



نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آمار

پایه تحصیلی :

زمان آزمون :

نام دبیر : محمد حمیدی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۲/۱۲/۰۳

۱ هریک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۶ است؟

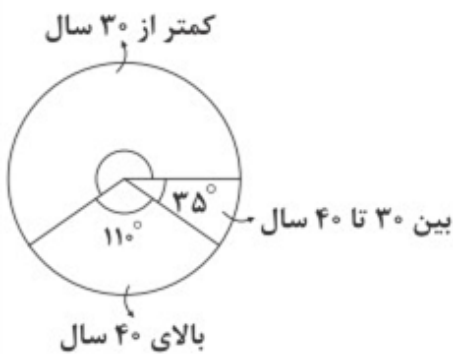
$$\frac{4}{15} \quad \text{۴}$$

$$\frac{2}{15} \quad \text{۳}$$

$$\frac{3}{10} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{10} \quad \text{۱}$$

۲ نمودار دایره‌ای زیر گروه سنی داوطلبان استخدامی یک شرکت را نشان می‌دهد. اگر تعداد این داوطلبان ۱۸۰ نفر باشد آن‌گاه چند درصد افراد این شرکت کمتر از ۳۰ سال سن دارند و این نمودار مربوط به کدام گام از گام‌های چرخه آمار است؟



$$۶۰/۹ - \text{گام چهارم} \quad \text{۱}$$

$$۵۹/۷ - \text{گام چهارم} \quad \text{۳}$$

$$۶۰/۹ - \text{گام دوم} \quad \text{۲}$$

$$۵۹/۷ - \text{گام دوم} \quad \text{۴}$$

۳ کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ متغیرهای کمی معمولاً از نوع مشاهدات غیرعددی‌اند.
 ۲ مقیاس فاصله‌ای برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن نبوده و اختلاف بین مقادیر داده‌ها بی‌معناست.
 ۳ اگر داده‌های آماری با هم برابر باشند، میانگین آن‌ها برابر واریانس آن‌هاست.
 ۴ در منحنی خم بهنجار تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصله‌ی یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

۴ می‌خواهیم در مورد قد دانش‌آموزان یک مدرسه ۸۰۰ نفری تحقیق کنیم، برای این منظور دانش‌آموزان کلاس دهم را که ۲۰۰ نفرند، انتخاب می‌کنیم. با توجه به جدول زیر مقدار $xy + y - x$ چقدر است؟

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه
قد دانش‌آموزان مدرسه	x	y	دانش‌آموزان مدرسه

$$۱۶۰۶۰۰ \quad \text{۴}$$

$$۱۷۰۰۰۰ \quad \text{۳}$$

$$۱۸۰۰۰۰ \quad \text{۲}$$

$$۱۶۰۰۰۰ \quad \text{۱}$$

۵

چه تعداد از عبارات زیر صحیح است؟
 الف) برای توصیف داده‌های کمی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.
 ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌ای دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، نمودار جعبه‌ای برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است.
 پ) اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر موردنظر است.

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶

علی و حسن، هم‌قد هستند. اگر وزن علی یک و نیم برابر وزن حسن باشد، آن‌گاه شاخص توده‌ی بدن علی چند برابر شاخص توده‌ی بدن حسن است؟

- ۱) $1/5$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $1/25$

۷

اگر شاخص توده‌ی بدن یک شخص با قد ۱۹۰ سانتی‌متر برابر ۳۰ باشد، وزنش چند کیلوگرم است؟

- ۱) $108/3$ ۲) $107/5$ ۳) $105/3$ ۴) $110/3$

۸

کدام‌یک از متغیرهای زیر «کمی» است؟

- ۱) مراحل رشد نوزاد ۲) درآمد افراد ۳) وضعیت تأهل افراد ۴) گروه خونی

۹

چه تعداد از متغیرهای زیر، کمی هستند؟
 حروف الفباء - اندازه‌ی محیط شکل‌های هندسی - وزن یک جعبه - زمان اولین کلاس - رشته‌ی تحصیلی دانش‌آموزان - وضعیت مسکن (مالک مستأجر) - مدت زمان پاسخگویی به سوالات - تعداد بیماران بستری در یک بخش بیمارستان

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰

کدام‌یک از گزینه‌های زیر شامل متغیرهای کمی نسبتی است؟

- ۱) رتبه کنکور دانش‌آموزان یک کلاس - تعداد قطعات قابل استفاده در تولید یخچال
 ۲) میزان آلودگی هوا - سن دانش‌آموزان کلاس اول
 ۳) روز شنبه زمان اولین کلاس دانشگاه - درصد گوشت استفاده شده در محصول یک شرکت
 ۴) اندازه حجم یک بشکه آب - وضعیت تأهل افراد

۱۱

متغیرهای «درصد یک دانش‌آموز در یک آزمون نستی ۱۰ سؤاله و مراحل رشد انسان» به‌ترتیب چگونه‌اند؟

- ۱) کمی پیوسته - کیفی اسمی ۲) کمی گسسته - کیفی اسمی
 ۳) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی ۴) کمی گسسته - کیفی ترتیبی

۱۲

میان‌هی تعدادی داده‌ی آماری برابر ۶ و میانگین داده‌های کوچک‌تر از میان‌هی برابر $\frac{10}{3}$ و میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میان‌هی برابر $\frac{26}{3}$ است. اگر تعداد کل داده‌ها عددی فرد باشد، میانگین کل داده‌ها کدام است؟

- ۱) $6/5$ ۲) ۶ ۳) $8/5$ ۴) ۸

۱۳ اگر x_1, x_2, \dots, x_n تا داده و $\sum_{i=1}^n (x_i - 59) = 20$ و $\sum_{i=1}^n (x_i - 54) = 70$ باشد، میانگین این نمونه n تایی کدام است؟

- ۱) ۶۱ ۲) ۵۷ ۳) ۵۵ ۴) ۴۴

۱۴ اگر میانگین داده‌های x, y, z و ۴ برابر ۸ باشد، میانگین داده‌های $2x, 2y, 2z, x + y + z, (x + y + z)^2$ چقدر است؟

- ۱) $176/3$ ۲) $176/6$ ۳) $183/6$ ۴) $173/6$

۱۵ میانگین داده‌های $a, a + d, a + 2d, \dots, a + 2nd$ کدام است؟

- ۱) $n + (n + 1)d$ ۲) $a + nd$ ۳) $\frac{n(n + 1)d}{2n + 1}$ ۴) $\frac{a + nd}{2n + 1}$

۱۶ چه زمانی به جای میانگین از میانه استفاده می‌کنیم؟

- ۱) وقتی داده دور افتاده داریم. ۲) وقتی میانه بزرگتر از میانگین است.
۳) وقتی اختلاف داده‌ها ناچیز است. ۴) وقتی مد به میانه نزدیکتر از میانگین است.

۱۷ نمرات درس ریاضی تعدادی از دانش‌آموزان یک کلاس در جدول زیر آمده است. اگر میانگین وزنی نمرات $13/5$ باشد، میانه‌ی داده‌ها کدام است؟

نمرات	۱۸	۱۴	a	۱۱	۸/۵
تعداد	۳	۳	۲	۴	۲

- ۱) ۱۳ ۲) $13/5$ ۳) ۱۴ ۴) $14/5$

۱۸ اگر مد داده‌های آماری مطابق جدول زیر برابر ۳ باشد، مجموع میانگین و میانه‌ی داده‌ها چقدر است؟

داده	۲a	۷	a+۱	۶	۲
فراوانی	۳	۲	۴	۱	۲

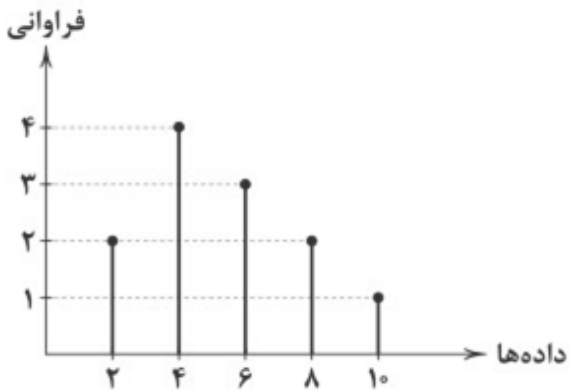
- ۱) ۷ ۲) $7/5$ ۳) ۸ ۴) $8/5$

۱۹ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته اول) برابر بزرگترین عضو دسته قبل است؛ یعنی $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \dots$. میانه عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- ۱) $6144/5$ ۲) $6145/5$ ۳) $12289/5$ ۴) $12288/5$

با توجه به نمودار میله‌ای زیر کدامیک از معیارهای گرایش به مرکز، بیشترین مقدار را دارند؟

۲۰



۱) میانه ۲) مد ۳) میانگین ۴) میانگین و مد

۲۱) نمرات درس عربی یک کلاس، اعداد زیر هستند. تفاضل میانگین و میانه آن‌ها کدام است؟

۲۱

۱۴, ۱۲, ۱۷, ۱۵, ۱۳, ۱۹, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۲۲) اگر میانگین داده‌های آماری $-7, -7 + k, -7 + 2k, \dots, -7 + (6n + 4)k$ برابر ۲۹۳ باشد، میانه داده‌های آماری $k, 2k, 3k, \dots, (3n + 1)k$ کدام است؟

۲۲

۱) ۱۳۹/۵ ۲) ۱۴۶/۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۴۳

۲۳) تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x + 4$ را در دامنه‌ی $\{-99, -98, \dots, 0, 1, \dots, 99, 100\}$ در نظر بگیرید. مقدار متوسط عضوهای برد تابع f ، کدام است؟

۲۳

۱) ۳/۵ ۲) ۳/۷۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۲۵

۲۴) اگر میانگین داده‌های آماری $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ برابر \bar{x} باشد، میانگین داده‌های آماری $nx_1 + 1, nx_2 + 2, \dots, nx_n + n$ کدام است؟

۲۴

۱) $n\bar{x}$ ۲) $n\bar{x} - \frac{n^2}{2}$ ۳) $n\bar{x} - \frac{n^2 + 1}{2}$ ۴) $n\bar{x} - \frac{n^2 - 1}{2}$

۲۵) در نمودار دایره‌ای متناظر با جدول مقابل، زاویه‌ی مرکزی متناظر به داده‌ی c برابر 54° است. درصد فراوانی نسبی داده‌ی a کدام است؟

۲۵

داده	a	b	c	d	e
درصد فراوانی نسبی	y	۲۹	x	۳۰	۱۲

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۶) اگر میانگین داده‌های ۳۰، y و x برابر ۲۰ و میانگین ۵۰، y و ۲x برابر ۳۰ باشد، میانگین $\frac{x}{2}$ و $\frac{y}{5}$ چقدر است؟

۲۶

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۲۷ اگر میانگین داده‌های $4 - 3x_1, \dots, 4 - 3x_n$ برابر با \bar{x} باشد، میانگین داده‌های $3 + 4x_1, \dots, 3 + 4x_n$ کدام است؟

$\frac{20 - 3\bar{x}}{n}$ (۴)
 $\frac{25 - 3\bar{x}}{4}$ (۳)
 $\frac{20 - 4\bar{x}}{n}$ (۲)
 $\frac{25 - 4\bar{x}}{3}$ (۱)

۲۸ در ۶۰ داده‌ی آماری میانه و میانگین داده‌ها به ترتیب ۴ و ۵ هستند. ابتدا به هر داده ۳ درصد اضافه کرده سپس همه‌ی آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید از میانه‌ی داده‌های جدید چه قدر بیش‌تر است؟

۲ (۴)
 ۱/۰۳ (۳)
 ۲/۰۶ (۲)
 ۱ (۱)

۲۹ اگر میانگین داده‌های x_1, \dots, x_n برابر ۹ باشد، میانگین داده‌های $\frac{x_1}{3} - 1, \dots, \frac{x_n}{3} - 1$ کدام است؟

۲ (۴)
 ۶ (۳)
 ۳ (۲)
 ۹ (۱)

۳۰ از بین داده‌های ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۲۲ دو داده را حذف می‌کنیم. میانگین اعداد باقی‌مانده با میانگین داده‌های اولیه برابر است. دو داده‌ی حذف شده کدام می‌توانند باشند؟

۲۰ و ۸ (۱)
 ۱۵ و ۱۱ (۲)
 ۲۰ و ۱۰ (۳)
 ۱۹ و ۱۵ (۴)

۳۱ داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{14} مفروضند. اگر به هر کدام از داده‌ها ۳ واحد اضافه کرده، سپس در ۲ ضرب کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید چهار برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه است. مجموع داده‌های اولیه کدام است؟

-۳۶ (۱)
 ۳۶ (۲)
 ۴۸ (۳)
 -۴۸ (۴)

۳۲ اگر واریانس داده‌های آماری $9 - 2z, 1 + 7y, 15, 4x - 1, 23 + t^2$ برابر صفر باشد، اختلاف چارک اول و چارک سوم داده‌های آماری $z, x - z, y^2, x - z, 3z, y + 3, x - 1, 11, z + y, 2x - 5, t + y$ کدام است؟

۸ (۱)
 ۱۰ (۲)
 ۱۲ (۳)
 ۱۴ (۴)

۳۳ اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را در دسته جدید قرار می‌دهیم. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و غیرتکراری باشند. میانگین داده‌های دسته جدید کدام است؟

۲۵ (۱)
 ۲۵/۵ (۲)
 ۵۰ (۳)
 ۵۰/۵ (۴)

۳۴ اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند، انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

$\sqrt{10}$ (۱)
 $\sqrt{11}$ (۲)
 $\sqrt{21}$ (۳)
 $\sqrt{28}$ (۴)

۳۵ واریانس n جمله اول اعداد طبیعی در صورتی که $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ کدام است؟

$\frac{n^2 - 1}{12}$ (۱)
 $\frac{n^2 - 1}{6}$ (۲)
 $\frac{n^2 + 1}{6}$ (۳)
 $\frac{n^2 + 1}{12}$ (۴)

۳۶ سن سه دانش آموز امسال ۱۴، ۱۵، ۱۶ سال است. ضریب تغییرات سن آن‌ها ۱۰ سال دیگر تقریباً چقدر است؟

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.8\right)$$

- ۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۲۳ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۲۳

۳۷ اگر واریانس دمای هوای شهری در یک هفته ۲۵ درجه سانتی‌گراد به توان ۲ باشد، دمای این شهر در آن هفته چند

$$(F = \frac{9}{5} C + ۳۲ \text{ (راهنمایی)}) \text{ است؟}$$

- ۱) ۸۰ ۲) ۸۱ ۳) ۴۹ ۴) ۳۶

۳۸ اگر میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی x به ترتیب ۸ و ۲ باشد، ضریب تغییرات $y = ۲x - ۶$ کدام است؟

- ۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۶

۳۹ کوچک‌ترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دو رقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

۱) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۲) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۳) $\frac{1}{12\sqrt{6}}$ ۴) $\frac{1}{24\sqrt{6}}$

۴۰ در ۶۰ داده‌ی آماری مجموع داده‌ها ۱۸۰ و واریانس آن‌ها $1/44$ محاسبه شده است. اگر به هر داده ۹ واحد اضافه شود، نسبت انحراف معیار به میانگین داده‌های اخیر کدام است؟

- ۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۴۱ انحراف معیار ۲۰ داده‌ی آماری ۲ و میانگین آن‌ها ۱۵ است. اگر داده‌های ۱۸ و ۱۳ را حذف و داده‌های ۲۰ و ۱۱ را اضافه کنیم، انحراف معیار داده‌های اخیر کدام است؟

- ۱) ۲/۳۲ ۲) ۲/۹۴ ۳) ۳/۱۶ ۴) ۳/۶۸

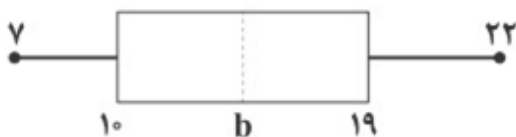
۴۲ اگر $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، کدام عبارت نادرست است؟

۱) میانگین مقادیر y_1, y_2, y_3 برابر است. ۲) میانگین مقادیر y_1, y_2, y_3 با y_1 است.

