n^۲$$

عدد کوانتومی ↑ — ↓ شعاع بور

$r_۱ = a_\circ =$ شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن

۲) در اتم هیدروژن، پایین‌ترین تراز انرژی $(n = ۱)$، حالت پایه و ترازهای بالاتر $(n > ۱)$، حالت‌های برانگیخته نام دارند. بنابراین عدد کوانتومی اولین، دومین، سومین و ... حالت برانگیخته، به ترتیب برابر با $n_۱ = ۲$، $n_۲ = ۳$، $n_۳ = ۴$ و ... است.

پاسخ تشریحی عدد کوانتومی دومین و سومین حالت برانگیخته، به ترتیب برابر با $n_۲ = ۳$ و $n_۳ = ۴$ است. کافی است از رابطهٔ $r_n = a_\circ n^۲$ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$\frac{r}{r'} = \left(\frac{n_۲}{n_۳}\right)^۲ = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶}$$

تست و پاسخ ۶۵

در اتم هیدروژن، کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n' برسد، ۹۰۰ nm است. بلندترین طول موج تابشی الکترونی که در مدار n' قرار دارد، چند نانومتر و چندمین خط کدام رشته است؟ (پایین‌ترین شمارهٔ مدار در طیف‌های لیمان و بالمر، به ترتیب ۱ و ۲ است و $R = ۰/۰۱ (nm)^{-۱}$)

۱) ۱۱۲/۵، دومین خط رشتهٔ لیمان
۲) ۱۱۲/۵، اولین خط رشتهٔ بالمر
۳) ۷۲۰، دومین خط رشتهٔ لیمان
۴) ۷۲۰، اولین خط رشتهٔ بالمر

پاسخ: گزینهٔ ۴

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

درس‌نامه

۱) در اتم هیدروژن، اگر الکترونی از مدار n به مدار n' برود، یک فوتون تابش می‌کند که طول موج آن از معادلهٔ ریدبرگ به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\ ,\ n>n'$$

در این رابطهٔ λ برحسب nm است. برای این‌که کوتاه‌ترین طول موج فوتونی را که در اتم هیدروژن گسیل می‌شود تا الکترون به مدار n' برسد به دست بیاوریم، باید $n=\infty$ باشد و برای این‌که بلندترین طول موج فوتونی را که در اتم هیدروژن گسیل می‌شود تا الکترون به مدار n' برسد به دست بیاوریم، باید $n=n'+۱$ را در رابطه قرار دهیم.

۲) اگر بخواهیم عدد کوانتومی (n) خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته (n') را با استفاده از شمارهٔ خط طیفی آن رشته به دست بیاوریم، به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: شمارهٔ خط طیفی $+\ n'=n$

پاسخ تشریحی **گام اول:** کوتاه‌ترین طول موج فوتونی که در اتم هیدروژن گسیل می‌شود تا الکترون به مدار n' برسد، مربوط به گذار الکترون از مدار $n=\infty$ به مدار n' است؛ بنابراین با استفاده از معادلهٔ ریدبرگ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\Rightarrow\frac{۱}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{\infty^{۲}})\Rightarrow n'^{۲}=۹\Rightarrow n'=۳$$

گام دوم: حالا برای این‌که بلندترین طول موج فوتونی را که توسط گذار الکترون از مدار $n'=۳$ به مدار n'' تابش می‌شود به دست آوریم، باید $n''=۲$ را در معادلهٔ ریدبرگ قرار بدهیم.

$$\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۱}{n''^{۲}}-\frac{۱}{n'^{۲}})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda'}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}}-\frac{۱}{۳^{۲}})=\frac{۵}{۳۶}\Rightarrow\lambda'=۷۲۰\ nm$$

چون الکترون در اتم هیدروژن از مدار $n'=۳$ به مدار $n''=۲$ رفته است، پس طول موج به‌دست‌آمده (λ') مربوط به اولین خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشتهٔ بالمر $(n''=۲)$ است. *(هواستون باشه، دومین خط رشتهٔ لیمان یعنی $n=۳$ و $n'=۱$ باشه.)*

تست و پاسخ ۶۶

الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n=۴$ قرار دارد. فرض کنید، فقط گذارهای $\Delta n=۱$ مجاز باشند. در این صورت اختلاف بسامد کم‌انرژی‌ترین و پرانرژی‌ترین فوتون گسیلی، تقریباً چند تراهرتز است؟ $(E_R=۱۳/۶\ eV$ و $h=۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s)$

۱) ۴۸۴/۸ ۲) ۴۸۴۸ ۳) ۲۳۸/۵ ۴) ۲۳۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

در اتم هیدروژن، وقتی الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر E_L می‌رود، یک فوتون تابش می‌کند. انرژی فوتون تابش‌شده برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و مدار نهایی است. $E_U-E_L=hf$

پاسخ تشریحی با توجه به این‌که الکترون در مدار $n=۴$ قرار دارد و فقط گذارهای $\Delta n=۱$ مجاز است، پس در این حالت، کم‌انرژی‌ترین فوتون گسیلی مربوط به گذار الکترون از مدار $n_U=۴$ به مدار $n_L=۳$ و پرانرژی‌ترین فوتون گسیلی مربوط به گذار الکترون از مدار $n'_U=۲$ به $n'_L=۱$ است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$E_۴-E_۳=hf\Rightarrow-\frac{E_R}{۴^{۲}}-(-\frac{E_R}{۳^{۲}})=۴\times۱۰^{-۱۵}f\Rightarrow\frac{E_R}{۹}-\frac{E_R}{۱۶}=۴\times۱۰^{-۱۵}f$$

$$\Rightarrow\frac{۷E_R}{۹\times۱۶}=۴\times۱۰^{-۱۵}f\Rightarrow f=\frac{۷\times۱۰^{۱۵}}{۴\times۹\times۱۶}E_R$$

$$E_۲-E_۱=hf'\Rightarrow-\frac{E_R}{۲^{۲}}-(-E_R)=۴\times۱۰^{-۱۵}f'\Rightarrow E_R-\frac{E_R}{۴}=۴\times۱۰^{-۱۵}f'$$

$$\Rightarrow\frac{۳E_R}{۴}=۴\times۱۰^{-۱۵}f'\Rightarrow f'=\frac{۳\times۱۰^{۱۵}E_R}{۴\times۴}$$

Telegram: @konkur_in

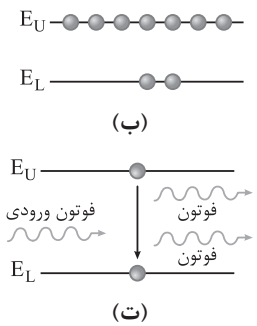
www.konkur.in

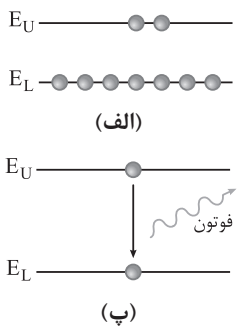
سؤال از ما اختلاف f و f' را می‌خواهد، پس مقدار $f'-f$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'-f=\left(\frac{۳}{۴\times۴}-\frac{۷}{۴\times۹\times۱۶}\right)\times۱۰^{۱۵}\times۱۳/۶=\frac{۱۰۸-۷}{۵۷۶}\times۱۰^{۱۵}\times۱۳/۶\simeq۲۳۸۵\times\underbrace{۱۰^{۱۲}}_{\text{T}}\text{Hz}=۲۳۸۵\text{THz}$$

تست و پاسخ ۶۷

در هر یک از شکل‌های زیر، مدل ساده‌ای از وضعیت الکترون‌ها در دو تراز انرژی مختلف، در یک محیط لیزری رسم شده است. به ترتیب از راست به چپ، در کدام شکل وضعیت وارونی جمعیت و در کدام شکل فرایند گسیل القایی، به درستی نشان داده شده است؟





۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره در کنکور، تست‌های مربوط به فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای، معمولاً جزء تست‌هایی محسوب می‌شوند که در پاسخگویی، بازدهی خوبی دارند. یعنی داوطلب، نسبت به وقت و انرژی‌ای که روی این مباحث گذاشته، نتیجهٔ قابل قبولی می‌گیرد. پس سعی کنید در کنکور، این تست‌ها را از دست ندهید. این تست کاملاً مشابه یکی از تست‌های کنکور تیرماه ۱۴۰۲ رشتهٔ تجربی است.

درس نامه

۱) وارونی جمعیت:

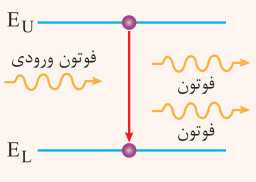
اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد. این وضعیت را وارونی جمعیت می‌گوییم. به طور معمول و در دمای اتاق، بیشتر الکترون‌ها در تراز انرژی پایین‌تر قرار دارند؛ چون در این حالت اتم‌ها پایدارتر هستند و انرژی پتانسیل الکتریکی کم‌تری پیدا می‌کنند. به طور کلی، هر جسمی وقتی به حال خود رها شود، می‌خواهد انرژی پتانسیل خود را کمینه کند (شکل (الف)).

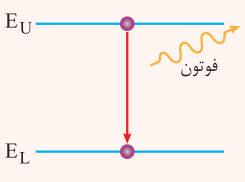
اما در وضعیتی که وارونی جمعیت به وجود می‌آید، بیشتر الکترون‌ها در تراز بالاتری (در مقایسه با تراز پایین‌تر) قرار دارند. (شکل (ب))

۲) گسیل فوتون:

الف) گسیل خودبه‌خود: در گسیل خودبه‌خود، فوتون در جهت کاتوره‌ای گسیل می‌شود. (شکل (پ))

ب) گسیل القایی: در گسیل القایی که اساس کار لیزر است یک فوتون ورودی، الکترون برانگیخته را تحریک (القا) می‌کند تا تراز انرژی خود را تغییر دهد و به تراز پایین‌تر برود. انرژی فوتون ورودی باید دقیقاً با اختلاف انرژی دو تراز (E_U-E_L) برابر باشد. (شکل (ت))





Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی با توجه به قسمت ۱ درس‌نامه، شکل (ب) مربوط به وارونی جمعیت است.

هم‌چنین با توجه به قسمت ۲ درس‌نامه، شکل (ت) مربوط به گسیل القایی است.

بنابراین ۴ درست است.

تست و پاسخ ۶۸

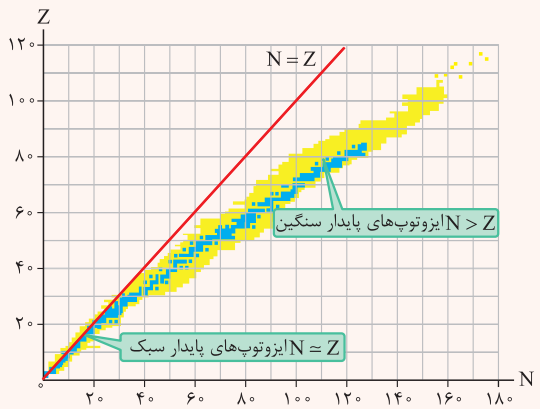
اگر عدد اتمی برابر Z و عدد نوترونی برابر N باشد، به ترتیب از راست به چپ، کدام مورد دربارهٔ ایزوتوپ‌های پایدار سبک و ایزوتوپ‌های پایدار سنگین درست است؟

۱) $N > Z$ و $Z > N$ ۲) $N \simeq Z$ و $Z > N$ ۳) $N > Z$ و $Z \simeq N$ ۴) $Z > N$ و $Z \simeq N$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

نمودار تغییرات Z برحسب N برای هسته‌های پایدار و پرتوزا، نشان می‌دهد که نسبت $\frac{N}{Z}$ برای هسته‌های سبک و سنگین، به ترتیب تقریباً برابر با ۱ و ۱/۵ است.



پاسخ تشریحی با توجه به درس‌نامه، برای ایزوتوپ‌های پایدار سبک داریم:

$\frac{N}{Z} \simeq ۱ \Rightarrow N \simeq Z$

هم‌چنین برای ایزوتوپ‌های پایدار سنگین داریم:

$\frac{N}{Z} \simeq ۱/۵ \Rightarrow N > Z$

بنابراین ۳ درست است.

تست و پاسخ ۶۹

کدام‌یک از واکنش‌های زیر دربارهٔ انرژی بستگی هسته‌ای درست است؟

۱) نوکلئون‌های جدا از هم (جرم بیشتر) → انرژی بستگی هسته‌ای + هسته (جرم کم‌تر)

۲) نوکلئون‌های جدا از هم (جرم کم‌تر) → انرژی بستگی هسته‌ای + هسته (جرم بیشتر)

۳) هسته (جرم بیشتر) → انرژی بستگی هسته‌ای + نوکلئون‌های جدا از هم (جرم کم‌تر)

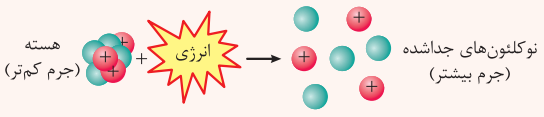
۴) هسته (جرم کم‌تر) → انرژی بستگی هسته‌ای + نوکلئون‌های جدا از هم (جرم بیشتر)

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

انرژی بستگی هسته‌ای: انرژی لازم برای جداکردن نوکلئون‌های یک هسته (پروتون‌ها و نوترون‌ها) از یکدیگر، انرژی بستگی هسته‌ای نامیده می‌شود.

اندازه‌گیری‌های دقیق نشان می‌دهند که جرم هسته، از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کم‌تر است.



