

۱- مقادیر a ، $1+2a$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

(۴) $14/75$

(۳) $12/25$

(۲) $4/25$

(۱) $2/75$

گزینه ۴ (دنباله حسابی و هندسی) (ساده)

$$1 + 2a = \frac{5 - a + a}{2} \Rightarrow 1 + 2a = \frac{5}{2} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow d = \frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{جمله نهم} = a + 8d = \frac{3}{4} + \frac{56}{4} = \frac{59}{4} = 14.75$$

۲- اگر P گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

(۴) $\sim T$

(۳) $\sim r$

(۲) T

(۱) r

گزینه ۳ (آمار و احتمالات یازدهم) (ساده)

$$(T \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow F) \quad \left[\begin{array}{l} r = T \Rightarrow (T \Rightarrow F) = F \\ r = F \Rightarrow (F \Rightarrow T) = T \end{array} \right] \Rightarrow \text{نقیض } r = \text{جواب}$$

۳- نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{3}{2}$

گزینه ۱ (حسابان یازدهم فصل روابط بین ریشه‌ها) (ساده)

$$s = -1.5 + 3 = 1.5 \Rightarrow \text{دو نقطه هم عرض}$$

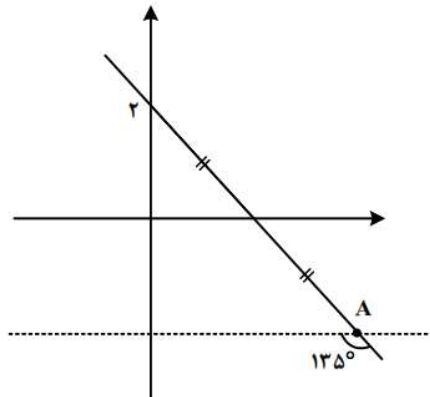
- ۴- اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۴ (روابط بین ریشه‌ها حسابان یازدهم) (متوسط)

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = (-2k)^2 - 4(5) = 4k^2 - 20 = \frac{4}{3}k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4k^2 - 20 = \frac{16}{9}k^2$$

$$\frac{20}{9}k^2 = 20 \Rightarrow \frac{k^2}{9} = \frac{9}{2} \Rightarrow \left[\frac{9}{2}\right] = 4$$

- ۵- در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{5}$
(۲) $3\sqrt{6}$
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) $5\sqrt{2}$

گزینه ۳ (ترکیبی معادله خط و تشابه و تالس) (متوسط)

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \text{فیتاغورس ۲ و ۴} \Rightarrow OA = 4 \Rightarrow -\tan 45 = -1 = \text{شیب خط}$$

۶- اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می تواند مقدار a باشد؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

گزینه ۲ (ترکیب توابع) (ساده)

$$f(\sqrt{5}) = 5 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3 \Rightarrow f(3a) = 2 \Rightarrow 9a^2 - [3a] = 2 \xrightarrow{\text{تست گزینه ها}} a = -\frac{1}{3}$$

۷- برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a ، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

گزینه ۳ (معادلات رادیکالی حسابان یازدهم) (متوسط)

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x - a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \Rightarrow -a = a^2 - 2a\sqrt{x}$$

$$a = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a^2 + a}{2a} = \frac{a(a+1)}{2a} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

برای صحیح بودن x باید a عددی فرد باشد. تمام اعداد صحیح فرد تک رقمی عبارت اند از ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹

پس معادله ۶ جواب صحیح تک رقمی دارد.

۸- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۵

گزینه ۲ (تابع وارون) (ساده)

$$10(1) - x = -10 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow (20, 1) \in f^{-1} \Rightarrow 20 = 1 + 6 + a + 1 \Rightarrow a = 12$$

۹- اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

 $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

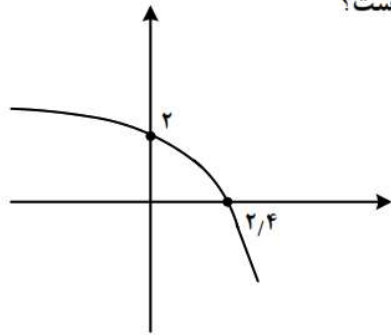
گزینه ۴ (لگاریتم حسابان یازدهم) (ساده)

$$\log_2(x^2 + 2x + 4)(x - 2) = 3 \Rightarrow (x^2 + 2x + 4)(x - 2) = 8 \Rightarrow \text{اتحاد چاق و لاغر}$$

$$x^3 - 8 = 8 \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{16} = \log_2 16 = 4$$

