



ویژه  
کنکوری های  
۱۴۰۳  
۲۲ و ۲۳ فروردین

دفترچه  
سؤال  
آزمون هفتم  
ریاضی پلاس



#### بودجه بندی آزمون

آمار  
+ شمارش و احتمال  
ریاضی ۱  
صفحه ۱۱۸ تا ۱۷۰  
ریاضی ۲  
صفحه ۱۴۳ تا ۱۶۶  
ریاضی ۳  
صفحه ۱۴۳ تا ۱۴۸

#### مدت پاسخگویی

۴۰ دقیقه

#### نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

محمد رضا حسینی فرد - سوگند روشنی - علیرضا شریف خطیبی - مهدی عزیزی -  
محمد گودرزی - رسول محسنی منش - سروش موئینی - حسین نادری

#### درس ریاضی

##### مسئول درس

رسول محسنی منش

##### گزینشگر

رسول محسنی منش

##### مؤلف پاسخ نامه

حمید علیزاده

##### کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

حمید علیزاده  
محمد سجاد نقیه

##### ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

عاطفه خان محمدی  
ماهان فنی فر  
امیرحسین قنبری  
علیرضا کاظمی بقا

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

#### ویژگی های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامۀ مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با مرور نامۀ کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت جزوۀ جمع بندی، ترکیبی و تصویری در قالب مرور نامۀ، در اختیار دانش آموزان قرار می گیرد.

ریاضی (۳): صفحه‌های ۱۴۳ تا ۱۴۸، ریاضی (۲): صفحه‌های ۱۴۳ تا ۱۶۶، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۷۰

۱- از ظرفی شامل سه مهره سبز با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و هم‌چنین چهار مهره قرمز با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، دو مهره به تصادف خارج کرده‌ایم. اگر بدانیم مجموع شماره‌های دو مهره خارج شده برابر ۵ است، با چه احتمالی دو مهره خارج شده هم‌رنگ هستند؟

$$(۱) \frac{2}{5} \quad (۲) \frac{1}{3} \quad (۳) \frac{1}{2} \quad (۴) \frac{3}{7}$$

۲- در فضای نمونه‌ای S دو پیشامد  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$  مستقل‌اند. اگر حداقل یکی از آن‌ها رخ ندهد، با کدام احتمال A رخ می‌دهد؟

$$(۱) \frac{1}{5} \quad (۲) \frac{1}{4} \quad (۳) \frac{2}{5} \quad (۴) \frac{1}{2}$$

۳- با حروف کلمه alchymies، کلمه‌ای نه حرفی ساخته‌ایم. با کدام احتمال بین حروف a و h و هم‌چنین بین حروف i و e فقط یک حرف قرار دارد؟

$$(۱) \frac{13}{168} \quad (۲) \frac{1}{224} \quad (۳) \frac{8}{189} \quad (۴) \frac{4}{189}$$

۴- از بین شش کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ سه کارت به تصادف برمی‌داریم و در کنار هم به ترتیب صعودی از چپ به راست قرار می‌دهیم تا یک عدد سه‌رقمی ساخته شود. با چه احتمالی عدد ساخته شده مضرب ۵ است؟

$$(۱) ۰/۲۵ \quad (۲) ۰/۳ \quad (۳) ۰/۳۵ \quad (۴) ۰/۴$$

۵- در کیسه‌ای پنج توپ با شماره‌های ۱ تا ۵ قرار دارد. به ترتیب و بدون جای‌گذاری، ۳ توپ به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مجموع شماره‌های روی توپ دوم و سوم با شماره توپ اول برابر باشد؟

$$(۱) \frac{5}{12} \quad (۲) \frac{2}{15} \quad (۳) \frac{1}{60} \quad (۴) \frac{1}{10}$$

۶- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و اختلاف اعداد رو شده را برابر با m فرض می‌کنیم.

- اگر  $m \leq 1$  باشد، دو سکه پرتاب می‌کنیم.
- اگر  $1 < m < 3$  باشد، سه سکه پرتاب می‌کنیم.
- اگر  $m > 2$  باشد، چهار سکه پرتاب می‌کنیم.

با کدام احتمال فقط دو بار «رو» ظاهر می‌شود؟

$$(۱) \frac{17}{72} \quad (۲) \frac{19}{72} \quad (۳) \frac{21}{72} \quad (۴) \frac{23}{72}$$

محل انجام محاسبات

۷- دو عدد را به طور متوالی و بدون جای گذاری از میان اعداد  $1, 2, \dots, 2n+1$  که  $n \in \mathbb{N}$  انتخاب می کنیم. اگر احتمال این که فقط عدد دومی فرد باشد  $\frac{8}{31}$  باشد، با چه احتمالی در انتخاب متوالی دو عدد از میان همین اعداد و بدون جای گذاری، فقط عدد دوم بر ۵ بخش پذیر است؟

$$\frac{125}{961} (1) \quad \frac{125}{156} (2) \quad \frac{5}{31} (3) \quad \frac{2}{5} (4)$$

۸- در یک جمع ۸ نفره که هیچ دو نفری هم سن نیستند، سن رضا از محسن بیشتر و از امیر کم تر است. اگر جوان ترین فرد گروه رتبه ۱ را داشته باشد، با کدام احتمال رضا از نظر سن در رتبه سوم قرار می گیرد؟

$$\frac{5}{14} (1) \quad \frac{5}{56} (2) \quad \frac{5}{28} (3) \quad \frac{1}{3} (4)$$

۹- کیسه A با ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی و کیسه B شامل ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی را در اختیار داریم. از کیسه A به تصادف دو مهره انتخاب کرده و در کیسه B می ریزیم و سپس از هر کیسه دو مهره خارج کرده و در کیسه C قرار می دهیم. اگر از کیسه C مهره ای خارج کنیم، با چه احتمالی قرمز است؟

$$\frac{31}{100} (1) \quad \frac{62}{100} (2) \quad \frac{51}{100} (3) \quad \frac{43}{100} (4)$$

۱۰- در ظرف A، ۳ مهره سفید و ۴ مهره دیگر و در ظرف B، ۴ مهره سفید و ۵ مهره دیگر داریم. ۳ مهره از A و ۳ مهره از B را در ظرف C می اندازیم که ۲ مهره سفید و ۲ مهره دیگر دارد. مهره انتخابی از ظرف جدید C، با کدام احتمال سفید است؟

$$\frac{97}{210} (1) \quad \frac{42}{126} (2) \quad \frac{43}{126} (3) \quad \frac{91}{210} (4)$$

۱۱- با ارقام طبیعی کم تر از ۸، چند عدد طبیعی زوج می توان ساخت که رقم تکراری نداشته و از ۳۰۰۰ کم تر باشند؟

$$211 (1) \quad 208 (2) \quad 193 (3) \quad 190 (4)$$

۱۲- در یک میهمانی ۸ نفر شرکت دارند که ۲ زوج در بین آنها هستند. به چند طریق می توان ۵ نفر از بین آنها انتخاب کرد، به طوری که از هر زوج دقیقاً یک نفر انتخاب شود؟

$$12 (1) \quad 16 (2) \quad 24 (3) \quad 36 (4)$$

۱۳- با حروف A, A, A, B, B, C چند تبدیل ۴ حرفی می توان ساخت؟

$$24 (1) \quad 38 (2) \quad 40 (3) \quad 36 (4)$$

محل انجام محاسبات



۱۴- چند عدد ده رقمی با ارقام ۵ و ۷ می توان نوشت که مضرب ۱۵ بوده و از هر دو طرف (چپ و راست) یکسان خوانده شوند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۵- با ارقام طبیعی کوچک تر از ۹، عددی هشت رقمی به صورت  $\overline{abcdefgh}$  ساخته ایم. در چه تعداد از این اعداد همواره  $b < c < d$  و  $b < g < h$  است؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

