

۱- مقادیر a ، $1+2a$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

خیلی ساده

۱۴/۷۵ (۴)

۱۲/۲۵ (۳)

۴/۲۵ (۲)

۲/۷۵ (۱)

$$a, 2a+1, 5-a \Rightarrow 2a+1 = 5-a \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$d = a+1 = \frac{7}{3}$$

$$a_9 = \frac{4}{3} + 8 \times \frac{7}{3} = 0,75 + 18 = 18,75$$

۳- نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

خیلی ساده

$\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

$$g = -\frac{b}{2a}$$

$$x_g = \frac{-1/5 + 3}{2}$$

$$= \frac{13}{2} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 13$$

$\Leftarrow$ برابر y

۴- اختلاف ریشه های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2} \right]$ کدام است؟ سوال

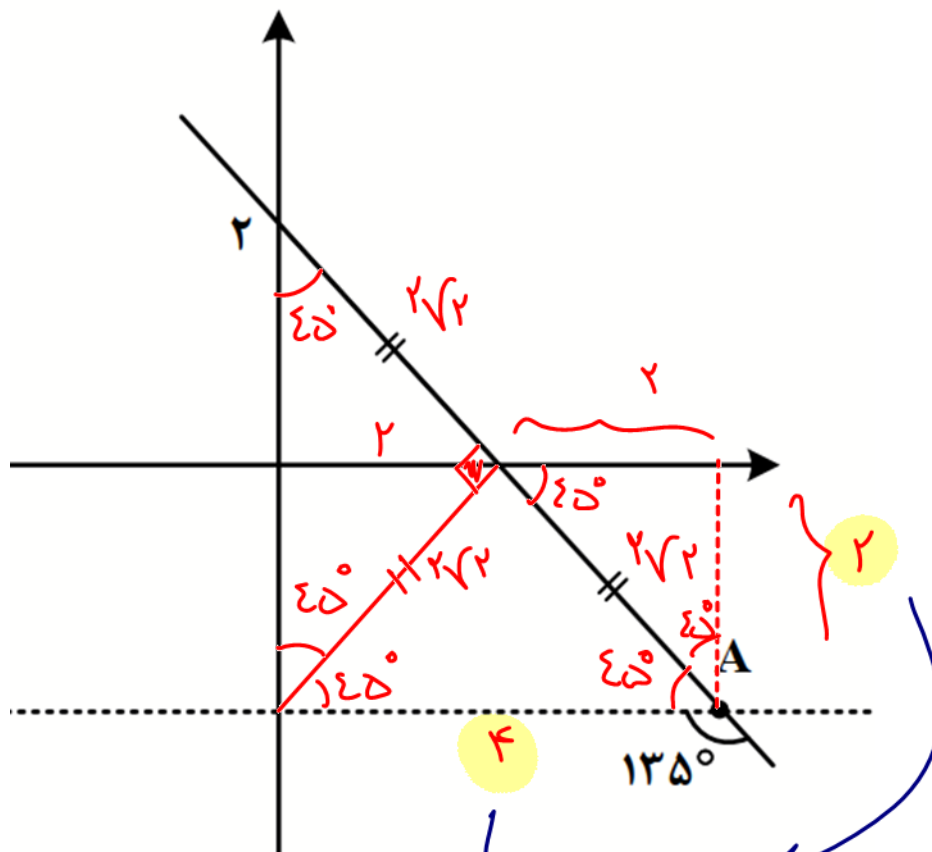
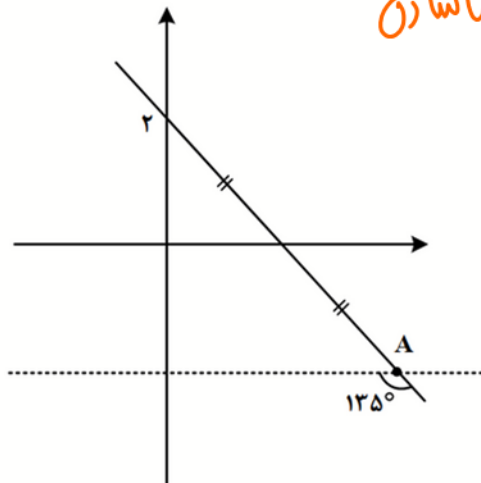
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{1a} = \sqrt{\Sigma k^2 - 20} = \frac{\Sigma}{3} k$$

