

پاسخ سوالات درس ریاضی در کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ رشته ریاضی

- ۱- مقادیر a ، $2a+1$ و $a-5$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

(۱) $2/75$ (۲) $4/25$ (۳) $12/25$ (۴) $14/75$

$$2(1+2a) = 5 - a + a \Rightarrow 2 + 4a = 5 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow d = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$t_9 = \frac{3}{4} + \frac{56}{4} = 14/75$$

- ۲- اگر P گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

(۱) r (۲) T (۳) $\sim r$ (۴) $\sim T$

$$(\sim p \vee r) \vee (\sim r \vee q) \equiv (p \wedge \sim r) \vee (\sim r \vee q) \equiv (T \wedge \sim r) \vee (\sim r \vee F) \equiv \sim r \vee \sim r \equiv \sim r$$

- ۳- نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

$$x_S = -\frac{-\frac{3}{2} + 3}{2} = -\frac{3}{4} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{b}{2a} \text{ و } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

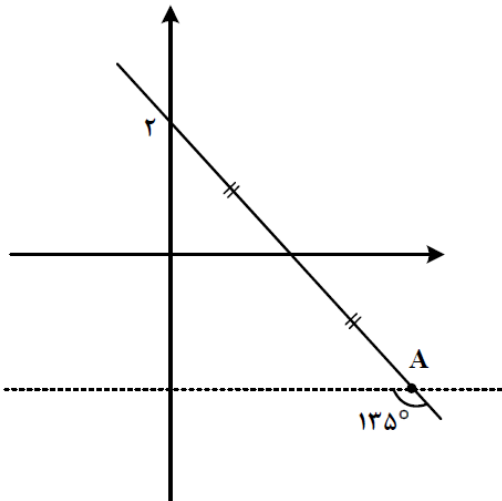
- ۴- اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{4k^2 - 20} = \frac{4}{3}k \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{k^2}{2}\right] = 4$$

مرادی

۵- در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



(۱) $2\sqrt{5}$

(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $5\sqrt{2}$

معادله خطی که از A می‌گذرد $y - 2 = -x$ پس $y = -x + 2$ و مختصات نقطه به $A(x, -2)$ است

لذا در نتیجه $OA = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$

۶- اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟

(۴) $-\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{5}$

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

$$f(af\sqrt{5}) = f(a(5 - [\sqrt{5}]) = f(3a) = 9a^2 - [3a] = 2$$

در عبارت بالا $9a^2$ باید عدد صحیح باشد و با توجه به گزینه ها $\frac{1}{3}$ جواب است

۷- برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \text{ در نتیجه } a \geq 0$$

$$(\sqrt{x-a})^2 = (a - \sqrt{x})^2 \Rightarrow x - a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a^2 + a}{2a} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 \\ a \in \mathbb{Z} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, 3, 5, 7, 9 \Rightarrow x = 1, 4, 9, 16, 25$$

۸- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۵ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

$$\begin{cases} 10y - x = -10 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(20, 1) \Rightarrow 20 = 1 + 6 + a + 1 \Rightarrow a = 12$$

۹- اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}} x$ کدام است؟

۴ (۴)

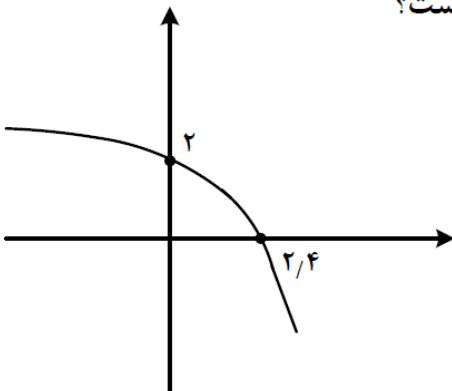
۳ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

$$\log_2(x^2 + 2x + 4)(x - 2) = 3 \Rightarrow (x - 2)^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 2$$

۱۰- نمودار تابع $y = c + \log_\Delta(ax + b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



$-\frac{2}{5}$ (۱)

$-\frac{3}{5}$ (۲)

$-\frac{1}{10}$ (۳)