- (۱) ۴۰۳۲ (۲) ۲۰۱۶ (۳) ۶۷۲ (۴) ۳۳۶

۱۶- میانگین قطرهای مربع هایی  $\sqrt{882}$  است. اگر مجموع مساحت مربع ها  $5/112$  برابر تعداد کل اضلاع مربع ها باشد، میزان پراکندگی طول ضلع مربع ها به ازای یک واحد از میانگین آن ها، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۳ (۳)  $\frac{1}{7}$  (۴) ۷

۱۷- داده های آماری  $2k, 4, 6, 8, \dots, 2k$  مفروض اند. برای مقادیر بزرگ  $k$ ، ضریب تغییرات آن ها به کدام عدد نزدیک می شود؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۸- در داده های آماری اعداد صحیح، اختلاف از میانگین آن ها برابر ۳، ۳، ۲، ۱،  $a, b, c$  است. حداقل مقدار واریانس این ۷ داده چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{26}{7}$  (۲)  $\frac{29}{7}$  (۳)  $\frac{23}{7}$  (۴)  $\frac{32}{7}$

۱۹- مجموع اختلاف ده داده آماری از عدد ۱۱، برابر ۲۰ است و مجموع مربعات اختلاف این داده ها از میانگین شان برابر ۳۶۰ است. اگر تمام داده ها را دو برابر کرده و با  $k$  جمع کنیم، ضریب تغییرات ۲۰ درصد می شود.  $k$  کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۱۷ (۴) ۳۴

۲۰- اعداد طبیعی را به گونه ای دسته بندی می کنیم که تعداد اعداد هر دسته برابر با مربع شماره آن دسته باشد؛ یعنی  $\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \dots$ . در این صورت واریانس جملات اول، دهم و آخر از دسته دهم کدام است؟

- (۱) ۱۹۹۶ (۲) ۲۰۰۲ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۱۹۹۸

محل انجام محاسبات



ویژه  
کنکوری‌های  
۱۴۰۳  
۲۲ و ۲۳ فروردین

دفترچه  
پاسخ  
آزمون هفتم  
ریاضی پلاس



#### بودجه‌بندی آزمون

آمار  
+ شمارش و احتمال  
ریاضی ۱  
صفحه ۱۱۸ تا ۱۷۰  
ریاضی ۲  
صفحه ۱۴۳ تا ۱۶۶  
ریاضی ۳  
صفحه ۱۴۳ تا ۱۴۸

#### نام طراحان به ترتیب حروف الفبا

محمد رضا حسینی فرد - سوگند روشنی - علیرضا شریف خطیبی - مهدی عزیزی -  
محمد گودرزی - رسول محسنی منش - سروش موئینی - حسین نادری

#### درس ریاضی

##### مسئول درس

رسول محسنی منش

##### گزینشگر

رسول محسنی منش

##### مؤلف پاسخ‌نامه

حمید علیزاده

##### کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا

حمید علیزاده  
محمد سجاد نقیه

##### ویراستاران به ترتیب حروف الفبا

عاطفه خان محمدی  
ماهان فنی فر  
امیرحسین قنبری  
علیرضا کاظمی بقا

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور

#### ویژگی‌های منحصر به فرد آزمون ریاضی پلاس

✓ اولین و تنها آزمون ترکیبی - موضوعی ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی با برنامه مطالعاتی مناسب برای موضوعی و ترکیبی خواندن درس ریاضی

✓ تنها آزمون ریاضی همراه با **مرورنامه** کامل از تمام مباحث آزمون و نکات ترکیبی مربوط به آن:

دو هفته قبل از هر آزمون، کل مباحث آزمون، به صورت **جزوه جمع‌بندی**، ترکیبی و تصویری در قالب مرورنامه، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

ریاضی (۳): صفحه‌های ۱۴۳ تا ۱۴۸، ریاضی (۲): صفحه‌های ۱۴۳ تا ۱۶۶، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۷۰

## تست و پاسخ ۱

از ظرفی شامل سه مهره سبز با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و هم‌چنین چهار مهره قرمز با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، دو مهره به تصادف خارج کرده‌ایم. اگر بدانیم مجموع شماره‌های دو مهره خارج شده برابر ۵ است، با چه احتمالی دو مهره خارج شده هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{2}{5} (۱) \quad \frac{1}{3} (۲) \quad \frac{1}{4} (۳) \quad \frac{3}{7} (۴)$$

## پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا فضای نمونه جدید را طبق شرط احتمال می‌نویسیم. براساس این شرط، مجموع دو مهره خارج شده که ممکن است هر دو سبز یا هر دو قرمز یا یکی سبز و دیگری قرمز باشد، برابر ۵ است. اگر مهره‌ها را به صورت  $1^G, 2^G, 3^G, 1^R, 2^R, 3^R$  نام‌گذاری کنیم، آن‌گاه فضای نمونه جدید به صورت زیر می‌باشد.

$$B = \{(1^R, 4^R), (2^R, 3^R), (2^G, 3^G), (1^G, 4^R), (2^G, 3^R), (2^R, 3^G)\} \Rightarrow n(B) = 6$$

گام دوم: حالا باید در این فضای نمونه جدید، تعداد حالت‌های مربوط به هم‌رنگ‌بودن دو مهره را بنویسیم که این پیشامد به صورت  $A = \{(1^R, 4^R), (2^R, 3^R), (2^G, 3^G)\}$  می‌باشد؛ یعنی  $n(A) = 3$  است.

گام سوم: بنابراین برای محاسبه احتمال هم‌رنگ‌بودن دو مهره خارج شده به شرط آن‌که مجموع دو مهره برابر ۵ باشد از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم؛ یعنی:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## تست و پاسخ ۲

در فضای نمونه‌ای S دو پیشامد  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$  مستقل‌اند. اگر حداقل یکی از آن‌ها رخ ندهد، با کدام احتمال A رخ می‌دهد؟

$$\frac{1}{4} (۲) \quad \frac{1}{5} (۱) \quad \frac{2}{5} (۳) \quad \frac{1}{7} (۴)$$

## پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا باید تعداد عضوهای فضای نمونه را به دست آوریم، بنابراین اگر تعداد عضوهای فضای نمونه S را  $n(S)$  بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{n(S)}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{n(S)}$$

گام دوم: از آنجایی که دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$  است، پس:

$$A \cap B = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow \frac{2}{n(S)} = \frac{4}{n(S)} \times \frac{5}{n(S)} \Rightarrow n(S) = 10 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

گام سوم: براساس شرط احتمال، باید حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ ندهد، پس باید  $P(A' \cup B')$  محاسبه شود. از طرفی احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط آن‌که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ ندهد، به صورت  $P(A|A' \cup B')$  می‌باشد که طبق رابطه احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$P(A|A' \cup B') = \frac{P(A \cap (A' \cup B'))}{P(A' \cup B')}$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

برای محاسبه  $P(A \cap (A' \cup B'))$  به صورت زیر عمل می‌کنیم که در آن چون  $A$  و  $B$  مستقل‌اند، پس  $A$  و  $B'$  نیز مستقل هستند.

$$P(A \cap (A' \cup B')) = P(\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap B')) = P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

گام چهارم: برای محاسبه  $P(A' \cup B')$  طبق قانون دمورگان خواهیم داشت:

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

گام پنجم: در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در رابطه احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$P(A | A' \cup B') = \frac{P(A \cap (A' \cup B'))}{P(A' \cup B')} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

