

۱- مقادیر a ، $1+2a$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

$$14,75 \quad (4) \checkmark$$

$$12,25 \quad (3)$$

$$4,25 \quad (2)$$

$$2,75 \quad (1)$$

$$\frac{1+2a}{1} \times \frac{5-a+a}{2} \Rightarrow 2+4a=5 \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$a, 1+2a$$

$$\left(\frac{3}{4}\right), 1+\frac{6}{4}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{10}{4} \Rightarrow d = \frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$a_9 = a_1 + 8d = \frac{3}{4} + \frac{56}{4} = 14,75$$

۳- نقاط $(3, -4)$ و $(-1, 5)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (4) \checkmark$$

$$-\frac{b}{a}$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$



آوردن نقطه و برابر دانستن
میکنی تا محاسبه برابر رأس می آید

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-1,5 + 3}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \Rightarrow \left(\frac{-b}{2a}\right) = 0,75 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 1,5$$

۴- اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟

$$4 \quad (4) \checkmark$$

$$3 \quad (3)$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2k}{1} = -2k$$

$$(1) \text{ صفر}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\Delta = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{4}{3}k$$

$$\sqrt{4k^2 - 20} = \frac{4}{3}k$$

$$4k^2 - 20 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow 4k^2 - \frac{16}{9}k^2 = 20 \Rightarrow \frac{20}{9}k^2 = 20 \Rightarrow k^2 = 9$$

$$\left[\frac{k^2}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}\right] = [4,5] = 4$$

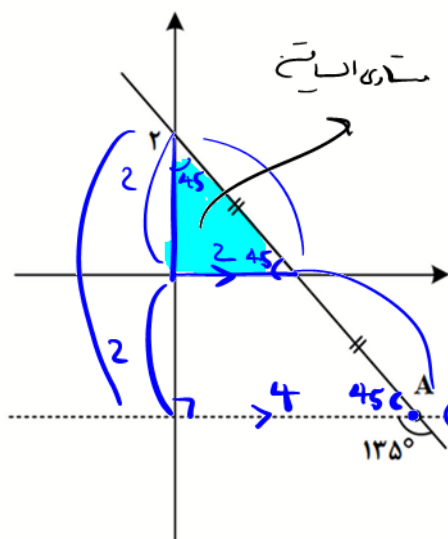
۵- در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $2\sqrt{5}$ ✓

(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $5\sqrt{2}$



مختصات

$$\Rightarrow D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۶- اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می تواند مقدار a باشد؟

$-\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۱) ✓

$\frac{1}{3}$ (۲)

$$f(af(\sqrt{5})) = f(3a) = 9a^2 - [3a] = 2 \quad f(\sqrt{5}) = 5 - \left[\frac{22}{5}\right] = 3$$

ارزینها $a = \frac{1}{3} \rightarrow 1 - [1] = 0$ ✗

$a = -\frac{1}{3} \rightarrow 1 - [-1] = 2$ ✓

γ (€)

٦ (٣) ✓

5 (2)

۴ (۱)

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{بجراؤں}} \cancel{x} - a = a^2 - 2a\sqrt{x} + \cancel{x}$$

$$2a\sqrt{n} = a^2 + a \xrightarrow{\div a} 2\sqrt{n} = a + 1$$

$$\xrightarrow{\text{بجای } 2} 4n = (a+1)^2 \Rightarrow n = \frac{(a+1)^2}{4} = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

$$a = .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ a=3 \\ a=5 \\ a=7 \\ a=9 \end{array} \right.$$

عرض ۱ قطع می کند؟

Δ (F)

۹ (۳)

۱۲ (۲) ✓

15 (1)

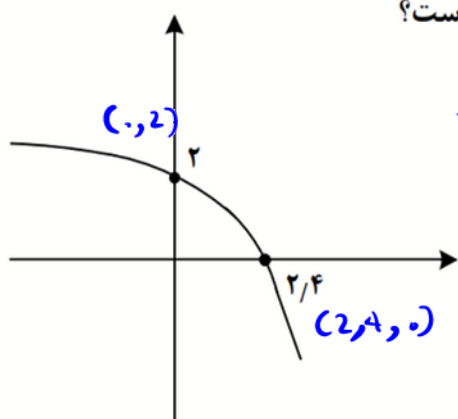
$$\alpha = 1 \rightarrow 1 \cdot \frac{(-1)}{2} - x = -1 \Rightarrow \boxed{2x = 1} \quad P^{-1}(2, 1)$$

$$\underline{f(1,2)} \rightarrow \underline{1} + \underline{6} + a + \underline{1} = 2. \Rightarrow \boxed{a=12}$$