۳) واریانس مقادیر y_1, y_2, y_3 با y_3 برابر است. ۴) انحراف معیار مقادیر y_1, y_2, y_3 برابر با صفر است.

۴۳ برای داده‌های آماری $d, ۲۱, ۲۰, c, ۱۸, ۱۶, ۱۵, ۱۳, ۱۳, ۱۱, a, ۹, ۸, ۷$ که به صورت صعودی مرتب شده‌اند، نمودار جعبه‌ای

زیر رسم شده است، حاصل $\frac{d-c}{b-a}$ کدام است؟



- ۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

۴۴) نرخ تورم سالانه در یک کشور در طی ده سال به صورت زیر است. مقدار $\frac{Q_1 - 2Q_2 + Q_3}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

$11/5, 12/8, 13/5, 11/2, 12/3, 10/6, 11/9, 10/6, 30/2, 12/7$

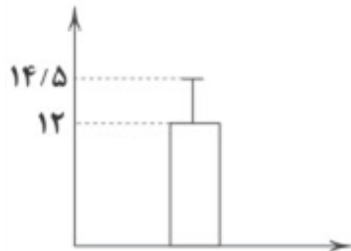
۱) $-0/275$

۲) $-0/225$

۳) $-0/175$

۴) $-0/125$

۴۵) نمودار زیر مربوط به ۶۰ داده‌ی آماری است. مجموع مجزورات تفاضل میانگین از داده‌ها کدام است؟



۱) ۳۰۵

۲) ۳۲۵

۳) ۳۵۵

۴) ۳۷۵

۴۶) نمرات درس ریاضی دو دانش‌آموز به صورت زیر است. عملکرد کدام بهتر است؟

A	17	19	18	19	17
B	20	18	16	17	19

۱) A

۲) B

۳) عملکرد هر دو یکسان است.

۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۴۷) گروهی از داده‌های آماری از منحنی نرمال پیروی می‌کنند. اگر میانگین و واریانس داده‌ها به ترتیب ۵ و ۴ باشد، تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در کدام بازه قرار دارند؟

۱) (۳, ۷)

۲) (-۳, ۱۳)

۳) (-۱, ۱۱)

۴) (۱, ۹)

۴۸) اگر $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 25(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) = 600$ ، ضریب تغییرات داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{10} کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt{54/24}}{24}$

۲) $\frac{\sqrt{339}}{6}$

۳) $\frac{\sqrt{542/4}}{2/4}$

۴) $\frac{\sqrt{678}}{12}$

۴۹) اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ برابر صفر باشد، انحراف معیار داده‌های

$x_1, x_2 + 2, x_3 + 4, x_4 + 6, x_5 + 8, x_6 + 10, x_7 + 12$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۱۶

۵۰) در ۱۰ داده‌ی آماری مثبت، مجموع مجزورات داده‌ها، ۸۰۰ و انحراف معیار ۴ است. مجموع تمام داده‌ها کدام است؟

۱) ۶۰

۲) ۹۶

۳) ۸۰

۴) ۱۰۸

براساس نمودار ساقه و برگ روبه‌رو، اگر داده‌ها را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، انحراف معیار داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

۵۱

ساقه	برگ
۰	۳ ۴ ۴ ۷ ۹ ۹
۱	۰ ۰ ۱ ۳ ۵

$$1/2 \quad \text{۴}$$

$$1/1 \quad \text{۳}$$

$$0/9 \quad \text{۲}$$

$$0/6 \quad \text{۱}$$

دو دسته از داده‌های آماری به‌صورت زیر با واریانس‌های σ_B^2 و σ_A^2 وجود دارند. کدام گزینه صحیح است؟

۵۲

$A : 2/5, 4, 7/5, 9, 11$ $B : 5/25, 8/25, 15/25, 18/25, 22/25$

$$\sigma_B^2 = 4\sigma_A^2 \quad \text{۴}$$

$$\sigma_B^2 = 2\sigma_A^2 \quad \text{۳}$$

$$\sigma_A^2 = 4\sigma_B^2 \quad \text{۲}$$

$$\sigma_A^2 = 2\sigma_B^2 \quad \text{۱}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱

$$n(s) = \binom{5}{3} \times 3! = 60, A = \underbrace{\{132, 312, 432, 234, 324\}}_2, \underbrace{\{242, 342, 224, 354, 524\}}_4 \Rightarrow n(A) = 8$$

$$\frac{2}{15} = (A)P \Rightarrow \frac{8}{60} = (A)P$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲

$$^{\circ}215 = ^{\circ}145 - ^{\circ}360 = x \Rightarrow ^{\circ}360 = ^{\circ}110 + ^{\circ}35 + x$$

$$\%59/7 = \frac{100 \times 215}{360} = y \Rightarrow \frac{y}{100} = \frac{^{\circ}215}{^{\circ}360}$$

نمودار سؤال مربوط به گام چهارم چرخه‌ی آمار (یعنی تحلیل داده‌ها) می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

۳

(۱) متغیرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیرعددی‌اند.

(۲) مقیاس فاصله‌ای برای داده‌های قابل مرتب کردن است و اختلاف بین مقادیر داده‌های آن‌ها با معناست.

(۳) اگر هر یک از داده‌های آماری با هم برابر باشند، میانگین آن‌ها برابر با یکی از داده‌ها و واریانس آن‌ها برابر صفر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حجم (اندازه) جامعه ۸۰۰ و اندازه (حجم) نمونه ۲۰۰ است.

۴

$$160600 = 200 - 800 + 800 \times 200 = x - y + xy$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فقط عبارت «الف» نادرست است و درست آن به صورت زیر است: برای توصیف داده‌های

۵

کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۶

$$51 = \frac{{}_2W_{51}}{{}_2W} = \frac{{}_1W_{{}_2H=1H}}{{}_2W} \rightarrow \frac{{}_1W}{{}_2H} = \frac{\text{شاخص توده بدن علی}}{\text{شاخص توده بدن حسن}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

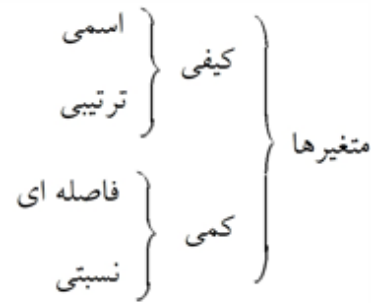
۷

$$\text{kg}3108 = {}^2(91) \times 30 = W \Rightarrow \frac{W}{{}^2(91)} = 30 \Rightarrow \frac{W}{{}^2H} =$$

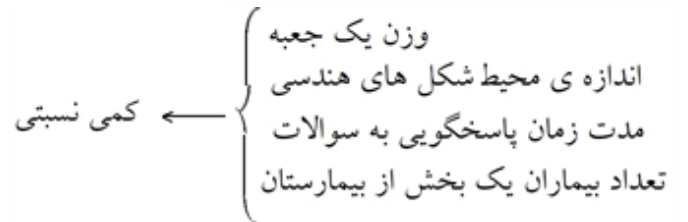
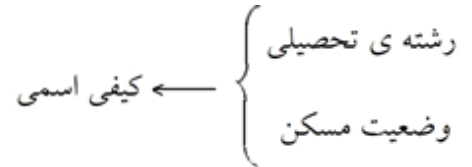
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



حروف الفبا ← کیفی ترتیبی



زمان اولین کلاس ← کمی فاصله ای

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه ها:

(۱) کیفی ترتیبی - کمی نسبتی / (۳) کمی فاصله ای - کمی نسبتی / (۴) کمی نسبتی - کیفی اسمی

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید که هر عددی در بازه ی [۱۰۰، ۳۳۳] را نمی توان در یک آزمون تستی ۱۰ سؤاله کسب کرد. مراحل رشد انسان هم «کودکی، نوجوانی، میانسالی و کهنسالی» است که یک متغیر کیفی ترتیبی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض می کنیم تعداد داده ها برابر $1 + 2n$ باشد. در این صورت n داده قبل از میانه و n داده بعد از میانه قرار دارند و خواهیم داشت:

$$n \frac{10}{3} = \text{مجموع داده های قبل از میانه}$$

$$n \frac{26}{3} = \text{مجموع داده های بعد از میانه}$$

$$6 + 12n = 6 + n \frac{36}{3} = 6 + n \frac{26}{3} + n \frac{10}{3} =$$

$$6 = \frac{(1 + 2n)6}{1 + 2n} = \frac{6 + 12n}{1 + 2n} =$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$Y_0 = 59n - x \sum_{i=1}^n \Rightarrow Y_0 = (59 - x) \sum_{i=1}^n$$

$$(1) 59n + Y_0 = x \sum_{i=1}^n$$

$$Y_0 = 54n - x \sum_{i=1}^n \Rightarrow Y_0 = (54 - x) \sum_{i=1}^n$$

$$(2) 54n + Y_0 = x \sum_{i=1}^n$$

$$10 = n \Rightarrow 59n + Y_0 = 54n + Y_0 \Rightarrow$$

$$610 = \frac{610}{10} = \frac{x \sum_{i=1}^n}{n} = x \Rightarrow 610 = x \sum_{i=1}^n \Rightarrow$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$28 = z + y + x \Rightarrow 8 = \frac{z + y + x}{4} = x$$

$$173/6 = \frac{868}{6} = \frac{228 \times 28 \times 3}{6} = \frac{2(z + y + x) + z + y + x + 2z + 2y + 2x}{6} = y$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$((2nd + a) + \dots + (d + a) + a) \frac{1}{1 + 2n} = x$$

$$(2nd + a) \times \frac{1 + 2n}{2} \times \frac{1}{1 + 2n} = x \Rightarrow nd + a = \frac{2nd + 2a}{2} =$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وقتی با داده دور افتاده مواجه هستیم میانه بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد نسبت به میانگین. ۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$13/5 \text{ میانگین} = \frac{(18 \times 3) + (14 \times 3) + (2 \times 2) + (11 \times 4) + (8/5 \times 2)}{3 + 3 + 2 + 4 + 2} =$$

$$13/5 = \frac{54 + 42 + 2a + 44 + 17}{14} = x \Rightarrow$$

$$16 = a \Rightarrow 32 = 2a \Rightarrow 189 = 157 + 2a \Rightarrow$$

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$8/5, 8/5, 11, 11, 11, 11, 14, 14, 14, 14, 16, 16, 18, 18, 18$$

تعداد داده‌ها ۱۴ است، بنابراین:

$$14 = \frac{14 + 14}{2} = \frac{\text{داده ی هفتم} + \text{داده ی هشتم}}{2} = \text{میانه}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مد داده‌ها عدد ۳ است. بنابراین داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد (در این جا داده $1+a$) برابر ۳ است.

$$۲ = a \Rightarrow ۳ = ۱ + a$$

داده	۲	۶	۳	۷	۴
فراوانی	۲	۱	۴	۲	۳

$$\text{میانگین} = \frac{(۴ \times ۳) + (۷ \times ۲) + (۳ \times ۴) + (۶ \times ۱) + (۲ \times ۲)}{۳ + ۲ + ۴ + ۱ + ۲} = x =$$

$$۴ = \frac{۴۸}{۱۲} = \frac{۱۲ + ۱۴ + ۱۲ + ۶ + ۴}{۱۲} =$$

مرتب کردن داده‌ها
 $۷, ۷, ۶, ۴, ۴, ۴, ۳, ۳, ۳, ۳, ۲, ۲$ →

تعداد داده‌ها = ۱۲ ⇒

$$\text{میانگین} = \frac{۴ + ۳}{۲} = \frac{\text{داده ی ششم} + \text{داده ی هفتم}}{۲} =$$

$$\Rightarrow \text{میانگین} = ۳/۵ + ۴ = ۷/۵ = \text{مجموع میانگین و میانگین}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از دسته‌ی دوم به بعد، دسته‌ها به صورت $\{1 + 1^{-n}, \dots, 1 + 1^{-n}\}$ می‌باشند و چون هر دسته تشکیل دنباله حسابی می‌دهد، پس میانگین دو داده وسط با میانگین داده اول و آخر برابر است. پس:

$$\text{میانگین} = \frac{۱۳۲ + ۱ + ۱۲۲}{۲} = ۵/۶۱۴۴ =$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا داده‌ها را به طور صعودی مرتب می‌کنیم:

$۱۰, ۸, ۸, ۶, ۶, ۶, ۴, ۴, ۴, ۲, ۲$

$$\text{میانگین} = \frac{۱۰ + ۱۶ + ۱۸ + ۱۶ + ۴}{۱۲} = \frac{۱۰ + (۸)۲ + (۶)۳ + (۴)۴ + (۲)۲}{۱۲} = x \cdot ۵/۳ = \frac{۶۴}{۱۲} =$$

تعداد داده‌ها ۱۲ است. پس:

$$\text{میانگین} = \frac{۱۰}{۲} = \frac{۶ + ۴}{۲} = \frac{\text{داده ششم} + \text{داده هفتم}}{۲} =$$

$۴ = \text{داده‌ای با بیشترین تکرار (فراوانی)} = \text{مد}$

مشاهده می‌شود که میانگین، بیشترین مقدار را دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از دسته‌ی دوم به بعد، دسته‌ها به صورت $\{1 + 1^{-n}, \dots, 1 + 1^{-n}\}$ می‌باشند و چون هر دسته تشکیل دنباله حسابی می‌دهد، پس میانگین دو داده وسط با میانگین داده اول و آخر برابر است. پس:

$$\text{میانگین} = \frac{۱۳۲ + ۱ + ۱۲۲}{۲} = ۵/۶۱۴۴ =$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا داده‌ها را به طور صعودی مرتب می‌کنیم:

$۱۰, ۸, ۸, ۶, ۶, ۶, ۴, ۴, ۴, ۲, ۲$

$$\text{میانگین} = \frac{۱۰ + ۱۶ + ۱۸ + ۱۶ + ۴}{۱۲} = \frac{۱۰ + (۸)۲ + (۶)۳ + (۴)۴ + (۲)۲}{۱۲} = x \cdot ۵/۳ = \frac{۶۴}{۱۲} =$$

تعداد داده‌ها ۱۲ است. پس:

$$\text{میانگین} = \frac{۱۰}{۲} = \frac{۶ + ۴}{۲} = \frac{\text{داده ششم} + \text{داده هفتم}}{۲} =$$

$۴ = \text{داده‌ای با بیشترین تکرار (فراوانی)} = \text{مد}$

مشاهده می‌شود که میانگین، بیشترین مقدار را دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای یافتن میانه باید داده‌ها را مرتب کنیم:

۲۰, ۱۹, ۱۸, ۱۷, ۱۶, ۱۵, ۱۴, ۱۴, ۱۳, ۱۲

۱۰ داده داریم که میانه برابر است با:

$$۱۵/۵ = \frac{۱۶ + ۱۵}{۲} = \frac{\text{داده ی پنجم + داده ی ششم}}{۲}$$

حال میانگین برابر است با:

$$۱۵/۸ = \frac{۱۵۸}{۱۰} = \frac{۲۰ + ۱۹ + ۱۸ + ۱۷ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۴ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۲}{۱۰}$$

$$۱۵/۸ - ۱۵/۵ = ۰/۳ = \text{تفاضل میانگین و میانه}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون داده‌های آماری $k(۴ + ۶n) + ۷-$, \dots , $۲k + ۷-$, $k + ۷-$, $۷-$ دنباله‌ای حسابی هستند، پس

میانگین این جملات برابر جمله‌ی وسط است. یعنی داریم:

$$۳۰۰ = \Rightarrow k(۲ + ۳n) + ۷- \Rightarrow k(۲ + ۳n) + ۷- = \frac{(k(۴ + ۶n) + ۷-) + (۷-)}{۲} = ۲۹۳$$

بنابراین میانه‌ی داده‌های k , $۲k$, $۳k$, \dots , $k(۱ + ۳n)$ که دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند، برابر میانگین جمله‌ی اول و آخر

$$\text{یعنی } ۱۵۰ = \frac{۳۰۰}{۲} = \frac{k(۲ + ۳n)}{۲} = \frac{k(۱ + ۳n) + k}{۲}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$= ۴ + \dots + ۴ + ۴ + (۱۰۰ + ۹۹ + ۹۸ + \dots + ۱ + ۰ + \dots - ۹۸ - ۹۹ - \dots) \frac{1}{۲} = y \sum$$

با توجه به این‌که هر عدد با قرینه‌ی موجود است، لذا فقط صفر و ۱۰۰ باقی می‌مانند، از طرفی به تعداد ۲۰۰ تا عدد ۴

داریم که با هم جمع شده‌اند (به تعداد اعضای دامنه):

$$\sum y = -\frac{1}{۲}(۰ + ۱۰۰) + \underbrace{۴ + ۴ + \dots + ۴}_{۲۰۰ \text{ مرتبه}} = -۵۰ + ۲۰۰(۴) = ۷۵۰$$

$$۷۵/۳ = \frac{۷۵۰}{۲۰۰} = \text{مقدار متوسط برد} \Rightarrow$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون میانگین داده‌های آماری $1+x, 2+x, \dots, n+x$ برابر x است، پس خواهیم داشت:

$$x = \frac{n + n^2x + \dots + 2 + nx + 1 + x}{n}$$

$$xn = n + \dots + 3 + 2 + 1 + nx + \dots + nx + x \Rightarrow$$

$$xn = \frac{(1+n)n}{2} + nx + \dots + nx + x \Rightarrow \frac{(1+n)n}{2} - xn = nx + \dots + nx + x \Rightarrow$$

حال میانگین داده‌های مطلوب برابر است با:

$$\frac{n + n^2x + \dots + 2 + nx + 1 + nx}{n} = \text{جدید } x$$

$$\frac{n + \dots + 3 + 2 + 1 + (nx + \dots + nx + x)n}{n} =$$

$$\frac{n + \dots + 3 + 2 + 1}{n} + nx + \dots + nx + x = \frac{(1+n)n}{2} + nx + \dots + nx + x =$$

$$\Rightarrow \frac{1+n}{2} + \frac{(1+n)n}{2} - xn = \text{جدید } x \quad \frac{1-n}{2} - xn = (1-n)\frac{1+n}{2} - xn =$$

$$(1) \quad 29 = y + x \Rightarrow 100 = 12 + 30 + y + 29 + x$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اولاً:

۲۵

ثانیاً: می‌دانیم در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی متناظر به داده‌ی C با فراوانی نسبی f برابر است با $360 \times \frac{f}{100}$ پس:

$$(2) \quad 15 = \frac{540}{36} = x \Rightarrow 360 \times \frac{x}{100} = 54$$

$$14 = y \Rightarrow (2), (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۶

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = \frac{x}{5} \\ \Gamma = \frac{y}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 = x \\ 20 = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 30 = y + x \\ 40 = y + 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 = \frac{30 + y + x}{3} \\ 30 = \frac{50 + y + 2x}{3} \end{array} \right\}$$

$$\Gamma / \Delta = \frac{\Gamma + \Delta}{2} = \frac{\frac{y}{5} + \frac{x}{5}}{2} = x$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید $a = x - 4$ و $b = x + 3$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{a\Gamma - 2\Delta}{3} = \left(\frac{a - 4}{3} \right) \Gamma + 3 = b \quad \text{و} \quad \frac{a - 4}{3} = x$$

و چون میانگین a ها برابر x است، پس میانگین b ها برابر خواهد بود با $\frac{x\Gamma - 2\Delta}{3}$.

نکته: اگر x میانگین داده‌های x باشد و $y = B + xA$ ، آن‌گاه میانگین y ها برابر خواهد بود با $B + xA$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۸

$$x \cdot 0.6 / 2 = (x \cdot 0.3 / 1) \cdot 2 \quad \xrightarrow{\text{برابر می شود. ۲}} \quad \xrightarrow{\text{اضافه می شود. ۳}} \quad x \cdot \frac{3}{100} + x \quad \rightarrow \quad x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{میانگین جدید} = (5)(0.6/2) \\ \text{میانگین جدید} = (4)(0.6/2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{میانگین جدید-میانگین جدید} = (0.6/2)5 - (0.6/2)4 = 0.6/2 = 0.3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر داده‌ها در مقدار ثابتی ضرب یا تقسیم شوند یا مقدار ثابتی به آن‌ها اضافه یا کم شود دقیقاً همین تغییرات در میانگین آن‌ها نیز اتفاق می‌افتد، با مقایسه‌ی داده‌ها معلوم می‌شود که هریک از آن‌ها در $\frac{1}{3}$ ضرب شده و سپس یک واحد از آن‌ها کم شده است. پس:

$$2 = 1 - 9 \times \frac{1}{3} = \text{میانگین}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تعدادی از داده‌ها را حذف کنیم و میانگین عوض نشود، میانگین داده‌های حذف شده با میانگین داده‌های اولیه برابر است. میانگین داده‌های ۲۲، ۲۰، ۱۹، ۱۵، ۱۱، ۱۰ و ۸ برابر است با:

$$15 = \frac{105}{7} = \frac{22 + 20 + 19 + 15 + 11 + 10 + 8}{7} = x$$

در بین گزینه‌ها میانگین دو داده‌ی ۱۰ و ۲۰ برابر ۱۵ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر داده‌های جدید را y در نظر بگیریم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 6 + x^2 = y \\ x^2 = y \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 2x = (3 + x)^2 = y$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{x^4}{x} = \frac{x^2}{x} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^4 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

$$48 = (4 -) \times 12 = x \times 12 = 12x + \dots + x + x$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر واریانس داده‌های آماری برابر صفر باشد، به این معناست که تمامی داده‌های آماری با هم برابرند. در این صورت خواهیم داشت:

$$9 - 2z = 1 + 7y = 15 = 1 - 4x = 23 + t$$

$$2 - t = 8 - t \Rightarrow 15 = 23 + t$$

$$4 = x \Rightarrow 16 = 4x \Rightarrow 15 = 1 - 4x$$

$$2 = y \Rightarrow 14 = 7y \Rightarrow 15 = 1 + 7y$$

$$12 = z \Rightarrow 24 = 2z \Rightarrow 15 = 9 - 2z$$

با مشخص شدن مقادیر x و y و z و t مقادیر داده‌های آماری مطلوب به صورت زیر خواهند بود:

$$8, 8, 36, 5, 3, 11, 16, 3, 0$$

مرتب کردن داده‌ها
 $36, 16, 11, 5, 3, 3, 0, 8$

$$12 = \frac{3}{2} - \frac{27}{2} = 1Q - 3Q \quad \frac{27}{2} = \frac{16 + 11}{2} = 3Q \quad \frac{3}{2} = \frac{0 + 3}{2} = 1Q$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اعداد را به صورت زیر حذف و اختلافشان را جایگزین می‌کنیم.

$$\boxed{1, 100}, \boxed{2, 99}, \boxed{3, 98}, \dots, \boxed{49, 52}, \boxed{50, 51}$$

$$99 \quad 97 \quad 95 \quad 3 \quad 1$$

$$50 = \frac{^2 50}{50} = \frac{99 + \dots + 3 + 1}{50} = x$$

$$19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اعداد زوج ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸ هستند پس با زوجها کاری نداریم ولی فردها را طوری کم می‌کنیم که اعداد تکراری به وجود نیایند.

$$18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$9 - 17 \quad 3 - 19 \quad 11 - 15$$

$$\sqrt[2]{21} = \sigma \Rightarrow 21 = 4x \frac{63}{12} = ^2 \sigma \Rightarrow ^2 d \frac{1 - ^2 n}{12} = ^2 \sigma$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) - ^2 \left(x \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \right) = ^2 \sigma$$

$$^2 \left(\frac{n + \dots + 3 + 2 + 1}{n} \right) - (^2 n + \dots + ^2 3 + ^2 2 + ^2 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = ^2 \sigma \Rightarrow$$

$$(1 - ^2 n) \frac{1}{12} = \frac{^2(1+n)}{4} - (1 + ^2 n)(1+n) \frac{1}{6} = \left(\frac{(1+n)n}{2} \right) - \frac{(1+^2 n)(1+n)n \frac{1}{6}}{n} = ^2 \sigma \Rightarrow$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. میانگین بعد از ده سال برابر است با:

$$25 = \frac{16 + 15 + 14}{3} + 10 = x$$

واریانس بعد از ۱۰ سال برابر است با:

$$\sqrt[2]{\frac{2}{3}} = \sigma \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{^2(15-14) + ^2(15-15) + ^2(15-16)}{3} = ^2 \sigma$$

$$0.032 = \frac{3/2}{100} = \frac{0.15}{25} \approx \frac{\sigma}{x} = CV$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در واقع داده‌های آماری $\frac{9}{5}$ برابر شده و سپس ۳۲ واحد به آن‌ها اضافه شده است، پس

واریانس جدید برابر است با:

$$81 = 25 \times \left(\frac{9}{5} \right)^2 = ^2 \sigma$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$\sigma/4 = \frac{4}{10} = \frac{2 \times 2}{6 - 1 \times 2} = \frac{x \sigma |a|}{b - xa} = (b - ax) CV$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$\frac{8}{3} = \frac{22 + 20 + 22}{3} = 2\sigma \Rightarrow 96 = x: 98, 96, 94 \Rightarrow \text{حداکثر } x \Rightarrow \begin{cases} \text{یکسان } \sigma \\ \text{حداقل } CV \end{cases}$$

$$\frac{1}{6\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2 \times 24}} = \frac{\sigma}{x} = \min CV \Rightarrow$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$3 = \frac{180}{60} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} = \text{میانگین}$$

$$44/1 = \sqrt{44/1} = \text{انحراف معیار} \Rightarrow 2/1 \text{ واریانس}$$

اضافه شدن مقداری ثابت به داده‌ها روی میانگین اثر می‌گذارد و آن را به همان اندازه اضافه می‌کند. پس میانگین جدید برابر است با:

$$12 = 9 + 3 = x$$

اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند: $2/1 = \sigma$

و نسبت انحراف معیار به میانگین جدید برابر است با:

$$1/0 = \frac{12}{120} = \frac{2/1}{12}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۱

$$4 = 2(2) = \text{واریانس}$$

$$\text{واریانس} = \frac{\text{مجموع مجزورات تفاضل میانگین از داده ها}}{\text{تعداد داده ها}}$$

$$\frac{2(15 - 20x) + \dots + 2(15 - 1x)}{20} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80 = 20 \times 4 = \text{مجموع مجزورات تفاضل میانگین از داده‌ها}$$

از آن‌جا که مجموع داده‌های حذف شده $(31 = 8 + 13)$ با مجموع داده‌های اضافه شده $(31 = 11 + 20)$ یکسان است، بنابراین میانگین تغییر نمی‌کند، حال داریم:

$$\text{واریانس} = \frac{[2(15 - 11) + 2(15 - 20)] + [2(15 - 13) + 2(15 - 18)] - 80}{20} =$$

$$5/4 = \frac{108}{20} = \frac{41 + 13 - 80}{20} = \frac{(16 + 25) + (4 + 9) - 80}{20} =$$

$$\Rightarrow \text{واریانس} = 5/4 \Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sqrt{5/4} \approx 1.118$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت، همه‌ی مؤلفه‌های دوم مساوی هستند. بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست است. چون $۷ = ۲۷ = ۳۷$ است، میانگین نیز با هر یک از آن‌ها برابر است.

(۲) درست است. چون $۷ = ۲۷ = ۳۷$ است، میانه نیز با هر یک از آن‌ها برابر است.

(۳) نادرست است. چون $۷ = ۲۷ = ۳۷$ است، واریانس آن‌ها صفر است.

