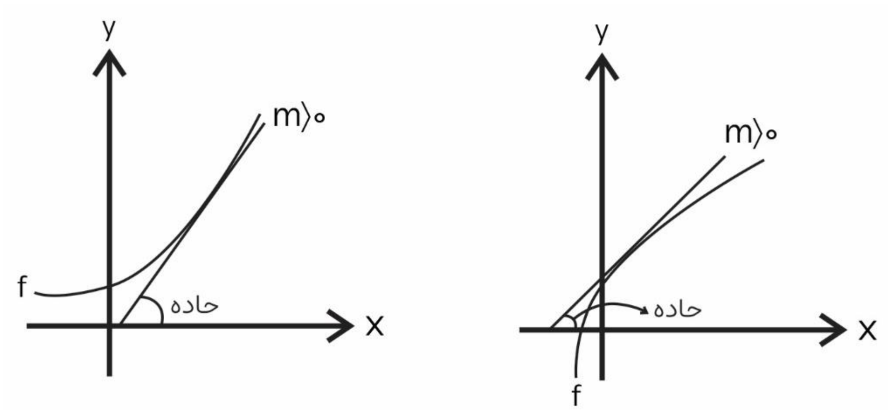
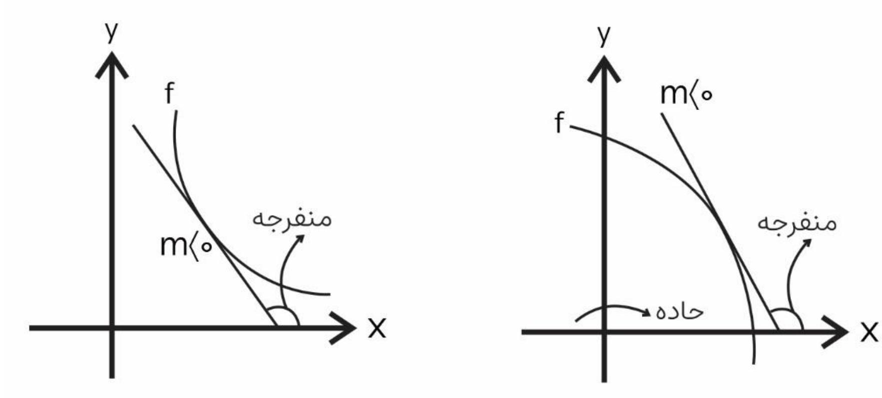
بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع از روی علامت مشتق

فرض کنیم f پیوسته و مشتق‌پذیر است. اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، مماس بر منحنی در هر نقطه از این فاصله با جهت مثبتِ محور xها زاویه‌ی حاده ساخته و تانژانت این زاویه، یعنی شیب خط مماس، مثبت است. بنابراین، علامت مشتق تابع در این فاصله، مثبت می‌باشد. یعنی $f'>0$.



اگر تابع f در یک فاصلهٔ اکیداً نزولی باشد، مماس بر منحنی در هر نقطه از این فاصله با جهت مثبتِ محور xها زاویه‌ی منفرجه ساخته و تانژانت این زاویه، یعنی شیب خطِ مماس، منفی است. بنابراین، علامت مشتق در این فاصله، منفی می‌باشد، یعنی $f'<0$.

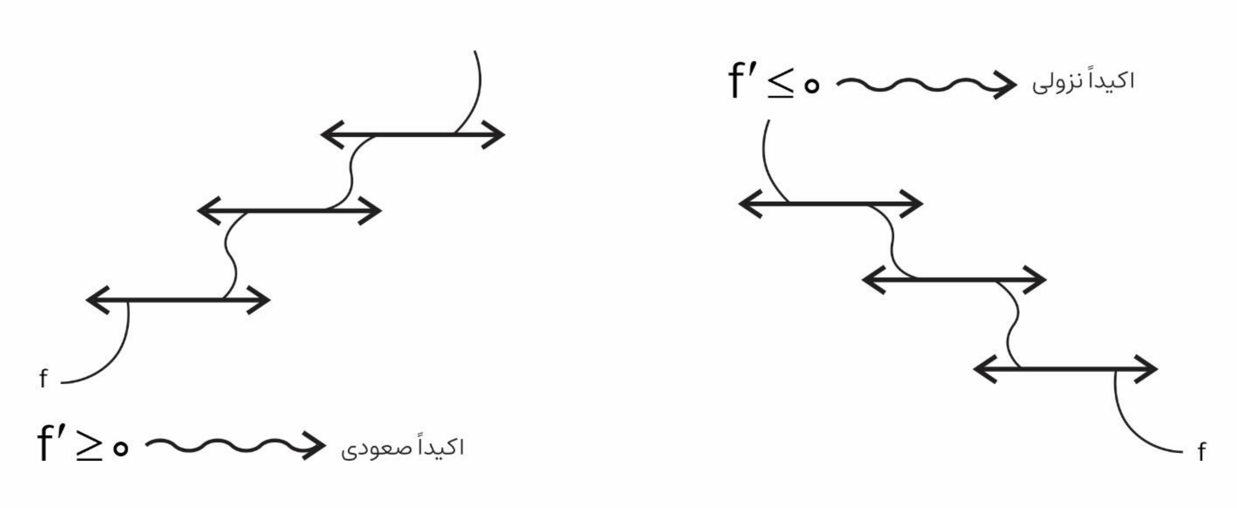


با توجه به توضیحات فوق، داریم:

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد:

۱ـ اگر به ازای هر $f'(x)>0, x\in(a,b)$ باشد، آن‌گاه f بر بازه‌ی $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

۲ـ اگر به ازای هر $f'(x)<0, x\in(a,b)$ باشد، آن‌گاه f بر بازه‌ی $[a,b]$ کیداً نزولی است.



$\boxed{f'(x) \geq 0 \Rightarrow \text{صعودی}}$ $\boxed{f'(x) \leq 0 \Rightarrow \text{نزولی}}$

تذکر ۱: صفر شدن مشتق در نقاط جدا از هم تأثیری در اکیدڈ صعودی یا نزولی بودن تابع ندارد. به عبارتی می‌توانیم ادعا کنیم در فواصلی که $f' \geq 0$ است. تابع اکیداً صعودی و در فواصلی که $f' \leq 0$ است، تابع اکیداً نزوی می‌باشد.

تذکر ۲: معمولاً در فواصلی که صعودی یا نزولی می‌شود، اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

جهت تغییرات تابع

منظور از جهت تغییرات تابع، تعیین فواصلی است که تابع در آن فواص، صعودی یا نزولی باشد. برای این منطور، از تابع مشتق گرفته و آن را تعیین علامت می‌کنیم. در فواصلی که $f' \geq 0$ است، تابع اکیداً صعودی و در فواصلی که $f' \leq 0$ است، تابع اکیداً نزولی می‌باشد. دقت کنیم در نقاطی که $f' = 0$ است، مماس بر منحنی تابع افقی می‌باشد. این نقاط هیچ تأثیری در یکنواختی تابع نمی‌گذارند. جدو تغییرات تابع، جدولی با سه سطر است. در سطر اول x، دامنه‌ی تعریف تابع قرار گرفته و در سطر دوم، علامت f' و در سطر سوم نمایش صعودی یا نزولی بودن تابع را براساس علامت f' قرار می‌دهیم، داریم:

جدو تغییرات تابع

x	D_f	
f'	$+$	$-$
f	↗ صعودی	↘ نزولی

نکته‌های مهم و به یادماندنی:

۱ـ اگر در متن تست به این جمله اشاره شود که «تابع f در چه فاصله‌ای صعودی است» یا «تابع f در چه فاصله‌ای نزولی است.» تنها کافی است به ترتیب نامعادله‌های $f'(x) \geq 0$ یا $f'(x) \leq 0$ را حل کنیم.

تذکر: نامعادله‌هایی که درجه‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۲ باشد را حتماً به شکل ضرب عوامل مختلف تبدیل می‌کنیم تا راحت‌تر حل شوند.

۲ـ اگر یکنوایی تابع f روی دامنه‌اش یا روی بازه‌ی (a,b) خواسته شود‌د، حتماً جدول تغییرات تابع را روی D_f یا روی بازه‌ی (a,b) رسم کرده و علامت مشتق تابع را از روی جدول تغییرات، تحلیل می‌کنیم.

۳ـ اگر تابع f همواره صعودی باشد، باید مشتق تابع همواره بزرگ‌تر (یا مساوی) صفر باشد، مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $f'(x) \geq 0$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۴ـ اگر تابع f همواره نزولی باشد، باید مشتق تابع همواره کوچک‌تر (یا مساوی) صفر باشد، یعنی مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $f'(x) \leq 0$، مجموعه‌ی اعداد حقیق باشد.

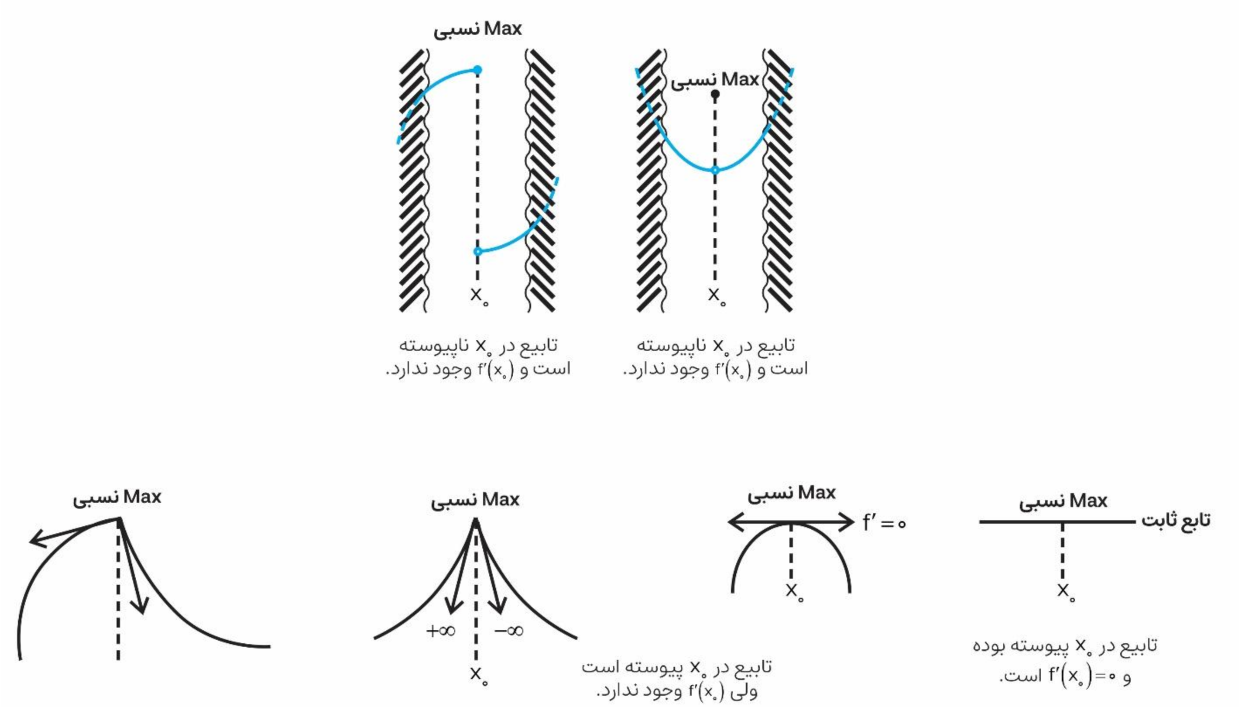
تعریف ماکزیمم نسبی: می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = x_0$ ماکزیمم نسبی (Max نسبی) دارد، اگر:

۱ـ $x_0 \in D_f$ باشد، (یعنی تابع در x_0 تعریف شده باشد.)

۲ـ تابع در همسایگی دوطرفه‌ی x_0، تعریف شده باشد.

۳ـ مقدار تابع در نقطه‌ی x_0، (یعنی $f(x_0)$) از مقادیر تابع در همسایگی دوطرفه‌ی آن، بزرگ‌تر یا مساوی با آن‌ها باشد.

در شکل‌های زیر، نمونه‌های متفاوتی از نقاط ماکزیمم نسبی تابع رسم شده است. توجه کنیم:



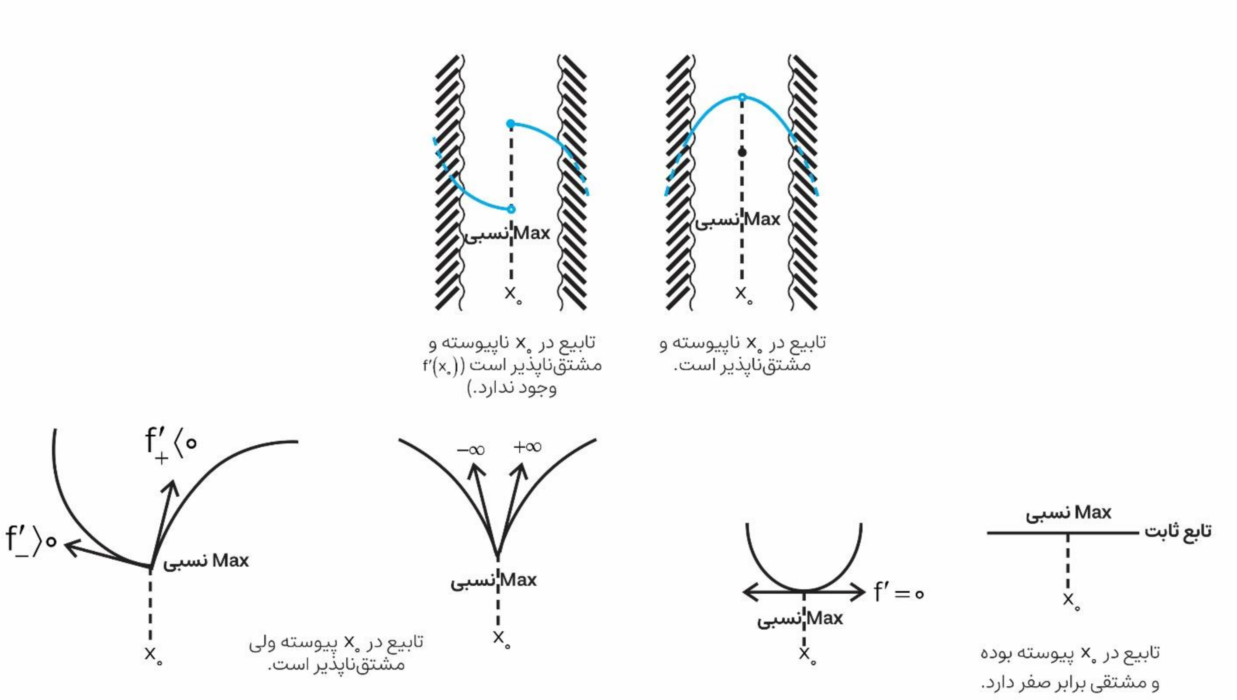
تعریف می‌نیمم نسبی: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=x_\circ$ می‌نیمم نسبی (min نسبی) دارد، اگر:

۱ـ $x_\circ \in D_f$ باشد.