$$\Rightarrow \Sigma k^2 - 20 = \frac{12}{9} k^2 \Rightarrow \cancel{\frac{40}{9}} k^2 = \cancel{20}$$

$$\Rightarrow k^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{2} = \Sigma, \Delta \Rightarrow [\Sigma, \Delta] = \Sigma$$

$$2\sqrt{5} \quad (1)$$
$$3\sqrt{6} \quad (2)$$
$$4\sqrt{3} \quad (3)$$
$$5\sqrt{2} \text{ (F)}$$


$$A \mid \begin{matrix} \Sigma \\ -r \end{matrix} \Rightarrow AO = \sqrt{14 + \varepsilon} \\ = \sqrt{r_0}$$

ساده

۶- اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می تواند مقدار a باشد؟

$-\frac{1}{5} \quad (4)$

$\frac{1}{5} \quad (3)$

$-\frac{1}{3} \quad (2)$

$\frac{1}{3} \quad (1)$

$$f(\sqrt{5}) = 5 - 2 = 3$$

$$f(3a) = 2 \Rightarrow 9a^2 - [3a] = 2$$

 $\Rightarrow$

$$a = -\frac{1}{3}$$

امکان لزومی نداره

نی
شوار۷- برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a ، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$a \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x \geq a$$

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان}} \cancel{x-a} = \cancel{a^2 + x - 2a\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2a\sqrt{x} = a^2 + a \Rightarrow 2\sqrt{x} = a+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ اگر a زوج باشد، صحیح است

$$\Rightarrow a=0 \quad x=\frac{1}{4} \quad \text{X} \quad \text{L} \quad a=0 \quad x=0 \quad \checkmark$$

$$a=1 \quad x=1 \quad \checkmark$$

$$a=2 \quad x=2 \quad \checkmark$$

$$a=3 \quad x=4 \quad \checkmark$$

$$a=4 \quad x=9 \quad \checkmark$$

$$a=5 \quad x=16 \quad \checkmark$$

$$a=6 \quad x=25 \quad \checkmark$$

۸- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

ساز

۵ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

$$y=1 \Rightarrow 10-x = -10 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow (20, 1) \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow f(1) = 20 \Rightarrow 1 + 6 + a + 1 = 20 \Rightarrow a = 12$$

سپید سالن

۹- اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟

۴ (۴)

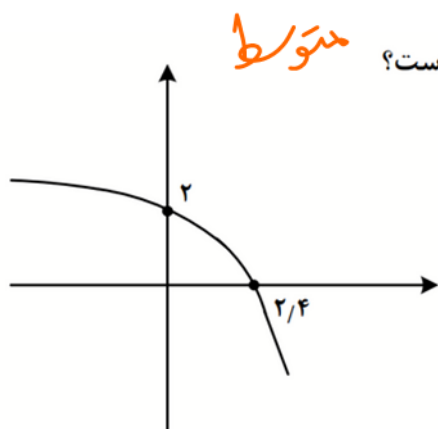
۳ (۳)

 $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

$$\log_2 (x^2 + 2x + 4)(x - 2) = 3 \Rightarrow x^3 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}} x = 2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2\sqrt[3]{2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$



۱۰- نمودار تابع $y = c + \log_5(ax + b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$
 (۲) $-\frac{3}{5}$
 (۳) $-\frac{1}{10}$
 (۴) $-\frac{3}{10}$

$$y(0) = 2 \Rightarrow c + \log_5 b = 2 \Rightarrow b = 5^{2-c}$$

$$y\left(\frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow c + \log_5 \left(\frac{2}{5}a + b\right) = 0 \Rightarrow b = 5^{-c} - \frac{2}{5}a$$