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

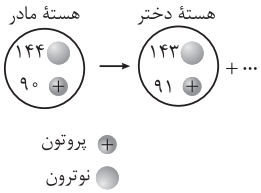
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

پاسخ تشریحی با توجه به درس‌نامه، ملاحظه می‌شود که اگر انرژی بستگی هسته‌ای لازم به یک هسته داده شود، هسته به نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ آن و با جرم بیشتر تقسیم می‌شود؛ یعنی ۱ درست است.

حواستون باشه اگر نوکلئون‌های جدا از هم، با یکدیگر همجوشی کنند تا یک هسته تشکیل شود، انرژی بستگی هسته‌ای را آزاد می‌کنند، نه این‌که آن‌را دریافت کنند؛ بنابراین ۳ و ۴ نادرست هستند.

تست و پاسخ ۷۰

در واکنش واپاشی شکل مقابل، ذرهٔ گسیل‌شده کدام است؟



۱) گاما
۲) آلفا
۳) الکترون
۴) پوزیترون

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره **انواع واپاشی هسته در پرتوزایی طبیعی، بسیار مهم است؛ آن‌ها را به خوبی به خاطر بسپارید و به اندازهٔ کافی مثال‌های مختلف از آن‌ها حل کنید.**

درس‌نامه

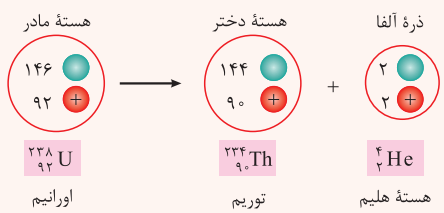
واپاشی آلفا (α):

در این نوع واپاشی، هستهٔ سنگین ${}^{A}_{Z}X$ با گسیل ذرهٔ آلفا وامی‌پاشد. پرتوهای آلفا، ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند (${}^{4}_{2}\alpha = {}^{4}_{2}He$). واپاشی آلفا، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\alpha $$

در این رابطه X، هستهٔ مادر و Y، هستهٔ دختر نامیده می‌شوند.

مثال: واپاشی آلفا برای اورانیم ۲۳۸ که به طور طبیعی رخ می‌دهد.



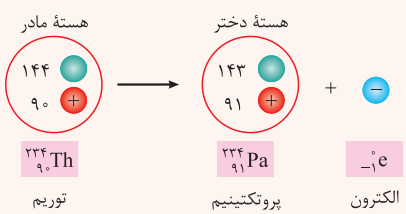
واپاشی بتا (β): این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و ذرات گسیل‌شده در آن را ذرات بتا می‌نامند.

الف) واپاشی بتا، همراه با گسیل الکترون (${}^{0}_{-1}\beta^{-}$ یا ${}^{0}_{-1}e^{-}$):

الکترون گسیل‌شده در این واپاشی، در هستهٔ مادر وجود ندارد و هم‌چنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود. فرایند این واپاشی را با رابطهٔ زیر بیان می‌کنند:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\beta^{-} $$

مثال: واپاشی ${}^{0}_{-1}\beta^{-}$ برای توریم ۲۳۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



Telegram: @konkur_in

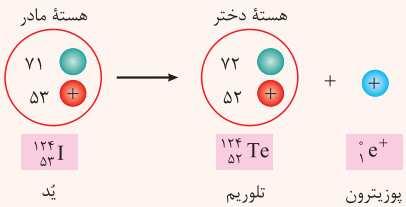
www.konkur.in

ب) واپاشی بتا، همراه با گسیل پوزیترون (${}^{0}_{1}\beta^{+}$ یا ${}^{0}_{1}e^{+}$):

در این نوع واپاشی بتا، ذرهٔ گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد؛ ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است. به این الکترونِ مثبت، پوزیترون می‌گویند. در واقع آن‌چه در این واپاشی رخ می‌دهد، این است که یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود. فرایند این واپاشی، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{1}\beta^{+}$$

مثال: واپاشی ${}^{0}_{1}\beta^{+}$ برای ید ۱۲۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



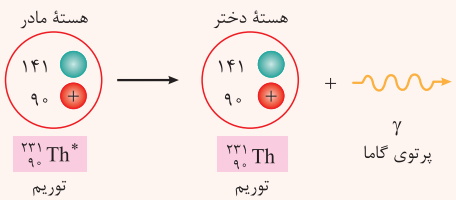
واپاشی گاما (γ) :

اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پرانرژی (پرتوی گاما) به حالت پایه می‌رسند. در این فرایند، A و Z تغییر نمی‌کنند، بلکه هستهٔ برانگیخته که با علامت * مشخص شده است، با گسیل پرتوی گاما به حالت پایه می‌رسد.

واپاشی γ با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$$

مثال: واپاشی γ برای توریم ۲۳۱ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



پاسخ تشریحی وقتی با گسیل یک ذره از هستهٔ اتم، عدد اتمی آن یک واحد افزایش یابد، این ذره حتماً الکترون است.

تست و پاسخ ۷۱

اختلاف تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های یک هستهٔ مادر پرتوزا برابر ۱۰ است. از این هسته، ۲ ذرهٔ α و یک ذرهٔ β^{+} گسیل می‌شود. اختلاف تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر حاصل کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس نامه

۱) هنگام گسیل یک یا چند ذره از یک هستهٔ پرتوزا، عدد جرمی هستهٔ مادر، برابر است با عدد جرمی هستهٔ دختر به علاوهٔ عددهای جرمی ذرات گسیل‌شده.

به طور مشابه، عدد اتمی هستهٔ مادر، برابر است با عدد اتمی هستهٔ دختر به علاوهٔ عددهای اتمی ذرات گسیل‌شده.

۲) تعداد نوکلئون‌ها، برابر است با مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها.

$$A = Z + N$$

A: عدد جرمی (تعداد نوکلئون)، Z: تعداد پروتون، N: تعداد نوترون

پاسخ تشریحی **گام اول:** واکنش فیزیکی مربوط به گسیل دو ذرهٔ آلفا و یک ذرهٔ پوزیترون از هستهٔ مادر را می‌نویسیم:

$$\underset{\text{مادر}}{{}^{A}_{Z}X} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{4}_{2}\alpha + {}^{0}_{1}\beta^{+} + \underset{\text{دختر}}{{}^{A-8}_{Z-5}Y}$$

گام دوم: عدد جرمی هستهٔ دختر را با A'، عدد نوترونی آن را با N' و عدد اتمی آن را با Z' نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$A' = A - 8 \xrightarrow[A=Z+N]{A'=Z'+N'} Z' + N' = Z + N - 8 \xrightarrow{Z'=Z-5} Z - 5 + N' = Z + N - 8 \Rightarrow N' = N - 3$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام سوم: اختلاف تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر را به دست می‌آوریم:

$$N'-Z'=N-۳-(Z-۵)=N-Z+۲ \xrightarrow{N-Z=۱۰} N'-Z'=۱۰+۲=۱۲$$

تکنیک می‌توانیم برای N و Z هستهٔ مادر، یک مثال عددی در نظر بگیریم که در آن $N-Z=۱۰$ باشد و براساس آن N' و Z' مربوط به هستهٔ دختر را پیدا کنیم. مثلاً در این‌جا فرض می‌کنیم $N=۶۰$ و $Z=۵۰$ باشد؛ بنابراین $A=۱۱۰$ خواهد بود و داریم:

$$^{۱۱۰}_{۵۰}X \rightarrow {}^{۴}_{۲}\alpha + {}^{۴}_{۲}\alpha + {}^{۰}_{-۱}\beta + {}^{۱۰۲}_{۴۵}Y$$

$$A'=Z'+N' \xrightarrow[Z'=۴۵]{A'=۱۰۲} ۱۰۲=۴۵+N' \Rightarrow N'=۵۷$$

در نتیجه: $N'-Z'=۵۷-۴۵=۱۲$

تست و پاسخ ۷۲

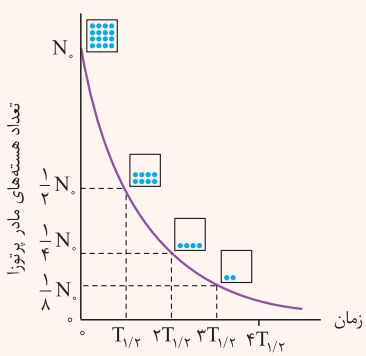
نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا ۲ s است. نمونه‌ای از این ماده در لحظهٔ $t=۰s$ شروع به واپاشی می‌کند. اگر در ۲ ثانیهٔ چهارم، ۵۰ g از این نمونه دچار واپاشی شود، جرم فعال این نمونه در لحظهٔ $t=۱۰\,s$ چند گرم است؟

۱) ۶/۲۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۲۵ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه نیمه‌عمر

ایزوتوپ‌های پرتوزا با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند. تعداد هسته‌های مادر (هسته‌های اولیه) آن‌ها کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. بنا به تعریف، نیمه‌عمر، مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر (اولیه) موجود در یک نمونه، به نصف برسند و آن را با نماد $(T_{\frac{۱}{۲}})$ نشان می‌دهیم.



$N_۰$ = تعداد هسته‌های اولیه در یک نمونهٔ پرتوزا

N = تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده

$N_۰ - N$ = تعداد هسته‌های واپاشیده‌شده

$$n=\frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}}$$

n = تعداد تکرار نیمه‌عمر

t = کل زمان واپاشی

$$N=\frac{N_۰}{۲^n}$$

با کاهش تعداد هسته‌های پرتوزا، جرم آن‌ها نیز به همین نسبت کاهش می‌یابد. پس به‌طور مشابه می‌توان نوشت:

$$m=\frac{m_۰}{۲^n}$$

$m_۰$ = جرم مادهٔ پرتوزای اولیه

m = جرم مادهٔ پرتوزای باقی‌مانده

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد مراحل واپاشی در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به دست می‌آوریم:

$$n=\frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}} \xrightarrow[T_{\frac{۱}{۲}}=۲s]{t=۱۰s} n=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

جرم نمونهٔ اولیه را $m_۰$ فرض می‌کنیم. بنابراین پس از ۵ بار نصف‌شدن متوالی خواهیم داشت:

$$m_۰ \Rightarrow \frac{m_۰}{۲} \Rightarrow \frac{m_۰}{۴} \Rightarrow \underbrace{\frac{m_۰}{۸} \Rightarrow \frac{m_۰}{۱۶}}_{\text{۲ ثانیهٔ چهارم}} \Rightarrow m=\frac{m_۰}{۳۲}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام دوم: جرم واپاشی‌شده در دو ثانیهٔ چهارم، ۵۰g است؛ پس می‌توان نوشت:

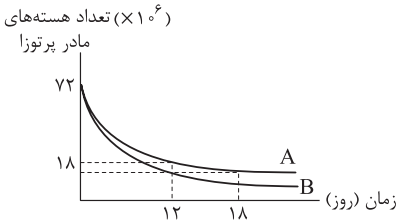
$$\frac{m_0}{8}-\frac{m_0}{16}=50 \Rightarrow \frac{m_0}{16}=50 \Rightarrow m_0=800g$$

گام سوم: جرم فعال این نمونه در لحظهٔ $t=10s$ را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{m_0}{32} \xrightarrow{m_0=800g} m=\frac{800}{32}=25g$$

تست و پاسخ ۷۳

نمودار تعداد هسته‌های مادر پرتوزای دو نمونهٔ A و B برحسب زمان، به شکل زیر است. پس از چند روز از شروع واپاشی نمونهٔ B، ۹۳ / ۷۵ درصد از هسته‌های مادر آن به هستهٔ دختر تبدیل می‌شوند؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره در تست‌هایی که نیمه‌عمر دو نمونهٔ پرتوزای مختلف با هم مقایسه می‌شوند، همیشه یک یا دو وجه اشتراک بین این دو نمونه وجود دارد. وجوه اشتراک را پیدا کنید و به کمک آن‌ها پاسخ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای نمونهٔ A پس از گذشت ۱۲ روز می‌توان نوشت: (T_A نیمه‌عمر نمونهٔ A است.)

$$N=\frac{N_0}{2^{n_A}} \xrightarrow[N=18\times10^6]{N_0=72\times10^6} 18\times10^6=\frac{72\times10^6}{2^{n_A}} \Rightarrow 2^{n_A}=4 \Rightarrow n_A=2$$

$$n_A=\frac{t}{T_A} \xrightarrow[t=12\text{ روز}]{n_A=2} 2=\frac{12}{T_A} \Rightarrow T_A=6\text{ روز}$$

گام دوم: برای نمونهٔ A پس از گذشت ۱۸ روز می‌توان نوشت:

$$n'_A=\frac{t'}{T_A} \xrightarrow[T_A=6\text{ روز}]{t'=18\text{ روز}} n'_A=\frac{18}{6}=3$$

$$N'=\frac{N_0}{2^{n'_A}}=\frac{72\times10^6}{2^3}=9\times10^6$$

گام سوم: تعداد هسته‌های باقی‌مانده از نمونهٔ A پس از ۱۸ روز، با تعداد هسته‌های باقی‌مانده از نمونهٔ B پس از ۱۲ روز، برابر است. بنابراین برای نمونهٔ B پس از ۱۲ روز داریم:

$$N'=\frac{N_0}{2^{n_B}} \xrightarrow[N'=9\times10^6]{N_0=72\times10^6} 9\times10^6=\frac{72\times10^6}{2^{n_B}} \Rightarrow 2^{n_B}=8 \Rightarrow n_B=3$$

$$n_B=\frac{t}{T_B} \Rightarrow 3=\frac{12}{T_B} \Rightarrow T_B=4\text{ روز}$$

گام چهارم: واپاشی نمونهٔ B برحسب درصد داده شده است. پس نمونهٔ اولیهٔ B را ۱۰۰ درصد فرض می‌کنیم. بر این اساس وقتی ۹۳ / ۷۵ درصد از هسته‌های مادر آن به هستهٔ دختر تبدیل شده، یعنی ۶ / ۲۵ درصد از نمونهٔ اولیهٔ آن باقی مانده است:

$$\%100 \Rightarrow \%50 \Rightarrow \%25 \Rightarrow \%12/5 \Rightarrow \%6/25$$

یعنی ۴ نیمه‌عمر برای نمونهٔ اولیهٔ B گذشته است. زمان سپری‌شده برای انجام این واپاشی را به دست می‌آوریم:

$$n_B=\frac{t_B}{T_B} \xrightarrow[T_B=4\text{ روز}]{n_B=4} 4=\frac{t_B}{4} \Rightarrow t_B=16\text{ روز}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۷۴

کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در فرایند غنی‌سازی در یک نمونهٔ اورانیم، اورانیم ۲۳۵ به اورانیم ۲۳۸ تبدیل می‌شود.