## تست و پاسخ ۳

با حروف کلمه *alchymies*، کلمه‌ای نه‌حرفی ساخته‌ایم. با کدام احتمال بین حروف  $a$  و  $h$  و همچنین بین حروف  $i$  و  $e$  فقط یک حرف قرار دارد؟

$$\frac{4}{189} \quad (4)$$

$$\frac{8}{189} \quad (3)$$

$$\frac{1}{224} \quad (2)$$

$$\frac{13}{168} \quad (1)$$

## پاسخ: گزینه ۳

### پاسخ تشریحی

گام اول: برای محاسبه تعداد کل عضوهای فضای نمونه باید تعداد کلیه جایگشت‌های نه‌تایی کلمه نه‌حرفی *alchymies* را بنویسیم، پس:

$$n(S) = P(9, 9) = 9!$$

گام دوم: حالا تعداد حالت‌های مطلوب که قرار گرفتن فقط یک حرف بین حروف  $a$  و  $h$  و همچنین بین حروف  $e$  و  $i$  است را در دو حالت به صورت زیر می‌نویسیم:

حالت اول: وضعیتی را در نظر می‌گیریم که بین حروف  $a$  و  $h$ ، حرفی به غیر از  $i$  و  $e$  قرار بگیرد یا می‌توان گفت بین حروف  $e$  و  $i$ ، حرفی به غیر از  $a$  و  $h$  قرار بگیرد؛ یعنی:

$a, \_, h, e, \_, i, \_, \_, \_$

تعداد جایگشت‌ها در این حالت، به این صورت است که پنج دسته بالا دارای ۵! جایگشت می‌باشند. در دسته  $a, \_, h$  بین  $a$  و  $h$ ، جایگشتی برابر ۲! وجود دارد؛ همچنین در دسته  $e, \_, i$  بین  $e$  و  $i$  نیز جایگشتی برابر ۲! وجود دارد. به علاوه پس از مشخص شدن جایگاه  $a, e, i, h$ ، چهار حرف باقی‌مانده می‌توانند در جاهای خالی قرار بگیرند؛ بنابراین تعداد جایگشت‌ها در حالت مطلوب اول به صورت  $5! \times 2! \times 2! \times 4 \times 5!$  خواهد بود.

در حالت دوم تعداد جایگشت‌ها به این صورت است که یکی از حروف  $e$  یا  $i$  در بین دو حرف  $a$  و  $h$  قرار بگیرد یا یکی از حروف  $h$  یا  $a$  در بین دو حرف  $e$  و  $i$  قرار بگیرد؛ یعنی:

$a, e, h, i, \_, \_, \_, \_$

$e, a, i, h, \_, \_, \_, \_$

در هر یک از این وضعیت‌ها، ۲! جایگشت برای  $a, h$  و ۲! جایگشت برای  $e, i$  وجود دارد؛ همچنین ۶! جایگشت برای ۶ دسته ایجادشده وجود دارد و چون دو وضعیت در این حالت رخ می‌دهد تعداد به‌دست‌آمده در ۲ ضرب می‌شود؛ یعنی تعداد حالت‌های مطلوب در حالت دوم  $2! \times 2! \times 6! \times 2$  می‌باشد.

گام سوم: بنابراین تعداد کل حالات مطلوب برابر است با جمع دو مقدار به‌دست‌آمده از حالت اول و دوم؛ پس:

$$n(A) = 5! \times 2! \times 2! \times 5 \times 4 + 2! \times 2! \times 6! \times 2 = 5! \times 80 + 5! \times 48 = 5! \times 128$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 128}{9!} = \frac{5! \times 128}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} = \frac{8}{189}$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

## تست و پاسخ ۴

از بین شش کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ سه کارت به تصادف برمی‌داریم و در کنار هم به ترتیب صعودی از چپ به راست قرار می‌دهیم تا یک عدد سه‌رقمی ساخته شود. با چه احتمالی عدد ساخته شده مضرب ۵ است؟

$$0/4 (4)$$

$$0/35 (3)$$

$$0/3 (2)$$

$$0/25 (1)$$

## پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی:** گام اول: ابتدا تعداد عضوهای فضای نمونه را با انتخاب ۳ کارت از بین ۶ کارت موجود به صورت ترکیب ۳ از ۶ می‌نویسیم، یعنی:

$$n(S) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

**گام دوم:** برای به دست آوردن تعداد عضوهای پیشامد مطلوب، یعنی ساختن عدد سه‌رقمی مضرب ۵، با توجه به اعداد موجود، یکان عدد مورد نظر فقط می‌تواند ۵ باشد و از طرفی چون ارقام به شکل صعودی باید در کنار هم باشند، بنابراین دو رقم دهگان و صدگان باید از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ انتخاب شود، پس:

$$-, -, 5 \Rightarrow n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

**گام سوم:** حالا از تقسیم تعداد حالات مطلوب به تعداد کل حالات، احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

## تست و پاسخ ۵

در کیسه‌ای پنج توپ با شماره‌های ۱ تا ۵ قرار دارد. به ترتیب و بدون جای‌گذاری، ۳ توپ به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مجموع شماره‌های روی توپ دوم و سوم با شماره توپ اول برابر باشد؟

$$\frac{1}{10} (4)$$

$$\frac{1}{60} (3)$$

$$\frac{2}{15} (2)$$

$$\frac{5}{12} (1)$$

## پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی:** گام اول: چون داخل کیسه ۵ توپ وجود دارد، پس احتمال این که توپ اول دارای شماره ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد برابر  $\frac{1}{5}$  است.

**گام دوم:** حال اگر شماره توپ اول، ۱ یا ۲ باشد، آن‌گاه مجموع شماره‌های توپ‌های دوم و سوم نمی‌تواند برابر با آن‌ها باشد. اگر شماره توپ اول، ۳ باشد برای این که مجموع شماره‌های توپ دوم و سوم برابر ۳ شود، باید یکی از آن‌ها شماره ۲ و دیگری شماره ۱ باشد؛ بنابراین احتمال این که توپ دوم ۱ باشد  $\frac{1}{4}$  و توپ سوم ۲ باشد  $\frac{1}{3}$  است. همین‌طور احتمال این که توپ دوم ۲ باشد  $\frac{1}{4}$  و توپ سوم ۱ باشد  $\frac{1}{3}$  است؛ پس احتمال

$$\frac{1}{5} \times \left( \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \times 2 = \frac{1}{30}$$

این که توپ اول ۳ باشد و توپ‌های دوم و سوم، ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ باشند، برابر است با:

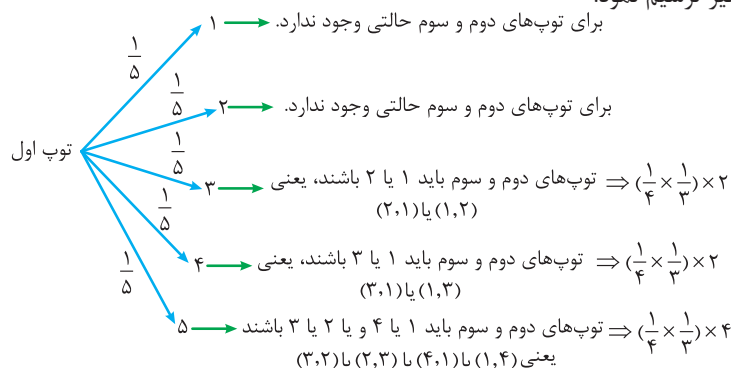
به همین ترتیب اگر شماره توپ اول، ۴ باشد برای این که مجموع شماره‌های توپ‌های دوم و سوم برابر ۴ باشد، باید شماره‌های این دو توپ ۱ و ۳ باشند که احتمال آن نیز برابر است با:

$$\frac{1}{5} \times \left( \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \times 2 = \frac{1}{30}$$

در انتها اگر شماره توپ اول، ۵ باشد برای این که مجموع شماره‌های توپ‌های دوم و سوم برابر ۵ باشد باید شماره‌های آن‌ها ۱ و ۴ یا ۲ و ۳ باشند که احتمال آن برابر است با:

$$\frac{1}{5} \times \left( \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \times 4 = \frac{1}{15}$$

**گام سوم:** برای توضیحات داده‌شده می‌توان نمودار درختی نیز ترسیم نمود.



$$P(A) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

**گام چهارم:** بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

## تست و پاسخ ۶

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و اختلاف اعداد رو شده را برابر با  $m$  فرض می‌کنیم.