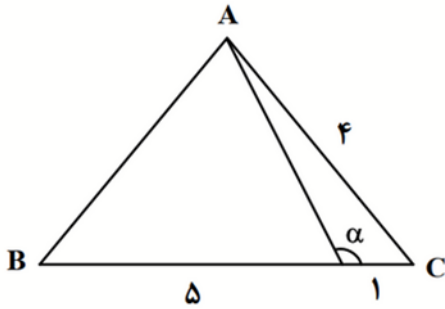
$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{5}}{5^c} = \frac{1}{5^c} - \frac{2}{5}a \Rightarrow \frac{\frac{2}{5}}{5^c} = \frac{-a}{-\frac{2}{5}a}$$

$$\Rightarrow 5^c = \frac{-10}{a}$$

$$b = \frac{\frac{2}{5}}{5^c} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{-10}{a}} \Rightarrow \frac{-\frac{2}{5}a}{10} = b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-2}{5}$$

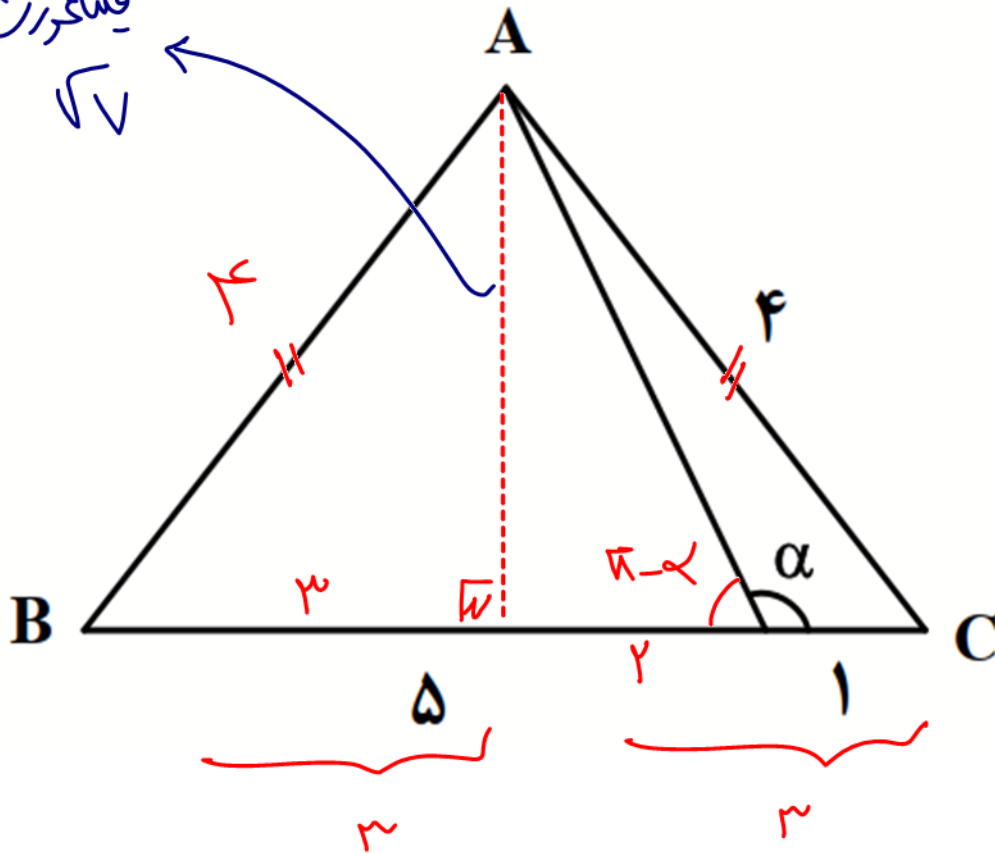
مثلا ملان

۱۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{2}{5}$
- (۲) $-\frac{2}{5}$
- (۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$
- (۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

فیناگر



$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

پستاساده

۱۲- حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

(1)