۲ـ تابع در همسایگی دو طرفه‌ی $x_\circ$ تعریف شده باشد.

۳ـ $f(x_\circ)$ از مقادیر تابع در همسایگی دوطرفه‌ی آن، کوچک‌تر یا مساوی با آن‌ها باشد.

در شکل‌های زیر انواع مختلفی از نقاط می‌نیمم نسبی رسم شده است. دقت کنیم:



نقاط ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی تابع را نقاط اکسترمم نسبی تابع می‌نامیم.

نکته‌های به یادماندنی:

۱ـ [نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه‌ی تعریف تابع (نقاط توقف) هرگز نمی‌توانند نقاط اکسترمم نسبی باشند. چون تابع تنها در همسایگی یک‌طرفه‌ی آن‌ها تعریف شده است.]

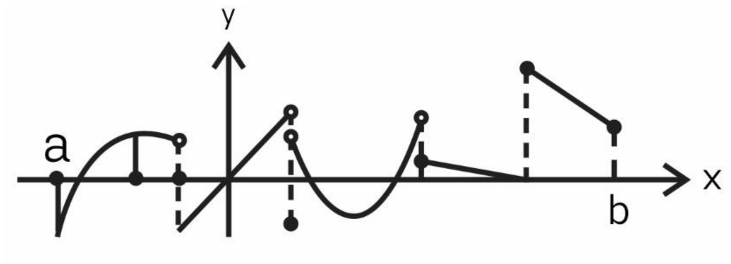
۲ـ اگر تابع f در نقطه‌ای به طو $x = x_\circ$ دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع f در همسایگی $x_\circ$ تعریف شده است. در مورد پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f، هیچ نظری را نمی‌توانیم اعلام کنیم. چون تابع f در نقطه‌ی $x_\circ$ می‌تواند هم پیوسته و هم ناپیوسته باشد و نیز می‌تواند هم مشتق‌پذیر و هم مشتق‌ناپذیر باشد.

۳ـ در تابع ثابت، همه‌ی نقاط هم ماکزیمم نسبی و هم می‌نیمم نسبی محسوب می‌شوند.

تست آموزشی

نمودار تابع f در فاصله‌ی [a ،b] به‌صورت مقابل است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع f کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳



پاسخ: گزینه‌ی (۳)، با توجه به نمودار تابع f در فاصله‌ی [a ،b]، داریم:

A: نقطه‌ی ابتدایی بازه است. بنابراین اکسترمم نسبی نیست.

x_1: Max نسبی

x_2: اکسترمم نسبی نیست.(چون $f(x_2)$ از عرض نقاط همسایگی چپ خود کوچک‌تر بوده واز عرض نقاط همسایگی راست خود بزرگ‌تر است.)

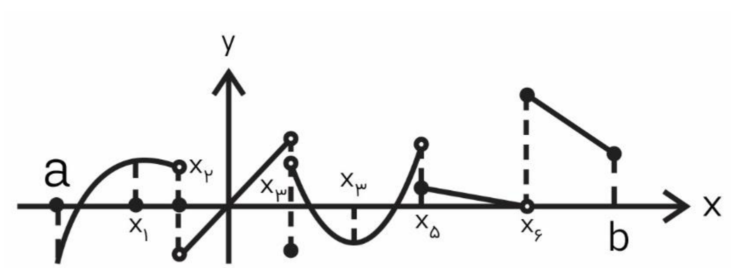
x_3: Min نسبی

x_4: Min نسبی

x_5: اکسترمم نسبی نیست.

x_6: Max نسبی

B: نقطه‌ی انتهای بازه است، بنابراین اکسترمم نسبی نیست.



اکسترمم مطلق (ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق)

تعریف ماکزیمم مطلق: می‌گوییی تابع $y=f(x)$ روی بازه [a ،b] در نقطه‌ای به طول $x=x_0$ ماکزیمم مطلق (Max مطلق) دارد، اگر مقدار تابع در نقطه‌ی x_0 از مقادیر تابع در تمام نقاطِ این بازه، بزرگ‌تر یا مساوی با آن‌ها

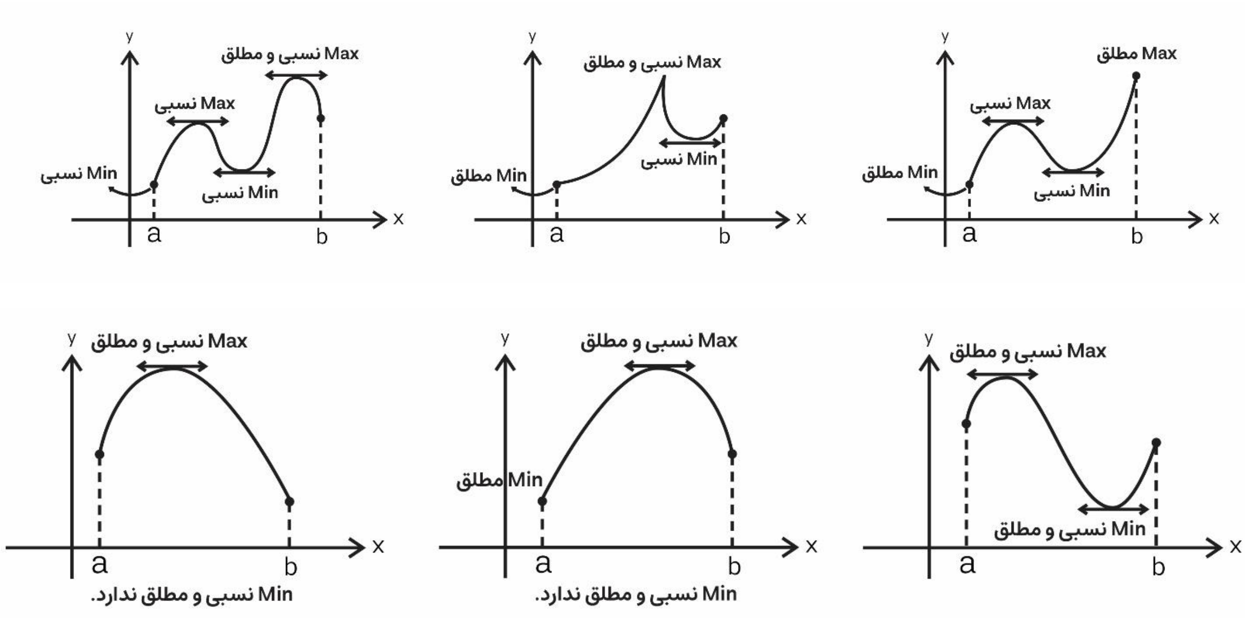
باشد. به عبارت دیگر، اگر به ازای هر $x \in [a,b]$ داشته (به زبان ساده ماکزیمم مطلق، نقطه‌ای است که بیش‌ترین عرض را در کل دامنه‌ی تعریف تابع داشته باشد.)

تعریف می‌نیمم مطلق: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ روی بازه‌ی $[a\ ,b]$ در نقطه‌ای به طول $x=x_\circ$ می‌نیمم (min مطلق) دارد، اگر مقدار تابع در نقطه‌ای $x_\circ$ از مقادیر تابع در تمام نقاطِ این بازه کوچک‌تر یا مساوی با آن‌ها باشد. به عبارت دیگر، اگر به ازای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $f(x_\circ) \le f(x)$، آن‌گاه تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ در $x=x_\circ$، می‌نیمم مطلق دارد.

(به زبان ساده می‌نیمم مطلق، نقطه‌ای است که کم‌ترین عرض را در کل دامنه‌ی تعریف تابع داشته باشد.)

تذکر: نقاط ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق تابع را نقاط اکسترمم مطلق تابع می‌نامیم.

در نمودارهای زیر نقاط اکسترمم مطلق و نسبی مشخص شده است. دقت کنیم:



برای تعیین نقاط اکسترمم مطلق، اگر نمودار تابعی قابل رسم باشد، با توجه به رسم نمودار تابع، به راحتی مقادیر اکسترمم مطلق تابع قابل تشخیص است. پس اولین روش برای تعیین نقاط اکسترمم مطلق، رسم نمودار می‌باشد.

نکته‌های به‌یادماندنی:

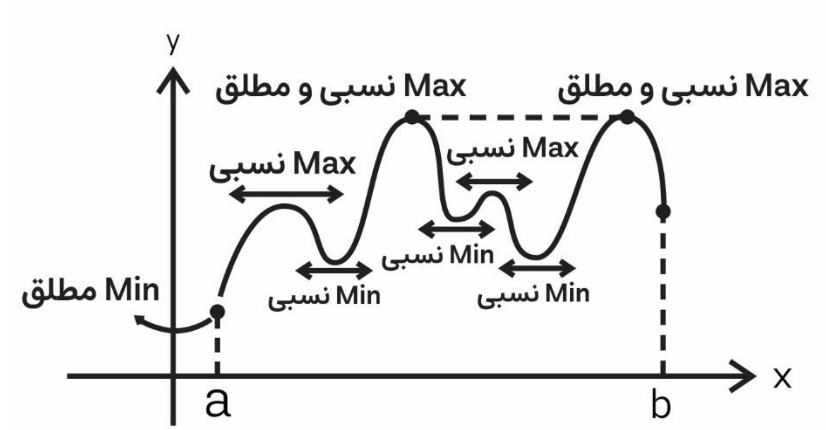
۱ـ ممکن است تابع در یک بازه، دارای چندین مقدار ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد ولی مقدار ماکزیمم و می‌نیمم مطلق، در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

دقت کنیم! مقدار ماکزیمم و می‌نیمم مطلق، در صورت وجود منحصربه‌فرد است و نه تعداد آن نقاط.

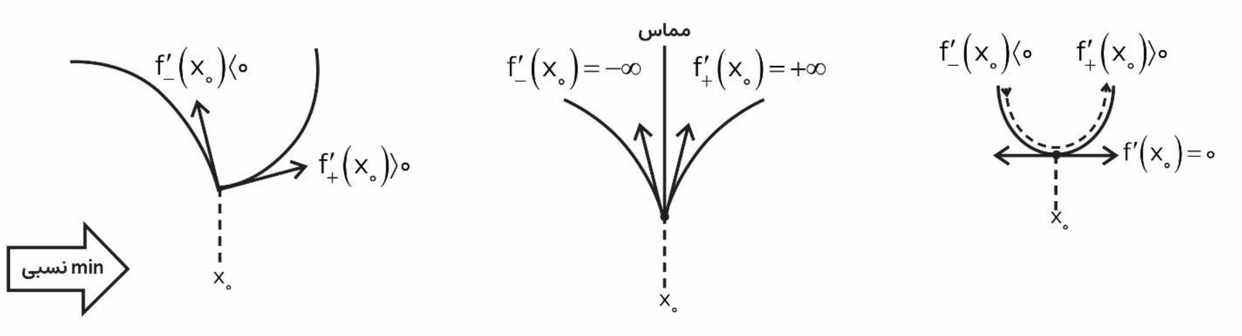
۲ـ ممکن است نقاط اکسترمم نسبی و مطلق در نقطه‌ای بر هم منطبق باشند.

۳ـ اگر تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی [a ،b] پیوسته باشد، f در این بازه قطعاً دارای ماکزیمم و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

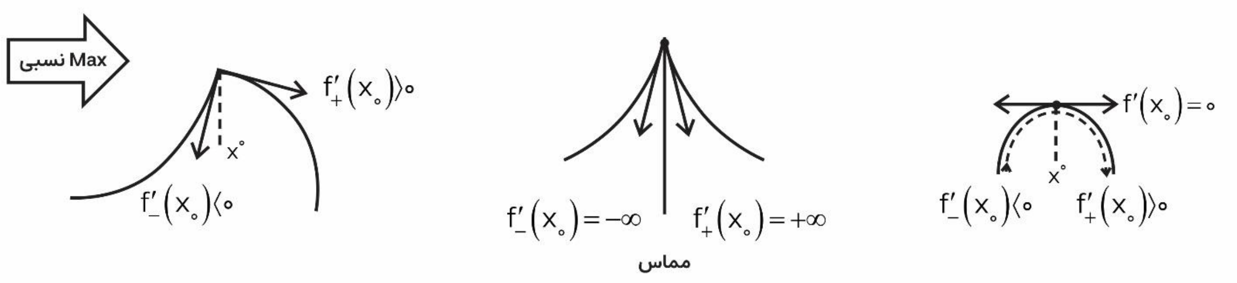
۴ـ اکسترمم‌های مطلق تابع روی بازه‌ی [a ،b]، یا در نقاط بحرانی (در درسنامه‌ی ۵ یاد می‌گیریم) رخ می‌دهند و یا در نقاط ابتدا و انتهای بازه.