(۴) درست است. چون $۷ = ۲۷ = ۳۷$ است، انحراف معیار آن‌ها صفر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\overbrace{۷, ۸, ۹, a, ۱۱, ۱۳, ۱۳} \quad \overbrace{۱۵, ۱۶, ۱۸, c, ۲۰, ۲۱, d}$$

چهارده داده داریم که داده‌ی چهارم چارک اول است: $a = ۱Q$ و از آن‌جا که مقدار چارک اول بر روی نمودار جعبه‌ای برابر ۱۰ گردیده است پس:

$$۱۰ = a$$

داده یازدهم چارک سوم است: $c = ۳Q$ و از آن‌جا که مقدار چارک سوم بر روی نمودار جعبه‌ای برابر ۱۹ است پس:

$$۱۹ = c$$

میانه‌ی داده‌ها نیز برابر است با:

$$۱۴ = b \Rightarrow ۱۴ = \frac{۲۸}{۲} = \frac{۱۵ + ۱۳}{۲} = \frac{\text{داده ی هفتم} + \text{داده ی هشتم}}{۲}$$

و بیشترین داده نیز براساس نمودار جعبه‌ای داده شده برابر ۲۲ است پس $d = ۲۲$ و در نهایت:

$$۰/۷۵ = \frac{۳}{۴} = \frac{۱۹ - ۲۲}{۱۰ - ۱۴} = \frac{c - d}{a - b}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$\overbrace{۱۰/۶, ۱۰/۶, ۱۱/۲, ۱۱/۵, ۱۱/۹} \quad \overbrace{۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲}$$

$$۱/۱۲ = \frac{۱۲/۳ + ۹/۱۱}{۲} = \frac{\text{داده پنجم} + \text{داده ششم}}{۲} = \text{میانه} = ۲Q$$

و در نتیجه:

$$۱۲/۸ = ۳Q, ۲/۱۱ = ۱Q$$

$$۱۲۵/۰ = \frac{۱ - ۲}{۸} = \frac{۲ - ۰/۲}{۱۶} = \frac{۰/۲ - ۲۴/۲}{۶/۱} = \frac{۲۴/۲ - ۲۴}{۶/۱} = \frac{۱۲/۸ + (۱/۱۲)۲ - ۲/۱۱}{۲/۱۱ - ۱۲/۸}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار داریم:

$$۲/۵ = ۱۲ - ۱۴/۵ = \sigma \Rightarrow ۱۴/۵ = ۱۲ + \sigma \rightarrow ۱۴/۵ = x + \sigma$$

$$۶/۲۵ = ۲(۲/۵) = ۲\sigma$$

$$\frac{A}{۶۰} = ۶/۲۵ \Rightarrow \frac{\text{مجموع مجذورات تفاضل میانگین از داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} =$$

$$۳۷۵ = ۶/۲۵ \times ۶۰ = A \Rightarrow$$

$$18 = \frac{90}{5} = \frac{17 + 19 + 18 + 19 + 17}{5} = A^x$$

$$18 = \frac{90}{5} = \frac{19 + 17 + 16 + 18 + 20}{5} = B^x$$

میانگین نمرات هر دو دانش‌آموز یکسان است و داریم:

$$\frac{F}{5} = \frac{(1)^2 + 0 + (1)^2}{5} = \frac{2(18 - 19)^2 + 2(18 - 18)^2 + 2(18 - 17)^2}{5} = A^{2\sigma}$$

$$\frac{2(18 - 19)^2 + 2(18 - 17)^2 + 2(18 - 16)^2 + 2(18 - 18)^2 + (18 - 20)^2}{5} = B^{2\sigma}$$

$$2 = \frac{1 + 1 + 4 + 0 + 4}{5} =$$

چون $B^{2\sigma} > A^{2\sigma}$ پس عملکرد دانش‌آموز A بهتر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در بازه‌ی $(x - 2\sigma, x + 2\sigma)$ قرار دارند، از آن‌جا که $\sigma = 2, x = 5$ می‌باشد، داریم:

$$(9, 1) = (4 + 5, 4 - 5) = (2\sigma + x, 2\sigma - x)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n را می‌توان از رابطه‌ی روبه‌رو هم محاسبه کرد:

$$2 \left(\frac{n^2 x + \dots + 1^2 x}{n} \right) - \frac{2}{n} (x^2 + \dots + 1^2 x) = 2\sigma$$

نکته: ضریب تغییرات، خارج‌قسمت انحراف معیار بر میانگین است. $\left(\frac{\sigma}{x} = CV \right)$

$$4/2 = \frac{24}{10} = \frac{600}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} i^2 x}{10} = x$$

$$24/54 = 76/5 - 60 = 2(4/2) - \frac{600}{10} = (x) - \frac{\sum_{i=1}^{10} i^2 x}{10} = 2\sigma$$

$$\frac{339\sqrt{}}{6} = \frac{339\sqrt{4}}{24} = \frac{339 \times 16\sqrt{}}{24} = \frac{5424\sqrt{}}{24} = \frac{10}{10} x \frac{24/54\sqrt{}}{4/2} = \frac{\sigma}{x} = CV$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون انحراف معیار داده‌ها صفر است همه‌ی داده‌ها مساوی‌اند.

فرض می‌کنیم $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ ، داده‌های جدید عبارت‌اند از $x_1 + x, x_2 + x, \dots, x_n + x$ که تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲ می‌دهند. اگر n داده تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d دهند،

آن‌گاه $d = 2\sigma \left(\frac{1 - 2^n}{12} \right)$ است.

$$4 = \sigma \Rightarrow 16 = \left(\frac{1 - 2^n}{12} \right)^2 2\sigma = 2\sigma$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sigma^2 = \frac{{}_0^2 x^2 + \dots + {}_1^2 x^2}{n} - (\bar{x})^2$$

با جای‌گذاری در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\sigma^2 = \frac{{}_0^2 x^2 + \dots + {}_1^2 x^2}{10} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{10x^2 + \dots + 1x^2}{10} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{10}(10x^2 + \dots + 1x^2) - (\bar{x})^2 = 16$$

$$10\sigma^2 = 10x^2 + \dots + 1x^2 \Rightarrow$$

$$15, 13, 11, 10, 10, 9, 9, 7, 4, 4, 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. داده‌ها عبارت‌اند از:

۱۱ داده داریم که داده‌ی وسط (داده‌ی ششم = عدد ۹)، میانه (چارک دوم) است. چارک اول داده‌ها عدد ۴ و چارک سوم داده‌ها عدد ۱۱ است. در نمودار جعبه‌ای داده‌های بین چارک اول و سوم داخل جعبه قرار می‌گیرند. یعنی انحراف معیار داده‌های ۷، ۹، ۱۰، ۱۰ را پیدا می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{45}{5} = \frac{20 + 18 + 7}{5} = \frac{(10 \times 2) + (9 \times 2) + 7}{5} = 9$$

$$\sqrt{2/1} = \sigma \Rightarrow 2/1 = \frac{6}{5} = \frac{2 + 0 + 4}{5} = \frac{{}^2(9-10) + {}^2(9-9) + {}^2(9-7)}{5} = 2\sigma \approx 1/1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با دقت در دو دسته از داده‌ها متوجه می‌شویم که هر یک از داده‌های گروه A، ۲ برابر

شده سپس ۲۵٪ واحد به هر کدام اضافه شده است. می‌دانیم که جمع و تفریق داده‌ها با یک مقدار ثابت تأثیری روی واریانس ندارد. اما اگر همگی داده‌ها در مقدار ثابت k ضرب شوند، آن‌گاه:

واریانس داده‌های جدید = واریانس داده‌های اولیه $\times k^2$

$$\frac{{}^2}{A} \sigma^2 = \frac{{}^2}{B} \sigma^2 \Rightarrow {}^2(2) \times \frac{{}^2}{A} \sigma^2 = \frac{{}^2}{B} \sigma^2$$

بنابراین:

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴



عنوان آزمون : ترکیبیات و احتمال

نام و نام خانوادگی :

زمان آزمون :

پایه تحصیلی :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۲/۱۲/۰۳

نام دبیر :

۱ با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۸ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام غیرتکراری می توان ساخت؟

۵۰ (۴)

۳۲ (۳)

۴۰ (۲)

۳۶ (۱)

۲ رمز یک گاوصندوق از یک عدد ۳ رقمی تشکیل شده است. اگر بدانیم عدد رمز بزرگتر از ۳۰۰ و زوج می باشد و همچنین امتحان کردن هر رمز ۱۰ ثانیه زمان لازم دارد، برای باز کردن این گاوصندوق حداکثر چند ثانیه زمان لازم داریم؟

۳۵۰۰ (۴)

۳۴۹۰ (۳)

۳۰۰۰ (۲)

۲۷۰۰ (۱)

۳ کتاب ریاضی متفاوت و چند کتاب فیزیک متفاوت را طوری کنار هم چیده ایم که کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های فیزیک نیز کنار هم قرار گرفته اند. اگر تعداد حالات ممکن ۲۸۸ حالت باشد، تعداد کتاب های فیزیک کدام است؟

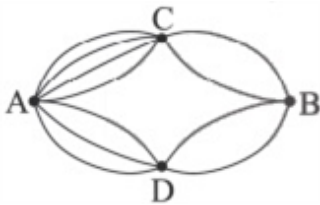
۱۲ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۴ طبق نقشه ی مقابل به چند حالت می توانیم از شهر A به شهر B برویم و دوباره به شهر A برگردیم به طوری که در مسیر رفت و برگشت، فقط از یکی از دو شهر C یا D عبور کنیم و از مسیر بین هر دو شهر، از مسیری که رفته ایم، بازنگردیم؟



۱۲ (۴)

۲۴ (۳)

۳۶ (۲)

۴۸ (۱)

۵ ۴ کتاب متمایز با عنوان ریاضی و ۳ کتاب متمایز با عنوان فیزیک را به چند طریق می توان روی هم قرار داد به طوری که وقتی آنها را یکی یکی برمی داریم تا در گوشه دیگر اتاق روی هم بچینیم، ترتیب عنوان کتابها (ریاضی و فیزیک) مانند قبل باشد؟

۱۴۴ (۴)

۳۱۵ (۳)

۴۳۲ (۲)

۶۳۰ (۱)

۶ تعداد اعداد طبیعی زوج در بازه (۷۰۰۰، ۲۰۰۰) با ارقام غیرتکراری کدام است؟

۱۳۲۳ (۴)

۱۲۳۲ (۳)

۶۷۲ (۲)

۱۴۰۰ (۱)

۷ با ارقام ۰، ۶، ۶، ۰، ۳، ۲، ۲، چند عدد ۷ رقمی فرد ساخته می شود؟

۷۲ (۴)

۸۴ (۳)

۶۰ (۲)

۸۰ (۱)

۸ با حروف عبارت «چراغ سبز» چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت که حروف «ب» و «ز» در کنار هم آمده باشند؟

۶! (۴)

۵! (۳)

۲!۶! (۲)

۲!۵! (۱)

۹ حاصل عبارت $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$ به ازای $n = 1401$ کدام است؟

$$\frac{1402}{1403 \times 1401} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1403 \times 1401}{1402} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1403}{1402} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1402}{1403} \quad \text{۱}$$

۱۰ اگر $P(9, r) = 504$ باشد، حاصل $P(6, r)$ کدام است؟

$$6! \quad \text{۴}$$

$$5! \quad \text{۳}$$

$$4! \quad \text{۲}$$

$$3! \quad \text{۱}$$

۱۱ با حروف «قورمه سبزی» و بدون تکرار، چند کلمه ۹ حرفی می‌توان ساخت که در آنها کلمه «سبز» وجود داشته باشد و حروف «ق» و «ر» در کنار هم باشند؟

$$6! \times 3! \quad \text{۴}$$

$$6! \times 2! \quad \text{۳}$$

$$7! \times 3! \quad \text{۲}$$

$$5! \times 3 \quad \text{۱}$$

۱۲ با حروف عبارت «تقدیر حقیقت و تقلیل مرارت» اگر تعداد جایگشت‌هایی که با «مرارت» آغاز و به «حقیقت» پایان

می‌یابد، برابر $\frac{n!}{m^p}$ باشد، حاصل $m + n + p$ کدام است؟

$$19 \quad \text{۴}$$

$$18 \quad \text{۳}$$

$$17 \quad \text{۲}$$

$$16 \quad \text{۱}$$

۱۳ با حروف کلمه «دوریجان» اگر تعداد جایگشت‌های ۷ حرفی که حروف پشت سر هم تکراری نباشد به صورت $D^i R^j O^n$ باشد، $D + R + O$ کدام است؟ (O و R, D اعداد اول متمایزند.)

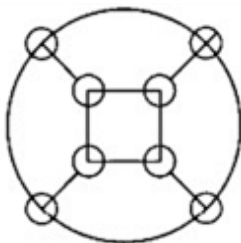
$$16 \quad \text{۴}$$

$$15 \quad \text{۳}$$

$$12 \quad \text{۲}$$

$$10 \quad \text{۱}$$

۱۴ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند دور میز گردی به شکل زیر قرار گیرند؟



$$480 \quad \text{۴}$$

$$720 \quad \text{۳}$$

$$2520 \quad \text{۲}$$

$$10080 \quad \text{۱}$$

۱۵ اگر از هر کدام از مناطق ۱ تا ۵، ۵ نفر برای مسابقه اعلام آمادگی کرده باشند و بخواهیم تیمی متشکل از ۵ نفر از سه منطقه تشکیل دهیم، به چند طریق این کار میسر است؟

$$22500 \quad \text{۴}$$

$$20000 \quad \text{۳}$$

$$15000 \quad \text{۲}$$

$$7500 \quad \text{۱}$$

۱۶ اگر تعداد زیرمجموعه‌ی $2k$ عضوی از یک مجموعه‌ی n عضو شامل عضو خاص a برابر تعداد زیرمجموعه‌های $k + 3$ عضوی از همان مجموعه و فاقد عضو خاص b باشد، تعداد زیرمجموعه‌های $3k + 3$ عضوی این مجموعه کدام می‌تواند باشد؟

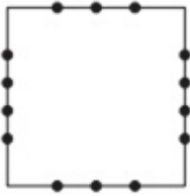
$$28 \quad \text{۴}$$

$$21 \quad \text{۳}$$

$$15 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

۱۷ به چند طریق می‌توان سه نقطه از نقاط شکل مقابل را انتخاب کرد که بتوان با آن سه نقطه یک مثلث تشکیل داد؟



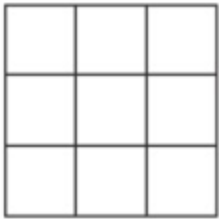
۲۵۴ (۴)

۲۶۴ (۳)

۳۵۴ (۲)

۳۶۴ (۱)

۱۸ با رنگ کردن تعداد از خانه‌های شکل مقابل یک چهارضلعی را مشخص می‌کنیم. احتمال آنکه این چهارضلعی مربع باشد، کدام است؟



$\frac{5}{18}$ (۴)

$\frac{7}{18}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱۹ از میان علی، امیر و ۵ نفر از دوستانشان، ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم، طوری که اگر علی انتخاب شود، امیر انتخاب نشود. این کار به چند حالت ممکن است؟

۴۵ (۴)

۲۵ (۳)

۳۰ (۲)

۱۵ (۱)

۲۰ علی با پدر و مادر و ۳ فرزند دیگر آنها در یک صف قرار می‌گیرند. در چند حالت علی بین پدر و مادرش قرار گرفته است؟ (نه لزوماً بلافاصله)

۳۶۰ (۴)

۴۸۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

۲۱ کدام تساوی زیر صحیح است؟

$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$ (۳)

$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{7}{4}$ (۲)

$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{7}{5}$ (۱)

$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{2}$ (۴)

۲۲ شش نقطه‌ی متمایز روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد به طوری که رأس‌های آن از این شش نقطه انتخاب شده باشند؟

۳۰ (۴)

۶۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۲۰ (۱)

۲۳ اگر $\binom{8}{3} = n^2 - 5n + 9$ مجموع مقادیر ممکن برای n کدام است؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۲۴) تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ که در آنها ۳ و ۴ و ۵ همزمان نباشند، کدام است؟

- ۱) ۳۵ ۲) ۳۱ ۳) ۲۷ ۴) ۲۳

۲۵) ۴۰۰۰ نفر در یک آزمون استخدامی شرکت کرده‌اند، این آزمون در مرحله‌ی نهایی که بین ۴۰۰۰ نفر برگزیده برگزار شده است از ۵ سؤال ۳ گزینه‌ای تشکیل شده است. اگر یک سؤال به سؤال‌ها اضافه شود، تعداد پاسخ‌نامه‌های موجود چقدر تغییر می‌کند؟

- ۱) ۱۰۲۴ ۲) ۲۰۴۸ ۳) ۳۰۷۲ ۴) ۴۰۹۶

۲۶) از بین ۵ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی، ۴ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۳ دانش‌آموز رشته‌ی انسانی یک تیم ۴ نفره انتخاب کرده‌ایم. در چند انتخاب از هر رشته حداقل یک نفر حضور دارد؟

- ۱) ۵۴۰ ۲) ۲۷۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۱۲۰

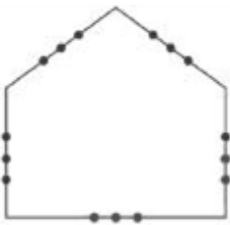
۲۷) چند عدد چهارده رقمی با ارقام ۷ و ۸ می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۶ بوده و از هر دو طرف (سمت چپ و راست) یکسان خوانده شوند؟

- ۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۸) با جایگشت حروف کلمه «zeppelin»، چند کلمه ۸ حرفی ساخته می‌شود به طوری که هیچ دو حرف صداداری کنار هم قرار نگیرند؟

- ۱) ۳۶۰۰ ۲) ۴۸۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۲۴۰۰

۲۹) با نقاط مشخص شده روی اضلاع پنج‌ضلعی زیر، چند مثلث ساخته می‌شود به طوری که ۳ رأس مثلث روی ۳ ضلع مختلف پنج‌ضلعی واقع شوند؟



- ۱) ۲۷ ۲) ۱۳۵ ۳) ۲۷۰ ۴) ۴۵۰

۳۰) می‌خواهیم از بین ۸ زوج (۱۶ نفر)، ۳ نفر انتخاب کنیم به طوری که هیچ زوجی با هم انتخاب نشوند. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

- ۱) ۴۸۴ ۲) ۵۶ ۳) ۴۴۸ ۴) ۴۸۰

۳۱) با جایگشت حروف کلمه «confirm»، چند کلمه می‌توان نوشت که c بعد از f قرار گیرد و حروف صدادار به ترتیب الفبایی باشند؟

- ۱) ۲۱۰ ۲) ۸۱۰ ۳) ۱۲۶۰ ۴) ۵۲۰

۳۲) چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

- ۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱ ۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

۳۳ بر روی سه خط موازی مقابل تعدادی نقطه وجود دارد. تعداد مثلث‌های ممکن به طوری که رأس‌های آن روی این نقاط قرار گیرد، کدام است؟



۳۱ (۴)

۳۵ (۳)

۲۷ (۲)

۲۴ (۱)

۳۴ از میان ۵ جفت کفش می‌خواهیم ۳ لنگه کفش انتخاب کنیم، به طوری که شامل یک جفت کفش جور نباشد. تعداد حالات ممکن چند تا است؟

۸۰ (۴)

۴۰ (۳)

۶۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

۳۵ به چند طریق ۶ دانش‌آموز می‌توانند در ۴ رشته ورزشی متمایز ثبت‌نام کنند به طوری که در هر رشته ورزشی، حداقل یک دانش‌آموز ثبت‌نام کند؟

۱۵۶۰ (۴)

۷۹۲ (۳)

۷۲۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

۳۶ اگر $P(A \cup B') + P(B \cup A') = \frac{14}{11}$ ، آنگاه حاصل $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ کدام است؟

 $\frac{4}{11}$ (۴) $\frac{3}{22}$ (۳) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{8}{11}$ (۱)

۳۷ از بین اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ سه عدد به طور متوالی و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد، کدام است؟

 $\frac{31}{480}$ (۴) $\frac{91}{570}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۱)

۳۸ ۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. احتمال آنکه دو نفر خاص پشت هم سخنرانی کنند، چقدر است؟

 $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۱)

۳۹ اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای «رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۵»، «رو شدن عدد کوچک‌تر از ۳» و «رو شدن عدد ۴ یا ۵» را به ترتیب A ، B و C بنامیم، کدام دو پیشامد ناسازگارند؟

 C, B (۴) C', B' (۳) C, B' (۲) A, C' (۱)

۴۰ درون جعبه‌ای ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز قرار دارد. از این جعبه سه مهره انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی مهره‌های قرمز بیشتر است؟

 $\frac{24}{35}$ (۴) $\frac{23}{35}$ (۳) $\frac{21}{35}$ (۲) $\frac{22}{35}$ (۱)

۴۱ در بین اعداد طبیعی دو رقمی، عددی را انتخاب می‌کنیم. پیشامد آن که عدد انتخابی زوج یا مضرب ۳ باشد، اما مضرب ۶ نباشد، چند عضو دارد؟

- ۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴)

۴۲ در هیئت مدیره یک شرکت، ۹ نفر عضو هستند. در رأی‌گیری برای یک سرمایه‌گذاری، ۴ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. اگر سه نفر به طور تصادفی انتخاب شوند، احتمال این‌که نظر هیچ دو نفری مثل هم نباشد، چقدر است؟

- $\frac{2}{7}$ (۱) $\frac{1}{21}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

۴۳ سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای چهارمین بار «رو» بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ۱۰ بار پرتاب سکه به این نتیجه رسید، کدام است؟

- ۱۲۰ (۱) ۳۶ (۲) ۲۱۰ (۳) ۸۴ (۴)

۴۴ چند عدد سه رقمی وجود دارد که دارای رقم تکراری باشند؟

- ۲۴۶ (۱) ۲۵۲ (۲) ۲۷۵ (۳) ۲۹۴ (۴)

۴۵ علی، محمد و شش نفر از دوستان آن‌ها را می‌خواهیم به یک گروه ۳ نفری و یک گروه ۵ نفری تقسیم کنیم. در چند حالت علی و محمد در یک گروه قرار می‌گیرند؟

- ۲۶ (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴ (۴)

۴۶ یک تاس را پرتاب می‌کنیم اگر عدد اول فرد ظاهر شود، دو سکه پرتاب می‌کنیم در غیر این صورت یک سکه و یک تاس پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

- ۳۸ (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۳ (۴)

۴۷ سه عدد متمایز بین ۱ تا ۹ به تصادف انتخاب کرده‌ایم. به چه احتمالی مجموع آن‌ها فرد است، به شرطی که بدانیم حاصل ضرب آن‌ها بر ده بخش‌پذیر باشد؟

- $\frac{3}{8}$ (۱) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴)

۴۸ احتمال آنکه تیم فوتبالی اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{4}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{3}$ است و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{3}{5}$ افزایش خواهد یافت. چقدر احتمال دارد که این تیم قهرمان بشود ولی اصلی‌ترین رقیبش را نبرد؟

- $\frac{7}{20}$ (۱) $\frac{13}{20}$ (۲) $\frac{11}{60}$ (۳) $\frac{19}{60}$ (۴)

تیراندازهای A ، B و C به ترتیب با احتمال‌های $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ و $\frac{4}{7}$ به هدف می‌زنند. اگر هر سه نفر تیراندازی کنند، احتمال آنکه C به هدف نزند و از بین A و B حداکثر یک نفر به هدف بزند، کدام است؟

$$\frac{5}{14} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{14} \quad \text{۳}$$

$$\frac{3}{70} \quad \text{۲}$$

$$\frac{11}{70} \quad \text{۱}$$

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، اگر $P(A') = \frac{3}{7}$ و $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $P(A \cap B)$ چقدر است؟

$$\frac{1}{7} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5}{7} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{7} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{7} \quad \text{۱}$$

احتمال آنکه درسا هدف خود در زندگی را بیابد، $\frac{1}{10}$ و احتمال آنکه در کنکور موفق شود، $\frac{1}{4}$ است. در صورتی که به

هدف خودش دست یابد، انگیزه‌ی او برای تلاش زیاد شده و احتمال موفقیت او در کنکور $\frac{1}{3}$ می‌شود. احتمال آنکه درسا به هدف خود برسد ولی در کنکور موفق نشود، کدام است؟

$$\frac{1}{15} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{40} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{20} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{12} \quad \text{۱}$$

دو تاس را می‌ریزیم. اگر حداقل عدد یک تاس زوج نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ است؟

$$\frac{1}{9} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

می‌دانیم $P(A) = \frac{1}{6}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(B'|A') = \frac{1}{7}$ است. در این صورت دو پیشامد A و B
 ۱ ناسازگار هستند
 ۲ مستقل هستند
 ۳ سازگار هستند
 ۴ ناسازگار و مستقل هستند

احتمال قبول شدن سارینا در درس ریاضی دو برابر احتمال قبول شدن سارینا در درس ریاضی است. اگر با احتمال $\frac{1}{88}$ حداقل یکی از این دو نفر در درس ریاضی قبول شوند، با چه احتمالی سارینا در درس ریاضی قبول می‌شود؟

$$\frac{1}{6} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{85} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{9} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{8} \quad \text{۱}$$

سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا «رو» بیاید. با چه احتمالی این اتفاق در چهارمین پرتاب رخ می‌دهد؟

$$\frac{1}{32} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{16} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{8} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۱}$$

۵۶ در جعبه‌ای ۱۲۰ لامپ وجود دارد که ۸۰ تای آنها به رنگ سبز و ۵۴ تای آنها خراب است. اگر یک لامپ به تصادف از این جعبه انتخاب شود با کدام احتمال این لامپ سبز یا خراب است؟

$$\frac{51}{60} \quad \text{۴}$$

$$\frac{49}{60} \quad \text{۳}$$

$$\frac{47}{60} \quad \text{۲}$$

$$\frac{37}{60} \quad \text{۱}$$

۵۷ احتمال آنکه تُرک شیرازی دل حافظ را به دست آورد، $\frac{5}{10}$ و احتمال اینکه حافظ بدون تلاش وی عاشق ترک شیرازی شود $\frac{3}{10}$ است. اگر حافظ عاشق شده باشد چقدر احتمال دارد کار ترک شیرازی بوده باشد؟

$$\frac{1}{4} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5}{8} \quad \text{۳}$$

$$\frac{3}{8} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

۵۸ خانواده‌ای ۵ فرزندی، ۲ فرزند دختر دارد. احتمال این که پسرها پشت سرهم متولد شده باشند، کدام است؟

$$\frac{3}{16} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{5} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{10} \quad \text{۱}$$

۵۹ احتمال قبولی نیکا در امتحان زبان $\frac{7}{10}$ و احتمال قبولی هلسا در این امتحان $\frac{7}{10}$ است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در آزمون قبول شود، چقدر است؟

$$\frac{7}{11} \quad \text{۴}$$

$$\frac{7}{15} \quad \text{۳}$$

$$\frac{7}{49} \quad \text{۲}$$

$$\frac{7}{94} \quad \text{۱}$$

۶۰ در جعبه‌ای ۵ کارت با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. دو کارت به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم یکی از کارت‌ها شماره ۴ است. با کدام احتمال، عدد کارت دیگر، زوج است؟

$$\frac{1}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{10} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{4}{9} \quad \text{۱}$$

۶۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، احتمال آنکه هیچ‌یک از دو پیشامد A یا B روی ندهد کدام است؟

$$\frac{5}{6} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{6} \quad \text{۱}$$

۶۲ از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید، ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سبز، ۳ مهره به تصادف یکی پس از دیگری انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره دوم سفید و هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند، کدام است؟

$$\frac{3}{198} \quad \text{۴}$$

$$\frac{8}{99} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{10} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{9} \quad \text{۱}$$

۶۳ اگر A و B دو پیشامد مفروض از فضای نمونه‌ای S بوده و $P(A) = \frac{5}{10}$ و $P(B) = \frac{7}{10}$ و $P(A' | B) = \frac{2}{10}$ باشد، $P(A | B')$ کدام است؟

$$\frac{22}{35} \quad \text{۴}$$

$$\frac{18}{35} \quad \text{۳}$$

$$\frac{13}{35} \quad \text{۲}$$

$$\frac{17}{35} \quad \text{۱}$$

۶۴

احتمال آنکه علی و محمد پنالته خودشان را در ضربات پنالته گل کنند به ترتیب، $\frac{6}{10}$ و $\frac{7}{10}$ است. اگر احتمال آنکه حداقل پنالته یک نفر گل شود، $\frac{95}{100}$ باشد، احتمال گل شدن پنالته محمد به شرط گل شدن پنالته علی کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{7}{12}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

۶۵

فردی در مسابقات تنیس روی میز به ترتیب با سه فرد A ، B و C مسابقه می‌دهد. اگر احتمال برد او در سه بازی به ترتیب $\frac{6}{10}$ ، $\frac{7}{10}$ و $\frac{5}{10}$ باشد، به چه احتمالی حداقل ۲ مسابقه را برنده می‌شود؟

$\frac{1}{83}$ (۴)

$\frac{1}{65}$ (۳)

$\frac{1}{94}$ (۲)

$\frac{1}{79}$ (۱)

۶۶

در ظرفی ۶ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه وجود دارند. مهره‌ها را به توالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. اگر مهره سوم خارج شده سیاه باشد، چه قدر احتمال دارد مهره اول و دوم سفید باشند؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{7}{12}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

۶۷

دو سکه پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه رو ظاهر شوند یک سکه و در غیر این صورت دو سکه‌ی دیگر می‌اندازیم. با کدام احتمال ۲ بار در مجموع پرتاب‌ها رو ظاهر شده است؟

$\frac{5}{16}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{7}{16}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۶۸

جعبه‌ی A و B هر کدام شامل ۵ کارت با شماره‌های ۱ تا ۵ هستند. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و کاردی از آن انتخاب می‌کنیم. اگر عدد خارج شده زوج باشد از همان جعبه و در غیر این صورت از جعبه‌ی دیگر کاردی انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مجموع ارقام کارت‌های خارج شده عددی زوج باشد، کدام است؟

$\frac{1}{48}$ (۴)

$\frac{1}{46}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{33}$ (۱)

۶۹

احتمال اینکه پارسا یکی از سه رشته A ، B و C را در دانشگاه انتخاب کند، به ترتیب، $\frac{45}{100}$ ، $\frac{2}{100}$ و $\frac{35}{100}$ است. اگر او یکی از سه رشته A ، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال $\frac{2}{100}$ ، $\frac{25}{100}$ و $\frac{3}{100}$ در آن رشته پذیرفته می‌شود. پارسا با کدام احتمال در رشته مورد علاقه‌اش پذیرفته می‌شود؟

$\frac{1}{19}$ (۴)

$\frac{1}{195}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{245}$ (۱)

۷۰

درون ظرف اول دو سیب و دو گلابی و در ظرف دوم سه سیب و یک گلابی قرار دارد. تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر زوج آمد یک میوه از ظرف اول را به ظرف دوم انتقال می‌دهیم. اگر فرد آمد یک میوه از ظرف دوم را به ظرف اول منتقل می‌کنیم. اکنون ظرفی با میوه بیشتر را انتخاب و از آن میوه‌ای خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این میوه سیب است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{5}{8}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

۷۱

درون کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارد. مهره‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم، آن مهره را به همراه یک مهره هم‌رنگ خودش به کیسه برمی‌گردانیم. سپس مهره‌ی جدیدی به تصادف انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

۷۲ درون کیسه‌ای n مهره سفید و n مهره قرمز وجود دارد. مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم و بدون نگاه کردن به رنگ آن، آن را کنار می‌گذاریم، مهره‌ی دیگری به تصادف انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی مهره‌ی دوم قرمز است؟

$$\frac{n-1}{2n} \quad \text{۴} \quad \frac{n}{2n-1} \quad \text{۳} \quad \frac{2}{3} \quad \text{۲} \quad \frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

۷۳ درون جعبه A سه مهره سفید و دو مهره قرمز و درون جعبه B دو مهره سفید و دو مهره قرمز قرار دارد. اگر احتمال انتخاب جعبه A را با $P(A)$ و احتمال انتخاب جعبه B را با $P(B)$ نمایش دهیم، رابطه $2P(A) = 2P(B)$ برقرار است، با چشمان بسته جعبه‌ای را انتخاب و از آن مهره‌ای انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی آن مهره سفید است؟

$$\frac{2}{5} \quad \text{۴} \quad \frac{3}{5} \quad \text{۳} \quad \frac{14}{25} \quad \text{۲} \quad \frac{13}{25} \quad \text{۱}$$