یادآوری:

$$3 \cos \frac{\pi}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x)$$

$$\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x) \right) \times 2$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

مستوی

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

$\sin^2 \alpha$ (۴) $\cos^2 \alpha$ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin^4 \alpha + 4 - 4 \sin^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha} \quad \leftarrow \quad \frac{\cos^4 \alpha + 4 - 4 \cos^2 \alpha}{2 - \cos^2 \alpha} \\
 & = \frac{(\sin^2 \alpha - 2)^2}{2 - \sin^2 \alpha} \quad \quad \quad = \frac{(\cos^2 \alpha - 2)^2}{2 - \cos^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = (2 - \sin^2 \alpha) - (2 - \cos^2 \alpha) = \\
 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha
 \end{aligned}$$

ساده

۱۴- مجموع جواب های معادله $\cos^2 x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $-\pi$ (۳) -3π (۴) -4π

$\cos^2 x + \sin^2 x$
 $\downarrow$
 $1 - \sin^2 x$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \vee -1$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow k=0 \quad x = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$k=-1 \quad x = -2\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -8\pi$$

ساز

۱۵- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{4}$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow n^2 \rightarrow \varepsilon^+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n-2}{n^2 - \varepsilon} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n \rightarrow 2^- \Rightarrow n^2 \rightarrow \varepsilon^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n-2}{n^2 - \varepsilon} = 0$$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

میست
مکان

(۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(3, 1)$ (۴) $(1, 0)$

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{x-1} = \frac{\cancel{x-x+3}^{x-x+3}}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{-1}{x+3} \Rightarrow x \rightarrow \infty \quad \begin{matrix} y=0 \\ y \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$x = -3$

۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام

است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

کدام
نی
(شمار)

برای مثال $x=0 \rightarrow 0^+ \rightarrow 0^-$ ضابطه بالایی و $x=0$ ضابطه پایینی

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow (1-a)x_0 + (3a^2-1)x-1 = 1-3a^2$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow (1-a)x-1 + (3a^2-1)x_0 = a-1$$

$$\Rightarrow 1-3a^2 = a-1 \Rightarrow 3a^2+a-2=0 \Rightarrow (a+1)(3a-2)=0$$

یادآوری:

$$a = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2[n] + 2[-n] = -2 \\ b \times \sin(-\pi) = -2 \Rightarrow b \times 0 = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n] + [-n] = -1$$

$$a = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}[n] + \frac{1}{3}[-n] = -\frac{1}{3} \\ b \times \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

بسیار ساده

۲ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$\left(\frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} \right) \times g^2(1)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(1) \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{(\sqrt{x+8} - \sqrt{x})(\sqrt{x+8} + \sqrt{x})}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g}(x) = 1 = cx \Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)' = 0$$

$$0 \times g^2(1) = 0$$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\hookrightarrow ad - bc < 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{mx + 2}{x + (m-1)} \Rightarrow m(m-1) - 2 < 0$$

$$m^2 - m - 2 < 0$$

$$(m-2)(m+1) < 0$$

$$-1 < m < 2$$

$$\Rightarrow \text{تذکره (باینجا نگاه کن)} = 1 - m < 1 \Rightarrow m > 0$$

$$\Rightarrow m = 1, 0$$

۲۰- به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

ساده

پیشگویی: $ab+c = \frac{1}{a}$

مشتق: $b = -\frac{1}{a^2}$

$$\left. \begin{array}{l} ab+c = \frac{1}{a} \\ b = -\frac{1}{a^2} \end{array} \right\} \Rightarrow a \times \frac{-1}{a^2} + c = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow ac = 2$$

۲۱- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

ساده

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

خط مماس بر منحنی تابع درجه سوم، در صورتی از تابع عبور می کند که نقطه مماس همان نقطه عطف باشد.

$$-\frac{a}{3} = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$y = x^3 + 3x^2 + bx - 1 \xrightarrow{x=-1} -1 + 3 - b - 1 = -4 \Rightarrow b = 2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} = 0.6$$