در زیر نمودار تابع f را در اطراف نقاط اکسترمم نسبی پیوسته‌ای آن رسم کرده‌ایم. به این شکل‌ها به دقت نگاه کنیم و یک ویژگی مشترک آن‌ها را مشخص نماییم.



تذکر: درنقاط min نسبی پیوسته‌ی تابع، علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد.



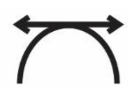
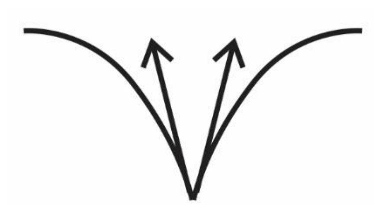
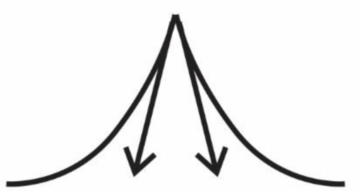
تذکر: درنقاط Max نسبی پیوسته‌ی تابع، علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در دو طرف نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی پیوسته‌ی تابع، علامت مشتق عوض می‌شود. پس به خاطر می‌سپاریم:

برای طول نقاط اکسترمم نسبی پیوسته‌ی تابع $y=f(x)$، ابتدا ضابطه‌ی مشتق تابع را به‌دست‌می‌آوریم. سپس ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه‌ی فرد) صورت و مخرج مشتق را مشروط بر آن‌که عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشند، به‌عنوان طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f معرفی می‌کنیم.

$$y'=\frac{\square=\circ \Rightarrow \left(\text{ریشه های ساده (یامکرر مرتبه فرد)}\right)\in D_f}{\square=\circ \Rightarrow \left(\text{ریشه های ساده (یامکرر مرتبه فرد)}\right)\in D_f} \Rightarrow \text{EXTنسبی}$$

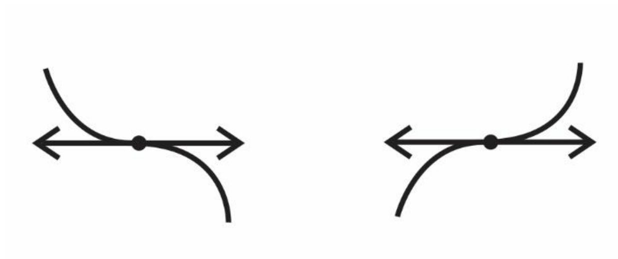
نکته‌های مهم و به‌یادماندنی:

۱ـ در اطراف ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه‌ی فرد) صورت مشتق، چون مشتق تابع صفر می‌شود، نمودار تابع به شکل  یا  است و در اطراف ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه‌ی فرد) مخرج مشتق، چون وجود ندارد، نمودار تابع به شکل  یا  خواهد بود.

۲ـ فقط در توابع شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است که برای تعیین طول نقاط اکسترمم نسبی، مخرج مشتق تابع را نیز برابر صفر قرار می‌دهیم. به عبارتی دیگر، در توابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نباشند، برای تعیین طول نقاط اکسترمم نسبی، فقط مشتق تابع را برابر صفر قرار داده و با ریشه‌های مخرجِ مشتق، هیچ کاری نداریم.

۳ـ در نقطه‌ی اکسترمم نسبی اگر تابع زاویه‌دار باشد، طول اکسترمم نسبی نه ریشه‌ی ساده‌ی صورت مشتق است و نه ریشه‌ی ساده‌ی مخرج آن. بکه تنها علامت مشتق راست و چپ در این نقطه عوض میشود. به‌عنوان مثال، نقطه‌ای به طول $x=0$ در تابع $y=|x|$.

۴ـ ریشه‌های مضاعف و مکرر مرتبه‌ی زوج مشتق تابع، طول‌های نقاط عطف افقی تابع هستند.



تذکر مهم و کاربردی: برای تعیین ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه‌ی فرد یک معادله، ابتدا باید این معادله را به طور کامل تجزیه کنیم. اگر x_0 ریشه‌ی این معادله باشد، حتماً یکی از عوامل تجزیه شده، به‌صورت $(x-x_0)$ است. براساس توانی که $(x-x_0)$ دارد، نوع ریشه معلوم می‌شود. اگر این توان برابر ۱ باشد، x_0 ریشه‌ی ساده بوده، اگر برابر ۲ باشد، ریشه‌ی مضاعف بوده و اگر برابر ۳ باشد، ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی سوم است. پس داریم:

$$...(x-x_0)^n x... = 0 \Rightarrow$$ $x=x_0$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی n اُم است

تشخیص ماکزیمم و می‌نیمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اول

اگر در تابع **f**، x_0 طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی پیوسته‌ی تابع **f** باشد و هنگام عبور از x_0، تغییر علامت مشتق در x_0، دارای می‌نیمم نسبی است. پس برای تعیین نوع اکسترمم نسبی کافی است از ضابطه‌ی تابع گرفته و جدول تغییرات تابع را رسم کنیم (آزمون مشتق اول) داریم:

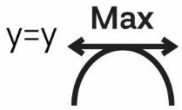
x		x_0	
f'	$-$		$+$
f	↘ صعودی		نزولی ↗

min نسبی

x		x_0	
f'	$+$		$-$
f	↗ صعودی		نزولی ↘

Max نسبی

تعیین عرض نقاط اکسترمم نسبی بدون تعیین طول آن‌ها

می‌دانیم در توابع مشتق‌پذیر، خط مماس در نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، افق است 

یا 

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم می‌توانیم خط $y=y$ را بر نمودار منحنی مماس کنیم.
بنابراین، معادله‌ی تقاطع منحنی و خط، رشته‌ی مضاعف دارد.

حال با شنیدن مطالب فوق، برای پیدا کردن عرض نقاط اکسترمم نسبی، کافی است معادله‌ی تقاطع منحنی را با خط $y=y$ نوشته و برحسب x آن را مرتب کنیم. اگر شرط ریشه‌ی مضاعف را در معادله‌ی تقاطع برقرار کنیم، مقدار y (عددی ثابت) یا همان عرض نقاط اکسترمم نسبی به‌دست‌می‌آید.

نکته مهم: پس از محاسبه‌ی مقادیر اکسترمم نسبی، اگر تابع کسری دقیقاً دو اکسترمم نسبی داشته باشد، برای تشخیص عرض ماکزیمم و می‌نیمم نسبی اگر تابع پیوسته باشد، مقدار بیش‌تری را برای Max و مقدار کم‌تری را برای min درنظر می‌گیریم $\left(y_{Max} \rangle y_{min}\right)$. ولی اگر تابع کسری، مخرجش ریشه داشته باشد، به عکس عمل می‌کنیم.

تست آموزشی

مقدار می‌نیمم تابع $y=\frac{۵x}{x^{۲}+۴}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

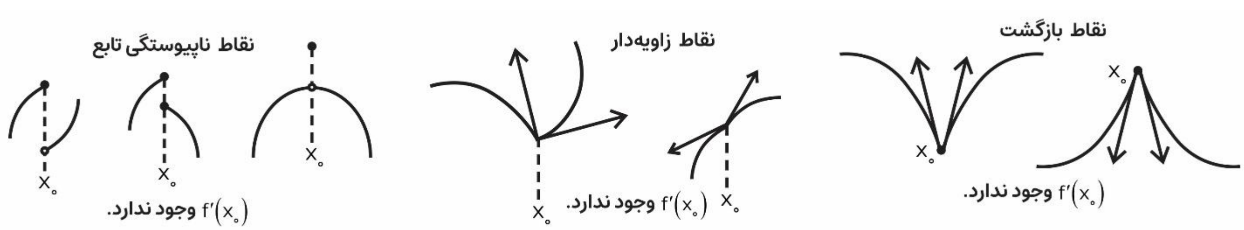
$$y=\frac{5x}{x^2+4}\Rightarrow yx^2-5x+4y=0\overset{\Delta=0}{\Rightarrow}(-5)^2-4y(4y)=0$$

$$\Rightarrow 25-16y^2=0\Rightarrow y^2=\frac{25}{16}\overset{\text{تابع پیوسته است}}{\Rightarrow}\begin{cases}y_{Max}=\frac{5}{4}\\ y_{min}=-\frac{5}{4}\end{cases}$$

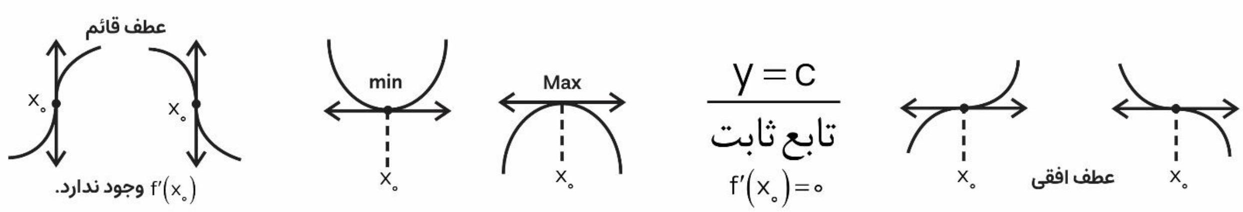
نقطه‌ی بحرانی

فرض کنیم تابع f در بازه‌ی [a ،b] تعریف شده باشد. نقاطی از بازه‌ی (a ،b) که مشتق در آن‌ها صفر شود و یا وجود نداشته باشد را نقاط بحرانی تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، نقطه‌ای به طول $x_0 \in D_f$ نقطه‌ی بحرانی تابع f است، هرگاه $f'(x_0)=0$ باشد یا $f'(x_0)$ وجود نداشته باشد.

دقت کنیم! طبق تعریفی که در صفحه‌ی ۸۴ کتاب پیش‌دانشگاهی بیان شده است، نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌ی تعریف، یعنی دو نطقه به طول‌های x=a و x=b جزء نقاط بحرانی تابع محسوب نمی‌شوند در زیر انواع مختلف نقاط بحرانی تابع را معرفی می‌کنیم:



نقاطی که در آن‌ها مشتق برابر صفر است. (مماس افقی)



نکته‌های به‌یادماندنی:

نقاطی عضو دامنه‌ی تعریف تابع که مشتق تابع در آن‌ها وجود ندارد، به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱ـ نقاطی که تابع در آن‌ها ناپیوسته بوده ولی تعریف شده (توپُر) است.

۲ـ نقاطی که مشتق‌های راست و چپ تابع در آن‌ها، برابر نیستند (نقاط زاویه‌دار).

۳ـ نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها بی‌نهایتی می‌شود. به‌عبارتی مشتق تابع در آن‌ها نامتناهی است (نقاط بازگشت یا عطف قائم.)

نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است، نقاطی است که در آن‌ها می‌توانیم خط مماس افقی رسم نماییم.

در تابع ثابت، همه‌ی نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، یک نقطه‌ی بحرانی است ولی هر نقطه‌ی بحرانی، اکسترمم نسبی نیست. در ضمن هر نقطه‌ی عطفی، بحرانی محسوب نمی‌شود. تنها نقاط عطف افقی و عطف قائم، بحرانی هستند.

تعیین طول نقاط بحرانی تابع کمک مشتق

تابع $y=f(x)$ را درنظر می‌گیریم. برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع **f**، می‌توانیم از ضابطه‌ی تابع مشتق گرفته و صورت و مخرج مشتق تابع را برار صفر قرار دهیم. ریشه‌های صورت و مخرج مشتق تابع مشروط بر آن‌که عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشند، بحرانی هستند. به ازای ریشه‌های صورت مشتق، مشتق تابع برابر صفر بوده و به ازای ریشه‌های مخرج مشتق، مشتق تابع وجود ندارد. پس داریم:

$$y'=\frac{\square=0 \xrightarrow{\text{ریشه}\in D_f} \text{مشتق برابر صفر است}}{\square=0 \xrightarrow{\text{ریشه}\in D_f} \text{مشتق وجود ندارد}} \Rightarrow \text{بحرانی}$$

نکته‌ی مهم: فقط در توابع شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است که برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع، مخرج مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم. به عبارتی دیگر، در توابعی که شامل رادیکال با فرجه فرد نباشند، برای تعیین طول نقاط بحرانی فقط مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم، پس نتیجه می‌گیریم که در توابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نیستند، اگر نقطه‌ای به طول x_0، طول نقطه‌ی بحرانی باشد، حتماً مشتق اول به ازای x_0، صفر می‌شود.