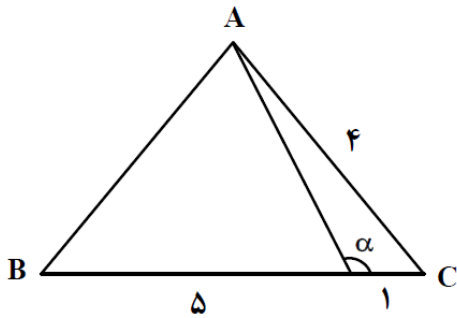
$-\frac{3}{10}$ (۴)

$$\begin{cases} (0, 2) \Rightarrow 2 = c + \log_\Delta b \\ \left(\frac{2}{4}, 0\right) \Rightarrow 0 = c + \log_\Delta\left(\frac{2}{4}a + b\right) \end{cases} \Rightarrow \log_\Delta\left(\frac{2}{4}a + b\right) - \log_\Delta b = -2 \Rightarrow$$

$$\log_\Delta\left(\frac{2}{4}a + b\right) = \log_\Delta b - \log_\Delta 2 \Rightarrow \frac{1}{4}a + b = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}a = -\frac{2}{4}b \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2}{1}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{24 \times 5}{12 \times 25} = -\frac{2}{5}$$

۱۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

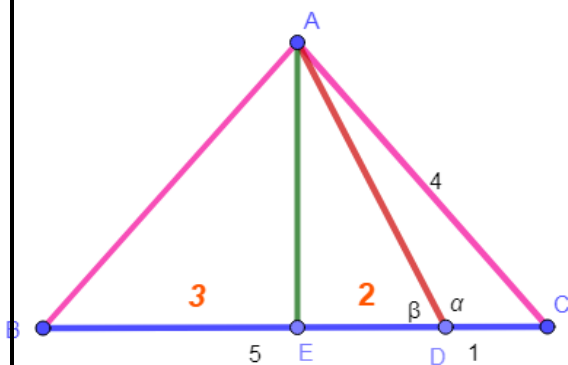


(۱) $-\frac{2}{5}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$



ارتفاع AE را می کشیم چون $BC = 6$ و $DC = 1$ پس $CE = 3$

در نتیجه $AE = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

و $\tan \beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و $\tan \alpha = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

۱۲- حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

$$3 \cos 4x + \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 \cos 4x + \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

(۴) $\sin 2\alpha$

(۳) $\cos 2\alpha$

(۲) ۲

(۱) ۱

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1 + 0}{1} - \frac{4}{2} = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = -1 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۱۴- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\pi$ (۳) -3π (۴) -4π

$$\cos 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \Rightarrow 2 \cos 2x + 1 - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi + \pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{k\pi + \pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{جمع} = -4\pi$$

۱۵- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = \frac{1}{4}$$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(3, 1)$ (۴) $(1, 0)$

$$f - g = \frac{4}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{x-1} = \frac{4x-4-x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{3x-3}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 0)$$

۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = (1-a)z + (3a^2-1)(-z-1) \\ \lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = (1-a)(z-1) + (3a^2-1)(-z) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} f(x) \Rightarrow$$

$$3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \times \\ a = \frac{-2}{3} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-2}{3} \Rightarrow b \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = b = \frac{1}{-3} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

$$f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x) = g'(x) \times \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{g'(x)} = g'(x) \times \left(\frac{f}{g}\right)'(x)$$

و $g(x) = \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x}}{8}$ پس $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x}}{\frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x}}{8}} = 8$ در نتیجه $g'(1) \times \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 0$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\begin{cases} ad - bc \leq 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 2 \Rightarrow m \neq 2 \Rightarrow -1 \leq m < 2 \\ x = 1 - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

۱ یا ۰ $m =$

۲۰- به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار ac کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

پیوستگی: $ba + c = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2b + ac = 1$ مشتق: $a^2b = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{a^2}$

$$-1 + ac = 1 \Rightarrow ac = 2$$

۲۱- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

○/۸ (۴)

○/۶ (۳)

○/۴ (۲)

○/۳ (۱)

خط مماس از نقطه عطف عبور می کند پس

$$-4 = -1 + a - b - 1 \Rightarrow a - b = -2$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 6x + 2a \Rightarrow 0 = -6 + 2a \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

۲۲- یک کودک ۳ مکعب مستطیل یکسان با رنگ های مختلف دارد. او به چند طریق می تواند با روی هم قرار دادن یک یا چند تا از آنها یک ستون بسازد؟

۴۲ (۴)

۶۶ (۳)

۷۸ (۲)

۱۵ (۱)