۱۰- نمودار تابع $y = c + \log_5(ax + b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

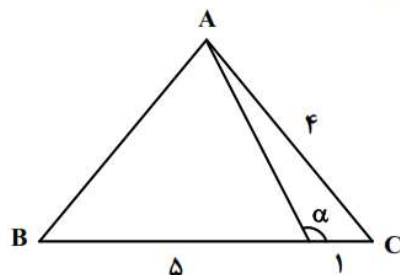
 $-\frac{2}{5}$ (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{1}{10}$ (۳) $-\frac{2}{10}$ (۴)

گزینه ۱ (لگاریتم حسابان یازدهم) (متوسط)

$$\begin{aligned} 2 &= c + \log_5(2.4a + b) \\ 2 &= c + \log_5 b \end{aligned} \Rightarrow 2 = \log_5 b - \log_5(2.4a + b) = \log_5 \left(\frac{b}{2.4a + b} \right)$$

$$\frac{b}{2.4a + b} = 25 \Rightarrow b = 60a + 25b \Rightarrow 24b = -60a \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{24}{60} = -\frac{2}{5}$$

۱۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{2}{5}$
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

گزینه ۳ (مثلثات و هندسه) (ساده)

با رسم ارتفاع وارد بر مثلث و دانستن این نکته که در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز می باشد.

$$AH = \sqrt{4^2 - 3^2} = 16 - 9 = 7 \Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

۱۲- حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

گزینه ۲ (مثلثات) (متوسط)

$$3 \cos 4x = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = \sqrt{2} \times -\sqrt{(1 - \sin 2x)} = \sqrt{2} \times -\sqrt{(1 - \sin \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2} = -1$$

$$\text{جواب نهایی} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\cos^2 \alpha$ (۴) $\sin^2 \alpha$

گزینه ۲ (مثلثات) (ساده)

گزینه ۳ $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \frac{1+0}{1+0} - \frac{0+4}{1+1} = 1-2 = -1$

۱۴- مجموع جواب‌های معادله $\cos^2 x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $-\pi$ (۳) -3π (۴) -4π

گزینه ۴ (مثلثات) (ساده)

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = -4\pi$$

۱۵- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

گزینه ۱ (حد) (ساده)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - 4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - 3} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{جواب نهایی} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

(۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(3, 1)$ (۴) $(1, 0)$

گزینه ۲ (مجانب‌ها) (حسابان دوازدهم - ساده)

$$f - g = \frac{4}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{(x-1)} = \frac{4 - x - 3}{(x-1)(x+3)} = \frac{1-x}{(x-1)(x+3)} = \frac{-1}{(x+3)}$$

• $x = 0$: مجانب افقی : $x = -3$: مجانب قائم

۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2 - 1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ۳ (حد و پیوستگی) (حسابان دوازدهم - سخت)

$$b \sin \frac{\pi}{a}$$

$$\text{حد راست : } (1-a)[z^+] + (3a^2 - 1)[-z^+] = (1-a)z + (3a^2 - 1)(-z - 1)$$

$$\text{حد چپ : } (1-a)[z^-] + (3a^2 - 1)[-z^-] = (1-a)(z - 1) + (3a^2 - 1)(-z)$$

$$\Rightarrow -1 + a = -3a^2 + 1 \Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \quad \text{ق ق}$$

$$\frac{4}{3}[x] + \frac{1}{3}[-x] = [x] + \frac{1}{3}([x] + [-x]) = [x] + \frac{1}{3}(-1) = [x] - \frac{1}{3} = b \sin \frac{-3\pi}{2} = +b$$

$$b = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

گزینه ۱ (مشتق) (حسابان دوازدهم - متوسط)

$$\text{خواسته ی مساله} = \left(\frac{f}{g}\right)' \times g(1)^2 = (x+8-x)' \times \frac{1}{16} = 0 \times \frac{1}{16} = 0$$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۲ (کاربرد مشتق صعودی و نزولی) (حسابان دوازدهم - متوسط)

$$y' = \frac{m(x-1+m) - (1)(mx+2)}{(x-1+m)^2} < 0 \Rightarrow -m + m^2 - 2 < 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) < 0$$

$$1 \text{ و } 0 \Rightarrow \text{مقادیر قابل قبول} \Rightarrow -1 < m < 2$$

۲۰- به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار ac کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

گزینه ۴ (مشتق چپ و راست) (حسابان دوازدهم - ساده)

$$ab + c = \frac{1}{a} \Rightarrow a \left(-\frac{1}{a^2}\right) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{1}{a} + c = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = c \Rightarrow ac = 2$$

$$b = -\frac{1}{a^2}$$

۲۱- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

گزینه ۳ (کاربرد مشتق نقطه عطف) (حسابان دوازدهم - متوسط)

