

۱۱۱ - سهمی  $y = -mx^2 + mx + 1$  و خط  $y = -m - x$  در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود  $m$  شامل چند

مقدار صحیح است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \rightarrow -mx^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(-m)(m+1) < 0 \rightarrow 5m^2 + 4m + 1 < 0$$

$$\rightarrow -1 < m < -\frac{1}{5} \quad \text{خاتمه عدد صحیح}$$

۱۱۲ - اگر  $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ ،  $g(x) = -|x|\sqrt{x}$  و  $f \circ g^{-1}(a) = -3$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $-\frac{1}{8}$

(۲)  $\frac{1}{9}$

(۱)  $-\frac{1}{9}$

$$f(g^{-1}(a)) = -3 \text{ و } f(\frac{1}{4}) = -3 \rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \rightarrow g(\frac{1}{4}) = a$$

$$-|\frac{1}{4}|\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{8} = a$$

۱۱۳ - اگر  $\alpha$  و  $\beta$  صفرهای سهمی  $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$  و  $\beta > \alpha$  باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه

مختصات قرار دارد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

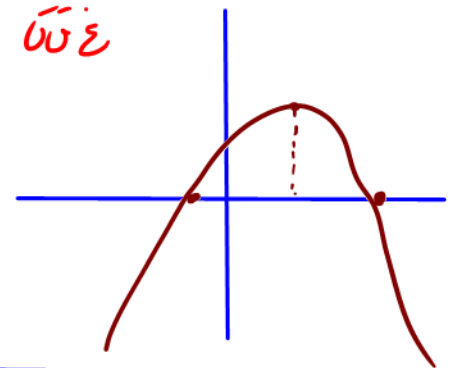
(۲) دوم

(۱) اول

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{25\alpha} \text{ و } \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \rightarrow 25\alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \text{ و } \frac{1}{5} + \beta = -\frac{4}{5} \rightarrow \beta = -1 \quad \text{غیر}$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{4}{5} \rightarrow \beta = 1$$



پایسن سپر مدرسی ریاضیات، هندسه و گسره  
شهر تبریز

۱۱۴ - به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع  $y = -\frac{1}{3-x}$  نمودار این تابع بالای  $y = -4$  و پایین  $y = 0$  قرار دارد؟

$1 \text{ (۴)}$        $2 \text{ (۳)}$        $3 \text{ (۲)}$        $4 \text{ (۱)}$

$$-4 < -\frac{1}{3-x} < 0 \rightarrow -4 < \frac{1}{x-3} < 0 \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x-3 < -\frac{1}{4} \\ x < \frac{11}{4} = 2,75 \end{cases}$$

اعداد طبیعی ۲ و ۱

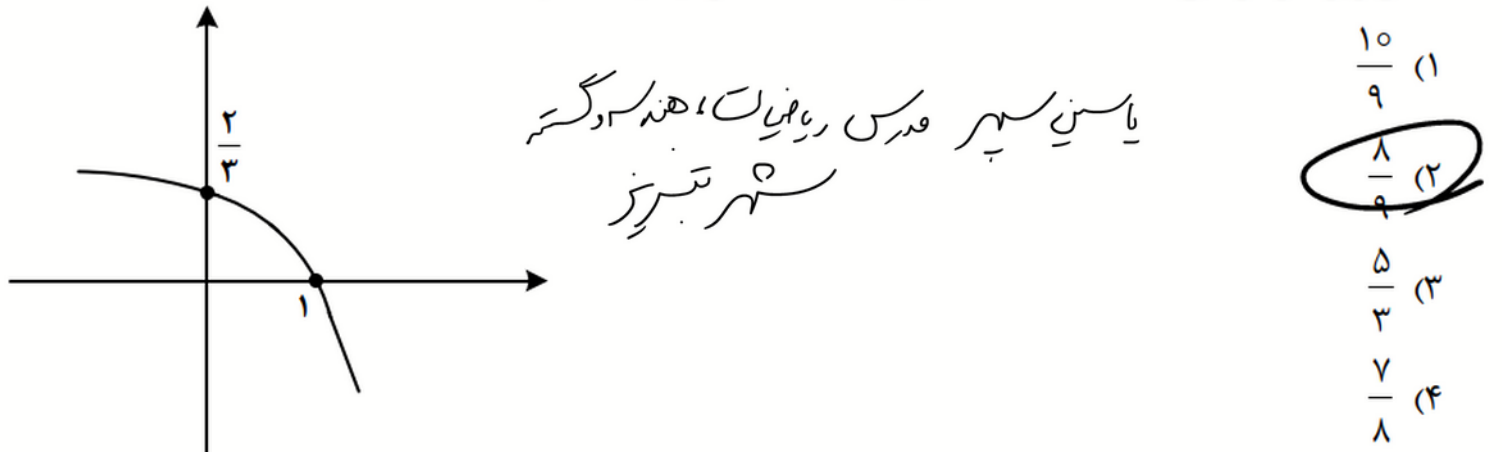
۱۱۵ - تابع  $y = (x-1)|x|$  در بازه  $(a, b)$  اکیداً نزولی است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$        $\frac{3}{2} \text{ (۳)}$        $\frac{1}{2} \text{ (۲)}$        $\frac{1}{4} \text{ (۱)}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 + x & x < 0 \end{cases}$$