• اگر  $m \leq 1$  باشد، دو سکه پرتاب می‌کنیم.

• اگر  $1 < m < 3$  باشد، سه سکه پرتاب می‌کنیم.

• اگر  $m > 2$  باشد، چهار سکه پرتاب می‌کنیم.

با کدام احتمال فقط دو بار «رو» ظاهر می‌شود؟

$$\frac{23}{72} \quad (۴)$$

$$\frac{21}{72} \quad (۳)$$

$$\frac{19}{72} \quad (۲)$$

$$\frac{17}{72} \quad (۱)$$

## پاسخ: گزینه ۴

**نکته** اگر  $n$  سکه را پرتاب کنیم، احتمال آن که  $k$  سکه رو ظاهر شود برابر است با:  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** در حالتی که اختلاف اعداد رو شده در دو تاس، کوچک‌تر یا مساوی یک باشد ( $m \leq 1$ ) باید دو وضعیت  $m = 1$  و

$m = 0$  را در نظر گرفت به طوری که اگر اختلاف اعداد رو شده در دو تاس صفر باشد ( $m = 0$ ) به این معنی است که دو عدد رو شده یکسان

هستند؛ یعنی  $\{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$  که دارای ۶ حالت و احتمال  $\frac{6}{36}$  است. اگر اختلاف دو عدد رو شده در دو تاس یک باشد ( $m = 1$ )

به این معنی است که دو عدد رو شده متوالی بوده‌اند؛ یعنی  $\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$

که دارای ۱۰ حالت است و احتمال آن  $\frac{10}{36}$  خواهد بود. در این حالت‌ها اگر دو سکه را پرتاب کنیم، احتمال دو بار رو آمدن برابر  $\frac{1}{4} = \frac{\binom{2}{2}}{2^2}$  است.

**گام دوم:** در حالتی که اختلاف دو عدد رو شده در دو تاس بین ۱ تا ۳ باشد ( $1 < m < 3$ ) به این معنی است که  $m = 2$  است؛ یعنی

$\{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)\}$  که احتمال آن  $\frac{8}{36}$  خواهد بود. در این حالت اگر سه سکه را پرتاب کنیم،

احتمال دو بار رو آمدن برابر  $\frac{3}{8} = \frac{\binom{3}{2}}{2^3}$  است.

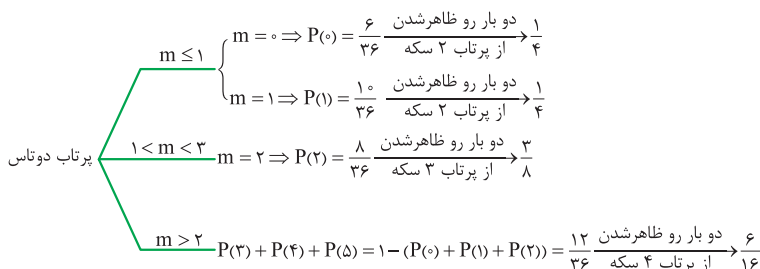
**گام سوم:** در حالتی که اختلاف دو عدد رو شده در دو تاس بیشتر از ۲ باشد، یعنی ۵ یا ۴ یا ۳،  $m = 3$  می‌توانیم از احتمال متمم استفاده کنیم و احتمال

مربوط به  $m = 0, 1, 2$  را که در دو قسمت قبلی محاسبه کردیم از احتمال ۱۰۰ درصد یا ۱ کم کنیم؛ یعنی:  $1 - (\frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36}) = \frac{12}{36}$

$$\frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$$

در این حالت اگر ۴ سکه را پرتاب کنیم احتمال دو بار رو آمدن برابر است با:  $\frac{6}{16}$

**گام چهارم:** برای توضیحات در گام اول و دوم می‌توان نمودار درختی به صورت زیر ترسیم نمود:



$$P(A) = (\frac{6}{36} + \frac{10}{36}) \cdot (\frac{1}{4}) + (\frac{8}{36}) \cdot (\frac{3}{8}) + (\frac{12}{36}) \cdot (\frac{6}{16}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{23}{72}$$

**گام پنجم:** بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

## تست و پاسخ ۷

دو عدد را به طور متوالی و بدون جای گذاری از میان اعداد  $1, 2, \dots, 2n+1$  که  $n \in \mathbb{N}$  انتخاب می کنیم. اگر احتمال این که فقط عدد دومی فرد باشد  $\frac{8}{31}$  باشد، با چه احتمالی در انتخاب متوالی دو عدد از میان همین اعداد و بدون جای گذاری، فقط عدد دوم بر ۵ بخش پذیر است؟

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{31} \quad (3)$$

$$\frac{125}{156} \quad (2)$$

$$\frac{125}{961} \quad (1)$$

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی** گام اول: تعداد اعداد  $1, 2, \dots, 2n+1$ ، عددی فرد است که شامل  $n$  عدد زوج و  $n+1$  عدد فرد است. احتمال این که فقط عدد دوم فرد باشد به این معنی است که عدد اول زوج است و عدد دوم فرد است که این احتمال به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A) = (\text{احتمال فرد بودن عدد دوم و احتمال زوج بودن عدد اول}) = \frac{n}{2n+1} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{8}{31} \Rightarrow n = 15$$

گام دوم: حالا می خواهیم از بین اعداد  $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$  با در نظر گرفتن  $n = 15$  یعنی  $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$  دو عدد بدون جای گذاری انتخاب کنیم که فقط عدد دوم بر ۵ بخش پذیر باشد، یعنی عدد اول بر ۵ بخش پذیر نباشد و عدد دوم بر ۵ بخش پذیر باشد، پس عدد دوم از بین اعداد  $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$  انتخاب می شود.

احتمال این که عدد اول انتخاب شده بر ۵ بخش پذیر نباشد برابر است با انتخاب ۲۵ عددی که بر ۵ بخش پذیر نیستند از بین ۳۱ عدد کل یعنی  $\frac{25}{31}$ .  
همچنین احتمال این که عدد دوم انتخاب شده بر ۵ بخش پذیر باشد برابر است با انتخاب ۶ عدد بخش پذیر بر ۵ از بین ۳۰ عدد باقی مانده یعنی  $\frac{6}{30}$ .  
گام سوم: بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(B) = (\text{احتمال بخش پذیر بودن عدد دوم بر ۵ و احتمال بخش پذیر نبودن عدد اول بر ۵}) = \frac{25}{31} \times \frac{6}{30} = \frac{5}{31}$$

## تست و پاسخ ۸

در یک جمع ۸ نفره که هیچ دو نفری هم سن نیستند، سن رضا از محسن بیشتر و از امیر کم تر است. اگر جوان ترین فرد گروه رتبه ۱ را داشته باشد، با کدام احتمال رضا از نظر سن در رتبه سوم قرار می گیرد؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{28} \quad (3)$$