خط مماس بر منحنی توابع درجه سوم از نقطه عطف عبور می‌کند.

$$y'' = 6x + 2a = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$$

مختصات نقطه عطف در ضابطه منحنی تابع صدق می‌کند.

$$-4 = -1 + a - b - 1 \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0.6$$

۲۲- یک کودک ۳ مکعب مستطیل یکسان با رنگ‌های مختلف دارد. او به چند طریق می‌تواند با روی هم قرار دادن یک

یا چند تا از آنها یک ستون بسازد؟

۴۲ (۴)

۶۶ (۳)

۷۸ (۲)

۱۵ (۱)

گزینه ۱ (شمارش بدون شمردن) (ریاضی دهم - متوسط)

$$P(3,1) = \frac{3!}{(3-1)!} = 3 \quad \text{ستون یک مکعبی}$$

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \Rightarrow \text{جمعا} = 3 + 6 + 6 = 15 \quad \text{ستون دو مکعبی}$$

$$P(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!} = 6 \quad \text{ستون سه مکعبی}$$

۲۳- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آنها حداقل ۶ است؟

$$(1) \frac{2}{9} \quad (2) \frac{5}{9} \quad (3) \frac{11}{18} \quad (4) \frac{13}{18}$$

گزینه؟ (احتمال) (آمار یازدهم - ساده) - صورت سوال اشتباهه باید میگفت حداقل یکی از تاس‌ها اول است تا گزینه ۲ جواب صحیح تست باشد. جواب مورد نظر توی گزینه‌ها نیست!

$$\frac{(1,5)(2,4)(2,6)(3,4)(3,6)(4,2)(4,3)(4,5)(5,1)(5,4)(5,6)(6,2)(6,3)(6,5)}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

۲۴- میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به‌طوری‌که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

$$(1) 1/25 \quad (2) 2/5 \quad (3) 3/75 \quad (4) 4/5$$

گزینه ۱ (آمار یازدهم) (ساده)

چون میانگین داده‌ها هیچ تغییری نکرده است پس مقدار واریانس هیچ تغییری نخواهد کرد و همان عدد $1/25$ خواهد بود.

۲۵- دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه A و ۷۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش‌آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول‌شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟

$$(1) \frac{9}{16} \quad (2) \frac{7}{16} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (4) \frac{3}{8}$$

گزینه ۱ (احتمال) (آمار یازدهم - ساده - عین تمرینات کتاب درسی)

$$n(A) = \frac{3}{4} n(B) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$$

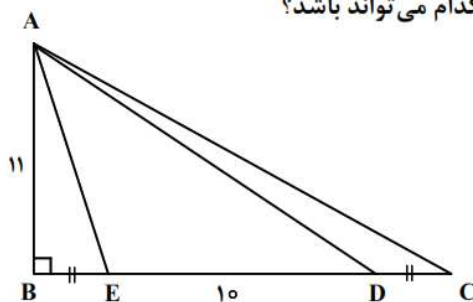
$$\text{فرد انتخابی از مدرسه A} = \frac{\frac{3}{5} \times 0.6}{\frac{3}{5} \times 0.6 + \frac{2}{5} \times 0.7} = \frac{1.8}{1.8 + 1.4} = \frac{9}{3.2} = \frac{9}{16}$$

۲۶- فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

- (۱) تلاقی سه ارتفاع (۲) تلاقی سه میانه (۳) تلاقی سه نیمساز (۴) تلاقی سه عمود منصف

گزینه ۳ (هندسه دهم فصل اول) (ساده) - هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۲۷- در شکل زیر، $\widehat{DAE} = \widehat{ACD}$ و $BE = DC$ است. اندازه DC کدام می تواند باشد؟



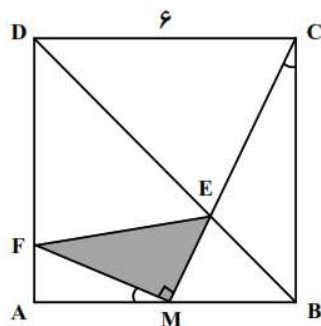
- (۱) ۸
(۲) ۷
(۳) ۶
(۴) ۵

گزینه ۲ (هندسه دهم تشابه) (متوسط)

$$\Delta CAE \sim \Delta DAE \Rightarrow \begin{matrix} \widehat{E} = \text{مشترک} \\ \widehat{DAE} = \widehat{ACD} \end{matrix} \Rightarrow \frac{\sqrt{DC^2 + 121}}{10} = \frac{DC + 10}{\sqrt{DC^2 + 121}} \Rightarrow DC^2 + 121 = 100 + 10DC$$

$$DC^2 - 10DC + 21 = 0 \Rightarrow (DC - 3)(DC - 7) = 0 \Rightarrow DC = 7$$

۲۸- در مربع شکل زیر، نقطه M وسط ضلع AB و $\hat{BCE} = \hat{AMF}$ است. مساحت مثلث سایه خورده کدام است؟