$(a, b) = (0, \frac{1}{4})$   
 $a+b = \frac{1}{4}$

۱۱۶ - شکل زیر نمودار تابع  $f(x) = 1 + c \times 3^{a+bx}$  است. مقدار  $f(-1)$  کدام است؟



$$f(x) = 1 + c \times 3^{bx+a} \rightarrow f(0) = \frac{2}{3} \rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{c \times 3^a = -\frac{1}{3}}$$

$$f(1) = 0 \rightarrow 1 + c \times 3^{b+a} = 0 \rightarrow \boxed{c \times 3^{b+a} = -1}$$

$\textcircled{1} \rightarrow \frac{c \times 3^a}{c \times 3^{b+a}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-1} \rightarrow 3^{-b} = 3^{-1} \rightarrow \boxed{b=1}$

$$f(-1) = 1 + c \times 3^{a-1} = 1 + (c \times 3^a) \times 3^{-1} \xrightarrow{c \times 3^a = -\frac{1}{3}} 1 + (-\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

۱۱۷- اگر  $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$  ضابطه تابع وارون  $y = ax + a\sqrt{x}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

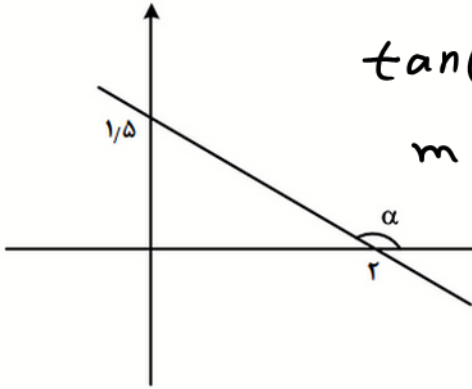
۲ (۱)

عبدالرزاقی

$$x=2 \rightarrow y = \frac{2+2}{4} - \frac{\sqrt{2+1}}{2} = \frac{4}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}, 2\right) \rightarrow \frac{1}{4}a + a\sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{2}{4}a = 2 \rightarrow a = 4$$

۱۱۸- در شکل زیر، زاویه  $\alpha$  مشخص شده است. مقدار  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  کدام است؟



$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$m = -\frac{1/5}{r} = -\frac{1}{5r} \rightarrow \cot \alpha = -\frac{5}{12}$$

۳ (۱)

۴ (۲)

۴ (۳)

۴ (۴)

۱۱۹- حاصل عبارت  $\frac{3\cos(248^\circ) - 2\sin(158^\circ)}{\sin(202^\circ) - \cos(292^\circ)}$  کدام است؟

۲/۵ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۰/۵ (۲)

۰/۵ (۱)

$$\frac{3\cos(270 - 22) - 2\sin(180 - 22)}{\sin(180 + 22) - \cos(270 + 22)} = \frac{-3\sin 22 - 2\sin 22}{-\sin 22 - \sin 22}$$

$$= \frac{-5\sin 22}{-2\sin 22} = 2,5$$

۱۲۰- معادله مثلثاتی  $\sin 2x - 4\sin^2 x \cos x = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, \pi)$  دارد؟

۷ (۴)