۹- اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟

$\log_2(x^2 + 2x + 4) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 2^3 = 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$
 $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$
 $x = -1 + \sqrt{5}$ (چون $x > 2$ است)
 $\log_{\sqrt[3]{2}} x = \log_{\sqrt[3]{2}} (-1 + \sqrt{5})$
 $\log_{\sqrt[3]{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt[3]{2}} = \frac{\log_2 (-1 + \sqrt{5})}{\frac{1}{3}} = 3 \log_2 (-1 + \sqrt{5})$
 $\log_2 (-1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$
 $\log_{\sqrt[3]{2}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

۱۰- نمودار تابع $y = c + \log_5(ax + b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

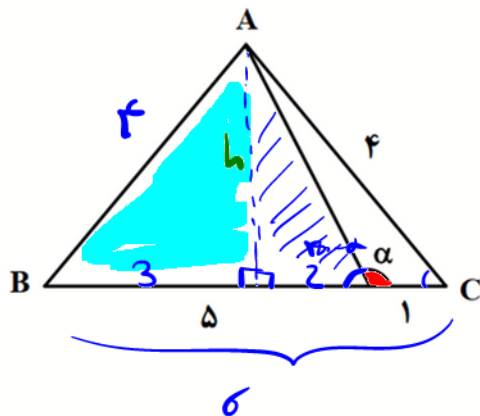


$(0, 2) \Rightarrow c + \log_5 b = 2$
 $(2, 0) \Rightarrow c + \log_5(2a + b) = 0$
 $\log_5 b = 2 - c$
 $b = 5^{2-c}$
 $\log_5(2a + b) = -c$
 $2a + b = 5^{-c}$
 $2a + 5^{2-c} = 5^{-c}$
 $2a = 5^{-c} - 5^{2-c}$
 $2a = 5^{-c}(1 - 5^2)$
 $2a = 5^{-c}(-24)$
 $a = -12 \cdot 5^{-c}$
 $\frac{a}{b} = \frac{-12 \cdot 5^{-c}}{5^{2-c}} = -12 \cdot 5^{-2} = -\frac{3}{5}$

$(2, 0) \Rightarrow c + \log_5(2a + b) = 0 \Rightarrow \log_5(2a + b) = -c$
 $2a + b = 5^{-c}$
 $2a + 5^{2-c} = 5^{-c}$
 $2a = 5^{-c} - 5^{2-c}$
 $2a = 5^{-c}(1 - 5^2)$
 $2a = -24 \cdot 5^{-c}$
 $a = -12 \cdot 5^{-c}$
 $\frac{a}{b} = \frac{-12 \cdot 5^{-c}}{5^{2-c}} = -12 \cdot 5^{-2} = -\frac{3}{5}$

$2a + b = 5^{-c}$
 $2a + 5^{2-c} = 5^{-c}$
 $2a = 5^{-c} - 5^{2-c}$
 $2a = 5^{-c}(1 - 5^2)$
 $2a = -24 \cdot 5^{-c}$
 $a = -12 \cdot 5^{-c}$
 $\frac{a}{b} = \frac{-12 \cdot 5^{-c}}{5^{2-c}} = -12 \cdot 5^{-2} = -\frac{3}{5}$

۱۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$$h^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow h = \sqrt{7}$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$-\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

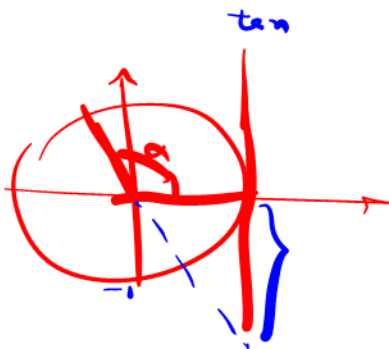
$$\tan \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$-\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (4)$$