تست آموزشی

تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^2-4x|$ بر بازه‌ی [۵، ۱-]، کدام است؟

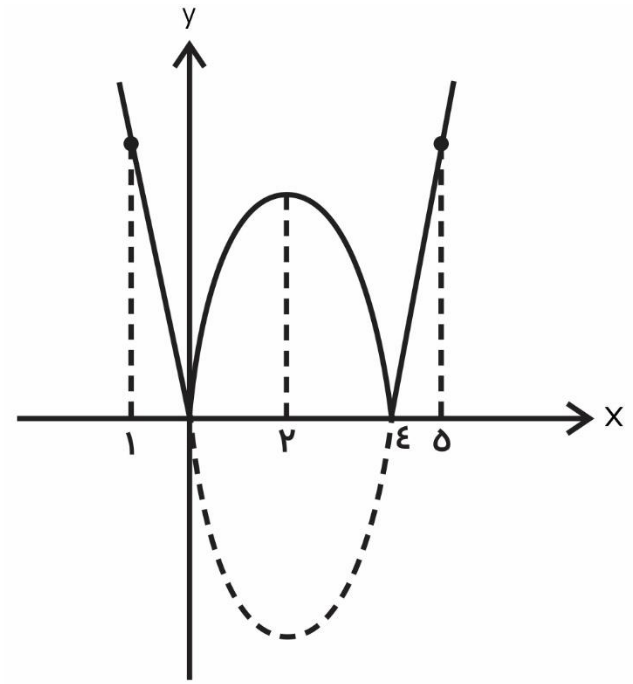
۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۳   ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

برای تعیین تعداد نقاط بحرانی تابع، از روش رسم نمودار کمک می‌گیریم، داریم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم تابع f در نقاطی به طول‌های x=0 و x=4، مشتق‌ناپذیر است. چون مشتق تابع f در این نقاط موجود نمی‌باشد، در نتیجه نقاطی به طول‌های x=0 و x=4، بحرانی محسوب می‌شوند. از طرفی در نقطه‌ای به طول x=2، مشتق تابع f برابر سفر است. بنابراین نقطه‌ای به طول x=2 نیز، بحرانی محسوب می‌شود.

تذکر: نقاطی به طول‌های x=-1 و x=5، چون نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌ی تعریف تابع هستند، هرگز بحرانی محسوب نمی‌شوند.



تست آموزشی

تعداد نقاط بحرانی تابع $f\left(x\right)=\frac{x^{۴}}{۴}-۲x^{۲}+۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

چون تابع f به راحتی قابل رسم نیست، از ضابطه‌ی این تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x)=\frac{x^{۴}}{۴}-۲x^{۲}+۳\Rightarrow f'(x)=x^{۳}-۴x=x(x^{۲}-۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=\pm۲\end{cases}\Rightarrow \text{۳ نقطه‌ی بحرانی}$$

تعیین مقادیر اکسترمم مطلق تابع در بازه‌ی [a ،b]

برای تعیین مقادیر اکسترمم مطلق تابع y=f(x) در بازه‌ی [a ،b] به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ عرض نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی (a ،b) محاسبه می‌کنیم. برای این منظور از تابع مشتق گرفته و ریشه‌های صورت و مخرج مشتق که در بازه‌ی (a ،b) قرار دارند را مشخص می‌کنیم و اگر عضو D_f باشند، با جای‌گذاری آن‌ها در ضابطه‌ی تابع، عرض این نقاط را به‌دست‌می‌آوریم.

دقت کنیم: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول x=c از بازه‌ی [a ،b] ناپیوسته از راست (یا چپ) باشد، علاوه بر مقدار، باید حد راست (یا چپ) تابع در آن نقطه محاسبه شود. مثلاً، در تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲}; & x\le ۱\\-x+۲; & x\rangle ۱\end{cases}$ علاوه بر f(1)، باید حد راست را در x=1 از ضابطه‌ی پایین به‌دست‌آوریم.

۲ـ مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه، تعیین می‌کنیم. به عبارتی با جای‌گذاری a و b در ضابطه‌ی تابع، f(a) و f(b) را مشخث می‌کنیم.

۳ـ از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بزرگ‌ترین آن‌ها ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، می‌نیمم مطلق است (به شرط آن‌که این بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین مقدار، جدی نباشد، یعنی صرفاً از یک lim به‌دست‌نیامده باشد.)

برای تعیین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق در بازه‌ی (a ،b] (یا [a ،b) یا (a ،b)، در مرز باز b، فقط حد چپ و در مرز باز a، فقط حد راست را به دست می‌آوریم. اگر به ازای حد در یکی از این نقاط، بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین مقدار حاص شود، ماکزیمم مطلق (یا می‌نیمم مطلق) وجود نخواهد داشت. یعنی اگر بیش‌ترین (یا کم‌ترین) مقدار، به ازای مقادیر حدی به‌دست‌آید، تابع فاقد ماکزیمم (یا می‌نیمم) مطلق می‌باشد.

دقت کنیم! به جای حدگیری می‌توانیم مرز باز را بسته فرض کرده و مقدار تابع را به ازای آن به‌دست‌آوریم. حالل اگر بیش‌ترین (یا کم‌ترین) مقدار، در این مرز باز رخ دهد، تابع فاقد ماکزیمم (یا می‌نیمم) مطلق خواهد بود، چون این نقاط عضو بازه‌ی موردنظر نیستند.

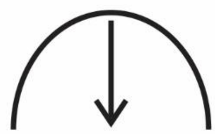
بررسی تقعر منحنی به کمک مشتق دوم تابع

برای بررسی و تعیین تقعر منحنی، مشتق دوم تابع را به‌دست‌آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

در فواصلی که $f''(x)>0$ باشد، جهت تقعر منحنی رو به بالا است (به طرف yهای مثبت).

تقعر تابع f رو به بالا است $\Leftrightarrow f''(x)>0$

در فواصلی که $f''(x)<0$ باشد، جهت تقعر منحنی رو به پایین است (به طرف yهای منفی).



تقعر تابع f رو به پایین است $\Leftrightarrow f''(x)<0$

پس برای تعیین فاصله‌ای که تقعر نمودار تابع رو به بالا است، کافی است از تابع دوبار مشتق گرفته و مشتق دوم تابع مثبت قرار دهیم و برای تعیین فاصله‌ای که تقعر نمودار تابع رو به پایین است، کافی است مشتق دوم تابع را منفی قرار دهیم. از حل نامعادله‌های حاصل، فاصله‌ی مورد نظر مشخص می‌شود.

تذکر: تقعر صفر شدن f''، تأثیری در مطالب مطرح شده در بالا نمی‌گذارد.

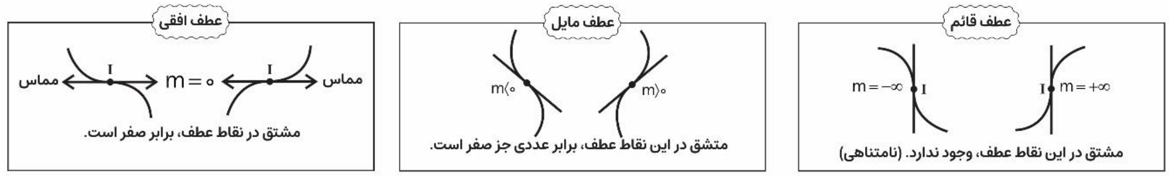
نقطه‌ی عطف منحنی

نطقه‌ای به طول x_0 را که تابع f در آن نقطه پیوسته باشد، در نظر بگیریم. اگر در نقطه‌ای به طول x_0، خط مماسِ واحد قابل رسم باشد و تقعر منحنی در دو طرف آن عوض شود، نقطه‌ای به طول x_0 را نقطه‌ای عطف تابع می‌نامیم. بنابراین اگر تابع f در نقطه‌ای به طول x_0، دارای نقطه‌ی عطف باشد، باید:

۱ـ تابع در x_0 پیوسته باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

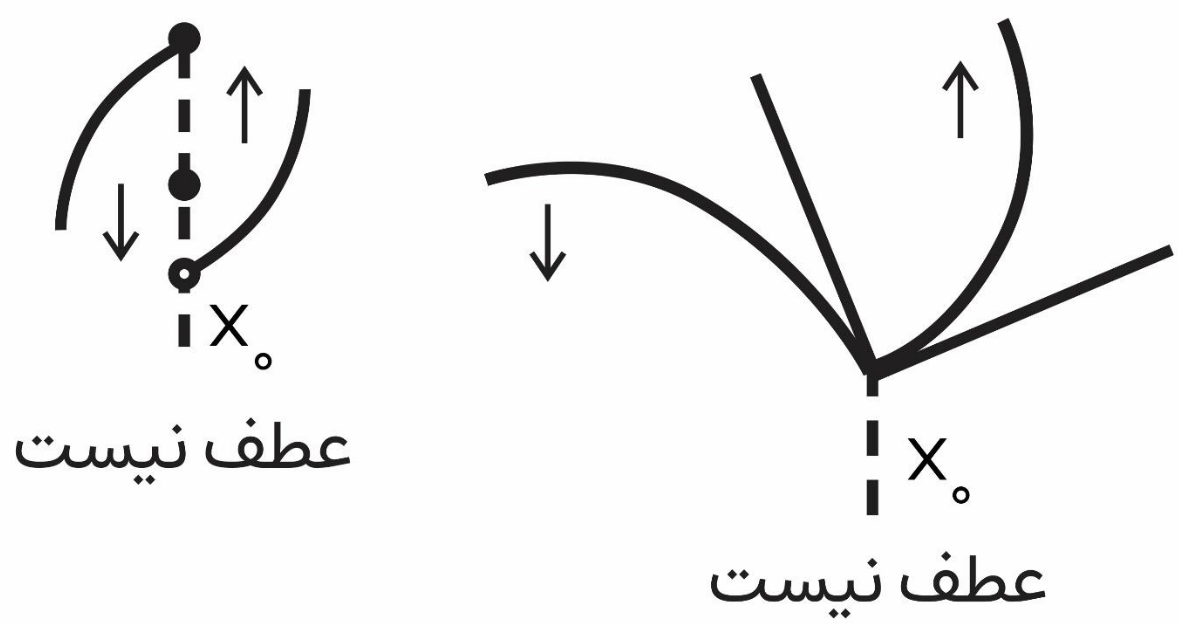
۲ـ خط مماس واحد در x_0 قابل رسم باشد، یعنی $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

۳ـ تقعر تابع در دو طرف x_0 عوش شود، یعنی علامت f'' در دو طرف x_0 تغییر کند.



در نقطه‌ی عطف، خط مماس از نمودار تابع عبور می‌کند. پس اگر خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای از منحنی عبور کرد، قطعاً این نقطه عطف است.

دقت کنیم! اگر در نقطه‌ای تقعر منحنی عوض شود ولی در این نقطه، تابع پیوسته نباشد و یا خط مماسِ واحد موجود نباشد، آن نقطه یک نقطه‌ی عطف نیست. به نمودارهای مقابل توجه کنیم:



تعیین طول نقاط عطف منحنی به کمک مشتق دوم تابع

برای تعیین طول نقاط عطف منحنی $y=f(x)$، ابتدا از ضابطه‌ی تابع دو بار مشتق می‌گیریم. ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه‌ی فرد صورت و مخرج $f''(x)$، که علامت مشتق دوم در دو طرفِ آن‌ها تغییر می‌کند، مشروط بر آن‌که عضو دامنه‌ای تعریف تابع باشند و تابع در آن نقاط پیوسته باشد، طول نقاط عطف منحنی به‌حساب می‌آیند.

$$y''=\frac{\square=0 \Rightarrow \text{ریشه‌ی ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد} \in D_f}{\square=0 \Rightarrow \text{ریشه‌ی ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد} \in D_f} \Rightarrow \text{عطف}$$

نکته‌های مهم و به‌یادماندنی:

۱ـ تنها در توابع شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است که ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه‌ی فرد مخرج مشتق دوم (اگر عضو D_f باشد)، طول نقطه‌ی عطف می‌باشد. پس در توابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نیستند، برای تعیین طول نقاط عطف، فقط ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه‌ی فرد صورت مشتق دوم تابع را مشخص می‌کنیم و با ریشه‌های مخرج مشتق دوم، هیچ کاری نداریم.

۲ـ اگر در توابع تک ضابطه‌ای که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نمی‌باشند، نقطه‌ای به طول x_0، طول نقطه‌ی عطف معرفی شود، قطعاً مشتق دوم به ازای $x = x_0$ صفر می‌شود.

۳ـ برای تشخیص نوع نقطه‌ی عطف، کافی است طول نقطه‌ی عطف منحنی را در ضابطه‌ی مشتق اول تابع، جای‌گذاری کنیم. اگر مشتق تابع در نقطه‌ی عطف صفر شود، عطف افقی است و اگر مشتق تابع در این نقطه، عددی متناهی (غیر از صفر) شود، عطف مایل بوده و اگر نامتناهی شود. عطف قائم خواهد بود.

۴ـ طول نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$، به‌صورت $x = -\dfrac{b}{3a}$ می‌باشد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow x_{\text{عطف}} = -\frac{b}{3a}$$

۵ـ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد هر تابعی، طول نقطه‌ی عطف افقی بر روی محور xها است. به بیان دیگر، دارین:

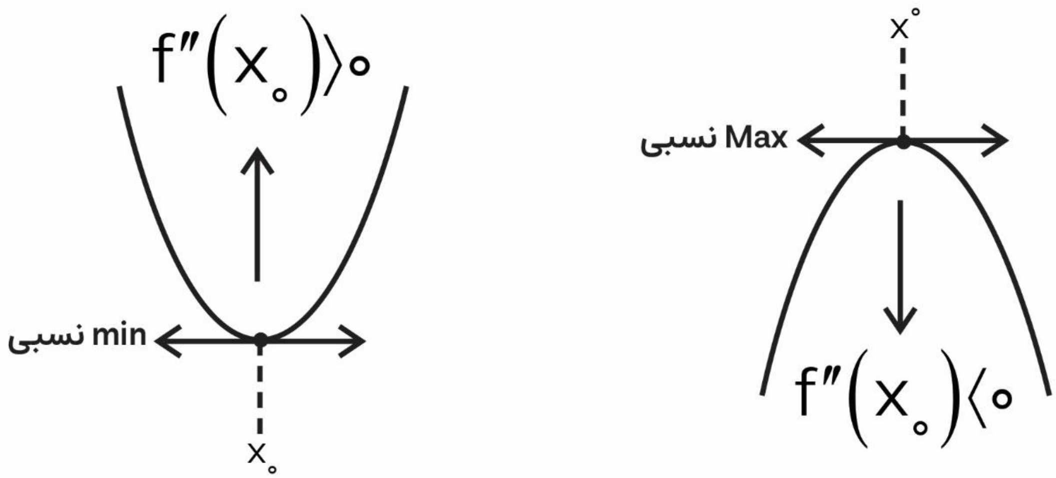
$$f(x) = (x - x_0)^{2k+1} \times g(x) \xrightarrow[k \in N]{x=x_0 \text{ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد } f(x)=0 \text{ است}} x_0 \text{ طول عطف افقی بر روی محور } x \text{ها است}$$

۶ـ ریشه‌ی مضاعف و مکرر مرتبه‌ی زوج مشتق اول هر تابعی، طول نقطه‌ی عطف افقی تابع است. به بیان دیگر، ریشه‌ی مضاعف یا مکرر مرتبه‌ی زوج معادله‌ی $f'(x) = 0$، طول نقطه‌ی عطف افقی تابع f می‌باشد.

$$f'(x) = 0 \text{ ریشه‌های مضاعف} \Rightarrow x_0 \text{ طول نقطه‌ی عطف افقی تابع } f \text{ است}$$

آزمون مشتق دوم برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

تابع $y=f(x)$ مفروض است. اگر $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)$ موجود و مخالف صفر باشد، x_0 طول اکسترمم نسبی تابع f است:



۱ـ اگر $f''(x_0)>0$ باشد، x_0 طول می‌نیمم نسبی است.