ب) در فرایند غنی‌سازی در یک نمونهٔ اورانیم، اورانیم ۲۳۸ به اورانیم ۲۳۵ تبدیل می‌شود.

پ) از آن‌جایی که اورانیم ۲۳۸ فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم است، در سنگ معدن اورانیم واکنش شکافت زنجیری رخ نمی‌دهد.

ت) از آن‌جایی که اورانیم ۲۳۵ فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم است، در سنگ معدن اورانیم واکنش شکافت زنجیری رخ نمی‌دهد.

۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) پ ۴) ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) **غنی‌سازی اورانیم:** برای آن‌که بتوانیم از اورانیم به عنوان سوخت در نیروگاه‌های هسته‌ای یا انفجارهای هسته‌ای استفاده کنیم و واکنش زنجیری را ممکن سازیم، باید فراوانی ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونهٔ اورانیم را افزایش دهیم. به این فرایند افزایش درصد یا غلظت اورانیوم ۲۳۵ در یک نمونه، غنی‌سازی اورانیم گفته می‌شود.

۲) در سنگ معدن اورانیم، دو ایزوتوپ ۲۳۵ و ۲۳۸ وجود دارد. شکافت، معمولاً در ایزوتوپ کمیاب $^{235}_{92}U$ رخ می‌دهد که فقط ۰/۷۲ درصد (کم‌تر از ۱ درصد) از اورانیم موجود در طبیعت را تشکیل می‌دهد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در فرایند غنی‌سازی اورانیم، $^{235}_{92}U$ و $^{238}_{92}U$ را فقط از هم جدا می‌کنیم؛ پس هیچ تبدیلی از یکی به دیگری انجام نمی‌گیرد و موارد «الف» و «ب» نادرست هستند.

گام دوم: ایزوتوپ کمیاب $^{235}_{92}U$ کم‌تر از یک درصد اورانیم موجود در طبیعت را تشکیل می‌دهد؛ بنابراین مورد «ت» نادرست است، اما ایزوتوپ فراوان‌تر $^{238}_{92}U$ که احتمال شکافت بسیار کمی دارد، تشکیل واکنش زنجیری در معادن اورانیم را ناممکن می‌سازد؛ یعنی مورد «پ» درست است.

تست و پاسخ ۷۵

انرژی آزادشده در هر واکنش شکافت ^{235}U با یک نوترون کُند، در حدود ۲۰۲/۵ MeV و در هر واکنش گداخت دوتریم با تریتیم حدود ۱۷/۶ MeV است. انرژی آزادشده به ازای هر نوکلئون، در واکنش گداخت تقریباً چند برابر واکنش شکافت است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

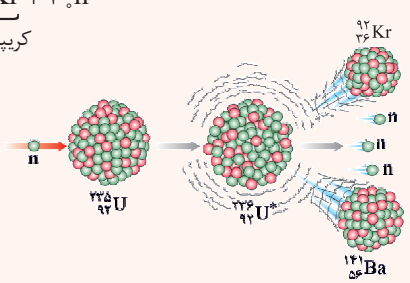
پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره این تست، یکی از مسئله‌های مطرح‌شده در آخر فصل ۶ از کتاب فیزیک ۳ رشتهٔ ریاضی است.

درس‌نامه

۱) **شکافت هسته‌ای:** فرایند تقسیم‌شدن یک هستهٔ سنگین به دو هسته با جرم کم‌تر، شکافت هسته‌ای نامیده می‌شود. در فرایند شکافت اورانیم، ترکیب‌های متفاوتی از هسته‌های کوچک‌تر، همراه با تعدادی نوترون (بین ۲ تا ۵) به وجود می‌آید. در این‌جا به یک نمونه از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow \underbrace{{}^{236}_{92}U^{*}}_{\text{هستهٔ مرکب (ناپایدار)}} \rightarrow \underbrace{{}^{141}_{56}Ba}_{\text{باریم}} + \underbrace{{}^{92}_{36}Kr}_{\text{کریپتون}} + 3\,{}^{1}_{0}n$$



واکنش شکافت $^{235}_{92}U$ با جذب یک نوترون کُند شروع می‌شود.

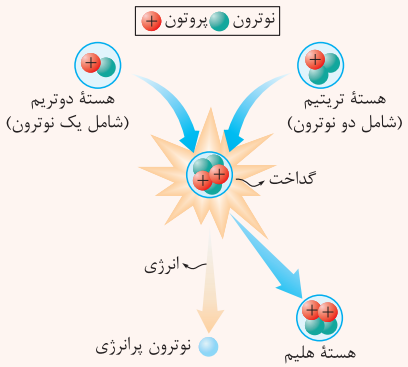
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲) گداخت (همجوشی) هسته‌ای:

در فرایند گداخت هسته‌ای، دو هستهٔ سبک با یکدیگر ترکیب می‌شوند و هستهٔ سنگین‌تری به وجود می‌آورند. برای مثال، با همجوشی هسته‌های دوتریم و تریتیم، هستهٔ هلیم و یک نوترون پرانرژی تولید می‌شود:

$$^{۲}_{۱}D + ^{۳}_{۱}T \rightarrow ^{۴}_{۲}He + ^{۱}_{۰}n$$



دوتریم و تریتیم در هم گداخته می‌شوند تا هستهٔ هلیم تشکیل شود. در این واکنش، مقدار زیادی انرژی (حدود ۱۷/۶ MeV) آزاد می‌شود که بخش عمده‌ای از آن به صورت انرژی جنبشی نوترون است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به قسمت اول درس‌نامه، تعداد نوکلئون‌ها در هر واکنش شکافت ^{۲۳۵}U با یک نوترون کُند را به دست آورده و انرژی آزادشده به ازای هر نوکلئون آن را حساب می‌کنیم:

$$A_۱ = ۱ + ۲۳۵ = ۲۳۶$$

$$E = \frac{E_۱}{A_۱} = \frac{۲۰۲/۵}{۲۳۶} = ۰/۸۵۸\,MeV$$

گام دوم: با توجه به قسمت دوم درس‌نامه، تعداد نوکلئون‌ها در هر واکنش گداخت دوتریوم با تریتیوم را به دست آورده و انرژی آزادشده به ازای هر نوکلئون را حساب می‌کنیم:

$$A_۲ = ۲ + ۳ = ۵$$

$$E' = \frac{E_۲}{A_۲} = \frac{۱۷/۶}{۵} = ۳/۵۲\,MeV$$

گام سوم: نسبت انرژی آزادشده به ازای هر نوکلئون در واکنش گداخت را به انرژی آزادشده به ازای هر نوکلئون در واکنش شکافت، به دست می‌آوریم:

$$\frac{E'}{E} = \frac{۳/۵۲}{۰/۸۵۸} \simeq ۴/۱$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

شیمی: صفحه‌های ۶۷ تا ۱۲۳

تست و پاسخ ۷۶

در فرایند تولید آمونیاک به روش هابر، کدام عامل درصد مولی فراورده در مخلوط تعادلی را افزایش می‌دهد، اما بر مقدار ثابت تعادل واکنش بی‌تأثیر است؟

$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$

۱) افزایش فشار
۲) کاهش دما
۳) افزایش دما
۴) کاهش فشار

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته در بین عوامل مؤثر بر تعادل، فقط دما است که می‌تواند مقدار ثابت تعادل واکنش را تغییر دهد.

پاسخ تشریحی ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد و با تغییر دما می‌توان مقدار عددی ثابت تعادل را تغییر داد (رد ۲ و ۳). افزایش فشار تعادل را در جهت تولید مول گازی کم‌تر جابه‌جا می‌کند، پس با افزایش فشار، واکنش تعادلی هابر ($\underbrace{N_2(g) + 3H_2(g)}_{\text{۴ مول گاز}} \rightleftharpoons \underbrace{2NH_3(g)}_{\text{۲ مول گاز}}$) در جهت رفت (تولید آمونیاک بیشتر) جابه‌جا می‌شود و درصد مولی آمونیاک (فراورده) در مخلوط واکنش افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۷۷

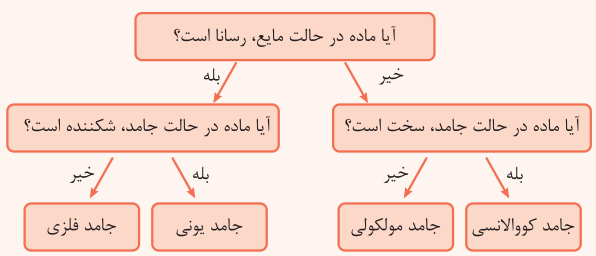
مادهٔ خالصی در حالت مایع رسانای جریان برق است. کدام مطلب دربارهٔ این ماده به یقین درست است؟

یونی یا فلزی

۱) در حالت جامد شکننده است.
۲) برای توصیف آن می‌توان از واژهٔ شیمیایی نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.
۳) اگر در اثر ضربهٔ چکش خرد نشود، در حالت جامد نیز رسانای جریان برق است.
۴) واحدهای سازندهٔ آن، یون‌هایی با بار مثبت و منفی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه مواد خالص را براساس رفتارهای آن‌ها، مطابق نمودار مقابل می‌توان به چهار دستهٔ مواد کووالانسی، مولکولی، یونی و فلزی تقسیم کرد:



پاسخ تشریحی مواد یونی و فلزی در حالت مایع (مذاب) رسانای جریان برق هستند.

بررسی گزینه‌ها:

۱ مادهٔ مورد نظر می‌تواند فلز باشد و فلزها برخلاف مواد یونی در حالت جامد چکش‌خوار بوده و شکننده نیستند.

۲ فقط برای توصیف مواد مولکولی می‌توان از واژهٔ رایجی مانند نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

۳ فلزها در حالت جامد چکش‌خوار و رسانای جریان برق هستند.

۴ واحدهای سازندهٔ مواد یونی، کاتیون‌ها و آنیون‌ها هستند اما در این‌جا مادهٔ مورد نظر می‌تواند فلز نیز باشد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۷۸

چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست است؟

- نقطهٔ ذوب: الماس > سیلیسیم
- سختی: سیلیسیم‌کربید > سیلیسیم
- پایداری: سیلیس > سیلیسیم
- آنتالپی پیوند: $Si-C < Si-O$
- گرمای سوختن مولی: الماس > گرافیت
- شمار اتم‌ها در حجم برابر: گرافیت > الماس

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته مقایسهٔ نقطهٔ ذوب و سختی سه جامد کووالانسی مهم که ساختار مشابهی دارند، به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l}\text{شعاع اتمی: } Si > C > O \\ \text{طول پیوند: } Si-Si > Si-C > C-C\end{array}\right\} \Rightarrow$$

سیلیسیم > سیلیسیم کربید > الماس: نقطهٔ ذوب، سختی، پایداری و آنتالپی پیوند

پاسخ تشریحی بررسی موارد: مورد اول: نقطهٔ ذوب الماس از سیلیسیم بیشتر است. ✓

مورد دوم: سختی سیلیسیم کربید (SiC) از سختی سیلیسیم بیشتر است. ✓

مورد سوم: پایداری سیلیس (SiO_2) از سیلیسیم بیشتر است. ✓

مورد چهارم: پیوند $Si-O$ از $Si-C$ قوی‌تر بوده و آنتالپی پیوند $Si-O$ از $Si-C$ بیشتر است. ✓

مورد پنجم: محتوای انرژی (آنتالپی) الماس از گرافیت بیشتر است؛ در نتیجه گرمای سوختن مولی الماس از گرافیت بیشتر است. ✓

مورد ششم: چگالی الماس از چگالی گرافیت بیشتر است؛ در نتیجه در حجم برابر از این دو دگرشکل کربن، جرم، مول و شمار اتم‌های الماس از گرافیت بیشتر خواهد بود. ✗

نکته

این ویژگی‌ها در الماس بیشتر از گرافیت است.	این ویژگی‌ها در گرافیت بیشتر از الماس است.
سختی	رسانایی الکتریکی
طول پیوند کربن ـ کربن	آنتالپی پیوند کربن ـ کربن
شمار اتم‌های متصل‌شده به هر اتم کربن	پایداری
چگالی	
قدرمطلق آنتالپی سوختن	

تست و پاسخ ۷۹

کدام مطلب دربارهٔ سیلیسیم درست است؟

۱) شبه‌فلزی از خانوادهٔ کربن است و فراوان‌ترین عنصر پوستهٔ جامد زمین محسوب می‌شود.