۷۴ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر رو بیاید، دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه پشت ظاهر شود، چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad \text{۴} \quad \frac{1}{2} \quad \text{۳} \quad \frac{1}{4} \quad \text{۲} \quad \frac{3}{4} \quad \text{۱}$$

۷۵ در جعبه‌ی A ۸ مهره قرمز و ۴ سفید و در جعبه‌ی B ۶ مهره قرمز و ۲ سفید و در جعبه‌ی C ۴ مهره قرمز و ۲ سفید قرار دارد. از جعبه‌ی اول ۴ مهره و از جعبه‌ی دوم ۶ مهره خارج کرده و در جعبه‌ی سوم می‌ریزیم. حالا یک مهره به تصادف از جعبه‌ی سوم انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره‌ی انتخابی سفید باشد کدام است؟

$$\frac{31}{96} \quad \text{۴} \quad \frac{29}{96} \quad \text{۳} \quad \frac{19}{64} \quad \text{۲} \quad \frac{3}{64} \quad \text{۱}$$

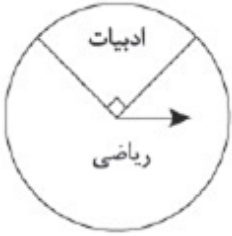
۷۶ دو ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۰ مهره آبی و ۸ مهره قرمز و در ظرف دوم ۲۰ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس مهره‌ای از ظرف دوم برمی‌داریم، با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

$$\frac{138}{189} \quad \text{۴} \quad \frac{148}{189} \quad \text{۳} \quad \frac{184}{189} \quad \text{۲} \quad \frac{183}{189} \quad \text{۱}$$

۷۷ در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سبز و ۴ مهره سفید وجود دارد. مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر رنگی بود ۲ مهره به ترتیب و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم و اگر سفید بود ۳ مهره با همین ترتیب خارج می‌کنیم. احتمال آنکه مهره‌ی اول و سوم خارج‌شده هم‌رنگ باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad \text{۴} \quad \frac{2}{9} \quad \text{۳} \quad \frac{1}{2} \quad \text{۲} \quad \frac{5}{18} \quad \text{۱}$$

سامان در مسابقه‌ای شرکت کرده است. اگر بسته‌ی سؤال ادبیات را بگیرد، به احتمال ۶۰٪ و اگر بسته‌ی سؤال ریاضی را بگیرد، ۹۰٪ برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه به او نوع سؤالی که می‌دهند مشخص شود، او به چه احتمالی برنده می‌شود؟



$$\frac{۳۵}{۴۰} \quad \text{۴}$$

$$\frac{۹}{۱۰} \quad \text{۳}$$

$$\frac{۳۳}{۴۰} \quad \text{۲}$$

$$\frac{۱۷}{۲۰} \quad \text{۱}$$

۵۰۰ هزار نفر در کنکور تجربی شرکت می‌کنند که ۵۰ هزار نفر از آنها دارای سهمیه‌ی خاصی هستند. اگر ۳۰ درصد ظرفیت قبولی برای سهمیه باشد، نسبت احتمال قبولی فردی که سهمیه دارد به فردی که سهمیه ندارد، تقریباً چقدر است؟

$$۴/۳ \quad \text{۴}$$

$$۳/۸ \quad \text{۳}$$

$$۳/۵ \quad \text{۲}$$

$$۳ \quad \text{۱}$$

تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر عدد کم‌تر از ۳ رو شد، از درون جعبه‌ای که شامل ۴ لامپ معیوب و ۲ لامپ سالم است لامپی را انتخاب می‌کنیم و اگر عدد تاس بیشتر از ۲ رو شد، از درون جعبه‌ای که شامل ۳ لامپ معیوب و ۳ لامپ سالم است، لامپی را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی لامپ انتخابی معیوب است؟

$$\frac{۲}{۳} \quad \text{۴}$$

$$\frac{۱}{۳} \quad \text{۳}$$

$$\frac{۴}{۹} \quad \text{۲}$$

$$\frac{۵}{۹} \quad \text{۱}$$

۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{الف) یکان صفر باشد: } \frac{5}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{1}{-} = 20$$

$$\text{ب) یکان ۵ باشد: } \frac{4}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{1}{-} = 16$$

$$\text{تعداد اعداد سه‌رقمی موردنظر: } 20 + 16 = 36$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در بدترین حالت باید تمامی اعداد زوج بزرگ‌تر از ۳۰۰ را امتحان کنیم. لذا تعداد این اعداد را به دست می‌آوریم.

$$\frac{10}{7} \times \frac{5}{3} = 350$$

اما در این ۳۵۰ عدد، خود ۳۰۰ نیز وجود دارد پس چون بزرگ‌تر از ۳۰۰ مدنظر می‌باشد، ۳۴۹ عدد را قبول می‌کنیم. چون امتحان کردن هر رمز ۱۰ ثانیه زمان می‌برد، این گاو صندوق حداکثر در مدت $349 \times 10 = 3490$ ثانیه باز می‌شود.

۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تعداد کتاب‌های فیزیک را n در نظر می‌گیریم. داریم:

$$4! \times (n!) \times 2 = 288 \Rightarrow n! = \frac{288}{48} \Rightarrow n! = 6 \Rightarrow n = 2$$

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} A$$

$$A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} A$$

$$4 \times 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 24 + 12 = 36$$

۴! × ۳! : اول ریاضی بعد فیزیک یک در میان : حالت اول

۴! × ۲! : ۲ ریاضی ۳ فیزیک ۲ ریاضی : حالت دوم

۴! × ۳! : فیزیک + ۲ ریاضی + فیزیک + ۲ ریاضی + ۱ فیزیک : حالت سوم

$$\text{تعداد کل} = 3 \times 4! \times 3! = 432$$

۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید ۴ خانه را پر کنیم. خانه یکان با ارقام {۰, ۲, ۴, ۶, ۸} پر می‌شود و خانه هزارگان با ارقام {۲, ۳, ۴, ۵, ۶} پر شود:

$$\frac{4}{-} \times \frac{8}{-} \times \frac{7}{-} \times \frac{3}{-} = 672$$

{۲, ۴, ۶}

حالت دوم: یکان با {۰, ۸} پر شود:

$$\frac{5}{-} \times \frac{8}{-} \times \frac{7}{-} \times \frac{2}{-} = 560$$

{۰, ۸}

$$\text{پس } 560 + 672 = 1232 \text{ می‌توان نوشت.}$$

۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۷ جایگاه در نظر می‌گیرید. عدد ۳ در سمت راست هفت خانه قرار می‌گیرد. در سمت چپ یکی از ۴ عدد ۲، ۲، ۶، ۶ می‌نشیند و در ۵ خانه باقی‌مانده ۵! حالت باقی می‌ماند. ضمناً عدد به‌دست آمده را بر $(۲!)^۲$ به‌خاطر تکرار اعداد تقسیم می‌کنیم.

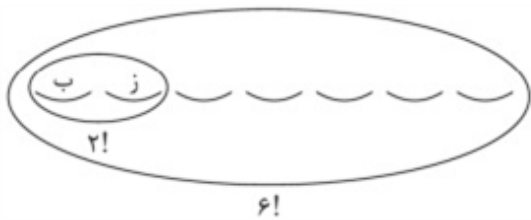
$$\frac{۴ \times ۵! \times ۱}{۲! ۲! ۲!} = ۶۰$$

حالت ۵!

۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

«ز» و «ب» می‌توانند با یکدیگر جابه‌جا شوند. سپس «ز» و «ب» را یک شیء در نظر می‌گیریم.



$$۶! \times ۲! = \text{حالات مطلوب}$$

۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} &= \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)n!} = n+1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)} = \frac{(n+1+1)(n+1-1)}{n+1} = \frac{(n+2)n}{n+1} = \frac{۱۴۰۳ \times ۱۴۰۱}{۱۴۰۲} \end{aligned}$$

۱۰

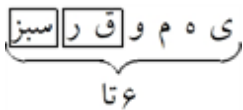
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} P(۹, r) = ۵۰۴ &\Rightarrow \frac{۹!}{(۹-r)!} = ۵۰۴ \\ \Rightarrow \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{(۹-r)!} = ۹ \times ۸ \times ۷ &\Rightarrow (۹-r)! = ۶! \Rightarrow ۹-r = ۳ \Rightarrow r = ۳ \\ P(۶, r) = P(۶, ۳) &= \frac{۶!}{(۶-۳)!} = \frac{۶!}{۳!} = \frac{۶ \times ۵!}{۶} = ۵! \end{aligned}$$

۱۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

حروف کلمه‌ی «سبز» را در یک دسته و حروف «ق» و «ر» را در یک دسته قرار می‌دهیم. توجه کنید که حروف کلمه‌ی «سبز» نمی‌توانند جابه‌جا شوند، ولی حروف «ق» و «ر» می‌توانند جابه‌جا شوند.



تعداد کلماتی که می‌توان ساخت: $۶! \times ۲!$

۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی است تعداد جایگشت‌های حروف «تقدیر و تقلیل» را به دست آوریم که تعداد آن برابر است با:

$$\frac{۱۱!}{۲! ۲! ۲! ۲!} = \frac{۱۱!}{۲^۴} = \frac{n!}{m} \Rightarrow m + n + p = ۲ + ۱۱ + ۵ = ۱۸$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر جایگاهها را به صورت ۷ اتاق کنار هم در نظر بگیریم:

$$۷۶۶۶۶۶۶ = ۷ \times ۶^۶ = ۷ \times ۲^۶ \times ۳^۶$$

$$D + R + O = ۷ + ۲ + ۳ = ۱۲$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ۴ نفر برای میز داخلی انتخاب کرده و سپس کنار هم قرار می‌دهیم.

$$\binom{۸}{۴} \times ۳! \times ۴! = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۴!} \times ۳! \times ۴! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۶ = ۱۰۰۸۰$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت‌های انتخاب ۵ نفر از سه منطقه به صورت‌های ۱ + ۱ + ۳ یا ۱ + ۲ + ۲ است.

که هر کدام را به صورت جداگانه حساب کرده و جمع می‌کنیم.

$$۱ + ۱ + ۳ \Rightarrow \binom{۵}{۲} \binom{۳}{۱} \binom{۵}{۱} \binom{۵}{۱} \binom{۵}{۳} = ۱۰ \times ۳ \times ۲۵ \times ۱۰ = ۷۵۰۰$$

$$۱ + ۲ + ۲ \Rightarrow \binom{۵}{۲} \binom{۳}{۱} \binom{۵}{۱} \binom{۵}{۲} \binom{۵}{۲} = ۱۰ \times ۳ \times ۲۵ \times ۱۰ = ۷۵۰۰ = ۱۰ \times ۳ \times ۵ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۵۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۷۵۰۰ + ۱۵۰۰۰ = ۲۲۵۰۰$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{۲k} \xrightarrow{\text{شامل عضو } a} \binom{n-1}{۲k-1} \\ \binom{n}{k+۳} \xrightarrow{\text{فاقد عضو } b} \binom{n-1}{k+۳} \end{array} \right. \Rightarrow \binom{n-1}{۲k-1} = \binom{n-1}{k+۳}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۲k-1 + k+۳ = n-1 \Rightarrow ۳k+۳ = n \Rightarrow \binom{n}{۳k+۳} \\ \text{یا} \\ ۲k-1 = k+۳ \Rightarrow k=۴ \end{array} \right.$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تعداد کل حالات انتخاب سه نقطه از نقاط شکل داده شده برابر است با:

$$\binom{۱۴}{۳} = \frac{۱۴!}{۳! \times ۱۱!} = \frac{۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲}{۶} = ۳۶۴$$

حال اگر هر سه نقطه روی یک ضلع باشند با آنها نمی‌توان یک مثلث تشکیل داد بنابراین داریم:

$$\text{تعداد حالات نامطلوب} = \binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳} = ۱ + ۴ + ۱ + ۴ = ۱۰$$

بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$۳۶۴ - ۱۰ = ۳۵۴$$

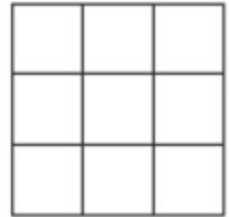
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
با رنگ کردن خانه‌های شکل مقابل می‌توانیم یک مربع یا مستطیل بسازیم.
تعداد کل مربع‌های برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

تعداد کل چهارضلعی‌ها (مستطیل‌ها) برابر است با:

$$\binom{4}{2} \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\binom{1}{1} \binom{5}{3}}_{\text{علی انتخاب شود}} + \underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{علی انتخاب نشود}} = 10 + 15 = 25$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

سه جایگاه برای علی و پدر و مادرش انتخاب می‌کنیم و علی را در جایگاه وسط و برای پدر و مادر ۲ حالت داریم، سپس ۳ نفر مابقی را در سه جایگاه باقی‌مانده جایگذاری می‌کنیم:

$$\binom{6}{3} \times 2! \times 2! = 240$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$
با توجه به این رابطه، فقط گزینه‌ی ۳ درست است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تعداد مثلث‌ها برابر است با تعداد حالات انتخاب ۳ نقطه از بین این ۶ نقطه:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در دو حالت تساوی داده شده برقرار است:

$$۱) n^2 - 5n + 9 = 3 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 0 \Rightarrow (n - 2)(n - 3) = 0$$

$$\Rightarrow n = 2, n = 3$$

$$۲) (n^2 - 5n + 9) + 3 = 8 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 1)(n - 4) = 0$$

$$\Rightarrow n = 1, n = 4$$

مجموع مقادیر ممکن: $2 + 3 + 1 + 4 = 10$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی} = \binom{7}{4}$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی که ۳ و ۴ و ۵ عضو آن‌ها باشد} = \binom{4}{1} = 4$$

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = \binom{7}{4} - 4 = 35 - 4 = 31$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون هر سؤال ۴ حالت دارد (۳ گزینه‌ی دیگر حالت هم‌جواب ندارند!) داریم:

$$\frac{4}{\text{سؤال ۱}} \frac{4}{2} \frac{4}{3} \frac{4}{4} \frac{4}{5} = 4^5$$

اگر یک سؤال اضافه شود، داریم:

$$\frac{4}{\text{سؤال ۱}} \frac{4}{2} \frac{4}{3} \frac{4}{4} \frac{4}{5} \frac{4}{6} = 4^6$$

تعداد حالاتی که اضافه شده است برابر است با:

$$4^6 - 4^5 = 4^5(4 - 1) = 4^5 \times 3 = 2^{10} \times 3 = 1024 \times 3 = 3072$$

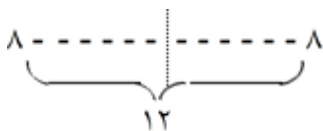
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید از یک رشته دو نفر انتخاب شوند. داریم:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{2} \\ = 10 \times 4 \times 3 + 5 \times 6 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 = 120 + 90 + 60 = 270$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. رقم اول و آخر باید ۸ باشد و مابقی به گونه‌ای باشند که با این ۲ تا ۸ مجموعه‌شان به ۳

بخش‌پذیر باشد که اگر حالت‌ها را بررسی کنیم به ۴ تا ۷ یا ۱۰ تا ۷ بقیه ۸ می‌رسیم.