۲ـ اگر $f''(x_0)<0$ باشد، x_0 طول ماکزیمم نسبی است.

دقیت کنیم! اگر x_0 ریشه‌ی ساده‌ی مشتق باشد (یعنی $f'(x_0)=0$)، ولی تعیین علامت مشتق در دو طرف x_0 به راحتی انجام نگیرد، از روش آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم. این هنر ماست که پس از تعیین طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی، از چه روشی (آزمون مشتق اول یا آزمون مشتق دوم) نوع اکسترمم نسبی را مشخص کنیم.

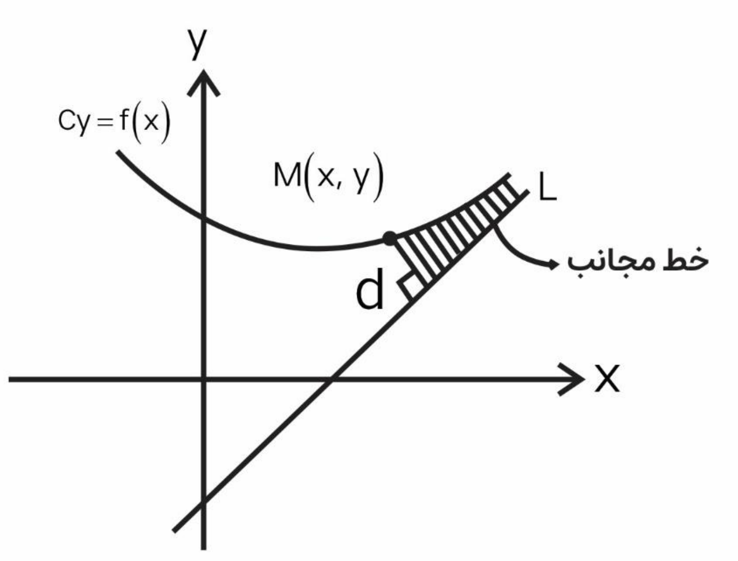
مجانب‌های نمودار توابع

تعریف خط مجانب: منحنی مسطح C واقع در صفحه‌ی xoy و به معادله‌ی $y=f(x)$ مفروض است. L را یک خط مستقیم واقع در صفحه‌ی xoy درنظرگرفته و فاصله‌ی قائم یک نقطه از این منحنی از خط L را d می‌نامیم.

اگر $\lim\limits_{x\to\infty} d=0$ یا $\lim\limits_{y\to\infty}=0$ باشد، در این صورت خط مستقیم L را یک مجانب منحنی C می‌نامیم.

به زبان ساده خط L را مجانب منحنی f می‌نامیم، هرگاه با میل کردن x یا y یا هردو به ∞، فاصله‌ی بین‌نقاط منحنی f و L به صفر میل کند. به عبارتی نمودار تابع f با میل کردن x یا y یا هردو به ∞، بسیار به این خط نزدیک شود.

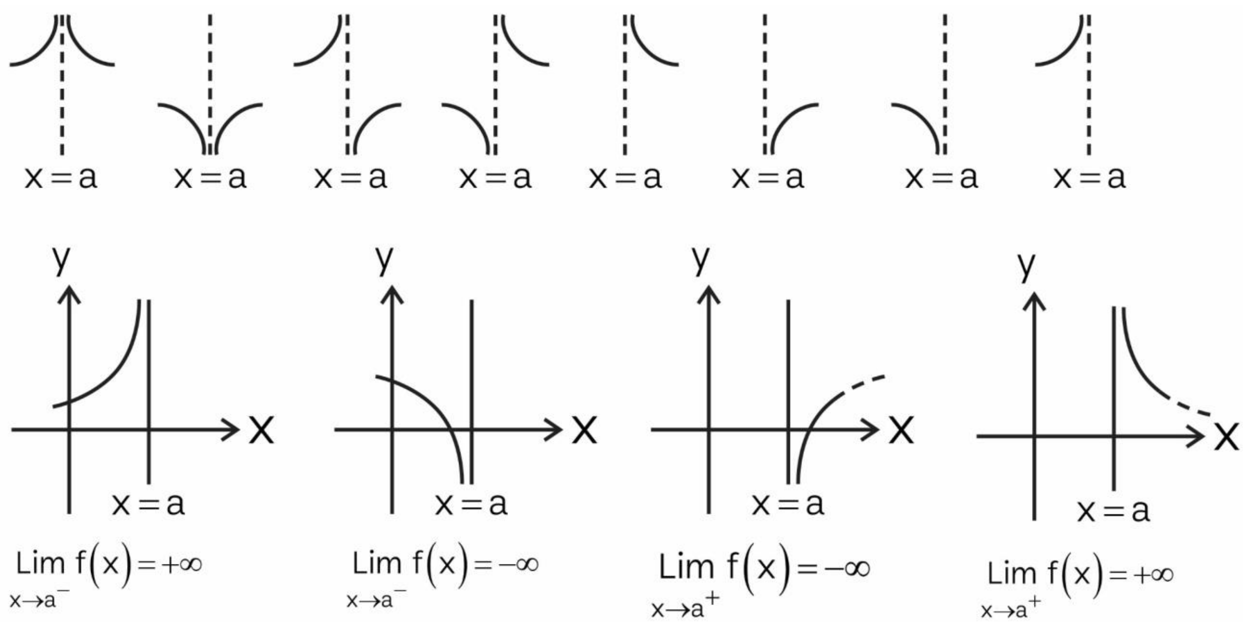
مجانب‌ها را به سه دسته‌ی قائم، افقی و مایل تقسیم می‌کنیم.



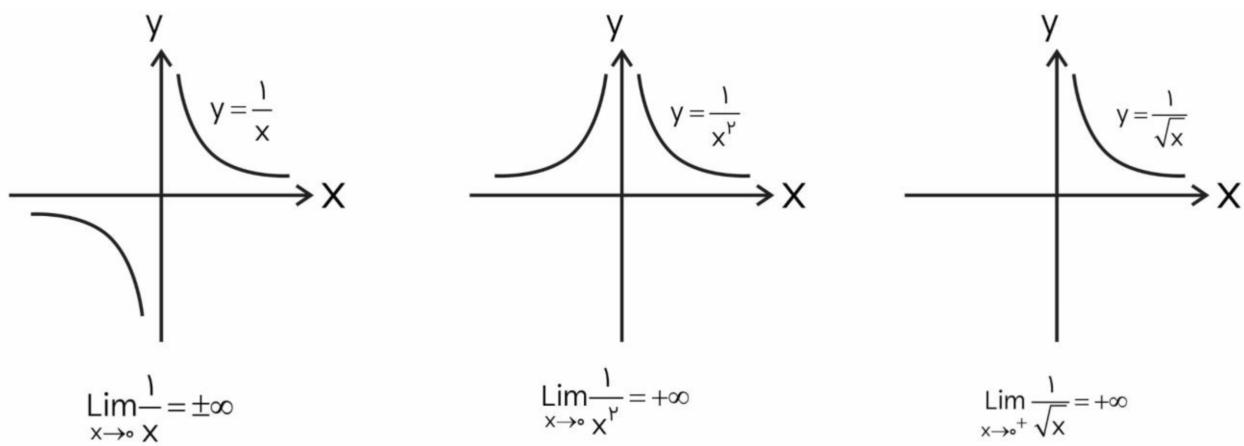
مجانب قائم: خط قائم x=a را مجانب قائم منحنی y=f(x) می‌نامیم، هرگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ باشد. به عبارتی خط قائم x=a را مجانب قائم منحنی y=f(x) به حساب می‌آوریم، هرگاه حداقل یکی از حدهای چپ، راست یا دوطرفه‌ی f در x=a برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Rightarrow \text{است}\ f\ \text{مجانب قائم منحنی}\ x=a\ \text{خط}$$

در شکل‌های زیر، خط x=a مجانب قائم منحنی f است. در تمامی این شکل‌ها می‌بینیم که با میل کردن y به $+\infty$ یا $-\infty$ منحنی f به خط قائم L:x=a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.



به‌عنوان مثال، در توابع زیر خط قائم $x=۰$ مجانب قائم محسوب می‌شود، چون؛



بررسی مجانب قائم تابع کسری

در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندیدهای مجانب قائم هستند. مشروط بر آن‌که:

۱ـ همسایگی ریشه‌های مخرج صورت را صفر نکنند (یعنی ریشه‌های صورت نباشند)

۲ـ این همسایگی (حتی همسایگی یک‌طرفه) عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشد.

پس برای تعیین مجانب قائم منحنی توابع کسری به نکات زیر به دقت توجه کنید:

در توابع کسری همیشه بعد از به‌دست‌آوردن ریشه‌های مخرج، باید آن‌ها را در صورت تابع قرار دهیم، اگر ریشه‌ی تابع کسری، ریشه‌ی صورت نیز باشد (یعنی صورت به ازای ریشه‌ی به‌دست‌آمده صفر شود)، حد تابع را در این

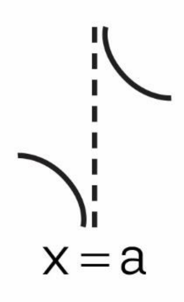
ریشه به‌دست‌می‌آوریم. این حد قطعاً ابهام $\frac{0}{0}$ دارد که باید از آن رفع ابهام کنیم. در صورتی که حد تابع در این ریشه، نامتناهی (یعنی ∞) شود، ریشه‌ی مخرج را به‌عنوان مجانب قائم منحنی به حساب می‌آوریم. به‌عنوان مثال در تابع $y=\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$، خط قائم $x=1$ مجانب قائم تابع است، چون داریم:

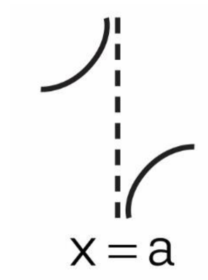
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2}{\text{صفر حدی}}=\infty$$

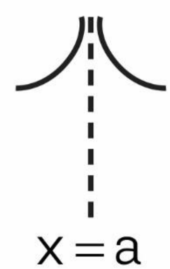
شرط دوم به این معنی است که دامنه‌ی تابع طوری باشد که x بتواند از چپ، از راست یا از هر دوطرف به ریشه‌ی مخرج میل کند. برای بررسی این شرط، کافی است به این نکته توجه کنیم که اگر در همسایگی ریشه‌ی مخرجِ تابع کسری، عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج یا جلوی لگاریتم منفی شود، مجانب قائم محسوب نمی‌شود.

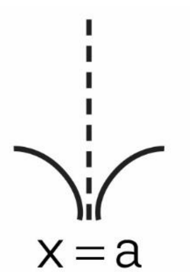
رسم نمودار تابع در اطراف خط مجانب قائم آن

فرض کنیم خط $x=a$ مجانب قائم منحنی تابع $y=f(x)$ است، حال برای رسم نمودار تابع در اطراف این خط، ابتدا بررسی می‌کنیم که متغیر x از چه سمتی می‌تواند از دو سمت به a نزدیک شود، حد راست و حد چپ تابع f را در $x=a$ محاسبه می‌کنیم. با انجام این کار به راحتی پی می‌بریم در همسایگی راست و همسایگی چپ این نقطه، چه شاخه‌ی بی‌نهایتی باید رسم شود.

تذکر: اگر ریشه‌ی مخرج ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد باشد، در اطراف مجانب قائم یکی از شکل‌های 

یا 

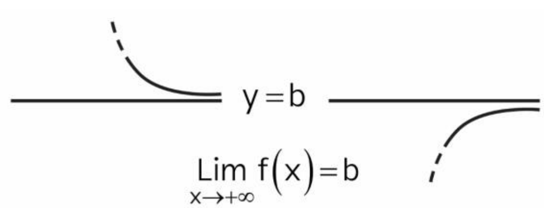
رخ داده و اگر ریشه‌ی مخرج مضاعف یا مکرر مرتبه زوج باشد، در اطراف مجانب قائم یکی از شکل‌های 

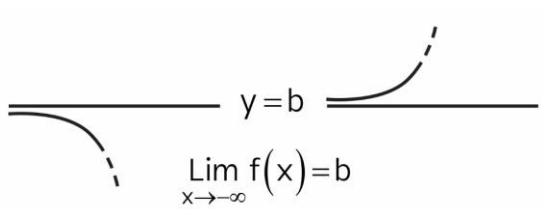
یا 

رخ می‌دهد.