۲) نقطهٔ ذوب بالاتری نسبت به دیگر عنصرهای هم‌دورهٔ خود دارد.

۳) در ترکیب با عنصر کربن، یک ترکیب یونی با نقطهٔ ذوب بالا به نام سیلیسیم‌کربید تشکیل می‌دهد که در تهیهٔ سنباده به کار می‌رود.

۴) در حالت خالص، کوارتز نامیده شده و در ساخت منشور و عدسی‌ها به کار می‌رود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) سیلیسیم یک عنصر شبه‌فلزی است که به همراه کربن در گروه ۱۴ جدول دوره‌ای قرار دارد.
سیلیسیم پس از اکسیژن، فراوان‌ترین عنصر سازندهٔ پوستهٔ جامد زمین محسوب می‌شود.

۲) سیلیسیم تنها عنصر دورهٔ سوم جدول دوره‌ای است که در حالت عنصری خود به صورت جامد کووالانسی می‌باشد و نقطهٔ ذوب بالاتری نسبت به سایر عناصر هم‌دورهٔ خود دارد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳ سیلیسیم در ترکیب با عنصر کربن یک **ترکیب کووالانسی** (نه یونی!) به نام سیلیسیم کربید تشکیل می‌دهد. این ترکیب نقطهٔ ذوب بالایی دارد و در تهیهٔ سنباده به کار می‌رود.

۴ سیلیس (SiO_2) در حالت خالص، کوارتز نامیده می‌شود.

تست و پاسخ ۸۰

مخلوطی شامل ترکیب A، ۵ درصد جرمی آب و مقداری ناخالصی است. اگر پس از مدتی بر اثر جذب رطوبت، درصد جرمی آب و A به ترتیب به ۱۵ و ۶۸ برسد، درصد جرمی ناخالصی در نمونهٔ اولیه کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** جرم مخلوط اولیه را ۱۰۰ گرم در نظر می‌گیریم؛ پس جرم آب در مخلوط اولیه برابر ۵ گرم است. جرم ترکیب A را برابر x گرم و جرم ناخالصی را برابر y گرم فرض می‌کنیم.

$$\text{جرم مخلوط اولیه}\begin{cases}5\ g & H_2O\\ x\ g & A\\ y\ g & \text{ناخالصی}\end{cases}$$

گام دوم: اگر جرم رطوبت جذب‌شده را برابر z گرم در نظر بگیریم، جرم مخلوط ثانویه برابر $(100+z)$ گرم خواهد بود. پس می‌توان جرم آب جذب‌شده و جرم ترکیب $A(x)$ را حساب کرد.

$$\text{درصد جرمی آب در مخلوط ثانویه}=\frac{\text{جرم آب}}{\text{جرم مخلوط ثانویه}}\times 100 \Rightarrow 15=\frac{5+z}{100+z}\times 100 \Rightarrow z=\frac{200}{17}\ g \text{ آب}$$

$$\text{درصد جرمی ترکیب A در مخلوط ثانویه}=\frac{\text{جرم A}}{\text{جرم مخلوط ثانویه}}\times 100 \Rightarrow 68=\frac{x}{100+z}\times 100 \Rightarrow 68=\frac{x}{100+\frac{200}{17}}\times 100$$

$$\Rightarrow 6800+800=100x \Rightarrow x=76\ g\ A$$

گام سوم: حال می‌توان جرم ناخالصی در مخلوط اولیه را حساب کرد.

$$5+x+y=100 \Rightarrow 5+76+y=100 \Rightarrow y=19\ g \text{ ناخالصی}$$

بنابراین درصد ناخالصی در نمونهٔ اولیه برابر ۱۹ بوده است.

تکنیک با جذب رطوبت، جرم A و ناخالصی در نمونه تغییر نمی‌کند؛ بنابراین نسبت درصد جرمی آن‌ها ثابت باقی خواهد ماند:

نمونهٔ اولیه: $\%x\ A$, ناخالصی $\%y$, $\%5\ H_2O \Rightarrow x+y=100-5=95$

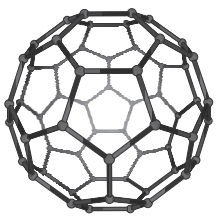
نمونهٔ دوم: $\%68\ A$, ناخالصی $\%y'$, $\%15\ H_2O \Rightarrow y'=100-(68+15)=17$

$$\frac{x}{y}=\frac{68}{y'}=\frac{68}{17}=4 \Rightarrow x=4y \xrightarrow{x+y=95} 5y=95 \Rightarrow y=\%19$$

تست و پاسخ ۸۱

«باکی‌بال» یکی از آلوتروپ‌های کربن است که در ساختار آن ۳۰ پیوند $C=C$ و ۶۰ پیوند $C-C$ وجود دارد. جرم مولی باکی‌بال چند برابر جرم مولی الماس است؟ $(C=12\ g.mol^{-1})$

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۳۰
۴) ۶۰


«باکی‌بال»

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی برای محاسبهٔ شمار کل پیوندها در دگرشکل‌های کربن از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی}=\frac{4\times\text{شمار اتم‌های کربن}}{2}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

شمار کل پیوندها در هر واحد باکی‌بال را در فرمول مورد نظر جای‌گذاری می‌کنیم تا شمار اتم کربن در هر واحد آن به دست آید:

$$\text{شمار کل پیوندها در هر واحد باکی‌بال} = (۳۰\times ۲)+(۶۰\times ۱) = ۱۲۰$$

(۳۰×۲): پیوند دوگانه، (۶۰×۱): پیوند یگانه

$$۱۲۰ = \frac{\text{شمار اتم کربن}\times ۴}{۲} \Rightarrow \text{شمار اتم کربن} = ۶۰ \Rightarrow C_{۶۰}$$

پس جرم مولی باکی‌بال $(C_{۶۰})$، ۶۰ برابر جرم مولی الماس $(C(s))$ است.

تست و پاسخ ۸۲

اگر در ساختار یون $\left[O-\underset{\underset{O}{|}}{\overset{\overset{O}{|}}{S}}-O-\underset{\underset{O}{|}}{\overset{\overset{O}{|}}{S}}-O\right]^{q}$ **، همهٔ اتم‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار رسیده باشند، نسبت q به بار یون سیلیکات کدام است؟**

$Sio_۴^{۴-}$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

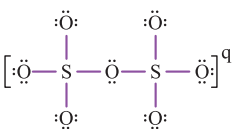
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه برای محاسبهٔ بار یون در یون‌های چندااتمی، ابتدا با قراردادن تعداد لازم الکترون ناپیوندی روی اتم‌ها، آن‌ها را به آرایش هشت‌تایی می‌رسانیم (به‌جز هیدروژن که فقط می‌تواند دو الکترون اطراف خودش داشته باشد.) بعد با استفاده از فرمول زیر، بار یون را محاسبه می‌کنیم.

بار یون = (مجموع شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها) − (مجموع شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی)

شمار الکترون‌های ظرفیتی در اتم عناصر گروه‌های اصلی (گروه‌های ۱، ۲، ۱۳ تا ۱۸) با عدد یکان شمارهٔ گروه آن‌ها برابر است (به‌جز He که در گروه ۱۸ بوده ولی فقط دو الکترون ظرفیتی دارد.)

پاسخ تشریحی **گام اول:** همهٔ اتم‌ها را با قراردادن الکترون‌های ناپیوندی لازم به آرایش هشت‌تایی می‌رسانیم.



گام دوم: با استفاده از فرمول گفته‌شده در قسمت درس‌نامه، بار یون را حساب می‌کنیم.

$$\text{باریون} = (۷\times ۶ + ۲\times ۶) - (۸\times ۲ + ۲۰\times ۲) = ۵۴ - ۵۶ = -۲$$

(۷×۶ + ۲×۶): شمار اتم اکسیژن، شمار اتم گوگرد
(۸×۲ + ۲۰×۲): شمار جفت‌الکترون پیوندی، شمار جفت‌الکترون ناپیوندی

گام سوم: بار یون را بر بار یون سیلیکات $(SiO_۴^{۴-})$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{-۲}{-۴} = \frac{۱}{۲}$$

تست و پاسخ ۸۳

عنصرهای X و Y به ترتیب متعلق به دورهٔ دوم و سوم جدول دوره‌ای عنصرها هستند. اگر شکل هندسی $XH_۳^-$ و $YO_۳$ به ترتیب مشابه آمونیاک و یون کربنات باشد، کدام مطلب نادرست است؟

۱) X و Y می‌توانند با یکدیگر مولکول ناقطبی به فرمول $XY_۲$ تشکیل دهند.

۲) X و Y هر دو در دمای اتاق به حالت جامدند.

۳) X در هیچ شکلی، رسانای جریان برق نیست.

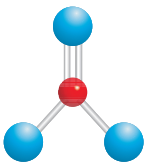
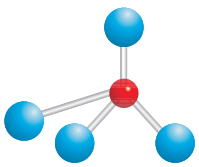
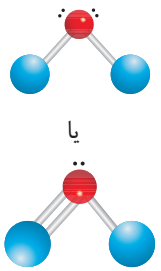
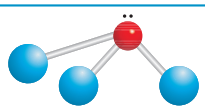
۴) بین مولکول‌های $H_۲Y$، پیوند هیدروژنی برقرار نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

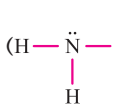
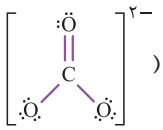
Telegram: @konkur_in

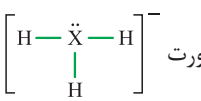
www.konkur.in

درس نامه با توجه به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی اتم مرکزی و شمار اتم‌های متصل به آن، می‌توان شکل هندسی یک گونه را تعیین کرد:

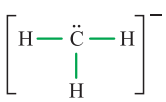
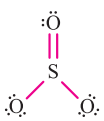
شمار اتم‌های متصل به اتم مرکزی	شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی اتم مرکزی	شکل گونه	شکل کلی	مثال
۲	۰	خطی		HCN , CO_2 , SCO , N_2O
۳	۰	سه‌ضلعی مسطح		NO_3^- , CO_3^{2-} , SO_3
۴	۰	چهاروجهی		NH_4^+ , SO_4^{2-} , CCl_4 , CH_4 , $CHCl_3$
۲	۱ یا ۲	خمیده		SO_2 , O_3 , OF_2 , H_2S , H_2O
۳	۱	هرمی		NF_3 , NH_3 , PCl_3 , H_3O^+

پاسخ تشریحی

شکل هندسی آمونیاک () به صورت بوده و شکل هندسی یون کربنات () به صورت می‌باشد.

شکل هندسی XH_3^- به شرطی می‌تواند مشابه آمونیاک باشد که روی اتم مرکزی X یک جفت الکترون ناپیوندی وجود داشته باشد، یعنی ساختار آن به صورت  باشد. در این حالت X باید کربن باشد.

ساختار YO_3 نیز به شرطی می‌تواند مشابه CO_3^{2-} باشد که روی Y الکترون ناپیوندی وجود نداشته باشد، پس Y باید گوگرد (S) باشد.

$CH_3^- \Rightarrow$  $SO_3 \Rightarrow$ 

بررسی گزینه‌ها:

۱) C و S می‌توانند مولکول‌های ناقطبی CS_2 تشکیل بدهند.

۲) C و S هر دو در دمای اتاق جامد هستند.

۳) کربن به حالت گرافیت، رسانای جریان برق است.

۴) بین مولکول‌های H_2S پیوند هیدروژنی برقرار نمی‌شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۸۴

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ مولکول‌های سه‌اتمی، درست است؟

- **در این مولکول‌ها، هستهٔ هر سه اتم سازنده روی یک خط راست قرار دارد.**
- **اگر اتم‌های سازندهٔ این مولکول یکسان باشند، مولکول مورد نظر ناقطبی است.**
- **اگر این مولکول ناقطبی باشد، اتم‌های سازندهٔ آن دارای بار جزئی مثبت و منفی نیستند.**
- **در این مولکول‌ها، بار جزئی مثبت به یقین روی اتم‌های کناری قرار دارد.**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌ها نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در برخی از مولکول‌های سه‌اتمی مانند CO_2، هستهٔ همهٔ اتم‌ها روی یک خط راست است ($\ddot{O}=C=\ddot{O}$:) ولی در برخی از مولکول‌های سه‌اتمی مانند SO_2 () همهٔ اتم‌ها روی یک خط راست قرار ندارند.

عبارت دوم: مولکول سه‌اتمی O_3 که همهٔ اتم‌های سازندهٔ آن یکسان است، قطبی می‌باشد.

عبارت سوم: با این‌که مولکول CO_2 سه‌اتمی و ناقطبی است، ولی اتم کربن آن دارای بار جزئی مثبت و اتم‌های اکسیژن آن دارای بار جزئی منفی هستند.

عبارت چهارم: در برخی مولکول‌های سه‌اتمی مانند SO_2، بار جزئی اتم‌های اکسیژن کناری، منفی است.

تست و پاسخ ۸۵

کدام مطلب نادرست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) در شرایط یکسان، گاز پروپان نسبت به گاز دی‌متیل اتر، دشوارتر به حالت مایع تبدیل می‌شود.

۲) درصد جرمی اکسیژن در یخ خشک، $\frac{9}{11}$ برابر درصد جرمی اکسیژن در یخ معمولی است.

۳) فرمول شیمیایی کلروفرم، کلرواتان و وینیل کلرید به ترتیب به صورت CH_3Cl، C_2H_5Cl و C_2H_3Cl است.