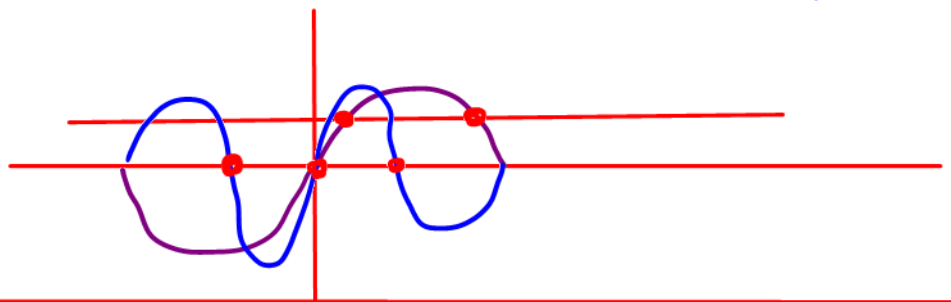
۶ (۳)

۵ (۲)

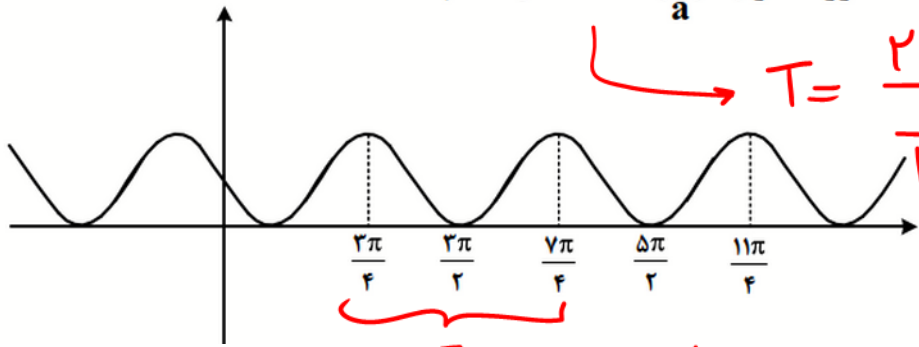
۴ (۱)

$$\sin 2x - 4\sin^2 x \cos x = 0 \rightarrow \sin 2x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



۱۲۱- شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 + \sin ax$  است. دوره تناوب  $y = 2 \cos(\frac{x}{a})$  کدام است؟

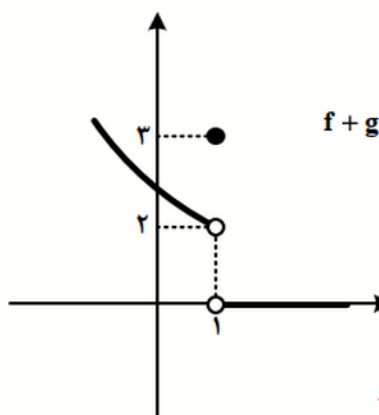
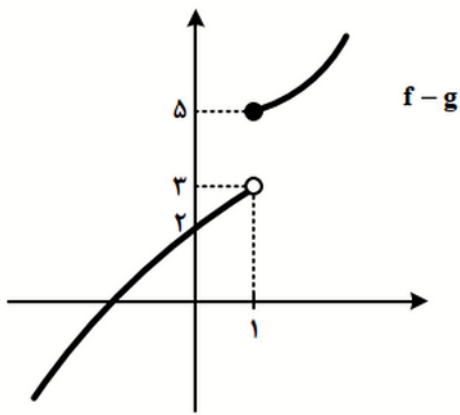


$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

- (۱)  $4\pi$
- (۲)  $6\pi$
- (۳)  $3\pi$
- (۴)  $2\pi$

$$T = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \pi, \quad \frac{2\pi}{|a|} = \pi \rightarrow |a| = 2$$

۱۲۲- شکل‌های زیر، نمودار توابع  $f+g$  و  $f-g$  هستند. مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟



(۱) حد ندارد.

(۲)  $2/25$

(۳)  $2/5$

(۴)  $2/75$

$$A + B = 0$$

$$A - B = 5$$

$$2A = 5 \rightarrow A = 2.5$$

۱۲۳- اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = -\infty$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{x}{a} - x \right]$  کدام است؟

(۴)  $-1$

(۳) ۱

(۲)  $-2$

(۱) صفر

$$a - 3 < 0 \rightarrow a > 3$$

فرضی:  $a = 4$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{x}{4} - x \right] = -1$$

۱۲۴- تابع ناصفر  $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. مقدار  $\frac{a}{f(b)}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲)  $-\frac{1}{4}$

(۱)  $-\frac{1}{2}$

$$b = 0 \rightarrow f(x) = -2a$$



۱۲۵ - خط  $7y - x = 5$  در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی  $y = \frac{ax-1}{3x+1}$  مماس است. مقدار  $a$  کدام است؟

$\frac{9}{7}$  (۴)