۲ـ اگر x تنها از یک سمت بتواند به a نزدیک شود، منحنی تابع دارای مجانب قائم یک‌طرفه بوده و برای رسم نمودار تابع در اطراف این خط، تنها حد راست یا حد چپ تابع f را در x=a محاسبه می‌کنیم. با انجام این کار به راحتی پی می‌بریم که در همسایگی یک‌طرفه‌ی این نقطه، چه شاخه‌ی بی‌نهایتی باید رسم شود.

۲ـ مجانب افقی: خط افقی y=b را مجانب افقی منحنی y=f(x) می‌نامیم، هرگاه حداقل یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:





بنابراین، برای پیدا کردن مجانب‌های افقی، کافی است حد در بی‌نهایت تابع را محاسبه کنیم. اگر جواب این حد برابر عدد حقیقی مشخصی به نام b باشد، خط افقی y=b مجانب افقی تابع است.

خط $y=b$ مجانب افقی است $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

به‌عنوان مثال در تابع $f(x)=\frac{۲x-۳}{۴-x}$ خط $y=-۲$ مجانب افقی تابع است، چون داریم $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-۲$.

نکته‌های به‌یادماندنی:

۱ـ برای وجود مجانب افقی، لازم است که دامنه‌ی تعریف تابع، حداقل از یک سمت بی‌کران باشد تا x بتواند حداقل به یکی از بی‌نهایت‌ها میل کند.

۲ـ هر تابع حداکثر دو خط مجانب افقی می‌تواند داشته باشد.

نکته‌های به‌یادماندنی:

برای منحنی $f(x)=mx+h+\sqrt{ax^۲+bx+c}$ با شرط $a>۰$ دو خط به معادلات $y=mx+h\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{۲a}\right)$ مجانب‌های منحنی هستند. در این حالت مجانب‌های تابع f به دو صورت زیر است:

۱ـ اگر $|m|=\sqrt{a}$ باشد، نمودار این تابع دارای یک مجانب افقی و یک مجانب مایل است.

۲ـ اگر $|m|\neq\sqrt{a}$ باشد، نمودار این تابع دارای دو مجانب مایل است.

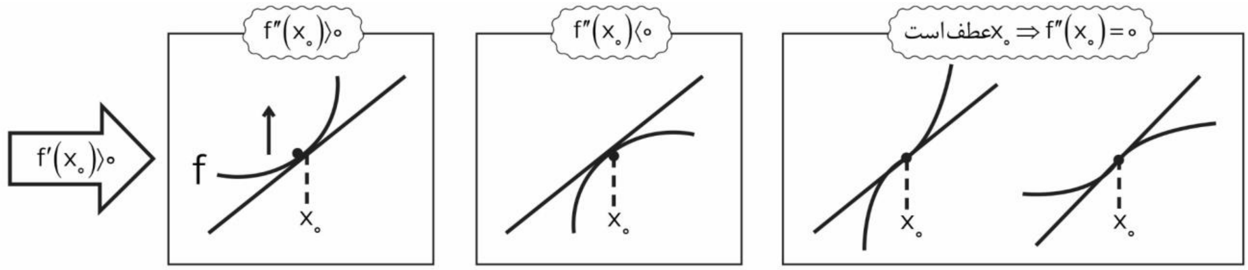
تذکر: اگر $\Delta=۰$ باشد، ضابطه‌ی تابع ساده شده و به صورت دو خط راست تبدیل می‌شود.

برای منحنی $f(x)=mx+h\pm\sqrt[۳]{ax^۳+bx^۲+\dots}$ خط به معادله‌ی $y=mx+h\pm\sqrt[۳]{a}\left(x+\frac{b}{۳a}\right)$ مجانب منحنی است. در این حالت تابع f دارای یک مجانب مایل یا یک مجانب افقی است.

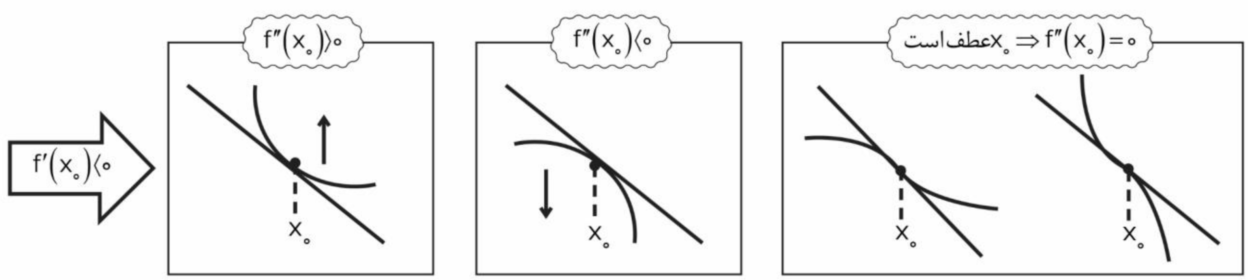
رسم نمودار تابع y=f(x) در اطراف نقطه‌ای به طول $x=x_۰$

برای رسم نمودار تابع y=f(x) در اطراف نقطه‌ای به طول $x=x_۰$، ابتدا مقادیر مشتق اول و دوم تابه را در این نقطه مشخص می‌کنیم. طبق مطالبی که در قسمت‌های قبلی آموختیم، از روی مقادیر $f'(x_۰)$ و $f''(x_۰)$ و علامت آن‌ها، نتایج زیر حاصل می‌شود:

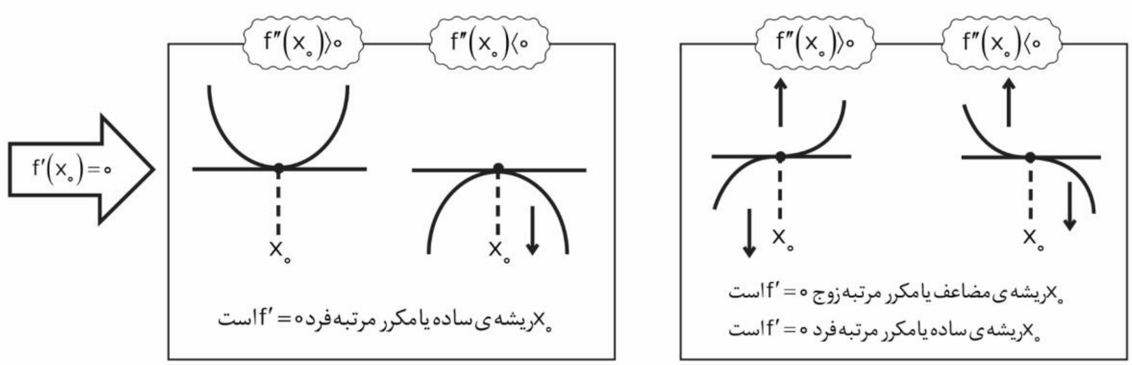
حالت اول: اگر $f'(x_\circ)>\circ$ باشد، شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ مثبت بوده و تابع قطعاً در این نقطه صعودی است. حال با توجه به مقدار $f''(x_\circ)$، داریم:



حالت دوم: اگر $f'(x_\circ)<\circ$ باشد، شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول $x_\circ$، منفی و تابع قطعاً در این نقطه نزولی است. حال با توجه به مقدار $f''(x_\circ)$، داریم:



حالت سوم: اگر $f'(x_\circ)=\circ$ باشد، شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول $x_\circ$، صفر بوده و خط مماس در این نقطه افقی است. حال با توجه به مقدار $f''(x_\circ)$، داریم:

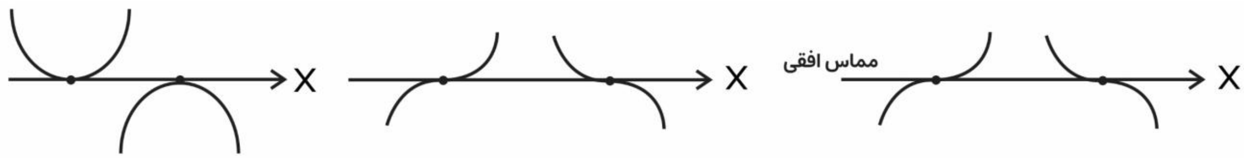


نکته‌های مهم و به‌یادماندنی:

۱ـ ریشه‌ی مضاعف و مکرر مرتبه‌ی زوج هر تابعی، اکستمم نسبی بر روی محور xها می‌باشد.

۲ـ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد هر تابعی، عطف افقی بر روی محور xها می‌باشد.

۳ـ ریشه ی مضاعف و مکرر مرتبه‌ی زوج مشتق اول هر تابعی، عطف افقی است.



تحلیل نمودار تابع رسم شده‌ی شامل پارامتر مجهول

برای بررسی نمودار تابعی که شامل پارامتر یا پارامترهای مجهول بوده ولی نمودار آن یا قسمتی از نمودار رسم شده است، به موارد زیر دقت می‌کنیم:

۱ـ مجانب‌های تابع (قائم، افقی و مایل) در صورتی که نمودار رسم شده، شامل خط مجانب باشد.

۲ـ نقاط تلاقی نمودار تابع با محور xها و محور yها.

۳ـ طول یا عرض نقاط اکسترمم نسبی و عطف تابع.

یادآوری‌های ممهم و کاربردی:

ـ اگر در توابع کسری، معادله‌ی مجانب قائم تابه کسری معلوم باشد، کافی است طول مجانب قائم را ریشه‌ی مخرج قرار دهیم.

ـ اگر مجانب افقی تابع معلوم باشد، نتیجه می‌گیریم که حد در بی‌نهایت تابع برابر با عرض داده شده است.

ـ اگر در نمودار رسم‌شده، طول می‌نیمم یا ماکزیمم نسبی به شکل‌های $\cup$ یا $\cap$ معلوم باشد، نتیجه می‌گیریم که این طول، ریشه‌ی ساده‌ی مشتق اول تابع است. به عبارتی مشتق اول تابع به ازای طول می‌نیمم یا ماکزیمم نسبی تابع، صفر می‌شود.

ـ اگر در نمودار رسم شده، عرض می‌نیمم یا ماکزیمم نسبی به شکل‌های $\cup$ یا $\cap$ معلوم باشد، کافی است به جای y در ضابطه‌ی تابع، عرض می‌نیمم یا ماکزیمم نسبی داده شده را جایگزین کرده و در معادله‌ی تقاطع حاصل، شرط ریشه‌ی مضاعف را اعمال نماییم.

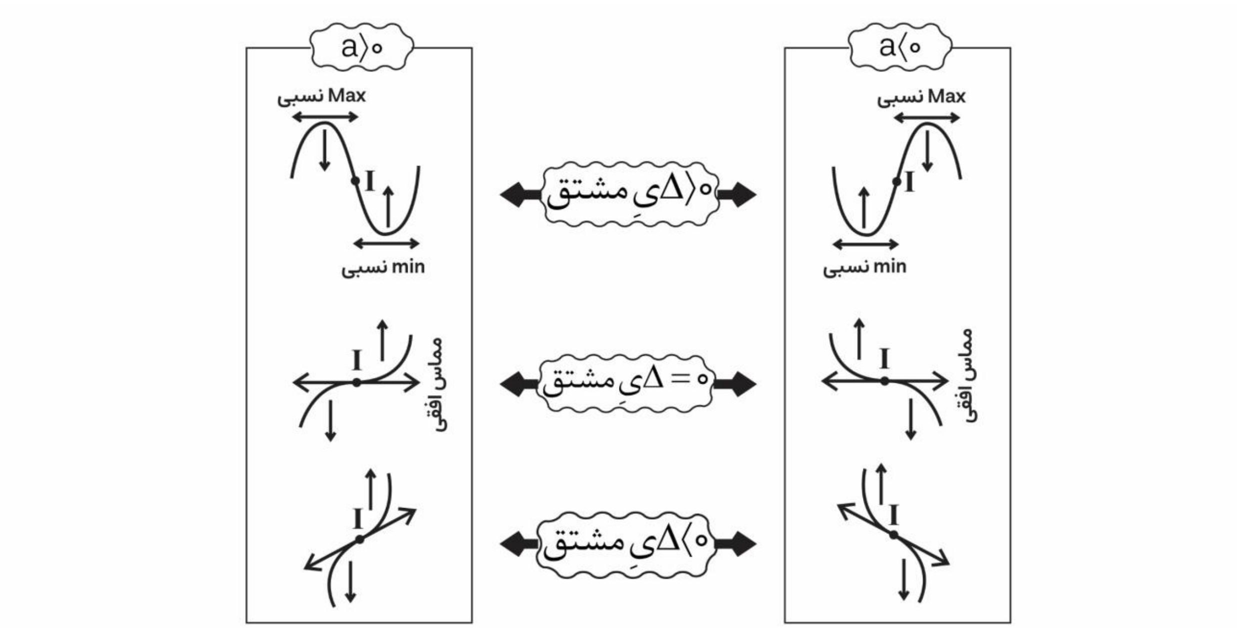
ـ اگر مختصات نقطه‌ای اکسترمم نسبی تابع معلوم باشد، نتیجه می‌گیریم که مختصات این نقطه در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند.

ـ اگر طول نقطه‌ی عطف تابع معلوم باشد، نتیجه می‌گیریم که این طول، ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم تابع است.

رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم $y=ax^3+bx^2+cx+d$

برای رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم $y=ax^3+bx^2+cx+d$، کافی است تنها علامت a (ضریب x^3) و مقدار Δی مشتق تابع را مشخص کنیم. داریم:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y''=6ax+2b$$



نکته‌های به‌یادماندنی:

۱ـ اگر $a>0$ باشد، منحنی تابه از ناحیه‌ی سوم شروه شده و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود و اگر $a<0$ باشد، منحنی تابع از ناحیه‌ی دوم شروع شده و به ناحیه‌ی چهارم ختم می‌شود. از طرفی اگر $a>0$ باشد، ابتدا تقعر منحنی رو به پایین بوده و سپس رو به بالا است و اگر $a<0$ باشد،ابتدا تقعر رو به بالا بوده و سپس رو به پایین می‌باشد.