۴) عدد اکسایش گوگرد در کربونیل سولفید و هیدروژن سولفید با هم برابر است.

$CO_2(s)$ ←
$H_2O(s)$ ←

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

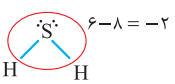
۱) هر چه نقطهٔ جوش یک ماده بیشتر باشد، هنگام گرم‌کردن در حالت مایع، دشوارتر تبخیر می‌شود، ولی هنگام سردکردن آن در حالت گازی، آسان‌تر مایع می‌شود. پروپان (C_3H_8) دارای مولکول‌های ناقطبی است، ولی مولکول‌های سازندهٔ دی‌متیل اتر (CH_3-O-CH_3) قطبی هستند، پس قدرت نیروهای جاذبهٔ بین مولکولی در پروپان کم‌تر بوده و نقطهٔ جوش پایین‌تری از دی‌متیل اتر دارد. در نتیجه هنگام سردکردن این دو گاز، دی‌متیل‌اتر آسان‌تر و پروپان دشوارتر به حالت مایع تبدیل می‌شود.

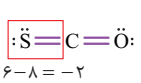
۲) فرمول مولکولی یخ خشک، CO_2 و فرمول مولکولی یخ معمولی، H_2O است.

$$\text{درصد جرمی O} = \frac{\text{جرم O}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100 \begin{cases} \text{درصد جرمی O در یخ} = \frac{1\times16}{(1\times16)+(2\times1)}\times100 = \frac{1600}{18} \\ \text{درصد جرمی O در یخ خشک} = \frac{2\times16}{(1\times12)+(2\times16)}\times100 = \frac{3200}{44} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{3200}{44}}{\frac{1600}{18}} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

۳) فرمول شیمیایی کلروفرم به صورت $CHCl_3$ است.

۴) عدد اکسایش گوگرد در هر دو ترکیب برابر ۲− است.

هیدروژن سولفید ⇒ 

کربونیل سولفید ⇒ 

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۸۶

عنصرهای A، M و D به ترتیب سه عنصر متوالی دورهٔ سوم جدول دوره‌ای عنصرها هستند. اگر در بین یون‌های پایدار عنصرهای این دوره، یون پایدار عنصر M بیشترین چگالی بار را داشته باشد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

Al^{3+}

الف) عنصر D در دما و فشار اتاق، نافلزی زردرنگ است.

ب) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور کلرید A کم‌تر از فسفید M است.

پ) شعاع یون پایدار M از X^{3-}_{7}، کم‌تر است.

ت) اگر عدد اتمی عنصر D، برابر Z باشد، عنصر E_{Z+6} یک فلز واسطه است.

۱) ب ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی زیر ذره‌بین!

فلز			شبه‌فلز	نافلز			
۱۱ Na	۱۲ Mg	۱۳ Al	۱۴ Si	۱۵ P	۱۶ S	۱۷ Cl	۱۸ Ar

در دورهٔ سوم جدول، ۸ عنصر وجود دارند:

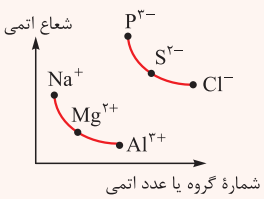
در این‌جا می‌خواهیم در مورد شعاع اتمی، شعاع یونی و چگالی بار یون پایدار آن‌ها با هم صحبت کنیم:

۱) در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد:

شعاع اتمی: $Na > Mg > Al > Si > P > S > Cl$

بنابراین بیشترین شعاع اتمی در این دوره، متعلق به عنصر گروه ۱ (سدیم) و کم‌ترین آن بدون در نظر گرفتن گاز نجیب، متعلق به عنصر گروه ۱۷ (کلر) است.

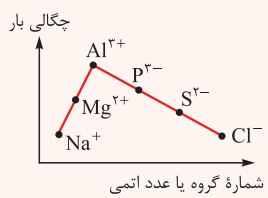
۲) می‌دانیم که شعاع آنیون‌های عنصرهای یک دوره از شعاع کاتیون‌های عنصرهای آن دوره بزرگ‌تر است. در ضمن هر چه بار آنیون در یک دوره بیشتر باشد، شعاع آن آنیون بیشتر و هر چه بار کاتیون بیشتر باشد، شعاع آن کاتیون کم‌تر است.



شعاع یونی: $P^{3-} > S^{2-} > Cl^{-} > Na^{+} > Mg^{2+} > Al^{3+}$

بنابراین بیشترین شعاع یونی در دورهٔ سوم مربوط به عنصر گروه ۱۵ (فسفر) و کم‌ترین آن مربوط به عنصر گروه ۱۳ (آلومینیم) است.

۳) می‌دانیم در مقایسهٔ چگالی بار یون‌ها، اولویت با بار یون است؛ یعنی هر چه مقدار بار یون بیشتر باشد، چگالی بار یون بیشتر است. در ضمن اگر مقدار بار دو یون برابر باشد، یونی که شعاع کم‌تری دارد، چگالی بار آن بیشتر است.



چگالی بار: $Al^{3+} > P^{3-} > Mg^{2+} > S^{2-} > Na^{+} > Cl^{-}$

بنابراین بیشترین چگالی بار یون پایدار در دورهٔ سوم، متعلق به عنصر گروه ۱۳ (آلومینیم) و کم‌ترین آن مربوط به عنصر گروه ۱۷ (کلر) است.

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

در دورهٔ سوم یون $_{13}Al^{3+}$ بیشترین چگالی بار را بین یون‌های این دوره دارد، پس عنصر M همان $_{13}Al$ است. چون A، M و D سه عنصر متوالی دورهٔ سوم هستند، پس A همان $_{12}Mg$ و D همان $_{14}Si$ خواهد بود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

بررسی عبارت‌ها:

الف) نافلز زردرنگی که در دما و فشار اتاق حالت فیزیکی جامد دارد، همان گوگرد ($_{16}S$) است. ✗

ب) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور کلرید A (یعنی $MgCl_2$) از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ فسفید M (یعنی AlP) کم‌تر است، چون مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در $MgCl_2$ ($|+2|+|-1|=3$) از مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در AlP ($|+3|+|-3|=6$) کم‌تر است. ✓

پ) در یون‌های هم‌الکترون، هر چه بار یون مثبت‌تر باشد (شمار پروتون‌های هسته بیشتر باشد) شعاع یونی کوچک‌تر و هر چه بار یون منفی‌تر باشد (شمار پروتون‌های هسته کم‌تر باشد)، شعاع یون بزرگ‌تر است. پس شعاع یون پایدار M (یعنی $_{13}Al^{3+}$) از شعاع یون $_7X^{3-}$ (یعنی $_7N^{3-}$) کوچک‌تر است. ✓

ت) عدد اتمی عنصر D (یعنی $_{14}Si$) برابر ۱۴ است ($Z=14$)، پس عدد اتمی $_{Z+6}E$ برابر ۲۰ خواهد بود. عنصر $_{20}Ca$، جزء فلزهای قلیایی خاکی می‌باشد. ✗

تست و پاسخ ۸۷

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **براساس گسترهٔ کاربری مواد، دورهٔ برنز قبل از دورهٔ آهن بوده است.**
- **امروزه در ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما از فولاد استفاده می‌شود.**
- **رنگ‌هایی که برای پوشش سطوح استفاده می‌شوند، نوعی کلوئید هستند.**
- **سازهٔ فلزی در ارتودنسی از جنس تیتانیم خالص است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: عبارت اول: تمدن‌های آغازی براساس گسترهٔ کاربری مواد نام‌گذاری شده‌اند:

... ← دورهٔ آهن ← دورهٔ برنز ← دورهٔ سنگی

نکته این ترتیب را می‌توانید با مخفف «سبا» یعنی سنگی، برنز و آهن به خاطر بسپارید!

عبارت دوم: امروز در ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما از فلز تیتانیم استفاده می‌شود. چون این فلز با ذره‌های موجود در آب دریا تقریباً واکنش نمی‌دهد، همچنین چگالی آن کمتر از فولاد است.

عبارت سوم: رنگ‌هایی که برای پوشش سطح استفاده می‌شوند، نوعی کلوئید هستند که لایهٔ نازکی روی سطح ایجاد می‌کنند.

عبارت چهارم: از آلیاژ نیتینول (آلیاژی از نیکل و تیتانیم) در سازه‌های فلزی ارتودنسی استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۸۸

درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- **در یک نمونهٔ خالص از فلز باریم، به ازای هر یون، دو الکترون در دریای الکترونی وجود دارد.**
- **در شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی، هیچ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها وجود ندارد.**
- **یکی از ویژگی‌های خاص همهٔ فلزهای واسطه در مقایسه با فلزهای اصلی، تنوع عدد اکسایش آن‌ها است.**
- **فلزها در حالت مذاب برخلاف ترکیب‌های یونی، بدون تجزیه‌شدن، جریان برق را از خود عبور می‌دهند.**

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۲) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۴) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۲

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: باریم ($_{56}Ba$) در گروه دوم جدول دوره‌ای قرار دارد و دارای دو الکترون ظرفیتی است. در مدل دریای الکترونی فلزها، اتم‌های فلزی الکترون‌های ظرفیتی خود را در دریای الکترونی شرکت می‌دهند.

عبارت دوم: در ساختار ترکیب‌های یونی که از یون‌های چندتایی تشکیل شده‌اند، اتم‌های سازندهٔ یون چندتایی (مانند SO_4^{2-} در ترکیب Na_2SO_4) با پیوند اشتراکی به هم متصل شده‌اند.

عبارت سوم: برخی از فلزهای واسطه مانند روی ($_{30}Zn$) فقط یک نوع عدد اکسایش (+۲) در ترکیب‌های خود دارند، در صورتی که برخی فلزهای اصلی مانند Sn و Pb، عددهای اکسایش ۲+ و ۴+ دارند.

عبارت چهارم: فلزها در حالت جامد و مذاب رسانای جریان برق هستند و چون به واسطهٔ حرکت الکترون‌های آزاد (الکترون‌های ظرفیتی) خود جریان برق را عبور می‌دهند، تجزیه نمی‌شوند، اما با عبور جریان برق از درون یک ترکیب یونی مذاب، یک تغییر شیمیایی (برقکافت) در مادهٔ یونی رخ می‌دهد.

تست و پاسخ ۸۹

در نمونه‌ای از آلیاژ نیتینول که دارای نیکل و تیتانیم است، به ازای هر ۸ اتم نیکل، ۷ اتم تیتانیم وجود دارد. درصد جرمی فلزی با شمار الکترون‌های ظرفیتی بیشتر در این آلیاژ کدام است؟ ($_{22}Ti = 48, {}_{28}Ni = 58 : g.mol^{-1}$)

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۵۸ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی **گام اول:** آرایش الکترونی هر دو اتم را نوشته و شمار الکترون‌های ظرفیتی آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$_{22}Ti : [_{18}Ar]\,3d^2 4s^2$$ (۴ الکترون ظرفیتی) و $$_{28}Ni : [_{18}Ar]\,3d^8 4s^2$$ (۱۰ الکترون ظرفیتی)

گام دوم: جرم اتم‌های نیکل و تیتانیم را محاسبه کرده و درصد جرمی نیکل را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم ۸ مول نیکل و ۷ مول تیتانیم در این آلیاژ وجود دارد.

$$m_{Ni} = 8 \times 58 = 464\ g$$

$$m_{Ti} = 7 \times 48 = 336\ g$$

$$\text{درصد جرمی Ni} = \frac{m_{Ni}}{m_{Ni} + m_{Ti}} \times 100 = \frac{464}{464 + 336} \times 100 = \frac{464}{8} = \%58$$

تست و پاسخ ۹۰

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **ترتیب تولید فراورده‌های حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان به صورت: «اوره ← آمونیاک ← مواد عایق گرما ← ویتامین A» است.**
- **دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود یکی از اکسیدهای نیتروژن است که عدد اکسایش اتم نیتروژن در آن برابر ۲+ است.** ← NO_2
- **طیف‌سنجی، روشی برای شناسایی ساختار مواد است و اساس آن برهم‌کنش میان مواد و پرتوهای الکترومغناطیسی است.**
- **ترتیب بالاترین غلظت چند آلاینده برحسب ppm در طول یک شبانه‌روز به صورت: $NO < O_3 < NO_2$ است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: ترتیب تولید فراورده‌های حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان به صورت زیر است:

انقلاب صنعتی ← تهیهٔ آمونیاک ← تهیهٔ اوره $[CO(NH_2)_2]$ ← تهیهٔ ویتامین A $(C_{20}H_{30}O)$ ← ساخت مواد عایق گرما

کودهای شیمیایی (تأمین غذای جمعیت جهان) — افزایش مراقبت‌های بهداشتی — پوشش‌های دوستدار محیط زیست

Telegram: @konkur_in

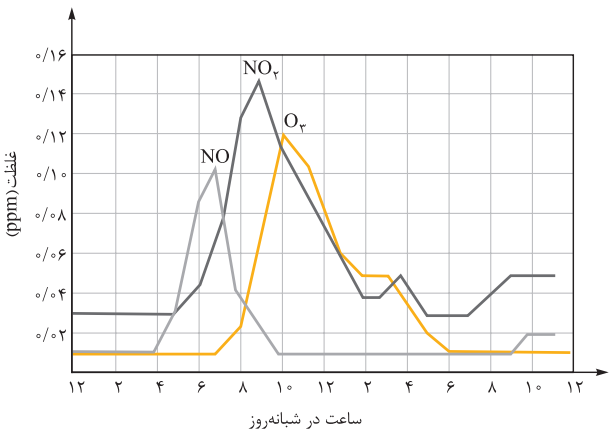
www.konkur.in

عبارت دوم: دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود $NO_2(g)$ است که عدد اکسایش نیتروژن در آن برابر $(+4)$ است.

$$\underline{NO_2}: N + 2(-2) = 0 \Rightarrow N = +4$$

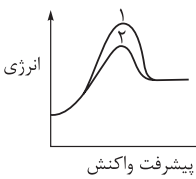
عبارت سوم: طیف‌سنجی همان مطالعهٔ برهم‌کنش‌های میان ماده و پرتوهای الکترومغناطیسی است و برای شناسایی ساختار مواد به کار می‌رود.