$\frac{4}{7}$  (۳)

$\frac{4}{7}$  (۲)

۳ (۱)

$y = \frac{ax-1}{3x+1}$  ,  $y = \frac{x+5}{7}$  ,  $\frac{ax-1}{3x+1} = \frac{x+5}{7}$

$\rightarrow \Delta = 0 \rightarrow a = 2$

۱۲۶ - آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = (x^2+1)^3(ax+1)$  در بازه  $[-1, 0]$  برابر  $-11$  است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه  $x = -2a$  کدام است؟

$-8$  (۴)

$8$  (۳)

$-1$  (۲)

۱ (۱)

$f(x) = (x^2+1)^3(ax+1)$  و  $[-1, 0]$

آهنگ متوسط:  $\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - 1(1-a)}{1} = 1a - 1 = -11 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = (x^2+1)^3(-\frac{1}{2}x+1) \rightarrow f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(-\frac{1}{2}x+1) + (-\frac{1}{2})(x^2+1)^3$   
 آهنگ لحظه‌ای:  $f'(-2a) = f'(1) = 3(2)(2)^2(-\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(2)^3 = 8$

۱۲۷ - مقدار مینیمم نسبی تابع  $y = x^3 - 12x + 2$ ، کدام است؟

$-7$  (۴)

$-9$  (۳)

$-11$  (۲)

$-14$  (۱)

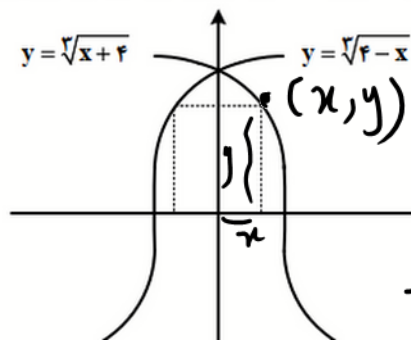
$y = x^3 - 12x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = -2$  و  $x = 2$

$f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$

$x$	$-2$	$2$
$y'$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$
	max	min

پایین سپر مدرسی، رفیقان! هنده سدرگستر  
 شهر تبریز

۱۲۸- مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟



$$S = 2xy = 2x\sqrt{4-x}$$

$$= 2\sqrt{4x^3 - x^4} \rightarrow S' = 2 \frac{12x^2 - 4x^3}{2\sqrt{4x^3 - x^4}} = 0$$

$$12x^2 - 4x^3 = 0$$

$$4x^2(3-x) = 0$$

$x=0$  (حذف می‌شود)  
 $x=3$  (پاسخ صحیح)  
 $y=1$

$$S = 2 \times 3 \times 1 = 6$$

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۶ (۴)

۱۲۹- برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به ترتیب برابر ۹ و ۳۹ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم کدام است؟

۱۸, ۲۳, ۳۹, ۱, ۳, ۴۲, a, a, ۲a+1, ۲۳, ۹

۵۴/۵ (۴)

۴۵ (۳)

۲۱/۸ (۲)

۲۰ (۱)

۱, ۳, ۹, ۱۸, ۲۳, ۲۳, a, a, ۳۹, ۴۲, ۲a+1

$\bar{x} = \frac{44 + 2a}{5} = 26 \rightarrow a = 33$

$\bar{x} = \frac{62 + 47}{2} = 54.5$

۱۳۰- با حروف کلمه «آهنگری» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمه «گنه» کنار هم باشند؟

۲۱۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۲۴ (۱)

$4! \times 3! = 144$

گ ن ه

س , ر

۱۳۱- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد ظاهر شده متوالی و برابر نیستند؟

۱/۶ (۴)

B ۲/۳ A (۳)

۵/۹ (۲)

۵/۱۲ (۱)

$P(A' \cap B') = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \frac{10}{36} - \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

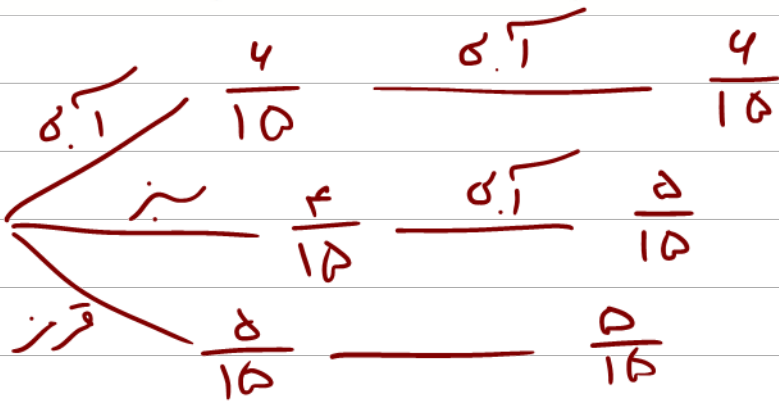
۱۳۲- جعبه A شامل ۶ مهره آبی، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز است و جعبه B شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۶ مهره قرمز است. از جعبه A به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبه B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبه B انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مهره خارج شده از جعبه B آبی است؟