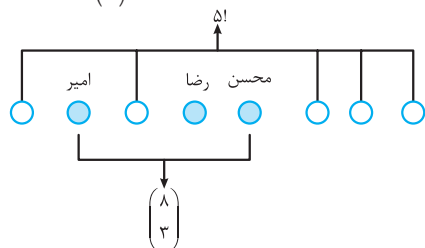
$$\frac{5}{56} \quad (2)$$

$$\frac{5}{14} \quad (1)$$

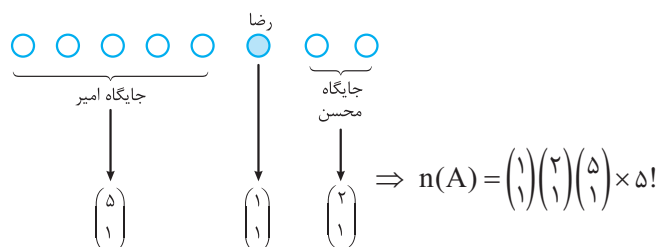
## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی** گام اول: ابتدا برای به دست آوردن فضای نمونه، باید سه جایگاه برای رضا، محسن و امیر از بین سه جایگاه موجود انتخاب کنیم و همین طور جایگشت ۵ نفر دیگر را در نظر بگیریم؛ پس:

$$n(S) = \binom{8}{3} \times 5!$$



گام دوم: حالا پیشامد مطلوب آن است که رضا از نظر سن در رتبه سوم قرار بگیرد، بنابراین محسن می تواند جایگاه اول یا دوم را داشته باشد و امیر می تواند جایگاه چهارم، پنجم، ششم، هفتم یا هشتم را داشته باشد، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: (دقت کنید که در این حالت نیز باید جایگشت پنج نفر دیگر را لحاظ کرد)





# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{5}{1} \times 5!}{\binom{8}{3} \times 5!} = \frac{2 \times 5}{8 \times 7 \times 6} = \frac{2 \times 5}{8 \times 7} = \frac{5}{28}$$

## تست و پاسخ ۹

کیسه A با ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی و کیسه B شامل ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی را در اختیار داریم. از کیسه A به تصادف دو مهره انتخاب کرده و در کیسه B می‌ریزیم و سپس از هر کیسه دو مهره خارج کرده و در کیسه C قرار می‌دهیم. اگر از کیسه C مهره‌ای خارج کنیم، با چه احتمالی قرمز است؟

۴۳٪ (۴)

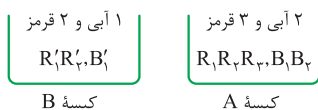
۵۱٪ (۳)

۶۲٪ (۲)

۳۱٪ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: با توجه به این که دو کیسه A و B به صورت مقابل می‌باشند:

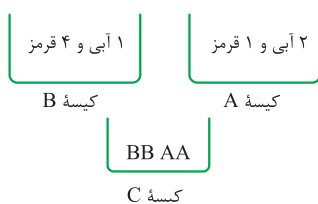


گام اول: اگر از کیسه A دو مهره برداریم و در کیسه B بریزیم، برای دو مهره انتخاب شده از کیسه A چند حالت رخ می‌دهد. هر حالت را در یک گام بررسی می‌کنیم:

گام دوم: **حالت اول:** اگر هر دو مهره انتخابی قرمز باشند در این صورت احتمال این حالت  $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$  است که در نتیجه وضعیت جدید کیسه‌ها به صورت زیر خواهد شد.



در این حالت اگر دو مهره از هر کیسه برداریم و در کیسه C قرار دهیم و سپس از کیسه C یک مهره برداریم، احتمال قرمز بودن مهره برداشته شده از کیسه C، در حالتی که دو مهره مربوط به کیسه A باشند برابر است با  $\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$  و در حالتی که دو مهره مربوط به کیسه B باشد  $\frac{2}{4} \times \frac{4}{5}$  است.



در نتیجه حاصل احتمال مربوط به این حالت برابر است با:

$$P_1 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \times \left( \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{10} \times \frac{17}{30} = \frac{17}{100}$$

گام سوم: **حالت دوم:** اگر یکی از دو مهره انتخابی از کیسه A آبی و دیگری قرمز باشد، در این صورت احتمال این حالت برابر است با  $\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$  که در نتیجه وضعیت جدید کیسه‌ها به صورت زیر خواهد شد.



در این حالت اگر دو مهره از هر کیسه برداریم و در کیسه C قرار دهیم و سپس از کیسه C یک مهره برداریم، احتمال قرمز بودن این مهره، در حالتی که دو مهره مربوط به کیسه A باشند برابر است با  $\frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$  و در حالتی که دو مهره مربوط به کیسه B باشند برابر است با  $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$  که در نتیجه حاصل احتمال مربوط به این حالت برابر است با:

$$P_2 = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} \times \left( \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \right) = \frac{6}{100} \times \frac{19}{30} = \frac{38}{1000}$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام چهارم: **حالت سوم:** اگر هر دو مهره برداشته شده از کیسه A آبی باشند، در این صورت احتمال این حالت برابر است با  $\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$  که در نتیجه وضعیت جدید کیسه‌ها به صورت زیر خواهد شد.



در این حالت نیز اگر دو مهره از هر کیسه برداریم و در کیسه C قرار دهیم و سپس از کیسه C یک مهره برداریم، احتمال قرمز بودن مهره اخیر، در حالتی که دو مهره مربوط به کیسه A باشند برابر است با  $\frac{2}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{4}$  و در صورتی که دو مهره مربوط به کیسه B باشند برابر است با  $\frac{2}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$ ، که در نتیجه احتمال مربوط به این حالت برابر است با:

$$P_3 = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \times \left( \frac{2}{4} \times \frac{3}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{100}$$

گام پنجم: از جمع کردن احتمالات مربوط به سه حالت، احتمال مورد نظر حاصل می‌شود، پس:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{17}{100} + \frac{38}{100} + \frac{4}{100} = \frac{59}{100} = 59\%$$

## تست و پاسخ ۱۰

در ظرف A، ۳ مهره سفید و ۴ مهره دیگر و در ظرف B، ۴ مهره سفید و ۵ مهره دیگر داریم. ۳ مهره از A و ۳ مهره از B را در ظرف C می‌اندازیم که ۲ مهره سفید و ۲ مهره دیگر دارد. مهره انتخابی از ظرف جدید C، با کدام احتمال سفید است؟

$$\frac{91}{210} \quad (4)$$

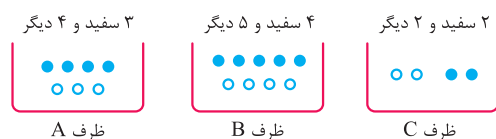
$$\frac{43}{126} \quad (3)$$

$$\frac{42}{126} \quad (2)$$

$$\frac{97}{210} \quad (1)$$

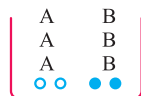
## پاسخ: گزینه ۱

### پاسخ تشریحی

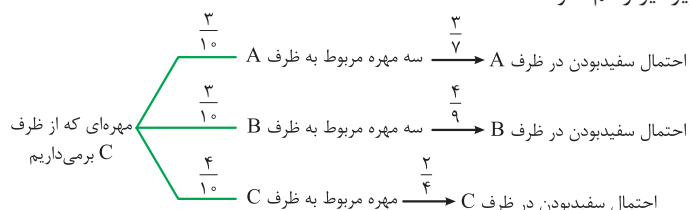


گام اول: با توجه به این که سه ظرف A، B و C به صورت مقابل می‌باشند:

اگر سه مهره از ظرف A و سه مهره از ظرف B برداریم و در ظرف C قرار دهیم و سپس از ظرف C یک مهره برداریم، احتمال سفید بودن مهره اخیر، در حالتی که سه مهره مربوط به ظرف A باشد، برابر است با  $\frac{3}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{70}$ ، در حالتی که سه مهره مربوط به ظرف B باشد برابر است با  $\frac{3}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{30}$  و در حالتی که مهره مربوط به ظرف C باشد برابر است با  $\frac{4}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$ ، وضعیت جدید ظرف C نیز به صورت مقابل است.