(۱) ۴/۷۵

(۲) ۴/۲۵

(۳) ۳/۷۵

(۴) ۳/۲۵

گزینه ۳ (هندسه دهم تشابه) (سخت)

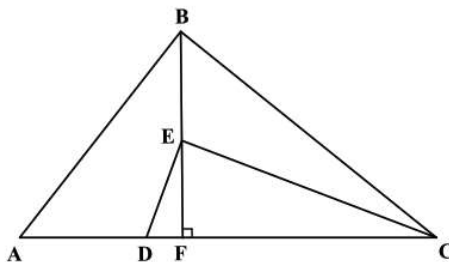
$$MC^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow MC = 3\sqrt{5} \quad \text{و} \quad \tan F = \frac{3}{AF} = \tan M = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{AF} = 2 \Rightarrow AF = \frac{3}{2} \Rightarrow MF^2 = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4} \Rightarrow MF = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow 3ME = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \Rightarrow ME = \sqrt{5}$$

$$\text{مساحت مثلث هاشور خورده} = \frac{MF \times ME}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{2}}{2} = 3.75$$

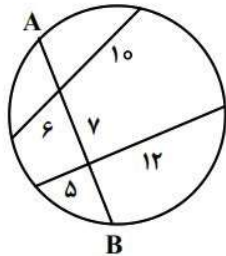
۲۹- در شکل زیر، $\hat{ABC} = \hat{CED} = 90^\circ$ است. اگر $AD = 3$ ، $EF = 4$ و $DF = 1$ باشد، اندازه BC کدام است؟

(۱) $4\sqrt{6}$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{5}$

گزینه ۴ (روابط مثلث قائم الزاویه - هندسه دهم - متوسط)

$$EF^2 = DF \times FC \Rightarrow 16 = 1 \times FC \Rightarrow FC = 16$$

$$BC^2 = CF \times AC = 16 \times 20 \Rightarrow BC = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$



۳۰- در شکل زیر، طول وتر AB کدام است؟

۱۶ (۱)

۱۷ (۲)

۱۸ (۳)

۱۹ (۴)

گزینه ۲ (دایره - هندسه یازدهم - متوسط)

با نامگذاری قطعات ایجاد شده روی وتر AB به x و y و با استفاده از روابط طولی در دایره خواهیم داشت.

$$x(y + 7) = 10 \times 6 = 60$$

$$y(x + 7) = 5 \times 12 = 60 \Rightarrow \text{باید } x \text{ و } y \text{ با هم برابر باشند}$$

$$x(x + 7) = 60 \Rightarrow x = 5 = y \Rightarrow AB = 7 + 7 + 5 = 17$$

۳۱- در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ می شود؟

(۴) تجانس

(۳) انتقال

(۲) دوران

(۱) بازتاب

گزینه؟ (هندسه یازدهم) (تست غلط مطرح شده است. مسخره ست واقعا یعنی کسی چک نکرده سوالات درست طرح

بشن؟! جمله بندی ها درست باشند؟ حفظ نمی شود باید به جای حفظ می شود باشد.

۳۲- در یک مثلث متساوی الساقین، اندازه قاعده ۱۶ و اندازه میانه وارد بر آن، نصف قاعده است. اندازه میانه نظیر هر

ساق کدام است؟

۴) $4\sqrt{10}$

۳) $6\sqrt{5}$

۲) $\frac{7}{2}\sqrt{10}$

۱) $\frac{11}{2}\sqrt{5}$

گزینه ۴ (هندسه پایه) (متوسط)

میانۀ وارد بر آن نصف قاعده (وتر) است. یعنی مثلث قائم الزاویه است. اگر اندازه ساق های مثلث را x بنامیم. با نوشتن رابطه فیثاغورس

$$x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow 2x^2 = 256 \Rightarrow x^2 = 128 \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$$

$$\text{میانۀ نظیر هر ساق} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 128 + 32 = 160 = 4\sqrt{10}$$

۳۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه های غیرواقع بر قطر اصلی

$$\text{ماتریس } B - \frac{3}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