۱۲- حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ برای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2) \checkmark$$

$$1 \quad (1)$$

$$\text{روش اول: } 3 \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) &= \frac{3}{2} + 2 \sin(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4 \times 3}) \\ &= \frac{3}{2} + 2 \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{روش دوم: } 3 \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\frac{3}{2} + \sqrt{2} \times -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$A = \sin x - \cos x \Rightarrow A^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$$



$$A^2 = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

رشته سوم : $3 \cos 4x + \sqrt{2} (\sin x - \cos x)$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$3 \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\frac{3}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{-2\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

$\sin^2 \alpha$ (۲)

$\cos^2 \alpha$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

رشته اول: عمود (۱)

$\cos 2\alpha = -1$

$\alpha = 0$

$$\frac{4}{2} - \frac{1+0}{1} = 2 - 1 = 1$$

$\alpha = 90$

$$\frac{1+0}{1} - \frac{0+4}{2} = 1 - 2 = -1$$

رشته دوم :

$$\frac{\sin^4 \alpha + 4(1 - \sin^2 \alpha)}{1 + 1 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4(1 - \cos^2 \alpha)}{1 + 1 - \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 4}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 4}{2 - \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha - 2)^2}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{(\cos^2 \alpha - 2)^2}{2 - \cos^2 \alpha} = -\sin^2 \alpha + 2 + \cos^2 \alpha - 2$$

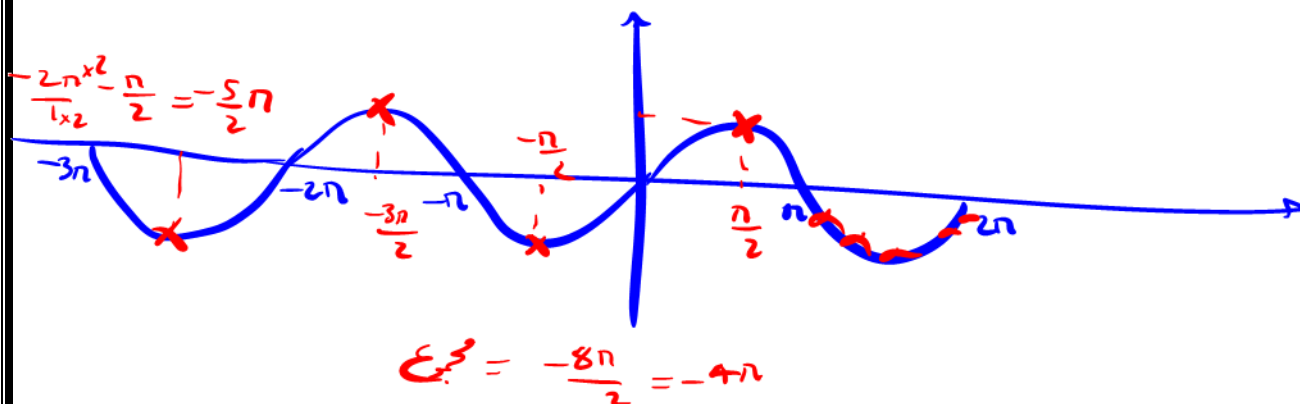
$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

۱۴- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\pi$ (۳) -3π (۴) -4π ✓

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$1 = \sin^2 x \Rightarrow \sin x = \pm 1$$



۱۵- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ ✓ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

$$\begin{aligned} l^+ : \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} &= \frac{x-2}{x^2 - 4} \xrightarrow{\div \text{HOP}} \frac{1}{2x} = \frac{1}{4} \\ l^- : \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} &= \frac{x-2}{x^2 - 3} = \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

مجموع: $\frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟
 ۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-3, 0)$ ۳) $(3, 1)$ ۴) $(1, 0)$

$$f-g = \frac{4}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{4-x-3}{(x+3)(x-1)} = \frac{-1-x}{(x+3)(x-1)}$$

$$f-g = \frac{-1}{x+3}$$

م.م: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

م.م: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0$

کلیتت مجانب‌ها
 $(-3, 0)$
 ۱) $(-1, 1)$
 ۲) $(-3, 0)$
 ۳) $(3, 1)$
 ۴) $(1, 0)$

۱۷- روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟
 $f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$x=1 \rightarrow L^+ = L^-$$

$$(1-a)[1] + (3a^2-1)[-1] = (1-a)[1] + (3a^2-1)[-1]$$

$$1-a-3a^2+1 = -3a^2+1 \Rightarrow 1-a-3a^2+1 = -3a^2+1 \Rightarrow 1-a = 1 \Rightarrow a=0$$