عبارت چهارم: مقایسهٔ بیشترین مقدار این آلاینده‌ها (ماکزیمم نمودارها) در یک شبانه‌روز به صورت $NO_2 > O_3 > NO$ است.



تست و پاسخ ۹۱

نمودار مقابل مربوط به یک واکنش گازی در دو شرایط متفاوت است. کدام مطلب نادرست است؟



$\Delta H > 0$

۱) واکنش مورد نظر مانند واکنش $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$، گرماگیر است.

۲) در شرایط (۲)، E_a واکنش کم‌تر بوده و سرعت واکنش بیشتر است.

۳) با افزایش دمای واکنش، نمودار انرژی پیشرفت واکنش از حالت (۱) به (۲) تغییر می‌کند.

۴) در این واکنش، مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده بیشتر از مواد فراورده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱ در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش داده‌شده، سطح انرژی فراورده‌ها بالاتر از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها است، پس واکنش گرماگیر می‌باشد. واکنش تبدیل O_2 به O_3 نیز واکنشی گرماگیر است.

۲ هر چه سطح انرژی قلهٔ نمودار پایین‌تر باشد، اختلاف سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها تا قلهٔ نمودار (انرژی فعال‌سازی)کم‌تر خواهد بود. از طرف دیگر، سرعت واکنش با E_a رابطهٔ عکس دارد. پس در شرایط (۲)، سرعت واکنش بیشتر است.

۳ افزایش دما با تأمین انرژی فعال‌سازی، سرعت واکنش را افزایش می‌دهد ولی مقدار عددی انرژی فعال‌سازی را تغییر نمی‌دهد.

۴ آنتالپی واکنش با استفاده از آنتالپی پیوند مواد شرکت‌کنندهٔ گازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

ΔH (واکنش) = مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده − مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده

پس در واکنش‌های گرماگیر، مجموع آنتالپی پیوند مواد واکنش‌دهنده از مجموع آنتالپی پیوند مواد فراورده بیشتر است.

تست و پاسخ ۹۲

در یک واکنش شیمیایی، اختلاف سطح انرژی سد انرژی، از واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، به ترتیب ۱۰۰ و ۷۰ کیلوژول است. ΔH این واکنش برحسب کیلوژول کدام است؟

۱) -30 ۲) $+30$ ۳) $+85$ ۴) -85

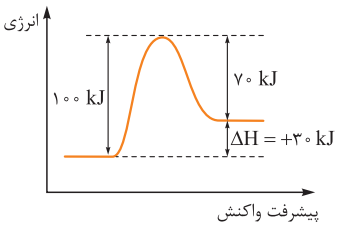
پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره کافیه نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش را رسم کرده و از روی اعداد داده‌شده، اختلاف سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها (آنتالپی واکنش) را به دست بیاری.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

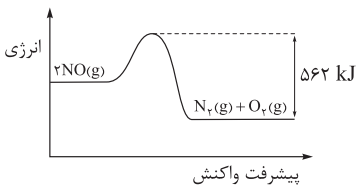
پاسخ تشریحی نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش را رسم می‌کنیم.



واکنش گرماگیر است و اختلاف سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها در آن (ΔH) برابر $+۳۰\ kJ$ است.

تست و پاسخ ۹۳

با توجه به نمودار و واکنش‌های داده‌شده، مقدار گرمای آزادشده به ازای مصرف ۰/۳ گرم NO در واکنش $۲NO(g) \rightarrow N_۲(g)+O_۲(g)$ و حداقل انرژی لازم برای شروع این واکنش، به ترتیب از راست به چپ، چند کیلوژول است؟ $(N=۱۴, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$



$$۴NH_۳(g)+۵O_۲(g) \rightarrow ۴NO(g)+۶H_۲O(g) \quad \Delta H=-۹۰۰\,kJ$$
$$۲NH_۳(g) \rightarrow N_۲(g)+۳H_۲(g) \quad \Delta H=۹۲\,kJ$$
$$۲H_۲O(g) \rightarrow ۲H_۲(g)+O_۲(g) \quad \Delta H=۴۸۰\,kJ$$

۱) ۳۸۴ ،۱/۷۸
۲) ۳۸۴ ،۰/۸۹
۳) ۱۹۲ ،۱/۷۸
۴) ۱۹۲ ،۰/۸۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک قانون هس، ΔH واکنش رو به دست بیار و بعد، گرمای مبادله‌شده به ازای ۰/۳ گرم NO را حساب کن! برای قسمت دوم سؤال و محاسبهٔ E_a، باید از نمودار استفاده کنی!

پاسخ تشریحی

گام اول: برای این‌که به واکنش: $۲NO(g) \rightarrow N_۲(g)+O_۲(g)$ برسیم، باید واکنش اول را معکوس و در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم تا ۲NO در سمت چپ معادله قرار گیرد. به واکنش دوم دست نمی‌زنیم تا $N_۲$ سمت راست معادله بماند و واکنش سوم را معکوس و در $\frac{۳}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا $O_۲$ در سمت چپ قرار گیرد و با $\frac{۵}{۲}O_۲$ سمت راست معادلهٔ اول ساده شود تا یک مول $O_۲$ در سمت راست باقی بماند.

$$۲NO(g)+۳H_۲O(g) \rightarrow ۲NH_۳(g)+\frac{۵}{۲}O_۲(g) \quad \Delta H=-۹۰۰\times-\frac{۱}{۲}=۴۵۰\,kJ$$
$$۲NH_۳(g) \rightarrow N_۲(g)+۳H_۲(g) \quad \Delta H=۹۲\,kJ$$
$$۳H_۲(g)+\frac{۳}{۲}O_۲(g) \rightarrow ۳H_۲O(g) \quad \Delta H=۴۸۰\times-\frac{۳}{۲}=-۷۲۰\,kJ$$
$$۲NO(g) \rightarrow N_۲(g)+O_۲(g) \quad \Delta H_{کلی}=۴۵۰+۹۲+(-۷۲۰)=-۱۷۸\,kJ$$

گام دوم: گرمای آزادشده به ازای مصرف ۰/۳ گرم NO را محاسبه می‌کنیم.

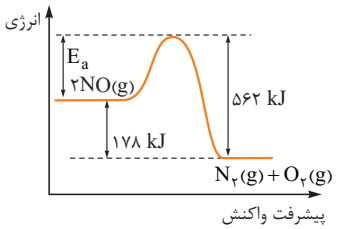
روش اول: استفاده از کسر تبدیل:
$$?kJ=۰/۳\,g\,NO\times\frac{۱\,mol\,NO}{۳۰\,g\,NO}\times\frac{۱۷۸\,kJ}{۲\,mol\,NO}=۰/۸۹\,kJ$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:
$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NO}}=\frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{۰/۳}{۲\times۳۰}=\frac{Q}{۱۷۸} \Rightarrow Q=۰/۸۹\,kJ$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام سوم: از روی نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، حداقل انرژی لازم برای شروع واکنش (انرژی فعال‌سازی) را به دست می‌آوریم.



$$\Rightarrow E_a = ۵۶۲ - ۱۷۸ = ۳۸۴\ kJ$$

تست و پاسخ ۹۴

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، درست است؟

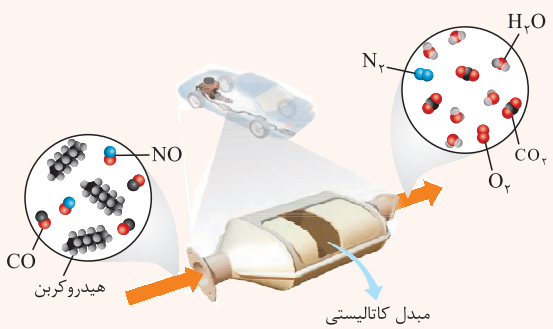
- **در آن برای حذف آلاینده‌ها، ۳ واکنش گرماده و از نوع اکسایش ـ کاهش انجام می‌شود.**
- **در آن‌ها برای حذف اکسیدهای نیتروژن از آمونیاک استفاده می‌شود.**
- **این مبدل‌ها از جنس فلزهای پلاتین، پالادیم و رودیم هستند.**
- **گاز اکسیژن در برخی از واکنش‌های انجام‌شده در آن، واکنش‌دهنده و در برخی، فراورده است.**
- **علی‌رغم حضور مبدل، به هنگام روشن‌شدن خودرو به‌ویژه در زمستان، مقدار آلاینده‌های بیشتری در گازهای خروجی از اگزوز مشاهده می‌شود.**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه ●● مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی

این مبدل‌ها، توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. در این مبدل‌ها واکنش‌های زیر انجام می‌شود:



واکنش حذف CO (سوختن): $2CO(g)+O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)\ ,\ \Delta H<0$ (CO در این واکنش اکسایش می‌یابد.)

واکنش حذف C_xH_y (سوختن): $C_xH_y+(x+\frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g)+\frac{y}{2}H_2O(g)\ ,\ \Delta H<0$

واکنش حذف NO (تجزیه): $2NO(g) \rightarrow N_2(g)+O_2(g)\ ,\ \Delta H<0$ (NO در این واکنش کاهش می‌یابد.)

۱) هر سه واکنش انجام‌شده در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی از نوع اکسایش ـ کاهش بوده و گرماده هستند.

۲) از یک طرف مبدل، آلاینده‌های C_xH_y، CO و NO وارد شده و از طرف دیگر آن، گازهای CO_2، H_2O، N_2 و O_2 خارج می‌شوند.

۳) با وجود مبدل کاتالیستی، در هنگام روشن و گرم شدن خودرو، به‌ویژه در روزهای سرد زمستان، باز هم آلاینده‌ها در گازهای خروجی وجود دارند؛ زیرا این مبدل‌ها در دماهای پایین، کارایی خود را از دست می‌دهند.

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول، چهارم و پنجم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: هر سه واکنش انجام‌شده در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، گرماده و از نوع اکسایش ـ کاهش هستند.

عبارت دوم: در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای دیزلی، برای حذف اکسیدهای نیتروژن از آمونیاک استفاده می‌شود.

عبارت سوم: مبدل کاتالیستی از جنس سرامیک است. تنها سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین، پالادیم و رودیم پوشانده شده است.

عبارت چهارم: در واکنش‌های حذف CO و C_xH_y، گاز O_2 واکنش‌دهنده است، ولی در واکنش حذف NO، گاز O_2 فراورده می‌باشد.

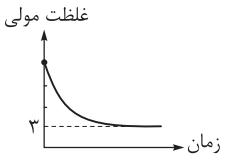
عبارت پنجم: در دماهای پایین، کارایی مبدل‌های کاتالیستی کاهش می‌یابد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۹۵

نمودار زیر مربوط به واکنش $2A(g) \rightleftharpoons 2B(g) + C(g)$ است که در لحظهٔ آغاز، فقط A در ظرف موجود بوده است. اگر مقدار ثابت تعادل این واکنش برابر ۴۰/۵ و در لحظهٔ تعادل، شمار مول‌های C برابر ۴/۵ باشد، مقدار اولیهٔ A چند مول بوده است؟



۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۱۰/۵
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا از روی مول تعادلی C(۴/۵ mol)، مول تعادلی B را به دست می‌آوریم، سپس با جای‌گذاری این مقادیر و غلظت تعادلی A (که در نمودار برابر ۳ مولار است.) در رابطهٔ K، حجم ظرف واکنش را محاسبه می‌کنیم. در نهایت از روی غلظت B تولیدشده، غلظت A مصرف‌شده را به دست می‌آوریم و با غلظت تعادلی A جمع می‌زنیم تا غلظت اولیه و در نهایت مول اولیهٔ A به دست آید.

پاسخ تشریحی

گام اول: مقادیر مول اولیه، تغییرات مول و مول‌های تعادلی مواد شرکت‌کننده را می‌نویسیم.