۰/۲۴ (۴)

۰/۲۸ (۳)

۰/۲۲ (۲)

۰/۳۶ (۱)



$$\frac{34 + 20 + 25}{225} = \frac{79}{225}$$

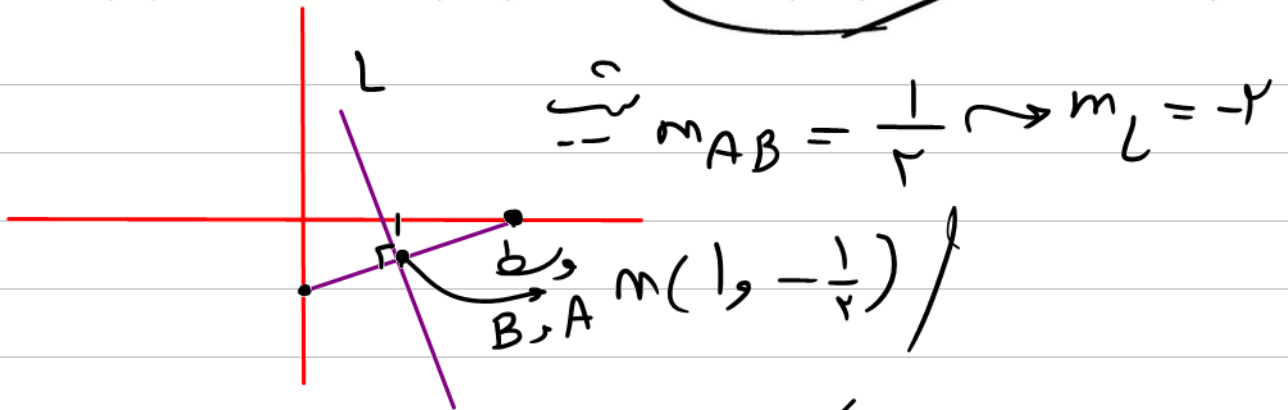
۱۳۳- نقاط  $A(2,0)$  و  $C(0,-1)$  دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

$(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$  (۴)

$(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$  (۳)

$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$  (۲)

$(0, \frac{3}{2})$  (۱)



قطر  $AC$  را عمود بر  $L$  می‌کنند.  
معادله  $L$ :  $y = -2x + \frac{3}{2}$

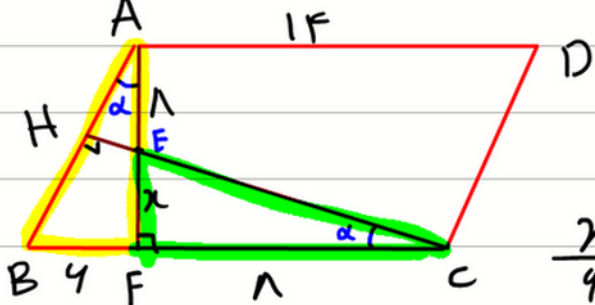
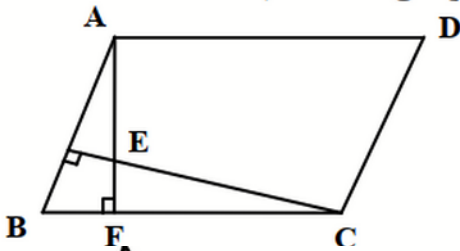
۱۳۴- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر،  $AD = 14$ ،  $BF = 6$  و  $AE = 8$  است. اندازه ارتفاع  $AF$  کدام است؟

۱۶ (۱)

۱۴ (۲)

۱۲ (۳)

۱۰ (۴)