$a=-1$

$$L^+ = L^- = (1-a)[1] + (3a^2-1)[-1] = 2-4 = -2$$

$$L = b \sin(\frac{\pi}{a}) = b \sin(-\pi) = 0$$

$-2 \neq 0$

$a=\frac{2}{3}$

$$L^+ = L^- = (1-a)[1] + (3a^2-1)[-1] = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$L = b \sin(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}) = b \sin(\frac{3\pi}{2}) = -b$$

$$-b = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱) ✓

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \Rightarrow f'g - g'f = \left(\frac{f}{g}\right)' \times g^2$$

$$f'g - g'f = \left(\frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}}\right)' \times g^2 = (\sqrt{x+8} - \sqrt{x})' \times g^2 = 0 \times g^2 = 0$$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$ad - bc < 0$$

$$m(-1+m) - 2 < 0$$

$$-m + m^2 - 2 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

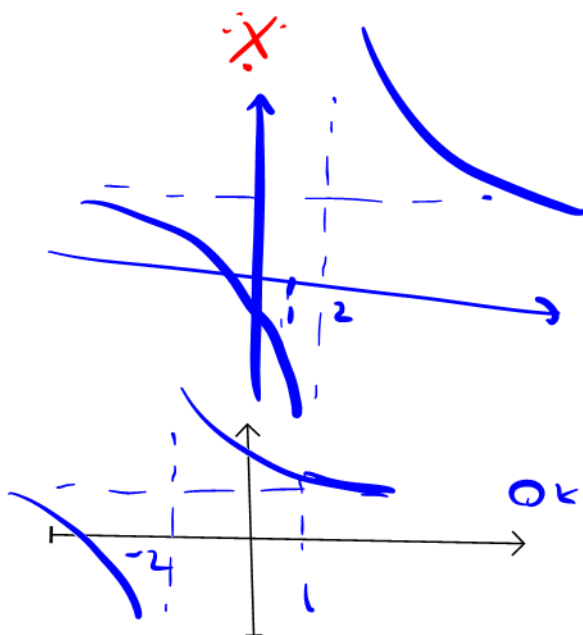
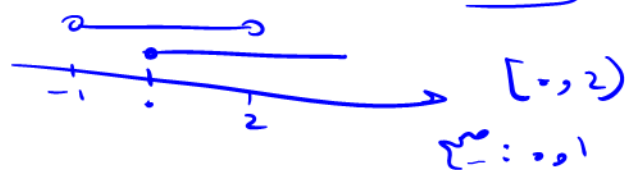
$$\begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

۱ < m < 2

$$x - 1 + m = 0 \Rightarrow x = 1 - m$$

$$x = 1 - m$$

$$x - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0$$



۲۰- به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

$$b a + c = \frac{1}{a}$$

$$f'_- = f'_+ \Rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \Rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \Rightarrow a^2 b = -1 \Rightarrow \boxed{ab = -\frac{1}{a}}$$

$$\cancel{b a} + c = \frac{1}{a} \Rightarrow \cancel{c} = \frac{2}{a}$$

$$\boxed{ac = 2}$$

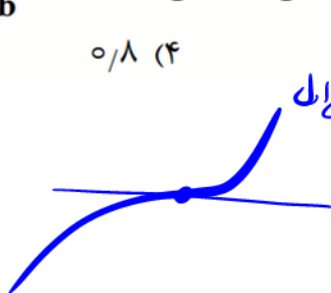
۲۱- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)



$$y'' = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 6x + 2a = 0$$

$$\xrightarrow{x=-1} -6 + 2a = 0$$

$$2a = 6$$

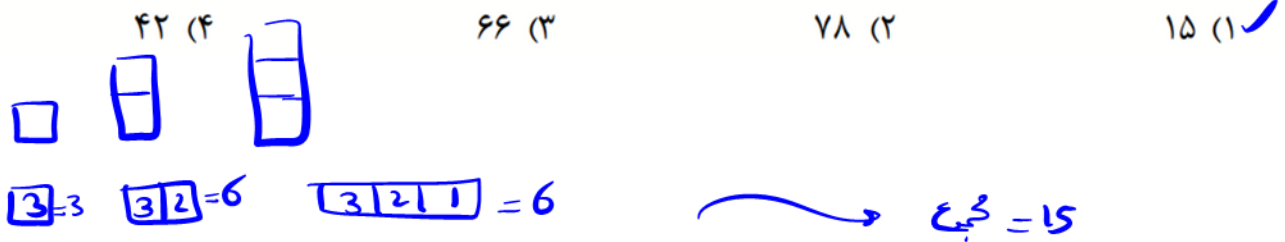
$$\boxed{a = 3}$$

$$\frac{(-1, -4)}{\text{در } x} \rightarrow -1 + \frac{3}{1} - b - 1 = -4 \Rightarrow -b = -5 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