$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

حالت اول: انتخاب ۲ از ۶ (یک نیمه) برای قرار دادن ۲ تا ۷ پس:

$$\binom{6}{5} = 6$$

حالت دوم: انتخاب ۵ از ۶ (یک نیمه) بر قرار دادن ۵ تا ۷ پس:

$$\text{تعداد کل حالات} = 15 + 6 = 21$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ۳ جفت کفش از ۵ جفت کفش انتخاب می‌کنیم، سپس از هر جفت یک لنگه:

$$\binom{5}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = \frac{5 \times 4}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد توابع پوشا از مجموعه ۶ عضوی به ۴ عضوی را باید به دست آوریم:

$$4^6 - \left(\binom{4}{1} (4-1)^6 - \binom{4}{2} (4-2)^6 + \binom{4}{3} (4-3)^6 \right) = 4096 - (2916 - 384 + 4) = 1560$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(A \cup B') + P(B \cup A') = \frac{14}{11}$$

$$1 - P((A \cup B')') + 1 - P((B \cup A')') = \frac{14}{11}$$

$$1 - P(A' \cap B) + 1 - P(B' \cap A) = \frac{14}{11}$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) + P(B' \cap A) = 2 - \frac{14}{11}$$

$$\Rightarrow P(B - A) + P(A - B) = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{8}{11}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ ، ۶ عدد مضرب ۳ و ۱۴ عدد داریم که مضرب ۳ نیستند.

$$P(A) = \frac{14 \times 13 \times 6}{20 \times 19 \times 18} = \frac{91}{570}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2! \times 4!}{5!} = \frac{2}{5}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. پیشامدها را می‌نویسیم:

$$A = \{6\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$C = \{4, 5\}$$

$$A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B' = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$C' = \{1, 2, 3, 6\}$$

دو پیشامد زمانی ناسازگارند که اشتراک آن‌ها تهی باشد، در بین گزینه‌ها $B \cap C = \emptyset$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از ۳ مهره انتخابی دو مهره قرمز، یک مهره آبی یا هر سه مهره قرمز است.

$$P = \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{6 \times 3 + 4}{\frac{7 \times 6 \times 5}{6}} = \frac{22}{35}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

عدد انتخابی زوج : $A = \{10, 12, 14, \dots, 98\} \Rightarrow$ تعداد $= \frac{98 - 10}{2} + 1 = 45 \Rightarrow n(A) = 45$

عدد انتخابی مضرب ۳ : $B = \{12, 15, \dots, 99\} \Rightarrow$ تعداد $= \frac{99 - 12}{3} + 1 = 30 \Rightarrow n(B) = 30$

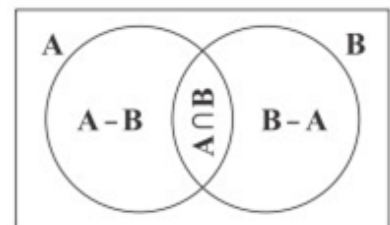
$\underbrace{A \cap B}_{\text{مضرب ۶}} = \{12, 18, \dots, 96\} \Rightarrow$ تعداد $= \frac{96 - 12}{6} + 1 = \frac{84}{6} + 1 = 15 \Rightarrow n(A \cap B) = 15$

$n(\underbrace{A \cup B}_{\text{مضرب ۶ نیست زوج یا مضرب ۳}}) = n(A - B) + n(B - A)$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = 45 + 30 - 2(15) = 45$$

نمودار پیشامدهای $A - B$ و $B - A$ و $A \cap B$ به صورت زیر است:



$$n(s) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ممتنع مخالف موافق

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 3 \times 2 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در پرتاب دهم، چهارمین «رو» ظاهر می‌شود، بنابراین در ۹ پرتاب قبلی، ۳ بار سکه به «رو»

ظاهر شده است که تعداد حالت‌های آن برابر با $\binom{9}{3} = 84$ می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تعداد کل اعداد سه رقمی : $900 = 10^3 - 10^2 = 999 - 99$

(طبق اصل ممتنع) $252 = 900 - 648 = 900 - 8 \times 81 = 900 - 648$: تعداد اعداد سه رقمی با ارقام غیرتکراری

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو حالت وجود دارد. حالتی که علی و محمد در گروه سه نفره باشند و حالتی که علی و محمد در گروه ۵ نفره باشند. در حالت اول یک نفر از شش نفر باقی مانده را به $\binom{6}{1}$ حالت انتخاب می‌کنیم تا با علی و محمد گروه سه نفره تشکیل دهند. در حالت دوم سه نفر از شش نفر باقی مانده را به $\binom{6}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم تا با علی و محمد گروه پنج نفره تشکیل دهند. پس:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{3} = 6 + 20 = 26$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در آزمایش پرتاب یک تاس، عدد اول فرد (۲ حالت) دارد که شامل ۳ و ۵ است و در غیر این صورت (۴ حالت) یعنی ارقام ۱، ۲، ۴ و ۶ ظاهر می‌شود. حال اگر:

الف) عدد اول فرد ظاهر شود (۲ حالت) دو سکه پرتاب می‌کنیم:

$$(4 = 2 \times 2 \text{ حالت})$$

ب) در غیر این صورت (۴ حالت) یک سکه و یک تاس پرتاب می‌کنیم:

$$(12 = 2 \times 6 \text{ حالت})$$

و در نهایت تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با:

$$8 + 48 = 56$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در فضای نمونه جدید باید عدد ۵ و حداقل یک عدد زوج موجود باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$4 \times 7 = 28$$

بقیه اعداد به جز عدد زوج انتخاب شده و ۵ تعداد اعداد زوج

حالت مطلوب در فضای نمونه جدید این است که مجموع آنها فرد باشد، پس باید هر دو عدد انتخاب شده غیر از ۵، زوج باشند که تعداد اعضای پیشامد مطلوب عبارت است از: $4 \times 3 = 12$

$$P = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. احتمال آنکه این تیم اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $P(A)$ و احتمال قهرمانی این تیم را $P(B)$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(B|A) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5} P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

خواسته‌ی سؤال $P(B - A)$ است که داریم:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{3}{20} = \frac{20 - 9}{60} = \frac{11}{60}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

به هدف زدن این سه تیرانداز پیشامدهای مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{7}, P(C) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(C') = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

متمم اینکه از بین A و B حداکثر یک نفر به هدف بزند آن است که هر دو نفر A و B به هدف بزنند، پس داریم:

$$A \text{ و } B \text{ هر دو به هدف بزنند} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{14}$$

$$\Rightarrow P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$$

بنابراین خواسته‌ی سؤال برابر است با:

$$P(C' \cap ((A \cap B)')) = P(C') \cdot P((A \cap B)') = \frac{1}{5} \times \frac{11}{14} = \frac{11}{70}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(A) = \frac{1}{10} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{30}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{1}{15}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فضای نمونه محدودشده را در جدول زیر با علامت و فضای مطلوب را با علامت مشخص کرده ایم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
۲	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
۳	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
۴	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
۵	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
۶	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

$$P(A) = \frac{9}{26-9} = \frac{9}{17} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{1 - P(A)} = \frac{P(A \cup B)'}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B)' = \frac{7}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{12}$$

$$P(A \cup B)' = \frac{7}{12} \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

از طرفی $P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ است، یعنی $P(A \cap B) = 0$ می باشد و دو پیشامد A و B ناسازگار هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. احتمال قبولی سارینا و ساینرا را به ترتیب $P(A)$ و $P(B)$ می نامیم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{P(A)=2P(B)=x}{\rightarrow \cdot / 8} = x + \frac{x}{2} - x \times \frac{x}{2} \Rightarrow \cdot / 8 = \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$\times 2 \rightarrow x^2 - 3x + 1/76 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1/76}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1/96}}{2} = \frac{3 \pm 1/4}{2} \xrightarrow{.<x<1} x = 0/8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معنی این سؤال این است که در سه پرتاب اول «پشت» و در پرتاب چهارم «رو» بیاید.

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر سبز بودن لامپها را با A و خراب بودن لامپها را با B نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{۸۰}{۱۲۰} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$P(B) = \frac{۵۴}{۱۲۰} = \frac{۹}{۲۰}$$

از آنجایی که سبز بودن لامپ و خراب بودن آن، دو پیشامد کاملاً مستقل است داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= \frac{۲}{۳} + \frac{۹}{۲۰} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۹}{۲۰} = \frac{۲}{۳} + \frac{۹}{۲۰} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۴۰ + ۲۷ - ۱۸}{۶۰} = \frac{۴۹}{۶۰}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۷

(عاشق شدن حافظ | دلبری ترک شیرازی)

$$= \frac{P(\text{عاشق شدن حافظ و دلبری ترک شیرازی})}{P(\text{عاشق شدن حافظ})} = \frac{۰/۵}{۰/۵ + ۰/۳} = \frac{۵}{۸}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۸

$$n(S) = \binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

$$n(A) = \left\{ \text{پ پ پ د د د پ پ پ د د د پ پ پ د د د پ پ پ د د د پ پ پ د د د پ پ پ د د د} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۰}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. احتمال قبولی نیکا را $P(A)$ و احتمال قبولی هلسا را $P(B)$ می‌نامیم مسئله از ما ۵۹

$P(A \cup B)$ را خواسته و چون A و B مستقل از هم هستند. پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{۸}{۱۰} + \frac{۷}{۱۰} - \frac{۵۶}{۱۰۰} = \frac{۱۵}{۱۰} - \frac{۵۶}{۱۰۰} = \frac{۹۴}{۱۰۰}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون دو کارت با جایگذاری انتخاب می‌شوند پس تأثیری بر روی هم ندارند. از این رو اگر ۶۰

یکی ۴ باشد، احتمال اینکه دیگری زوج شود برابر $\frac{۲}{۵}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۱

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left[\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \right] = 1 - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶۲

۲ حالت داریم:

(۱) مهره‌ی اول قرمز، مهره‌ی دوم سفید و مهره‌ی سوم سبز باشد:

$$\frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{2}{9}$$

(۲) مهره‌ی اول سبز، مهره‌ی دوم سفید و مهره‌ی سوم قرمز باشد:

$$\frac{2}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{9}$$

$$\text{جواب} : 2 \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{8}{99}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۶۳

$$P(A' | B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow 0.2 = \frac{0.3 - P(A \cap B)}{0.3} \Rightarrow 0.06 = 0.3 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.24$$

$$P(A | B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B')}$$

$$= \frac{0.5 - 0.24}{0.7} = \frac{0.26}{0.7} = \frac{26}{70} = \frac{13}{35}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۶۴

$$P(A) = 0.6, P(M) = 0.7, P(A \cup M) = 0.95$$

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) \Rightarrow$$

$$0.95 = 0.6 + 0.7 - P(A \cap M) \Rightarrow P(A \cap M) = 1/3 - 0.95 = 0.35$$

$$\Rightarrow P(M | A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.35}{0.6} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که نتایج مسابقات مستقل هستند، داریم:

۶۵

$$P(\text{برد } 2) = P(\text{دقیقاً } 2 \text{ برد}) + P(\text{دقیقاً } 3 \text{ برد})$$

$$= \left(\frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} \right) + \left(\frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} \right) = \frac{650}{1000} = 0.65$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۶۶

$$P(\text{سومی سیاه | اولی و دومی سفید}) = \frac{n(\text{سومی سیاه و اولی و دومی سفید})}{n(\text{سومی سیاه})}$$

$$= \frac{\binom{6}{2} \times 2! \times \binom{4}{1} \times 1!}{\binom{4}{1} \times 9!} = \frac{5}{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{پشت} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \text{هر دو رو} \rightarrow \frac{1}{4} \\ \text{هر دو رو} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \text{هر دو پشت} \rightarrow \frac{1}{4} \\ \text{یکی رو دیگری پشت} \rightarrow \frac{2}{4} \rightarrow \text{یکی رو دیگری پشت} \rightarrow \frac{2}{4} \end{array} \right.$$

$$P = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{2+1+4}{16} = \frac{7}{16}$$

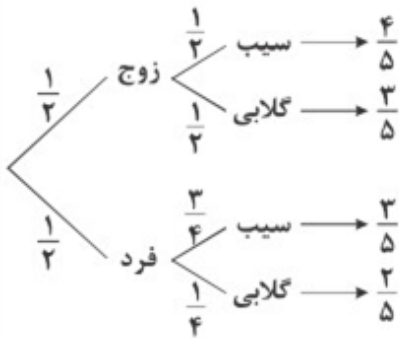
چون جعبه‌ها یکسان هستند احتمال آنها با هم برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{جعبه } A \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \rightarrow 1 \xrightarrow{\text{جعبه دیگر}} 1,3,5 \quad \frac{2}{5} \\ \text{فرد} \\ \frac{1}{5} \rightarrow 2 \xrightarrow{\text{همان جعبه}} 4 \quad \frac{1}{5} \\ \text{زوج} \\ \frac{1}{5} \rightarrow 3 \xrightarrow{\text{جعبه دیگر}} 1,3,5 \quad \frac{2}{5} \\ \text{فرد} \\ \frac{1}{5} \rightarrow 4 \xrightarrow{\text{همان جعبه}} 2 \quad \frac{1}{5} \\ \text{زوج} \\ \frac{1}{5} \rightarrow 5 \xrightarrow{\text{جعبه دیگر}} 1,3,5 \quad \frac{2}{5} \\ \text{فرد} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{18+5}{10} \right) = \frac{23}{50} = 0.46$$

$$P = 0.45 \times 0.2 + 0.2 \times 0.25 + 0.35 \times 0.3 = 0.245$$



$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{9}{40} + \frac{2}{40} = \frac{7}{20} + \frac{11}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مهره انتخابی اول قرمز باشد: ۷۱

$$P_1 = \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = \frac{4}{9} \times \frac{5}{10} = \frac{2}{9}$$

در صورتی که مهره انتخابی اول آبی باشد:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

احتمال کل برابر است با:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۲

روش اول:

$$P(\text{اولی سفید} | \text{دومی قرمز}) = P(\text{اولی قرمز} | \text{دومی قرمز}) + P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی قرمز})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{دومی قرمز}) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

روش دوم: مهره اول را در نظر نمی‌گیریم:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$P(A) + P(B) = 1 \xrightarrow{P(A)=P(B)} P(A) + \frac{2}{3}P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{سفید بودن}) = P(A) \times P(\text{سفید بودن} | A) + P(B) \times P(\text{سفید بودن} | B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{25} + \frac{1}{5} = \frac{14}{25}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. احتمال مطلوب شاخه‌های (۲)، (۳) و (۵) است.



$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

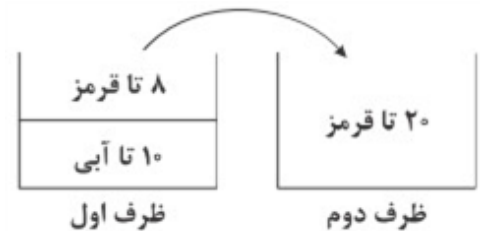
در جعبه‌ی سوم ۴ تا از A ، ۶ تا از B و ۶ تا از C داریم:

$$P = \frac{4}{16} \times \frac{4}{12} + \frac{6}{16} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{16} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{12} + \frac{3}{32} + \frac{1}{8}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{مهره از جعبه A و سفید باشد.}}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{مهره از جعبه B و سفید باشد.}}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{مهره از جعبه C و سفید باشد.}}$

$$= \frac{8 + 9 + 12}{96} = \frac{29}{96}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مهره انتخاب شده از ظرف اول یا قرمز است یا آبی. پیشامد قرمز بودن را با G نمایش می‌دهیم.