گام دوم: برای توضیحات بالا می‌توان نمودار درختی به صورت زیر رسم نمود:



گام سوم: از جمع احتمالات مربوط به سه حالت گفته شده، احتمال مورد نظر حاصل می‌شود.

$$P = \frac{3}{10} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{70} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{27}{210} + \frac{28}{210} + \frac{42}{210} = \frac{97}{210}$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

## تست و پاسخ ۱۱

با ارقام طبیعی کمتر از ۸، چند عدد طبیعی زوج می توان ساخت که رقم تکراری نداشته و از ۳۰۰۰ کمتر باشند؟

۲۱۱ (۱)      ۲۰۸ (۲)      ۱۹۳ (۳)      ۱۹۰ (۴)

### پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی** با اعداد طبیعی  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، تعداد اعداد طبیعی یکرقمی، دورقمی، سهرقمی و چهاررقمی ممکن که کوچکتر از ۳۰۰۰ باشند را محاسبه می کنیم.

**گام اول:** اعداد یکرقمی طبیعی زوج کوچکتر از ۳۰۰۰ شامل ۳ عدد  $\{2, 4, 6\}$  است.

**گام دوم:** اعداد دورقمی طبیعی زوج کوچکتر از ۳۰۰۰ شامل ۱۸ عدد است که مطابق اصل ضرب در جایگاه یکان، ۳ عدد  $\{2, 4, 6\}$  می توانند قرار بگیرند و در جایگاه دهگان از بین اعداد طبیعی  $\{1, 2, \dots, 7\}$ ، به غیر از یکی از اعداد زوج، ۶ عدد دیگر را می توان قرار داد.

$$\begin{array}{c} 6 \\ \downarrow \\ \text{دهگان} \end{array} \times \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \\ \text{یکان} \end{array} = 18$$

**گام سوم:** اعداد سهرقمی طبیعی زوج کوچکتر از ۳۰۰۰ شامل ۹۰ عدد است که مطابق اصل ضرب در جایگاه یکان، ۳ عدد  $\{2, 4, 6\}$  می توانند

قرار بگیرند و در جایگاه دهگان و صدگان نیز تعداد اعدادی که می توان قرار داد، به صورت مقابل است.

$$\begin{array}{c} 6 \\ \downarrow \\ \text{صدگان} \end{array} \times \begin{array}{c} 5 \\ \downarrow \\ \text{دهگان} \end{array} \times \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \\ \text{یکان} \end{array} = 90$$

**گام چهارم:** اعداد چهاررقمی طبیعی زوج کمتر از ۳۰۰۰ شامل ۱۰۰ عدد است که مطابق اصل ضرب به دو صورت زیر محاسبه می شوند که در جایگاه هزارگان فقط می توان ۱ یا ۲ را قرار داد.

اگر در جایگاه هزارگان عدد ۱ را قرار دهیم، در جایگاه یکان سه انتخاب  $\{2, 4, 6\}$  خواهیم داشت، پس طبق اصل ضرب تعداد اعداد چهاررقمی در این حالت برابر است با:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه فقط ۱} \end{array} \times \begin{array}{c} 5 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶} \end{array} \times \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶} \end{array} \times \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶} \end{array} = 60$$

اگر در جایگاه هزارگان عدد ۲ را قرار دهیم، در جایگاه یکان دو انتخاب  $\{4, 6\}$  خواهیم داشت، پس طبق اصل ضرب تعداد اعداد چهاررقمی در این حالت برابر است با:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه فقط ۲} \end{array} \times \begin{array}{c} 5 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶} \end{array} \times \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶} \end{array} \times \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ \text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶} \end{array} = 40$$

**گام پنجم:** بنابراین در کل ۱۰۰ عدد چهاررقمی با شرایط مسئله می توان نوشت و در نهایت تعداد کل اعداد زوج کمتر از ۳۰۰۰ که با ارقام  $\{1, 2, \dots, 7\}$  می توان نوشت برابر است با:

$$3 + 18 + 90 + 100 = 211$$

## تست و پاسخ ۱۲

در یک میهمانی ۸ نفر شرکت دارند که ۲ زوج در بین آن ها هستند. به چند طریق می توان ۵ نفر از بین آن ها انتخاب کرد، به طوری که از هر زوج دقیقاً یک نفر انتخاب شود؟

۱۲ (۱)      ۱۶ (۲)      ۲۴ (۳)      ۳۶ (۴)

### پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** برای این که از هر زوج، دقیقاً یک نفر در بین ۵ نفر انتخابی باشند، باید ابتدا از هر زوج یک نفر را انتخاب کنیم، یعنی  $\binom{2}{1}$  برای زوج اول و  $\binom{2}{1}$  برای زوج دوم.

**گام دوم:** سپس از بین ۴ نفر باقی مانده، ۳ نفر دیگر را انتخاب می کنیم؛ یعنی  $\binom{4}{3}$ ، تا یک گروه پنج نفری که از هر زوج دقیقاً یک نفر در آن ها هست ایجاد شود.

**گام سوم:** بنابراین تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{3} = 2 \times 2 \times 4 = 16$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

## تست و پاسخ ۱۳

با حروف A, A, A, B, B, C چند تبدیل ۴ حرفی می توان ساخت؟

۳۶ (۴)

۴۰ (۳)

۳۸ (۲)

۲۴ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

**نکته** اگر بخواهیم تعداد جایگشت های n رقم یا حرف را بنویسیم که در آن ها یکی از ارقام یا حروف k بار تکرار شده باشد باید ابتدا تعداد جایگشت های آن ارقام را بنویسیم، سپس جواب را به k! تقسیم کنیم؛ مثلاً اگر بخواهیم با حروف a, b, b, b کلمات سه حرفی بنویسیم باید تعداد جایگشت های آن یعنی ۳! را به تعداد حرف تکراری فاکتوریل یعنی ۲! تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

**پاسخ تشریحی** گام اول: برای حل ابتدا باید تعداد حالت های ممکن چهار حرفی را از بین ۶ حرف موجود انتخاب کنیم که در این صورت ۵ حالت برای آن ها امکان پذیر است که عبارت اند از:

حالت اول: A, A, A, B

حالت سوم: A, A, B, B

حالت پنجم: A, B, B, C

گام دوم: حالا تعداد تبدیلات یا جایگشت های چهار حرفی هر یک از حالات بالا را که برابر ۴! است می نویسیم و به تعداد حرف تکرار فاکتوریل تقسیم می کنیم، یعنی:

$$\frac{4!}{3!} = 4 \quad \text{تعداد تبدیلات حالت دوم برابر است با:}$$

$$\frac{4!}{3!} = 4 \quad \text{تعداد تبدیلات حالت اول برابر است با:}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12 \quad \text{تعداد تبدیلات حالت چهارم برابر است با:}$$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad \text{تعداد تبدیلات حالت سوم برابر است با:}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12 \quad \text{تعداد تبدیلات حالت پنجم برابر است با:}$$

گام سوم: بنابراین تعداد کل تبدیلات چهار حرفی برابر است با:  $4 + 4 + 6 + 12 + 12 = 38$

## تست و پاسخ ۱۴

چند عدد ده رقمی با ارقام ۵ و ۷ می توان نوشت که مضرب ۱۵ بوده و از هر دو طرف (چپ و راست) یکسان خوانده شوند؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

## پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی** گام اول: عدد مورد نظر باید هم به ۵ و هم به ۳ بخش پذیر باشد تا مضرب ۱۵ شود؛ بنابراین ابتدا فرض می کنیم عدد ده رقمی مورد نظر به صورت ۵abcdcba۵ باشد که هم از دو طرف یکسان خوانده شود و هم دارای یکان ۵ باشد تا بر ۵ بخش پذیر باشد. از طرفی برای این که به ۳ بخش پذیر باشد باید مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد، پس:

$$10 + 2a + 2b + 2c + 2d = 3k \Rightarrow 2(5 + a + b + c + d) = 3k$$

گام دوم: از تساوی بالا می توان نتیجه گرفت که  $5 + a + b + c + d$  نیز باید مضرب ۳ باشد. اگر  $a = b = c = d = 7$  باشد، حداکثر عبارت  $a + b + c + d = 28$  و اگر  $a = b = c = d = 5$  باشد حداقل عبارت  $a + b + c + d = 20$  است، پس:  $20 \leq a + b + c + d \leq 28$ . بنابراین برای این که حاصل  $5 + a + b + c + d$  بر سه بخش پذیر باشد، حاصل  $a + b + c + d$  فقط می تواند مقادیر ۲۲ و ۲۸ را بپذیرد؛

یعنی:

$$\overbrace{a + b + c + d}^{22} + 5 = 27 = 3k' \Rightarrow a + b + c + d = 22$$

$$\overbrace{a + b + c + d}^{28} + 5 = 33 = 3k' \Rightarrow a + b + c + d = 28$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام سوم: در حالتی که  $a + b + c + d = 22$  باشد باید مجموعه  $\{a, b, c, d\}$  شامل ۳ عدد ۵ و یک عدد ۷ باشد؛ یعنی  $\{5, 5, 5, 7\}$ ، اما در حالتی که  $a + b + c + d = 28$  باشد مجموعه  $\{a, b, c, d\}$  باید شامل ۴ عدد ۷ باشد؛ یعنی  $\{7, 7, 7, 7\}$ .  
گام چهارم: بنابراین برای نوشتن عدد ده‌رقمی مورد نظر باید از مجموعه  $\{a, b, c, d\}$  یک رقم ۷ و یا ۴ رقم ۷ انتخاب کرد، پس تعداد ارقام مورد نظر برابر است با:

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{4} = 4 + 1 = 5$$

## تست و پاسخ ۱۵

با ارقام طبیعی کوچک‌تر از ۹، عددی هشت‌رقمی به صورت  $abcdefgh$  ساخته‌ایم. در چه تعداد از این اعداد همواره  $b < c < d$  و  $b < g < h$  است؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).

۳۳۶ (۴)

۶۷۲ (۳)

۲۰۱۶ (۲)

۴۰۳۲ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا عدد هشت‌رقمی مورد نظر را که باید با ارقام  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  نوشته شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$

گام دوم: از آنجایی که برای ارقامی که در جایگاه‌های  $\overline{a}$  و  $\overline{e}$  و  $\overline{f}$  قرار می‌گیرند شرطی وجود ندارد، پس می‌توانیم از ۸ عدد طبیعی موجود، ۳ عدد را انتخاب کنیم و جایگشت‌های آن‌ها را محاسبه کنیم؛ یعنی  $3! \times \binom{8}{3}$ .

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$   
↓  
 $3! \times \binom{8}{3}$

گام سوم: با توجه به شرایط  $b < c < d$  و  $b < g < h$  باید در بین ارقام مانده، کوچک‌ترین رقم باشد، پس از بین ۵ رقم مانده، کوچک‌ترین را انتخاب کرده و در جایگاه  $\overline{b}$  قرار می‌دهیم، پس در این حالت فقط یک انتخاب وجود دارد.

کوچک‌ترین رقم مانده  
 $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$   
↓  
برای انتخاب کوچک‌ترین رقم مانده ۱ حالت وجود دارد.

گام چهارم: حال برای برقراری شرط  $c < d$ ، از بین ۴ رقم مانده، دوتا را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی  $2! \times \binom{4}{2}$  و در یک حالت به طوری که  $c$  کوچک‌تر از  $d$  باشد در جایگاه‌شان قرار می‌دهیم.

کوچک‌ترین رقم مانده  
 $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$   
↓  
 $c < d$

گام پنجم: در انتها برای برقراری شرط  $g < h$ ، از بین ۲ رقم مانده، آن‌ها را انتخاب می‌کنیم، یعنی  $2! \times \binom{2}{2}$  و در یک حالت به طوری که  $g$  کوچک‌تر از  $h$  باشد در جایگاه‌شان قرار می‌دهیم.

کوچک‌ترین رقم مانده  
 $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$   
↓  
 $c < d$  و  $g < h$

گام ششم: بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد کل اعداد هشت‌رقمی که با شرایط مسئله می‌توان نوشت برابر است با:

$$\underbrace{\binom{8}{3} \times 3!}_{\text{جایگاه } b, c, a} \times \underbrace{1 \times \binom{4}{2} \times 2!}_{\text{جایگاه } d, c, e} \times \underbrace{1 \times \binom{2}{2} \times 2!}_{\text{جایگاه } h, g, f} = 56 \times 6 \times 6 = 2016$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

## تست و پاسخ ۱۶

میانگین قطرهای مربع‌هایی  $\sqrt{882}$  است. اگر مجموع مساحت مربع‌ها  $112/5$  برابر تعداد کل اضلاع مربع‌ها باشد، میزان پراکندگی طول ضلع مربع‌ها به ازای یک واحد از میانگین آن‌ها، کدام است؟

۷ (۴)

$\frac{1}{7}$  (۳)

۳ (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی:** گام اول: فرض کنیم  $n$  تا مربع با اضلاع  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ، با قطرهای  $d_1, d_2, \dots, d_n$  داریم که  $d_i = \sqrt{2}x_i$  موجود است. برای محاسبه میانگین قطرها خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline x_2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline x_3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline d_1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline d_2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline d_3 \\ \hline \end{array} \\ d_1 = \sqrt{2}x_1 & d_2 = \sqrt{2}x_2 & d_3 = \sqrt{2}x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{میانگین قطرها} \Rightarrow \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n}{n} = \sqrt{882} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 + \dots + \sqrt{2}x_n}{n} = \sqrt{882}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} = \sqrt{2 \times 441} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 21 \Rightarrow \bar{x} = 21$$

بنابراین میانگین اضلاع برابر ۲۱ است.