۲ـ نقطه‌ای به طول $x_1=-\frac{b}{3a}$، نقطه‌ی عطف و مرکز تقارن منحنی است.

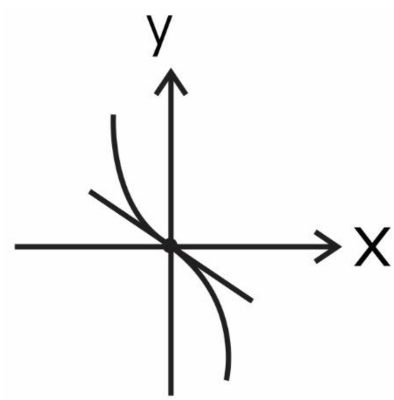
۳ـ در صورتی که Δی مشتق بزرگ‌تر از صفر باشد $y'=0$ دو ریشه‌ی ساده‌ی متمایز داشته و تابع دارای Max نسبی و min نسبی است. در این حالت خطی که نقاط اکسترمم نسبی را به هم متصل می‌کند، از نقطه‌ی عطف می‌گذرد. نقطه‌ی عطف در وسط پاره‌خط و اصل نقاط Max نسبی و min نسبی قرار دارد. پس داریم:

$$x_{Max} + x_{min} = 2x_I$$
$$y_{Max} + y_{min} = 2y_I$$

تذکر: هر خطی که از نقاط Max و min تابع بگذرد، قطعاً از نقطه‌ی عطف نیز می‌گذرد.

شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ است. دوتایی (a ،b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(-1 ، 0)$ **۲)** $(0 ، -1)$ **۳)** $(0 ، 1)$ **۴)** $(1 ، 0)$



پاسخ: گزینه (۲)

باتوجه به نمودار رسم شده، به راحتی پی می‌بریم که در تابع درجه‌ی سوم $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$، طول نقطه‌ی عطف منحنی برابر $x_I = 0$ است. می‌دانیم در تابع درجه‌ی سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، طول نقطه عطف منحنی برابر با $x_I = -\frac{b}{3a}$ است، پس داریم:

$$\text{طول نقطه‌ی عطف} = x_I = -\frac{a}{3(-1)} = \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = -x^3 + bx$$

از طرفی شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف، منفی است. پس باید مشتق تابع را به ازای x=0، منفی قرار دهیم. داریم:

$$m_{\text{مماس}} = f'(0) = -3x^2 + b \underset{x=0}{=} b < 0$$

با توجه به این‌که a=0 و $b<0$ می‌باشد، تنها گزینه‌ی (۲) درست بوده و مقدار b برابر با b=-1 می‌باشد.

تذکر: به جای این‌که مشتق تابع را به ازای x=0 منفی قرار دهیم، می‌توانیم Δی مشتق تابع را همواره منفی درنظر بگیریم. با انجام این کار نمودار تابع همواره اکیداً نزولی خواهد بود. داریم:

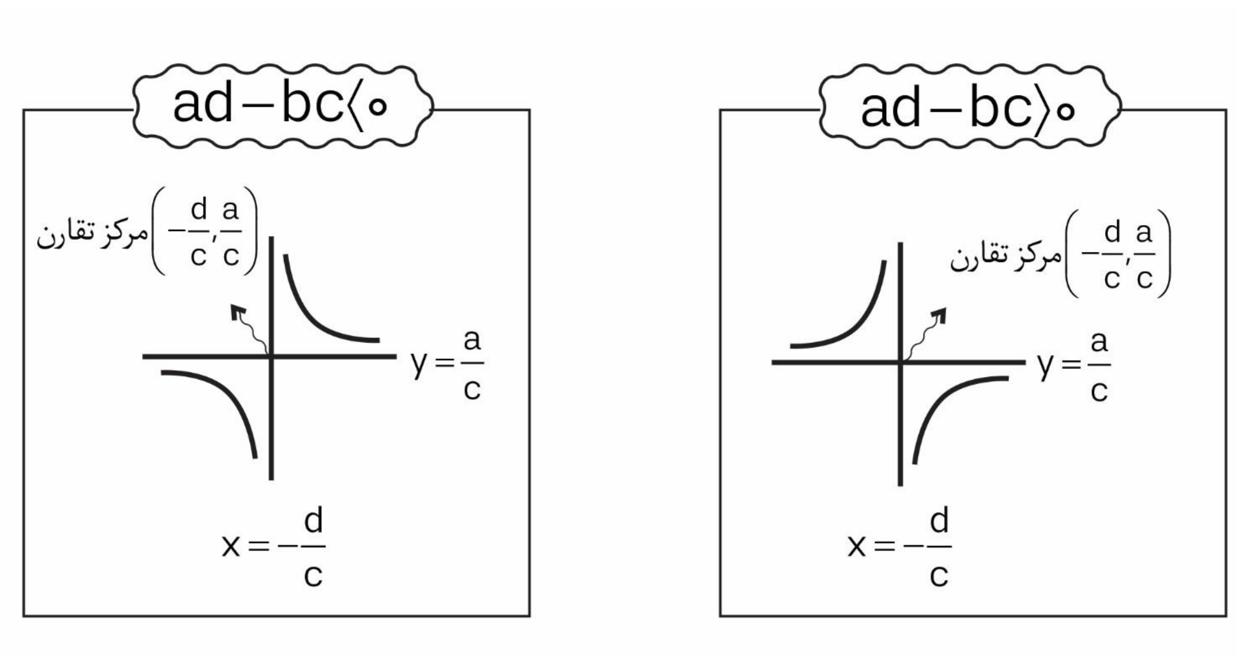
$$\Delta_{\text{ی مشتق}} = ۰^{۲} - ۴(-۳)b = ۱۲b < ۰ \Rightarrow b < ۰$$

رسم نمودار تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

تابع با ضابطه‌ی $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc \neq ۰$ و $c \neq ۰$، یک تابع هموگرافیک است.

تذکر: اگر $ad-bc = ۰$ باشد، تابع تبدیل به خط راست موازی محور xها (تابع ثابت) می‌شود که ازای ریشه‌ی مخرج توخالی است. در این حالت، تابع هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

تذکر ۲: اگر c=0 باشد، تابع تبدیل به یک خط راست شیب‌دار می‌شود. در این حالت، تابع یا اکیداً صعودی است و یا اکیداً نزولی.



ـ تابع هموگرافیک دارای یک مجانب قائم به معادله‌ی $x = \text{ریشه‌ی مخرج} = -\dfrac{d}{c}$ و یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \dfrac{\text{ضریب x صورت}}{\text{ضریب x مخرج}} = \dfrac{a}{c}$ می‌باشد.

ـ محل برخورد مجانب قائم و افقی تابع هموگرافیک، مرکز تقارن می‌باشد. بنابراین نقطه‌ی $\omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$، مرکز تقارن تابع هموگرافیک محسوب می‌شود.

ـ تابع هموگرافیک دارای دو محور تقارن عمود بر هم با شیب ± 1 است. این دو محور تقارن، هر دو از مرکز تقارن این تابع می‌گذرد.

ـ اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع هموگرافیک دارای دو شاخه‌ی صعودی و اگر $ad-bc<0$ باشد، تابع هموگرافیک دارای دو شاخه‌ی نزولی است. تابع هموگرافیک، در کل دامنه‌ی تعریفش، غیریکنواخت است.

ـ این تابع نقطه‌ی اکسترمم نسبی و عطف ندارد.

ـ منحنی به معادله‌ی $Ax+By+Cxy+D=0$ یک تابع هموگرافیک است.

نکته‌ی به‌یادماندنی:

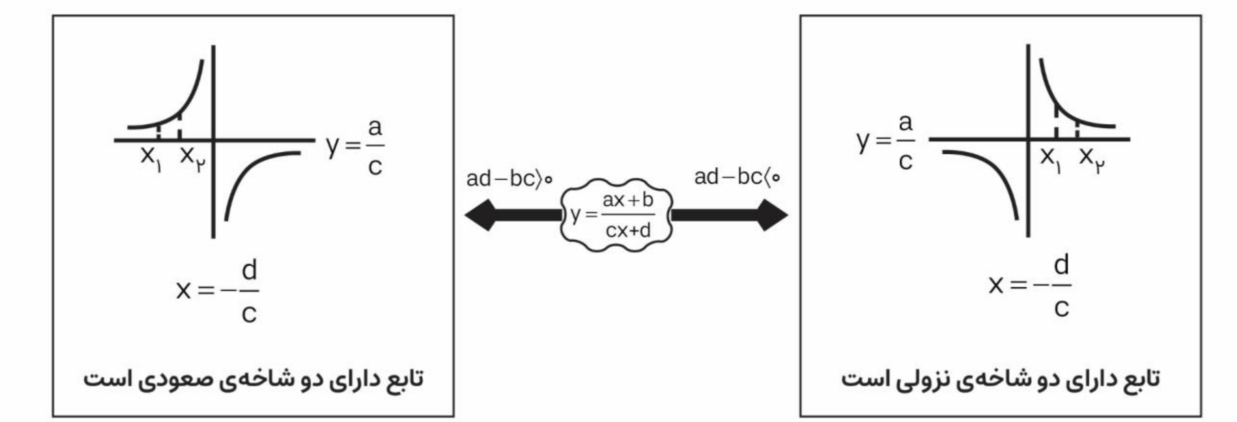
در توابع کسری، اگر طول مجانب قائم دوطرفه در فاصله‌ای قرار گیرد، در این فاصله تابع کسری نه صعودی است و نه نزولی.

بنابراین، اگر تابع کسری در فاصله‌ی صعودی یا نزولی (یکنوا) باشد، قطعاً این فاصله شامل مجانب قائم منحنی نیست.

تذکر: در توابع کسری به ازای ریشه‌های مخرج، معمولاً مجانب قائم رخ می‌دهد.

اگر مشتق تابع کسری همواره مثبت یا همواره منفی باشد ولی این تابع دارای مجانب قائم باشد، ادعا می‌کنیم تابع دارای شاخه‌های صعودی یا شاخه‌های نزولی است و در کل غیریکنوا می‌باشد.

نکته‌ی مهم: برای بررسی یکنوایی تابع هموگرافیک، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. داریم:



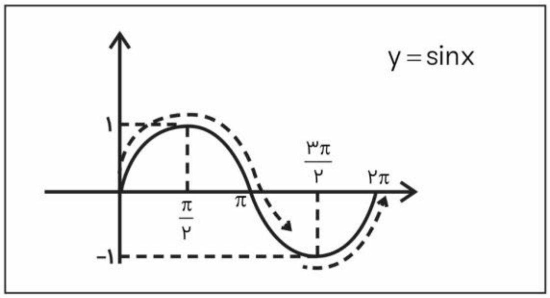
بنابراین اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع هموگرافیک دارای دو شاخه‌ی صعودی و اگر $ad-bc<0$ باشد، تابع هموگرافیک دارای دو شاخه نزولی است.

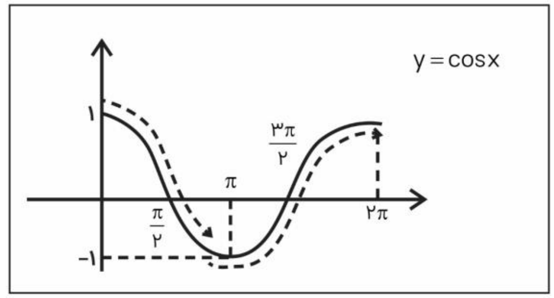
نکته‌های مهم و به‌یادماندنی:

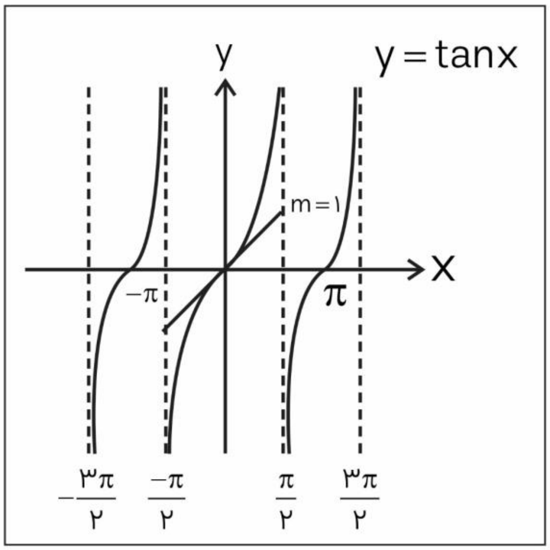
۱ـ تابع هموگرافیک در دامنه‌ی تعریفش غیر یکنوا می‌باشد (چون این تابع دارای مجانب قائم است.) پس اگر تابع هموگرافیک در بازه‌ای یکنوا معرفی شود، قطعاً این بازه شامل طول مجانب قائم (ریشه‌ی مخرج) نمی‌باشد.

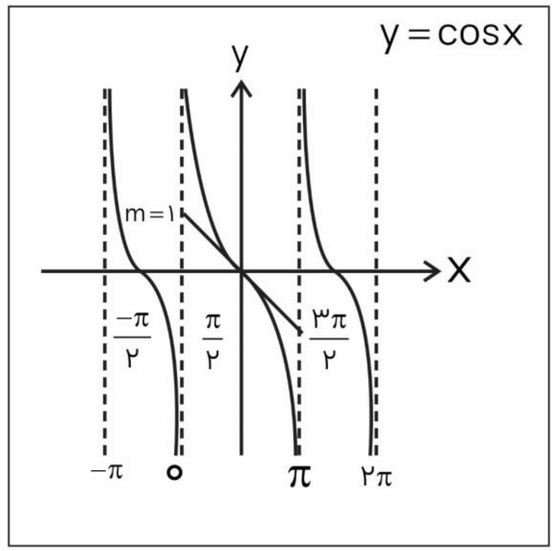
۲ـ اگر در حل تست‌ها تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ یکنوا معرفی شود، قطعاً $ad-bc=0$ است. چون اگر $ad-bc=0$ باشد، تابع هموگرافیک تبدیل به خط ثابت افقی می‌شود که هم صعودی و هم نزولی خواهد بود.