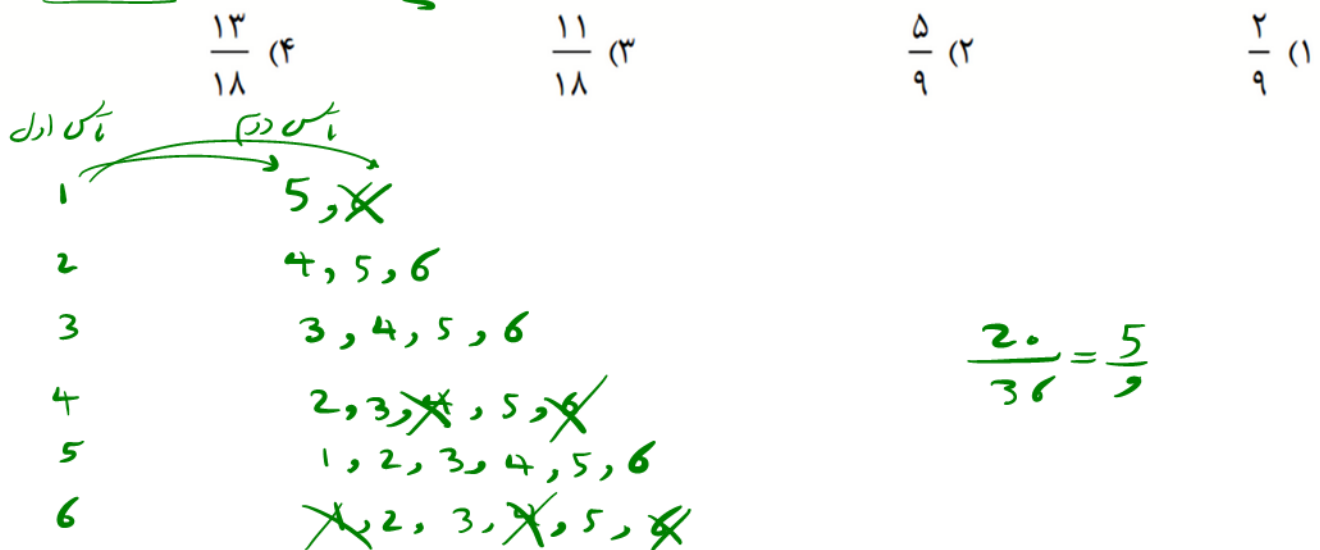
$$\frac{a}{b} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ریشه } x = -\frac{b}{3a} = -1 \Rightarrow -\frac{a}{3(1)} = -1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

۲۲- یک کودک ۳ مکعب مستطیل یکسان با رنگ‌های مختلف دارد. او به چند طریق می‌تواند با روی هم قرار دادن یک یا چند تا از آنها یک ستون بسازد؟



۲۳- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آنها حداقل ۶ است؟



۲۴- میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به‌طوری‌که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

۱/۲۵ (۱) ✓ ۲/۵ (۲) ۳/۲۵ (۳) ۴/۵ (۴)

جواب: $1/25$ ؟
چون میانگین تغییر نمی‌کند پس دو داده‌ای که جابه‌جا کرده‌ایم برابر بوده‌اند

۳۵- کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x=3$ و $x=-3$ روی محور x ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ باشد،

طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

$6\sqrt{2}$ (۴)

$18\sqrt{2}$ (۳)

$12\sqrt{2}$ (۲) ✓

$15\sqrt{2}$ (۱)

$F(3, 0) \quad F'(-3, 0)$

$FF' = 2c = \left| \frac{6}{3} \right| \Rightarrow \boxed{c=3}$

$e = \frac{c}{a} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a=9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
 $\text{طول قطر کوچک} = 2b = 12\sqrt{2}$