ستون یک مکعبی : به سه صورت

$$P(3,2) = 3! = 6 \text{ : ستون دو مکعبی}$$

$$P(3,3) = 3! = 6 \text{ : ستون سه مکعبی پس جمعا ۱۵}$$

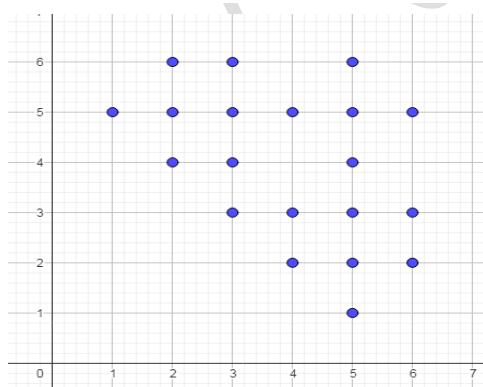
۲۳- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس ها اول بوده و مجموع آنها حداقل ۶ است؟

$\frac{13}{18}$ (۴)

$\frac{11}{18}$ (۳)

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)



$$n(S) = 36 \text{ و } n(A) = 20 \text{ روی صفحه مختصات}$$

$$P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \text{ پس}$$

۲۴- میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه جا می کنیم به طوری که میانگین دسته های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه جایی داده ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه جایی داده ها کدام است؟

۴/۵ (۴)

۳/۷۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

چون میانگین تغییر نکرده پس داده منتقل شده برابر میانگین بوده لذا واریانس تغییر نمی کند

۲۵- دانش آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش آموزان مدرسه A و ۷۰ درصد از دانش آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟

(۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{3}{8}$

$$P(G|A) = \frac{P(A) \times P(A|G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{60}{100}}{\frac{3}{5} \times \frac{60}{100} + \frac{3}{5} \times \frac{70}{100}} = \frac{9}{16}$$

۳۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی

ماتریس $B - \frac{3}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۹ (۴) -۹

$$A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = -3AIB = -3AB = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-9 \times (-1) = 9$$

پس

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس A^3 کدام است؟

(۱) $[-10 \ 1 \ 5]$ (۲) $[-10 \ 1 \ 7]$ (۳) $[7 \ 5 \ -5]$ (۴) $[7 \ 5 \ -2]$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

۳۵- کانون‌های یک بیضی نقطه‌ای با طول $x = 3$ و $x = -3$ روی محور x هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ باشد،

طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

$6\sqrt{2}$ (۴)

$8\sqrt{2}$ (۳)

$12\sqrt{2}$ (۲)

$15\sqrt{2}$ (۱)

$$F(3,0), F' = (-3,0) \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3, \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

۳۶- یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه P شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این متوازی‌السطوح عمود بر صفحه P ، کدام است؟

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳)

$5\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

$$b \times c = (8, 10, -4), a' = \frac{-30}{180} (8, 10, -4) \Rightarrow |a'| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۳۷- یک عدد پنج رقمی با استفاده از دو عدد متوالی کمتر از ۱۰ نوشته شده است. اگر مجموع ارقام آن عدد به صورت $23n + 1$ باشد، چند عدد پنج رقمی با این ویژگی وجود دارد؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مجموع ارقام بیشتر از ۴۵ نیست

$$\text{پس } \begin{cases} n = 0 \Rightarrow 23 \times 0 = 1 \\ n = 1 \Rightarrow 23 \times 1 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10000 \\ a = 55554, 55545, 55455, 54555, 45555 \end{cases}$$

۳۸- اگر m کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{407r + 592s \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$ باشد، مجموع ارقام m کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۲ (۱)

کوچکترین عضو بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۴۰۷ و ۵۹۲ می باشد

$$(407, 592) = (11 \times 37, 2^4 \times 37) = 37 \Rightarrow 3 + 7 = 10$$

۳۹- حداقل چند عدد از مجموعه $\{3, 4, \dots, 9, 12, 13, \dots, 20\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل دو عدد از آنها دارای مقسوم علیه مشترک غیر یک هستند؟

(۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

تمام اعداد اول و ۴ را انتخاب می کنیم آنها را لانه کیوتر فرض می کنیم پس $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 4\}$ پس کافی است ۸ کیوتر داشته باشیم گزینه دو

۴۰- در گراف G ، $|V(G)| = 8$ و $|E(G)| = 24$ است. کمترین مقدار ممکن برای $\delta(G)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

در گراف کامل از مرتبه ۸ تعداد یالها $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ است چون ۲۴ یال وجود دارد پس کمترین درجه راسی است که از یک راس ۴ درجه کم شود و چون در گراف کامل از مرتبه ۸ بیشترین درجه ۷ می باشد $7 - 3 = 4$

۰۹۱۴۳۱۴۰۶۳۰

تلگرام: @riazibamoradi

مرادی