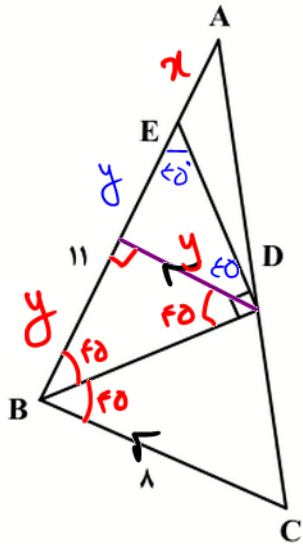
مثلث  $ABF$  و  $EFC$  متشابه هستند.

$$\frac{x}{9} = \frac{8}{14+x} \rightarrow x^2 + 14x - 72 = 0 \rightarrow x = 4 \checkmark$$

$$x = -12 \times$$

$\rightarrow AF = 8 + 4 = 12$

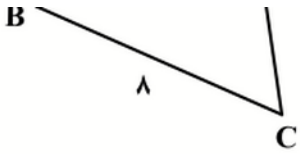
۱۳۵- در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



$$2y = 11 \rightarrow y = 5,5$$

$$\frac{x + 5,5}{x + 11} = \frac{5,5}{11} \rightarrow x = 4,4$$

- ۶,۶ (۱)
- ۵,۴ (۲)
- ۳,۶ (۳)
- ۲,۴ (۴)



۱۳۶- اگر  $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$  باشد، حاصل  $3B + 1$  کدام است؟

$2\sqrt{7}$  (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳)

$\sqrt{7}$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

$$B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{14}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}} = \frac{1 + \sqrt{14}}{1 + \sqrt{14}} \times \frac{1 - \sqrt{14}}{1 - \sqrt{14}} = \frac{3(\sqrt{14} - 1)}{9}$$

$$\rightarrow B = \frac{\sqrt{14} - 1}{3} \Rightarrow 3B + 1 = \sqrt{14} - 1 + 1 = \sqrt{14}$$

۱۳۷- اگر  $n(A \cup B) = 57$  و  $n(A \cap B) = 3n(A - B) = 4n(B - A)$  باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

$48$  (۴)

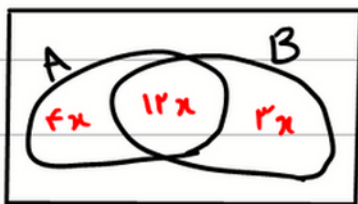
$45$  (۳)

$36$  (۲)

$33$  (۱)

$$n(A \cap B) = 3n(A - B) = 4n(B - A)$$

فرض:  $n(A \cap B) = 12x \rightarrow n(A - B) = 4x, n(B - A) = 3x$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\rightarrow 19x = 57 \rightarrow x = 3$$

$$n(A) = 4x + 12x = 16x \xrightarrow{x=3} n(A) = 48$$



۱۳۸- با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته

می شود. اختلاف جمله n ام دو دنباله کدام است؟

۴ (۱)

۶ (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

$$a, a+d \rightsquigarrow a_n = a + (n-1)d$$

$$a+f, a+d+f \rightsquigarrow t_n = a+f + (n-1)d$$

$$\rightarrow t_n - a_n = f$$

۱۳۹- اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & |x| \leq 1 \\ ax^2 + 5 & |x| \geq 1 \end{cases}$  ضابطه تابع f باشد، مقدار f(a) کدام است؟

۱۴ (۴)

۲۵ (۳)

۳۲ (۲)

۴۶ (۱)

$$x=1 \rightsquigarrow a+d = \sqrt{1+2a} \rightarrow a=3$$

$$f(3) = 3(3)^2 + 5 = 32$$

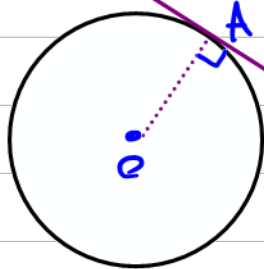
۱۴۰- خط  $3y + 2x = 9$  در نقطه  $(0, 3)$  بر دایره  $x^2 + y^2 + 3x + ay = c$  مماس است. مقدار a کدام است؟

-۱/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

-۳/۵ (۲)

۳/۵ (۱)



$$O = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{a}{2}\right)$$

$$m_{OA} = \frac{3 + \frac{a}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$3y + 2x = 9 \rightarrow m = -\frac{2}{3} \quad \left| \quad 3 + \frac{a}{2} = \frac{9}{\frac{3}{2}} \rightarrow a = -\frac{3}{2} \right.$$

یاسین سپهر مدرس ریاضیات، هندسه و گستره شهر تبریز



۱۴۰۳، ۲، ۷