	$2A(g)$	$\rightleftharpoons$	$2B(g)$	$+ C(g)$
مول‌های اولیه:	n		۰	۰
تغییرات مول:	$-2x$		$+2x$	$+x$
مول‌های تعادلی:	$\underbrace{n-2x}_{(n-9)\ mol}$	$\Leftarrow$	$\underbrace{2x}_{9\ mol}$	$\Leftarrow \underbrace{x}_{4/5\ mol}$

گام دوم: غلظت‌های تعادلی مواد شرکت‌کننده را در رابطهٔ ثابت تعادل جای‌گذاری می‌کنیم تا حجم ظرف واکنش به دست بیاید (غلظت تعادلی A در روی نمودار برابر $3\ mol.L^{-1}$ است).

$$K = \frac{(\frac{n_B}{V})^2 \times (\frac{n_C}{V})^1}{[A]^2}$$

$$40/5 = \frac{(\frac{9}{V})^2 \times (\frac{4/5}{V})^1}{3^2} = \frac{\frac{9 \times 9 \times 4/5}{V^3}}{\frac{9}{1}} = \frac{9 \times 9 \times 4/5}{9 \times V^3} \Rightarrow 1 = \frac{1}{V^3} \Rightarrow V = 1\ L$$

گام سوم: مول اولیهٔ A را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{غلظت تعادلی A} = 3\ mol.L^{-1} \Rightarrow \frac{n-9}{V} = 3 \Rightarrow \frac{n-9}{1} = 3 \Rightarrow n = 12\ mol$$

تست و پاسخ ۹۶

تعادل $A(g) \rightleftharpoons 2C(g)$، در ظرفی به حجم یک لیتر با ۳ مول C و ۱ مول A برقرار است. در همان دما ۲ مول A به ظرف واکنش اضافه می‌کنیم تا تعادل جدیدی برقرار شود. مقدار تعادلی C در تعادل جدید چند مول است؟

۱) ۴/۲۵
۲) ۴/۵
۳) ۴/۷۵
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره چون دما ثابت است، مقدار ثابت تعادل در تعادل اولیه و نهایی برابر است. با توجه به اطلاعات تعادلی اول، مقدار ثابت تعادل را به دست بیار و پس از افزودن A، تغییرات مول بر اثر جابه‌جایی تعادل را برحسب x بنویس و با نوشتن رابطهٔ ثابت تعادل، مقدار x و مول تعادلی C را حساب کن!

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی چون حجم ظرف واکنش برابر یک لیتر است، پس می‌توان به جای غلظت‌های تعادلی، مول‌های تعادلی، A و C را در رابطهٔ ثابت تعادل جای‌گذاری کرده و مقدار عددی ثابت تعادل را به دست آورد.

$$A(g) \rightleftharpoons 2C(g) \Rightarrow K = \frac{n_C^2}{n_A} = \frac{3^2}{1} = 9\ mol.L^{-1}$$

با افزودن ۲ مول A، تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود تا به تعادل جدید برسد.

	$A(g)$	$\rightleftharpoons$	$2C(g)$	
مول‌ها در تعادل اولیه:	۱		۳	
لحظهٔ اعمال تغییر:	۱+۲		۳	
تغییر بر اثر جابه‌جایی تعادل:	$-x$		$+2x$	(جابه‌جایی تعادل به سمت راست)
مقدار نهایی:	$3-x$		$3+2x$	

$$K = \frac{(3+2x)^2}{3-x} = 9 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 27 - 9x$$

$$4x^2 + 21x - 18 = 0 \xrightarrow{\Delta=\sqrt{21^2-(4\times4\times-18)}} x = \frac{-21 \pm \sqrt{441+288}}{8}$$

$$x_1 = \frac{-21+27}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$ قابل قبول $$x_2 = \frac{-21-27}{8} = -6$$ غیر قابل قبول

پس مول تعادلی C در تعادل جدید برابر است با:

$$n_C = 3 + 2x = 3 + (2\times0/75) = 4/5\ mol$$

تست و پاسخ ۹۷

کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

الف) طبق اصل لوشاتلیه، با افزودن ۰/۱ مول گاز اکسیژن به سامانهٔ تعادلی $4HBr(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2Br_2(g) + 2H_2O(g)$، تعادل جابه‌جا شده و ۰/۲ مول برم تولید می‌شود.

ب) کاهش حجم مخلوط تعادلی $NO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons NO(g) + O_3(g)$، اثری بر غلظت مولی مواد و جابه‌جایی تعادل ندارد.

پ) اگر تعادل $aA(g) \rightleftharpoons bB(g)$، با افزایش دما و کاهش فشار در جهت برگشت جابه‌جا شود، جرم مولی B بیشتر از جرم مولی A است.

ت) با کاهش دما، شدت رنگ قهوه‌ای در مخلوط تعادلی $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، کاهش می‌یابد.

۱) پ ـ ت
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) الف ـ ب

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «ب» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) طبق اصل لوشاتلیه هنگامی که در دمای ثابت، غلظت یکی از مواد شرکت‌کننده در سامانهٔ تعادلی افزایش یابد، واکنش در جهت مصرف آن پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن را مصرف کند و به تعادل جدید برسد. به عبارت دیگر، در این تعادل، اثر تغییر اعمال‌شده به طور کامل از بین نمی‌رود؛ پس در این واکنش، ۰/۱ مول گاز اکسیژن افزوده شده به تعادل، به طور کامل مصرف نمی‌شود و در نتیجه ۰/۲ مول بُرم تولید نمی‌شود.

ب) در تعادل گازی: $NO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons NO(g) + O_3(g)$، شمار مول‌های گازی دو طرف معادلهٔ واکنش برابر است و کاهش حجم تأثیری بر جابه‌جایی تعادل ندارد، اما با کاهش حجم ظرف واکنش، غلظت همهٔ مواد گازی به یک نسبت افزایش می‌یابد.

پ) *از اون‌جایی که* تعادل: $aA(g) \rightleftharpoons bB(g)$، با کاهش فشار در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود، شمار مول‌های گازی در طرف چپ معادله (a) از شمار مول‌های گازی در طرف راست معادله (b) بیشتر است $(a > b)$. از طرف دیگر، مطابق قانون پایستگی جرم، مجموع جرم واکنش‌دهنده‌ها باید با مجموع جرم فراورده‌ها برابر باشد:

$$a \times \text{جرم مولی A} = b \times \text{جرم مولی B} \Rightarrow \frac{\text{جرم مولی B}}{\text{جرم مولی A}} = \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \text{جرم مولی B} > \text{جرم مولی A}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ت) تعادل گازی: $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، یک واکنش گرماگیر است؛ بنابراین با کاهش دما تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و غلظت گاز قهوه‌ای‌رنگ NO_2 کاهش می‌یابد و شدت رنگ قهوه‌ای کم‌تر می‌شود.

تست و پاسخ ۹۸

تعادل: $A(g) \rightleftharpoons B(g)$، از قراردادن یک مول A در یک ظرف دربسته در دمای T حاصل شده و میزان پیشرفت واکنش در این دما ۵۰٪ است. اگر ثابت تعادل واکنش در همین ظرف در دمای T'، ۱/۵ برابر ثابت تعادل آن در دمای T باشد، پیشرفت واکنش در دمای T' چند برابر پیشرفت آن در دمای اولیه (T) خواهد بود؟

۱) ۱/۲　　۲) ۱/۵

۳) ۱/۳　　۴) ۱/۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** در تعادل گازی: $A(g) \rightleftharpoons B(g)$، یک مول A در ظرف قرار داده شده و تعادل ۵۰٪ پیشرفت کرده است، یعنی ۰/۵ مول A تا لحظهٔ تعادل مصرف شده است. چون ضرایب مولی مواد واکنش‌دهنده و فراورده برابر است، پس می‌توان به جای غلظت‌های تعادلی، مول‌های تعادلی را در رابطهٔ ثابت تعادل جای‌گذاری کرد.

دمای T:	$A(g)$	$\rightleftharpoons$	$B(g)$
مول اولیه:	۱		۰
تغییرات مول:	−۰/۵		+۰/۵
مول ثانویه (تعادلی):	۰/۵		۰/۵

$$K = \frac{n_B}{n_A} = \frac{۰/۵}{۰/۵} = ۱$$

گام دوم: ثابت تعادل در دمای $T'(K')$، ۱/۵ برابر K است، پس داریم:

$$K' = ۱/۵ \times K = ۱/۵ \times ۱ = ۱/۵$$

دمای T:	$A(g)$	$\rightleftharpoons$	$B(g)$
مول اولیه:	۱		۰
تغییرات مول:	−x		+x
مول ثانویه (تعادلی):	۱−x		x

$$\Rightarrow K' = \frac{x}{۱-x} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{x}{۱-x} \Rightarrow ۱/۵ - ۱/۵x = x \Rightarrow ۱/۵ = ۲/۵x \Rightarrow x = ۰/۶$$

پس درصد پیشرفت تعادل در دمای T'، برابر ۶۰٪ $(\frac{۰/۶}{۱} \times ۱۰۰ = ۶۰)$ است.

گام سوم: نسبت درصد پیشرفت در دو دما را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\text{درصد پیشرفت در دمای } T'}{\text{درصد پیشرفت در دمای } T} = \frac{۶۰}{۵۰} = ۱/۲$$

تست و پاسخ ۹۹

چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- **از کلرواتان به عنوان بی‌حس‌کنندهٔ موضعی استفاده می‌شود.**
- **اتانول یک ضدعفونی‌کننده است که از واکنش گاز اتن با آب در محیطی با pH = ۷ تولید می‌شود.**
- **اتیل‌استات دارای دو اتم کربن با عدد اکسایش ۳− است و به عنوان حلال چسب کاربرد دارد.**
- **تهیهٔ کتون‌ها و آلدهیدها از الکل‌ها امکان‌پذیر نیست و تنها می‌توان از کربوکسیلیک اسیدها، آن‌ها را تهیه کرد.**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه ●● **گاز اتن** یکی از مهم‌ترین خوراک‌ها در صنایع پتروشیمی است که می‌توان از آن، مواد آلی گوناگون پرمصرف و ارزشمند تهیه کرد. در جدول زیر سنتز برخی مواد از گاز اتن آورده شده است:

فراوردهٔ هدف	کاربرد فراوردهٔ هدف	فرم نوشتاری سنتز	معادلهٔ موازنه‌شدهٔ سنتز
گاز اتان (C_2H_6)	سوخت	گاز اتان ← گاز هیدروژن + گاز اتن	$C_2H_4(g)+H_2(g) \xrightarrow{Ni(s)} C_2H_6(g)$
اتانول (C_2H_6O)	ضدعفونی‌کننده	اتانول ← آب + گاز اتن	$C_2H_4(g)+H_2O(l) \xrightarrow{H_2SO_4} C_2H_6O(l)$
کلرو اتان (C_2H_5Cl)	افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی	کلرو اتان ← گاز هیدروژن کلرید + گاز اتن	$C_2H_4(g)+HCl(g) \rightarrow C_2H_5Cl(g)$
پلی‌اتن $-(C_2H_4)_n-$	سازندهٔ اصلی برخی لوازم پلاستیکی	پلی‌اتن ← ⋯ + اتن + اتن	$nC_2H_4(g) \xrightarrow{\text{دما و فشار}} -(C_2H_4)_n-(s)$

برای سنتز یک استر می‌توان از واکنش یک اسید آلی (کربوکسیلیک اسید) با یک الکل در شرایط مناسب استفاده کرد:

$$\underset{\text{اسید آلی}}{RCOOH}+\underset{\text{الکل}}{R'OH} \rightleftharpoons[H_2SO_4] \underset{\text{استر}}{RCOOR'}+\underset{\text{آب}}{H_2O}$$

مثال: اتیل استات (اتیل اتانوات) که به عنوان حلال چسب، کاربرد دارد، از واکنش اتانول و اتانوئیک اسید (استیک اسید) تولید می‌شود:

$$CH_3COOH + HOCH_2CH_3 \xrightarrow{H_2O} CH_3COOCH_2CH_3 + H_2O$$

پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم و چهارم نادرست‌اند.

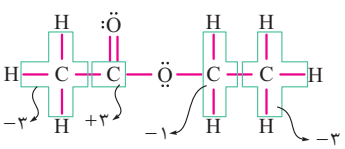
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: از کلرو اتان (C_2H_5Cl) به عنوان افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی استفاده می‌شود.

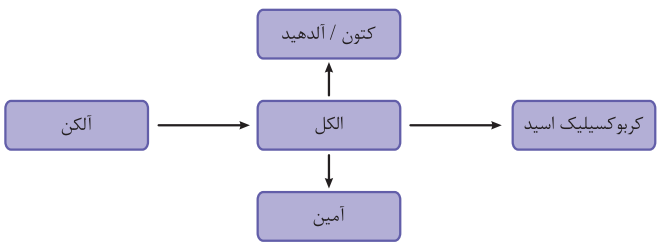
عبارت دوم: اتانول (C_2H_5OH) یک ضدعفونی‌کننده است که از واکنش گاز اتن با آب در محیط اسیدی ($pH<7$) تهیه می‌شود.

$$C_2H_4(g)+H_2O(l) \xrightarrow{H_2SO_4} C_2H_5OH(l)$$

عبارت سوم: با توجه به ساختار لوویس اتیل استات، در ساختار آن دو اتم کربن با عدد اکسایش ۳− وجود دارد.



عبارت چهارم: نمودار زیر، الگوی کلی تبدیل برخی مواد شیمیایی به یکدیگر را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار آلدهیدها و کتون‌ها را می‌توان از الکل‌ها تهیه کرد.