نکته: نمودار توابع مثلثاتی به صورت زیر است:









۱ـ نمودار تابع فوق غیریکنواست و تنها دارای شاخه‌های نزولی می‌باشد. بنابراین، تاب فوق دارای فواصلی که شامل مجانب‌های قائم خود (یعنی $x = k\pi$) نباشد، نزولی است.

۲ـ نمودار تابع فوق غیریکنواست و تنها دارای شاخه‌های صعودی می‌باشد. بنابراین، تابع فوق در فواصلی که شام مجانب‌های قائم خود (یعنی $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$) نباشد، صعودی است.

نکته‌ی به‌یادماندنی:

در توابعی به‌صورت $y = \left(x - x_{\circ}\right)^{۲k} x g(x) \; (k \in N)$ و $g\left(x_{\circ}\right) \neq \circ$، نقطه‌ی $x = x_{\circ}$ طول اکسترمم نسبی است. به عبارتی دیگر، ریشه‌ی مضاعف یا مکرر مرتبه‌ی زوج تابع، طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع می‌باشد. برای تشخیص نوع اکسترمم نسبی کافی است به این نکته دقت کنیم که:

۱ـ اگر $g\left(x_{\circ}\right) \rangle \circ$ باشد، $x = x_{\circ}$ طول min نسبی است.

۲ـ اگر $g(x_\circ)\langle \circ$ باشد، $x=x_\circ$ طول Max نسبی است.

به‌عنوان مثال در تابع $y=\dfrac{(x-1)^4(x^2-4)}{x^3}$، نقطه‌ای به طول **x=1** ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی چهارم تابع است. بنابراین، در تابع فوق، نقطه‌ای به طول **x=1**، طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع خواهد بود. برای تشخیص نوع اکسترمم نسبی، عبارت $(x-1)^4$ را کنار گذاشته و **x=1** را در مابقی جملات، جای‌گذاری می‌کنیم: داریم:

$$y=\frac{(x-1)^4(x^2-4)}{x^3}=(x-1)^4\times\underbrace{\boxed{\frac{(x^2-4)}{x^3}}}_{g(x)}\xrightarrow[\text{اکسترمم نسبی است}]{\text{x=1 طول نقطه‌ی}}$$

$$g(1)=\frac{1^2-4}{1^3}=-3\langle\circ\Rightarrow x=1\text{، طول ماکزیمم نسبی است}$$

اثبات نکته‌ی مطرح شده: فرض کنیم تابعی به شکل عوامل ضرب باشد. می‌دانیم اگربخواهیم در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ از تابع مشتق بگیریم و یکی از عوامل در $x_\circ$ صفر شود، کافی است از عامل صفر شونده مشتق گرفته و در مابقی عوامل ضرب کنیم. در این‌جا نیز اگر بخواهیم $f'(x_\circ)$ را محاسبه کنیم، کافی است از عامل $(x-x_\circ)^{2k}$ مشتق گرفته و در مابقی عوامل ضرب کنیم. یعنی:

$$f'(x_\circ)=\underbrace{2k(x-x_\circ)^{\overset{\text{فرد}}{\boxed{2k-1}}}}_{\text{مشتق عامل صفر}}\times\overset{\text{مابقی عوامل}}{\boxed{g(x_\circ)}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم $x_\circ$ ریشه‌ی ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد مشتق تابع بوده و مشتق تابع در اطراف آن تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، طول اکسترمم نسبی تابع خواهد بود.

نکته‌ی به‌یادماندنی: در حل معادلات مثلثاتی اگر $\text{Sin}\square$ یا $\text{Cos}\square$ برابر با ± 1 باشند، معادله ریشه‌ی مضاعف داشته و در غیر این صورت معادله یا ریشه ندارد یا ریشه‌ی ساده دارد.

نکته‌ی به‌یادماندنی: اگر نقطه‌ای به طول $x_\circ$، طول نقطه‌ی بحرانی تابعی (که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نباشد) معرفی شود، قطعاً مشتق اول این تابع، به ازای $x=x_\circ$ صفر می‌شود.

نکته: برای تعیین نقاط بحرانی توابع چندضابطه‌ای، ابتدا نقاط بحرانی هر یک از ضابطه‌ها را در محدوده‌ی تعریف‌شان تعیین می‌کنیم. سپس به بررسی بحرانی بودن نقاط مرزی می‌پردازیم، نقاط مرزی در سه حالت محسوب می‌شوند:

۱ـ تابع در نقاط مرزی ناپیوسته باشد.

۲ـ تابع در نقاط مرزی دارای مشتق‌های راست و چپ نابرابر باشد.

۳ـ مشتق راست و چپ تابع در نقاط مرزی، هر دو برابر صفر باشند.

نکته: در تابع $y=|f(x)|$، همه‌ی ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق، یعنی ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$، طول نقاط بحرانی تابع هستند. به‌طور کلی در توابع شامل قدرمطلق، ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق همواره طول نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند.

نکته: اگر دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[-a, a]$ باشد، برای تعیین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق این تابع، کافی است ابتدا ضابطه‌ی $f(a \sin x)$ یا $f(a \cos x)$ را تشکیل داده و ساده نماییم. سپس بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع حاصل را به‌عنوان ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق تابع $f(x)$ معرفی کنیم.

نکته‌ی به‌یادماندنی: برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم مطلق عبارت‌های $a\sin^2\square+b\sin\square+c$ و $a\cos^2\square+b\cos\square+c$، باید به جای $\sin\square$ و $\cos\square$، مقادیر ۱-، ۱ و $\frac{b}{2a}$ را مشروط بر آن‌که $-1<-\frac{b}{2a}<1$ باشد، قرار دهیم. بزرگ‌ترین مقدار به‌دست‌آمده، مقدار ماکزیمم مطلق، و کوچک‌ترین آن‌ها، مقدار می‌نیمم مطلق است.

تذکر: برای استفاده از نکته‌ی بالا، باید $-1\le\sin\square\le 1$ و $-1\le\cos\square\le 1$ باشد.

نکته‌ی مهم و به‌یادماندنی:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\square\pm b\cos\square\le\sqrt{a^2+b^2}$$

بنابراین در تابع $f(x)=a\sin\square\pm b\cos\square$، داریم:

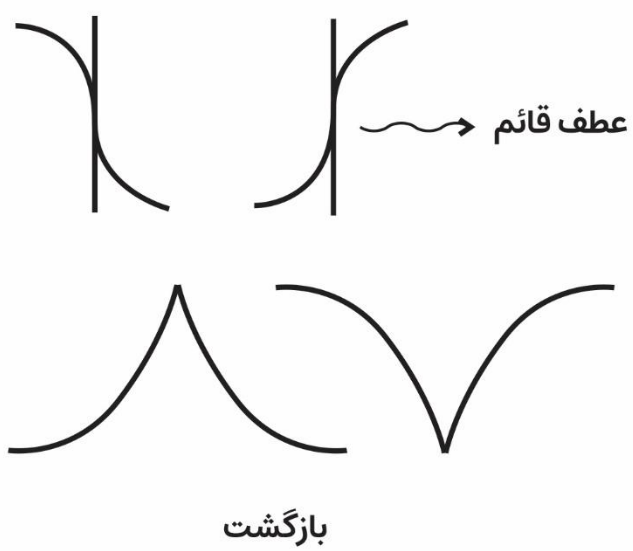
$$y_{\text{مطلق}Max}=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{و} \quad y_{\text{مطلق}min}=-\sqrt{a^2+b^2}$$

نکته: تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، دارای نقطه‌ی عطف نمی‌باشد (به نمودار تابع هموگرافیک توجه کنیم.)

نکته: اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابعی غیرخطی باشد و نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کند (یعنی مبدأ مختصات نقطه‌ای از تابع f باشد.) و تابع در مبدأ مشتق‌پذیر مختصات، نقطه‌ای عطف نمودار تابع f خواهد بود.

نکته: در تابع به‌صورت $x=a, f(x)=\sqrt[2k+1]{(x-a)^{2n-1}.g(x)}$ (ریشه‌ی ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد عبارت زیر رادیکال) طول نقطه‌ی عطف قائم منحنی است. $(2n-1<2k+1$ و $n,k\in N)$

تذکر: ریشه‌س مضاعف و مکرر مرتبه‌ی زوج عبارت زیر رادیکال، طول نقطه‌ی بازگشت (اکسترمم نسبی) منحنی است. البته باید مرتبه‌ی ریشه، کم‌تر از فرجه باشد.



نکته‌ی مهم و به‌یادماندنی: اگر ضابطه‌ی تابعی به‌صورت مجموع چندین کسر باشد، ابتدا ریشه‌ی مخرج تک‌تک کسرها را به‌دست‌می‌آوریم. برای آن که این ریشه‌ها به‌عنوان مجانب قائم منحنی معرفی شوند، باید:

۱ـ ریشه‌ی مخرج هر کسر، صورت خودش را مصفر نکند. البته اگر ریشه‌ی مخرجِ کسری، صورت بقیه‌ی کسرها را صفر کرد، مهم نیست و باز هم شرط اول برقرار است.

۲ـ همسایگی ریشه‌های مخرج تمامی کسرها، باید عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشد. چون برای تعیین دامنه‌ی تعریف به کل کسرها توجه می‌کنیم، لذا همسایگی تک‌تک این ریشه‌ها، باید عبارت زیر رادیکال‌هایی با فرجه‌ی زوج را در هر کسری که قرار دارند، منفی نکنند.

تذکر ۱: اگر ضابطه‌ی تابع تنها به شکل کسری باشد و در ضابطه‌ی آن به‌عنوان مثال رادیکال با فرجه‌ی زوج (یا هر تابعی که دامنه‌ی تعریف تابه را محدودتر کند) مشاهده نکردیم، شر دوم قطعاً برقرار است و احتیاجی به کنترل آن نمی‌باشد.

تذکر ۲: در مورد ریشه‌های مشترک دو یا چند کسر، الزاماً باید حد تابع را در این ریشه‌ها به‌دست‌آوریم. به‌عنوان مثال، تابع $y=\frac{x-1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$، در x=0 مجانب ندارد (علی‌رغم این‌که ریشه‌ی مخرج، هیچ صورتی را صفر نمی‌کند.) برای اثابت این موضوع حد این تابع را در x=0 محاسبه می‌کنیم:

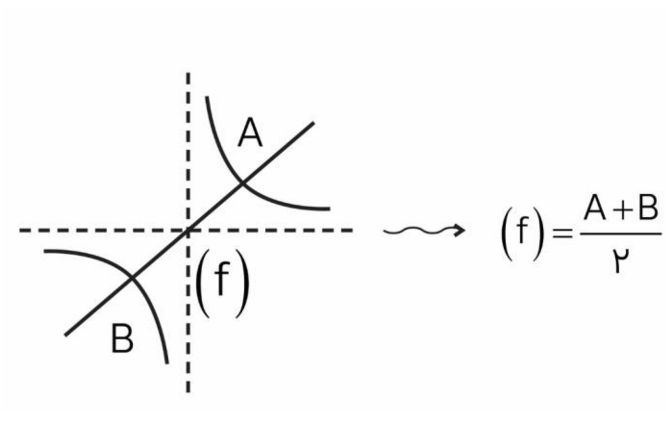
$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)-x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\substack{\text{صفر مطلق}\\ \uparrow}}{0}}{x^2}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم حد فوق نامتناهی نیست، پس x=0 مجانب قائم محسوب نمی‌شود.

نکته‌ی مهم و به‌یادماندنی: در توابع کسری که صورت و مخرج‌شان به شکل چندجمله‌ای یا مثلثاتی هستند، اگر خط قائم x=a به‌عنوان مجانب قائم منحنی معرفی شد، قطعاً x=a ریشه‌ی مخرج است. به عبارتی به ازای x=a، قطعاً مخرج کسر صفر می‌شود.

یادآوری: در هر تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ مختصات رأس سهمی به‌صورت $\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ است.

نکته: هر خطی که از مرکز تقارن تابع هموگرافیک گذشته و نمودار تابع را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند، چون A و B نسبت به مرکز تقارن قرینه‌اند، پس نقطه‌ی وسط دو نقطه‌ی A و B، مرکز تقارن می‌باشد.



مهندس محمد حمیدی

رتبه برتر کنکور سراسری تجربی و ریاضی

- رتبه ۱۷ ارشد پزشکی
- رتبه ۲۷ ارشد ریاضی (آنالیز)
- رتبه ۲۱ ارشد ریاضی کاربردی
- رتبه ۳۲ ارشد ریاضی (رمز کد)
- رتبه ۲۸ بیوانفورماتیک
- رتبه ۳۲ علوم داده
- رتبه ۵۰۰ مهندسی کامپیوتر

- عضو انجمن ریاضی ایران
- عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران
- عضو بنیاد ملی نخبگان کشور
- مدرس برتر کشوری و مدرس پروازی ریاضی
- طراح ریاضی تمام آزمـون‌های آزمایشی کانون، ماز ، سنجش، گاج و...
- مؤلف کتاب ریاضی رپتیچ، کانون هندسه ۱-۲ ماز ، پیام نور و ۱۵۶۰ تست
- طراح ریاضی مسابقات و انجمن ریاضی ایران وسنجش

۰۹۱۴۷۱۳۳۶۸۷

math_hamidi