۴) -۹

۳) ۹

۲) -۳

۱) ۳

گزینه ۳ (هندسه دوازدهم - ماتریس) (متوسط)

$$A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - A \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} B = A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = A(-3I)B = -3AB =$$

$$-3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -3 & -1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ضرب درایه های غیر واقع بر قطر اصلی} = -6 \times -\frac{3}{2} = 9$$

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۴) $[7 \ 5 \ -2]$ ۳) $[7 \ 5 \ -5]$ ۲) $[-10 \ 1 \ 7]$ ۱) $[-10 \ 1 \ 5]$

گزینه ۱ (هندسه دوازدهم - ماتریس) (متوسط)

$$A^3 = A \times A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳۵- کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = 3$ و $x = -3$ روی محور x ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ باشد،

طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

$$6\sqrt{2} \quad (4)$$

$$8\sqrt{2} \quad (3)$$

$$12\sqrt{2} \quad (2)$$

$$15\sqrt{2} \quad (1)$$

گزینه ۱ (هندسه دوازدهم - مقاطع مخروطی) (ساده)

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 = 36 \times 2$$

$$\text{قطر بیضی} = 2b = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

۳۶- یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه P

شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این متوازی‌السطوح عمود بر صفحه P ، کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

گزینه ۱ (هندسه دوازدهم - بردارها) (متوسط)

$$\text{ارتفاع} = \frac{a \cdot (b \times c)}{|b \times c|} = \frac{(2, -3, 4) \cdot (8, 10, -4)}{\sqrt{64 + 100 + 16} = 180} = \frac{16 - 30 - 16}{6\sqrt{5}} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

۳۷- یک عدد پنج رقمی با استفاده از دو عدد متوالی کمتر از ۱۰ نوشته شده است. اگر مجموع ارقام آن عدد به صورت $23n+1$ باشد، چند عدد پنج رقمی با این ویژگی وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

گزینه ۴ (گسسته نظریه اعداد) (سخت)

$$n = 0 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1 \Rightarrow 10000$$

۵۵۵۵۴

۵۵۵۴۵

$$n = 1 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 24 \Rightarrow 55455$$

۵۴۵۵۵

۴۵۵۵۵

$$n = 2 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 47 \Rightarrow 99999 \Rightarrow \text{امکان پذیر نیست} \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 47 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 2$$

۳۸- اگر m کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{407r + 592s \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$ باشد، مجموع ارقام m کدام است؟

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۷

(۱) ۲

گزینه ۳ (گسسته و مجموعه ها) (متوسط)

$$37 \times 11r + 37 \times 16s = 37(11r + 16s) \xrightarrow{\text{کوچکترین عضو مثبت}} r = 3, s = -2$$

$$37(33 - 32) = 37 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 3 + 7 = 10$$

۳۹- حداقل چند عدد از مجموعه $\{۳, ۴, \dots, ۹, ۱۲, ۱۳, \dots, ۲۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل دو عدد از آنها دارای مقسوم علیه مشترک غیر یک هستند؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

گزینه ۲) (گسسته ترکیبیات اصل لانه کبوتر) (متوسط)

مقسوم علیه مشترک غیر از یک یعنی عدد مورد نظر فقط به خودش و یک بخش پذیر باشد. یعنی عدد مورد نظر اول باشد.

$$۷ = \{۳, ۴, \dots, ۹, ۱۲, ۱۳, \dots, ۲۰\} = \text{اعداد اول} = \text{تعداد لانه ها}$$

حالا با برداشتن عدد هشتم دیگر مطمئن خواهیم شد که حداقل دو عدد دارای مقسوم علیه مشترک غیر از یک خواهند بود.

۴۰- در گراف G , $|V(G)| = ۸$ و $|E(G)| = ۲۴$ است. کمترین مقدار ممکن برای $\delta(G)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه ۳) (گسسته گراف) (ساده)

اگر گراف کامل بود تعداد یال های گراف مرتبه ۸ برابر می شد با

$$\text{تعداد یال های گراف کامل} = \frac{۸ \times (۸ - ۱)}{۲} = ۲۸$$

گراف مطلوب مساله ۴ یال از گراف کامل کمتر دارد. برای اینکه راسی با کمترین درجه داشته باشیم باید هر ۴ یال از یکی

از راس ها کم شود. یعنی $\delta(G) = ۷ - ۴ = ۳$

سعید پناهی

۰۲۱۲۲۲۷۶۹۸۰-۰۹۱۲۲۰۷۸۴۳۰-۰۲۱۲۲۲۱۶۴۸۳

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