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

تست و پاسخ ۱۰۰

واکنش هیدروژن‌دار کردن اتیلن یک واکنش تعادلی گازی است. اگر این واکنش در یک ظرف یک‌لیتری به حالت تعادل باشد، چند مورد از راه‌های پیشنهادی زیر، می‌تواند سبب افزایش غلظت تعادلی اتان شود؟

- **افزایش دما**
- **انتقال مخلوط گازها به ظرف نیم‌لیتری**
- **افزودن مقداری گاز هیدروژن به ظرف**
- **افزایش فشار**

پیوند	C═C	H—H	C—H	C—C
آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۶۱۴	۴۳۶	۴۱۵	۳۴۸

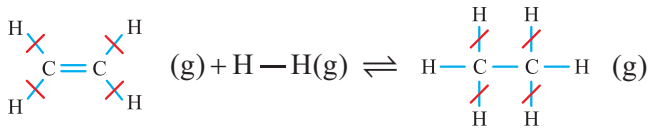
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی موردهای دوم، سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی موارد:

مورد اول: از روی آنتالپی پیوندهای داده‌شده در جدول، آنتالپی واکنش هیدروژن‌دار کردن اتیلن را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم واکنش گرماگیر است یا گرماده:

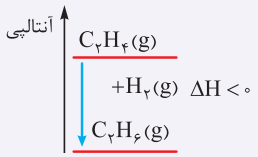


$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \underset{\text{واکنش‌دهنده‌ها}}{\text{مجموع آنتالپی پیوند}} - \underset{\text{پیوند فراورده‌ها}}{\text{مجموع آنتالپی}} = [((۱\times\Delta H_{(C=C)})+(۱\times\Delta H_{(H-H)})]-[۲\Delta H_{(C-H)}+(۱\times\Delta H_{(C-C)})]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = (۱\times۶۱۴)+(۱\times۴۳۶)-[(۲\times۴۱۵)+(۱+۳۴۸)]=۱۰۵۰-۱۱۷۸=-۱۲۸\ kJ$$

پس واکنش هیدروژن‌دارکردن اتیلن یک واکنش گرماده است و با افزایش دما در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و غلظت تعادلی اتان کاهش می‌یابد.

تکنیک بدون محاسبه هم می‌توانستیم به گرماده‌بودن واکنش پی ببریم! اتن به دلیل داشتن ساختار سیرنشده، واکنش‌پذیری و سطح انرژی بیشتری از اتان دارد، پس در اثر هیدروژن‌دارکردن اتن، گاز پایدارتر اتان تولید می‌شود.



مورد دوم: با انتقال مخلوط گازها از ظرف یک‌لیتری به ظرف نیم‌لیتری (کاهش حجم یا افزایش فشار)، تعادل در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر (جهت رفت) جابه‌جا می‌شود و غلظت تعادلی اتان افزایش می‌یابد.

مورد سوم: در اثر افزودن گاز $H_۲$ به مخلوط تعادل، واکنش در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و غلظت تعادلی اتان افزایش می‌یابد.

مورد چهارم: در اثر افزایش فشار (همان کاهش حجم)، تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و غلظت تعادلی اتان افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۱۰۱

در اثر واکنش آلکن A با آب، الکل B به دست می‌آید. اگر درصد جرمی کربن در الکل B برابر ۶۰ باشد، فرمول ترکیب حاصل از واکنش آلکن A با گاز هیدروژن کلرید کدام است؟ ($H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-1}$)

۱) $C_۲H_۵Cl$ ۲) $C_۳H_۷Cl$ ۳) $C_۴H_۹Cl$ ۴) $C_۵H_{۱۱}Cl$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا واکنش کلی موازنه‌شدهٔ آلکن با آب و تهیهٔ الکل را می‌نویسیم.

$$C_nH_{۲n}+H_۲O \xrightarrow{H_۲SO_۴} C_nH_{۲n+۲}O$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام دوم: از روی درصد جرمی کربن در الکل تولیدشده، شمار اتم‌های کربن در هر مولکول الکل یا آلکن اولیه (n) را به دست می‌آوریم.

$$\text{درصدجرمی C} = \frac{\text{جرم C}}{\text{جرم کل } C_nH_{2n+2}O} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۶۰ = \frac{۱۲ \times n}{(۱۲ \times n) + (۱ \times (۲n+۲)) + (۱ \times ۱۶)} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲\cancel{۱۲}n}{۱۴n+۱۸} = \frac{\cancel{۶}^{۱}}{۱۰} \rightarrow ۲۰n = ۱۴n + ۱۸ \Rightarrow ۶n = ۱۸ \Rightarrow n = ۳ \Rightarrow \text{فرمول آلکن اولیه} = C_۳H_۶$$

گام سوم: واکنش آلکن با گاز هیدروژن کلرید را می‌نویسیم.

$$C_۳H_۶ + HCl \rightarrow C_۳H_۷Cl$$

تست و پاسخ ۱۰۲

کدام مطلب نادرست است؟

۱) از ویژگی‌های پلاستیک‌ها، می‌توان به چگالی کم، قیمت کم و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.

۲) در ساختار واحد تکرارشوندهٔ پلیمر سازندهٔ بطری آب، شمار پیوندهای دوگانه نصف شمار اتم‌های کربن است.

۳) در ساختار همهٔ ترکیبات آلی، شمار پیوندهای $C-H$ با شمار اتم‌های هیدروژن برابر است.

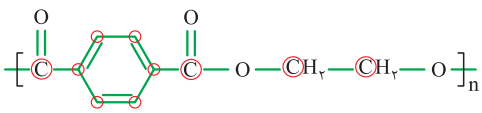
۴) ترفتالیک اسید را برخلاف پارازایلن، اتن و بنزن، نمی‌توان از تقطیر نفت خام به دست آورد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱ از ویژگی‌های پلاستیک‌ها می‌توان به چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان‌بودن و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.

۲ در ساختار واحد تکرارشوندهٔ پلی‌اتیلن ترفتالات (پلیمر سازندهٔ بطری آب)، ۱۰ اتم کربن و ۵ پیوند دوگانه وجود دارد.



(PET)

۳ در ترکیبات آلی نیتروژن‌دار و اکسیژن‌دار ممکن است اتم‌های هیدروژن به اتم‌های نیتروژن یا اکسیژن متصل بشوند. اما در هیدروکربن‌ها همواره شمار اتم‌های هیدروژن با شمار پیوندهای $C-H$ برابر است.

۴ موادی مانند بنزن $(C_۶H_۶)$، اتن $(C_۲H_۴)$ و پارازایلن $(C_۸H_{۱۰})$، به طور مستقیم از تقطیر نفت خام به دست می‌آیند، اما اتیلن‌گلیکول $(C_۲H_۶O_۲)$ و ترفتالیک اسید $(C_۸H_۶O_۴)$ در نفت خام وجود ندارند.

تست و پاسخ ۱۰۳

نسبت تغییر مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در سوختن کامل ترفتالیک اسید به تغییر مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در سوختن کامل اتیلن‌گلیکول کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳ / ۴ ۳) ۴ / ۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ واکنش سوختن کامل ترفتالیک اسید و اتیلن‌گلیکول را به ازای یک مول مادهٔ سوختنی می‌نویسیم:

سوختن ترفتالیک اسید: $C_۸H_۶O_۴ + ۷/۵O_۲ \rightarrow ۸CO_۲ + ۳H_۲O$

سوختن اتیلن‌گلیکول: $C_۲H_۶O_۲ + ۲/۵O_۲ \rightarrow ۲CO_۲ + ۳H_۲O$

گام دوم: عدد اکسایش کربن را در دو طرف معادلهٔ سوختن هر دو ماده محاسبه می‌کنیم.

$$\underline{C}O_۲ : x + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow x = +۴$$

$$\underline{C}_۸H_۶O_۴ : ۸x + ۶(+۱) + ۴(-۲) = ۰ \Rightarrow ۸x = +۲ \Rightarrow$$ مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در ترفتالیک اسید

$$\underline{C}_۸H_۶O_۴ \rightarrow \underline{C}O_۲$$

$$۱ \times (+۲) = +۲ \qquad ۸ \times (+۴) = +۳۲$$

۳۰ واحد

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتیلن‌گلیکول $C_2H_6O_2 : 2x + 6(+1) + 2(-2) = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow$

$$\underline{C_2H_6O_2} \rightarrow 2CO_2$$
$$1\times(-2) = \underline{-2} \qquad 2\times(+4) = \underline{+8}$$
۱۰ واحد

$$\frac{\text{تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن در ترفتالیک اسید}}{\text{تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتیلن‌گلیکول}} = \frac{30}{10} = 3$$

تست و پاسخ ۱۰۴

در شرایط معین، بازده واکنش تبدیل ۴/۲۴ کیلوگرم پارازایلن به ترفتالیک اسید برابر ۸۰ درصد است. اگر ترفتالیک اسید حاصل از این فرایند برای تولید PET به‌کار رود، جرم اتیلن‌گلیکول مورد نیاز برای مصرف کامل ترفتالیک اسید، چند گرم خواهد بود؟ $(H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۴۸۰ ۲) ۱۶۴۳ ۳) ۱۹۸۴ ۴) ۲۰۵۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی **گام اول:** واکنش تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید را می‌توان به طور خلاصه‌شدهٔ زیر در نظر گرفت:

۱) $C_8H_{10} + \text{محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات} \rightarrow C_8H_6O_4$

پارازایلن — ترفتالیک اسید

و واکنش تهیهٔ پلی‌اتیلن ترفتالات از ترفتالیک اسید و اتیلن گلیکول به صورت زیر است:

۲) $nC_8H_6O_4 + nC_2H_6O_2 \rightarrow +C_{10}H_8O_4+_n + 2nH_2O$

ترفتالیک اسید — اتیلن گلیکول — پلی‌اتیلن ترفتالات

چون در صورت سؤال گفته شده که ترفتالیک اسید تولیدشده در واکنش (۱) در واکنش (۲) مصرف می‌شود، ضرایب مواد در واکنش (۱) را در n ضرب می‌کنیم تا ضریب ترفتالیک اسید در هر دو واکنش برابر شود.

۱′) $nC_8H_{10} + \text{محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات} \rightarrow nC_8H_6O_4$

حال می‌توان هم‌ارزی مقابل را بین پارازایلن از واکنش (۱′) با اتیلن‌گلیکول از واکنش (۲) برقرار کنیم: $nC_8H_{10} \sim nC_2H_6O_2$

گام دوم: جرم اتیلن گلیکول را از روی جرم پارازایلن حساب می‌کنیم.

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

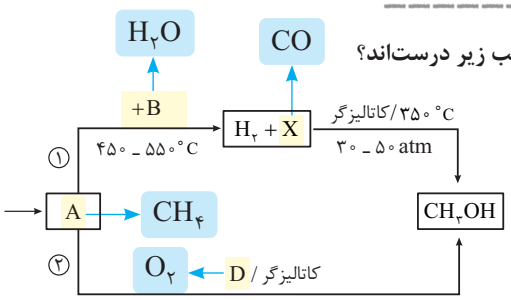
$$?gC_2H_6O_2 = 4/24\times10^3 gC_8H_{10}\times\frac{\overbrace{80}^{\text{بازده}}}{100}\times\frac{1\,mol\,C_8H_{10}}{106\,g\,C_8H_{10}}\times\frac{n\,mol\,C_2H_6O_2}{n\,mol\,C_8H_{10}}\times\frac{62\,g\,C_2H_6O_2}{1\,mol\,C_2H_6O_2} = 1984\,g\,C_2H_6O_2$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\frac{\text{بازده درصدی}}{100}\times\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_8H_{10}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_2H_6O_2}} \Rightarrow \frac{4240\times80}{n\times106\times100} = \frac{x}{n\times62} \Rightarrow x = 1984\,g\,C_2H_6O_2$$

تست و پاسخ ۱۰۵

با توجه به نمودار زیر که روش‌های تولید متانول را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟



الف) D، دومین گاز فراوان هواکره است.

ب) در ساختار لوویس X، نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به الکترون‌های ناپیوندی برابر $\frac{3}{2}$ است.

پ) A سازندهٔ اصلی گاز طبیعی است که در میدان‌های نفتی به فراوانی یافت می‌شود.

ت) B ماده‌ای است که در فرایند تولید PET نیز به عنوان فراوردهٔ جانبی تولید می‌شود.

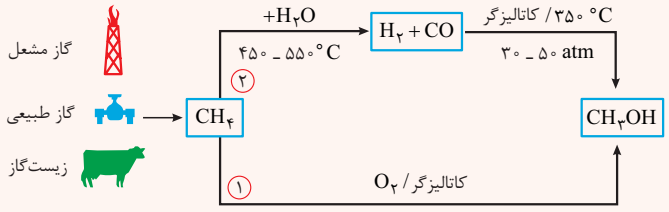
۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ـ ت ۳) الف ـ پ ـ ت ۴) الف ـ ب

پاسخ: گزینهٔ ۳

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

درس‌نامه متانول را می‌توان به طور مستقیم (روش ۱ در نمودار) و غیرمستقیم (روش ۲ در نمودار) از متان تهیه کرد. گاز متان سازندهٔ اصلی گاز طبیعی است و در میدان‌های نفتی به فراوانی یافت می‌شود. با توجه به این‌که متان (CH_4) یک آلکان است (هیدروکربن سیرشده) و واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد، تبدیل آن به متانول فرایندی دشوار است و به دانش و فناوری پیشرفته‌ای نیاز دارد.



پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) گاز D همان O_2 است که دومین گاز فراوان هواکره می‌باشد (فراوان‌ترین گاز هواکره، N_2 است).

ب) مادهٔ X همان کربن مونوکسید (CO) است که در ساختار لوویس آن، ۳ جفت الکترون پیوندی و دو جفت الکترون ناپیوندی (یا ۴ الکترون ناپیوندی) وجود دارد.

$$:C\equiv O: \Rightarrow \frac{\text{جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۳}{۴}$$

پ) مادهٔ A همان متان (CH_4) است که سازندهٔ اصلی گاز طبیعی بوده و در میدان‌های نفتی به فراوانی یافت می‌شود.

ت) مادهٔ B همان H_2O است که در واکنش تهیهٔ PET نیز تولید می‌شود.

Telegram: @konkur_in