گام دوم: از طرفی مجموع مساحت‌های مربع‌ها یعنی  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ، برابر تعداد اضلاع مربع‌هاست که چون  $n$  مربع وجود دارد، پس تعداد کل اضلاع آن‌ها  $4n$  است؛ پس:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 112/5 (4n) \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 450 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = 450$$

گام سوم: حال به کمک رابطه  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$  می‌توانیم واریانس و ضریب تغییرات اضلاع مربع‌ها را به دست آوریم؛ یعنی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = 450 - (21)^2 = 9 \Rightarrow \sigma = 3 \quad (\text{انحراف معیار اضلاع مربع})$$

گام چهارم: با توجه به خواسته سؤال، میزان پراکندگی طول ضلع مربع‌ها به ازای هر واحد از میانگین آن‌ها، یعنی همان ضریب تغییرات داده‌ها باید محاسبه شود که برابر است با:

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = cv = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

## تست و پاسخ ۱۷

داده‌های آماری  $2k, 4, 6, 8, \dots, 2k$  مفروض‌اند. برای مقادیر بزرگ  $k$ ، ضریب تغییرات آن‌ها به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

$\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

**نکته:** اگر  $n$  داده آماری به صورت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  بدهند، آن‌گاه میانگین داده‌ها برابر است با

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} \quad \text{و همین‌طور واریانس داده‌ها برابر است با} \quad \sigma^2 = \frac{d^2(n^2 - 1)}{12}$$

**پاسخ تشریحی:** گام اول: برای محاسبه ضریب تغییرات داده‌ها، ابتدا باید میانگین و واریانس آن‌ها را محاسبه کنیم. از طرفی داده‌های

$2k, 4, 6, 8, \dots, 2k$  تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d = 2$  می‌دهند و تعداد جملات آن یعنی  $n$ ، برابر  $k$  می‌باشد. بنابراین برای محاسبه میانگین و واریانس خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2 + 2k}{2} \Rightarrow \bar{x} = 1 + k$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2-1)}{12} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(2)^2(k^2-1)}{12} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{k^2-1}{3} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{3}}$$

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{3}}}{1+k} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{3}(k+1)}$$

گام دوم: مقدار ضریب تغییرات را به صورت مقابل محاسبه می کنیم:

گام سوم: برای محاسبه ضریب تغییرات داده ها به ازای مقادیر بزرگ  $k$ ، باید  $k$  را به  $+\infty$  میل دهیم و برای رفع ابهام حالت  $\frac{\infty}{\infty}$ ، توان های بزرگ تر را انتخاب کنیم؛ پس:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} cv = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{3}(k+1)} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{3}k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{3}k} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

تست و پاسخ ۱۸

در داده های آماری اعداد صحیح، اختلاف از میانگین آن ها برابر  $3, 3, -2, -1, c, b, a$  است. حداقل مقدار واریانس این ۷ داده چه قدر است؟

$$\frac{32}{7} \quad (4)$$

$$\frac{23}{7} \quad (3)$$

$$\frac{29}{7} \quad (2)$$

$$\frac{26}{7} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

**نکته** در داده های آماری  $x_1, x_2, \dots, x_n$  با میانگین  $\bar{x}$ ، همواره مجموع اختلاف از میانگین داده ها برابر صفر است؛ یعنی  $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$ .

**پاسخ تشریحی** گام اول: با توجه به این که همواره مجموع اختلاف از میانگین داده های آماری برابر صفر است، حاصل جمع مقادیر  $a, b, c, -1, -2, 3, 3$  را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی:

$$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow a + b + c + (-1) + (-2) + (3) + (3) = 0 \Rightarrow a + b + c = -3$$

گام دوم: حالا مقدار واریانس را از رابطه  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$  محاسبه می کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_7 - \bar{x})^2}{7} = \frac{(a)^2 + (b)^2 + (c)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (3)^2 + (3)^2}{7}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 23}{7}$$

گام سوم: برای این که مینیمم مقدار واریانس را به دست آوریم، باید مقادیر مختلف صحیح را برای  $a, b, c$  که به ازای آن ها  $a + b + c = -3$  می شود بررسی کنیم؛ به طوری که  $a^2 + b^2 + c^2$  حداقل مقدار ممکن شود که در این صورت باید  $a = b = c = -1$  باشد، پس:

$$a = b = c = -1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow \sigma_{\min}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 23}{7} = \frac{3 + 23}{7} = \frac{26}{7}$$

تست و پاسخ ۱۹

مجموع اختلاف ده داده آماری از عدد ۱۱، برابر ۲۰ است و مجموع مربعات اختلاف این داده ها از میانگین شان برابر ۳۶۰ است. اگر تمام داده ها را دو برابر کرده و با  $k$  جمع کنیم، ضریب تغییرات ۲۰ درصد می شود.  $k$  کدام است؟

$$34 \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

$$32 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی** گام اول: مجموع اختلاف داده های آماری از ۱۱ یعنی  $(x_1 - 11) + (x_2 - 11) + \dots + (x_{10} - 11)$  که برابر ۲۰ است، پس:

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - 11) = 20$$



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی پلاس

گام دوم: اگر دو طرف تساوی را منهای  $20 = 2 + 2 + \dots + 2$  تا  $10$  کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - 11) - \sum_{i=1}^{10} 2 = 20 - \sum_{i=1}^{10} 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - 13) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 13$$

از آن جایی که اختلاف از میانگین داده‌ها، همواره صفر است، یعنی  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ ، پس از رابطه  $\sum_{i=1}^{10} (x_i - 13) = 0$  نتیجه می‌گیریم که میانگین ده داده آماری ۱۳ است؛ یعنی  $\bar{x} = 13$  می‌باشد.

گام سوم: حالا با داشتن مجموع مربعات اختلاف این داده‌ها از میانگین یعنی  $\sum_{i=1}^{10} (x_i - 13)^2 = 360$  واریانس و در نتیجه انحراف معیار را به دست می‌آوریم و براساس آن‌ها ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 13)^2}{10} = \frac{360}{10} = 36 \Rightarrow \sigma = 6 \text{ انحراف معیار} \Rightarrow cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6}{13}$$

گام چهارم: اگر داده‌ها را دو برابر کرده و با  $k$  جمع کنیم، انحراف معیار فقط دو برابر می‌شود و میانگین، دو برابر شده و با  $k$  جمع می‌شود، پس ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$cv_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + k} = \frac{2(6)}{2(13) + k} = \frac{12}{26 + k} = \frac{1}{5} \Rightarrow 26 + k = 60 \Rightarrow k = 34$$

## تست و پاسخ ۲۰

اعداد طبیعی را به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعداد هر دسته برابر با مربع شماره آن دسته باشد؛ یعنی  $\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \dots$  در این صورت واریانس جملات اول، دهم و آخر از دسته دهم کدام است؟

۱۹۹۸ (۴)

۲۰۰۰ (۳)

۲۰۰۲ (۲)

۱۹۹۶ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

**نکته** برای محاسبه مجموع مربعات اعداد طبیعی می‌توان از رابطه  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  استفاده نمود که در آن  $n$  تعداد جملات است.

**پاسخ تشریحی** گام اول: با توجه به فرض سؤال، تعداد جملات دسته اول برابر ۱ است و تعداد جملات در دسته دوم برابر ۴ است و  $2^2 = 4$  است و تعداد جملات در دسته سوم برابر ۹ و  $3^2 = 9$  می‌باشد؛ بنابراین برای محاسبه شماره و مقدار جمله آخر در هر دسته خواهیم داشت:

دسته دوم ۲ یعنی چهار جمله دارد.

$\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \dots, \{286, 287, \dots, 385\}$

دسته اول ۱

دسته دهم ۱۰۰ یعنی ۱۰۰ جمله دارد.

یعنی یک جمله دارد.

گام دوم: شماره و مقدار جمله آخر در هر دسته را با جمع کردن تعداد عضوهای دسته‌ها به دست می‌آوریم:

$$1^2 + 2^2 = 5 = \text{شماره و مقدار جمله آخر در دسته دوم}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \text{شماره و مقدار جمله آخر در دسته سوم}$$

:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 = \frac{100(100+1)(200+1)}{6} = \frac{100(101)(201)}{6} = 385$$

گام سوم: بنابراین جملات اول، دهم و آخر در دسته دهم به ترتیب ۲۸۶، ۲۹۵ و ۳۸۵ می‌باشند که میانگین و واریانس آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{385 + 295 + 286}{3} = \frac{966}{3} = 322$$

$$\sigma^2 = \frac{(385 - 322)^2 + (295 - 322)^2 + (286 - 322)^2}{3} = \frac{63^2 + 27^2 + 36^2}{3} = \frac{9^2(7^2 + 3^2 + 4^2)}{3} = 27 \times 74 = 1998$$