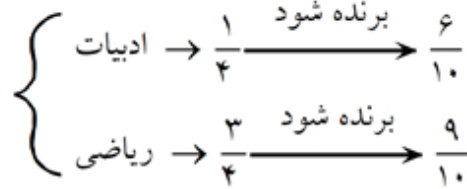
$$P(G) = \frac{8}{18} \times 1 + \frac{20}{21} = \frac{8 \times 21 + 10 \times 20}{18 \times 21} = \frac{4 \times 21 + 5 \times 20}{9 \times 21} = \frac{184}{189}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{مهره اول} \rightarrow \begin{cases} \text{سفید} \rightarrow \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{مهره آخر سفید}} \frac{3}{8} \\ \text{سبز} \rightarrow \frac{2}{9} \xrightarrow{\text{مهره آخر سبز}} \frac{1}{8} \\ \text{قرمز} \rightarrow \frac{2}{9} \xrightarrow{\text{مهره آخر قرمز}} \frac{2}{8} \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{12 + 2 + 6}{9 \times 8} = \frac{20}{9 \times 8} = \frac{5}{18}$$

احتمال اینکه عقربه ریاضی را نشان بدهد، $\frac{3}{4}$ و احتمال اینکه ادبیات را نشان بدهد، $\frac{1}{4}$ است.



$$P(\text{برنده}) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{6+27}{4 \times 10} = \frac{33}{40}$$

اگر تعداد افرادی که قبول می‌شوند x باشد، در این صورت $\frac{0.3x}{50000}$ نفر از داوطلبین دارای سهمیه و $\frac{0.7x}{45000}$ از داوطلبینی که سهمیه ندارند، در دانشگاه پذیرفته می‌شوند.

$$P(\text{قبولی فردی که سهمیه دارد}) = P_1 = \frac{0.3x}{50000}$$

$$P(\text{قبولی فردی که سهمیه ندارد}) = P_2 = \frac{0.7x}{45000}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{0.3x}{50000}}{\frac{0.7x}{45000}} = \frac{3}{5} \times \frac{9}{7} = \frac{3}{8}$$

≈

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. احتمال رو شدن عدد کمتر از ۳ برابر $\frac{2}{6}$ و احتمال رو شدن عدد بیشتر از ۲ برابر $\frac{4}{6}$ است. ۸۰

$$P(\text{لامپ معیوب}) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{2 \times 4 + 4 \times 3}{6 \times 6} = \frac{4 \times 5}{6 \times 6} = \frac{5}{9}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴



عنوان آزمون : کاربرد مشتق

نام و نام خانوادگی :

زمان آزمون :

پایه تحصیلی :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۲/۱۱/۰۷

نام دبیر :

۱ تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + ax + b|$ فقط در $x = -1$ مشتق ندارد. این تابع روی بازه $[k, 1]$ اکیداً صعودی است. حداقل k کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{2}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{۱}$$

۲ رفتار تابع $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ روی بزرگترین دامنه‌اش مطابق کدام گزینه است؟

۱ تابع در فاصله $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲ تابع در فاصله $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۳ تابع در فاصله $(0, 1)$ اکیداً صعودی و در فاصله $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۴ تابع در فاصله $(0, 1)$ اکیداً نزولی و در فاصله $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{5x-1}{x+1} & x \geq 1 \\ x + a\sqrt{x} & x < 1 \end{cases}$ اکیداً صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟

$$-2 < a \leq 0 \quad \text{۴}$$

$$0 \leq a \leq 1 \quad \text{۳}$$

$$1 \leq a \quad \text{۲}$$

$$a \geq 0 \quad \text{۱}$$

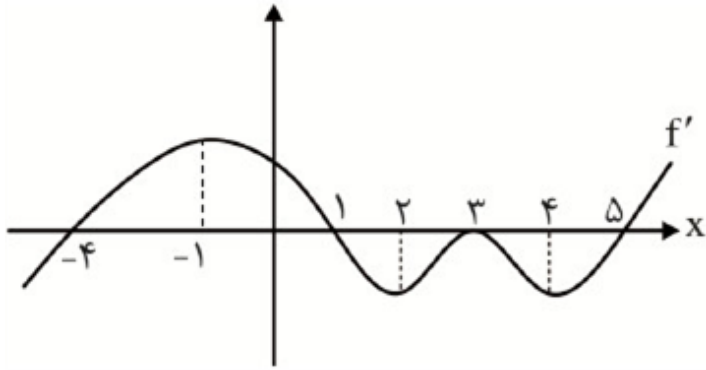
۴ در جدول زیر بعضی از مقادیر تابع f آمده است. نمودار تابع f در بازه $[2, 6]$ به صورت کدام گزینه می‌تواند باشد؟

x	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	۱۲	۲۰	۲۶	۳۰	۳۲



شکل مقابل، نمودار مشتق تابع f یعنی f' است. نمودار تابع f در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

۵

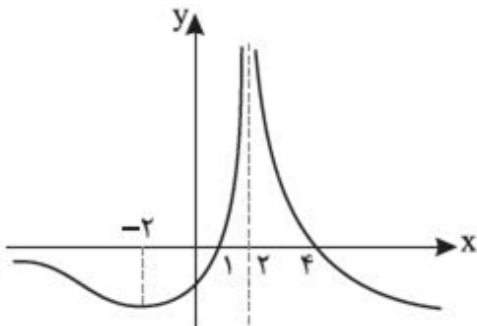


- ۱ در بازه‌های $(-4, -1)$ و $(4, +\infty)$ صعودی و در بازه‌های $(1, 2)$ و $(3, 4)$ نزولی
- ۲ در بازه‌های $(-4, -1)$ و $(2, 3)$ و $(4, 5)$ صعودی و در بازه‌های $(-1, 2)$ و $(3, 4)$ نزولی
- ۳ در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(2, 3)$ و $(4, +\infty)$ صعودی و در بازه‌های $(-1, 2)$ و $(3, 4)$ نزولی
- ۴ در بازه‌های $(-4, 1)$ و $(5, +\infty)$ صعودی و در بازه‌های $(1, 5)$ و $(-\infty, -4)$ نزولی

۶ اگر تابع $f(x) = \frac{ax - 3}{a + 2 - x}$ در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

- ۱ $(a < -3) \cup (a > 1)$
- ۲ $-1 < a < 3$
- ۳ $(a < -1) \cup (a > 0)$
- ۴ $-3 < a < 1$

۷ نمودار مشتق تابع پیوسته f با دامنه R مشابه شکل زیر است. اگر f در بازه (a, b) صعودی باشد، بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

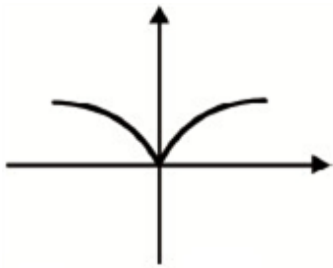


۴ ۴

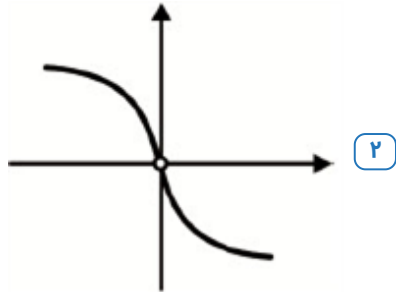
۳ ۳

۲ ۲

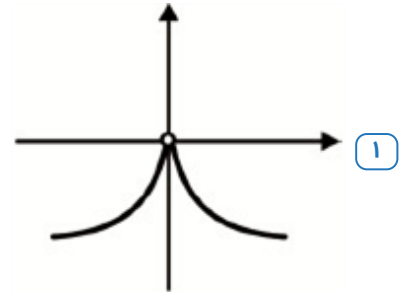
۱ ۱



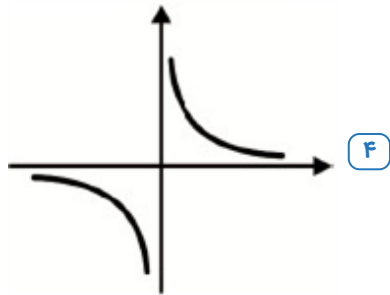
۸ اگر شکل مقابل نمودار تابع f باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



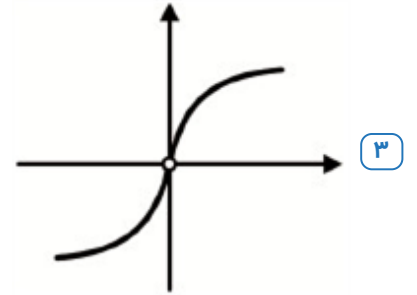
۲



۱



۴



۳

۹ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $y = \frac{2x + 1}{ax^2}$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم قرار دارد. مقدار a کدام است؟

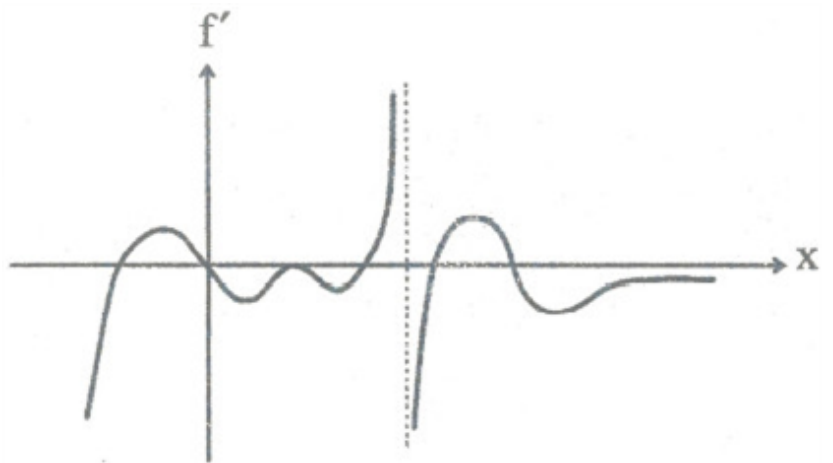
۴ -۲

۳ ۲

۲ -۱

۱ ۱

۱۰ اگر تابع f در R (مجموعه اعداد حقیقی) پیوسته و نمودار f' (تابع مشتق) به صورت زیر باشد، آنگاه تابع f چند اکسترمم نسبی دارد؟



۴ ۶

۳ ۷

۲ ۱۲

۱ ۵

۱۱ تابع $f(x) = |(m - 1)x^2 + (m - 1)x + 1|$ فقط دارای یک نقطه‌ی مینیمم نسبی است. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۴ ۵

۳ ۴

۲ ۱

۱ صفر

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 14 - x[2x] & , x > 2 \\ a & , x = 2 \\ x^2|x| & , x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ اکستریم نسبی نداشته باشد، a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

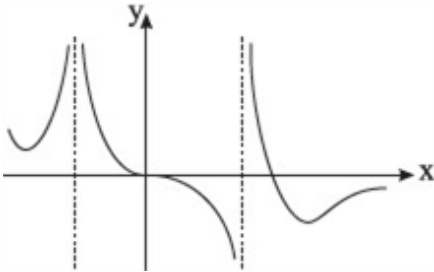
۶ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۱۳ نمودار مشتق تابع پیوسته‌ی f به شکل زیر است. این تابع چند اکستریم نسبی دارد؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۴ در مورد نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3}$ کدام صحیح است؟

۲ (۲) min دارد ولی max ندارد.

۱ (۱) max دارد ولی min ندارد.

۴ (۴) نه max دارد و نه min

۳ (۳) هم max دارد و هم min

۱۵ اکستریمم نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۶ تابع $f(x) = |4x - x^2|$ در فاصله‌ی $(-1, k)$ دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد. k کدام می‌تواند باشد؟

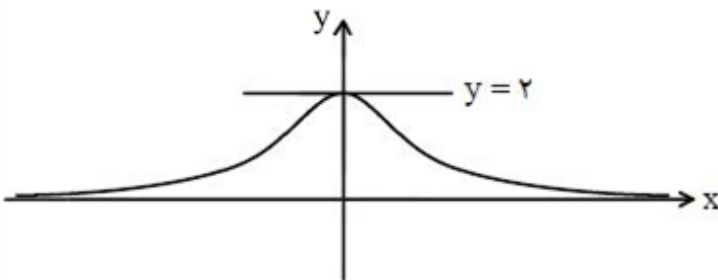
۲ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۱۷ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 2}$ است. مقدار $f'(-2) + f(-2)$ کدام است؟

 $\frac{10}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۱)

۱۸ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$ مربع طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن است. مقدار a کدام است؟

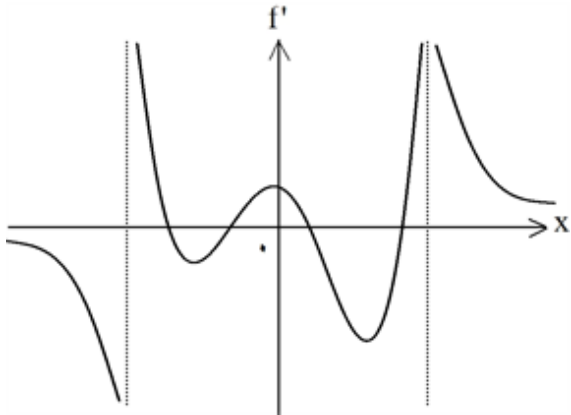
$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۱۹ نمودار مشتق تابع پیوسته f مطابق شکل زیر است. تابع f مجموعاً چند نقطه اکسترمم نسبی (ماکزیمم یا مینیمم) دارد؟



۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۲۰ نقطه‌ای به طول $x = 2$ اکسترمم نسبی چند تا از توابع $f(x) = 1 - |x - 2|$ ، $g(x) = (x - 2)^2$ و $h(x) = -(x - 2)^3$ می‌باشد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۲۱ تابع $f(x) = (x - [x])x^2$ در بازه‌ی $[-3, 3]$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۲۲ نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^2 - 6|x| + 8$ رئوس مثلث ABC هستند. مساحت مثلث کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۳۰ (۱)

۲۳ نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

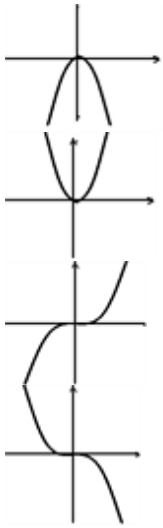
نقطه‌ی بحرانی ندارد. (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۴ نمودار تابع $y = \sqrt{x^3 - 3x^2}$ در اطراف نقطه بحرانی تابع در بازه $[0, 3]$ کدام است؟



۴

۳

۲

۱

۲۵ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & ; |x| \leq 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & ; |x| > 1 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

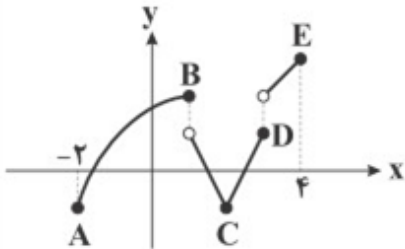
۶ ۴

۵ ۳

۴ ۲

۳ ۱

۲۶ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر آمده است، کدام گزینه در مورد این تابع صحیح است؟



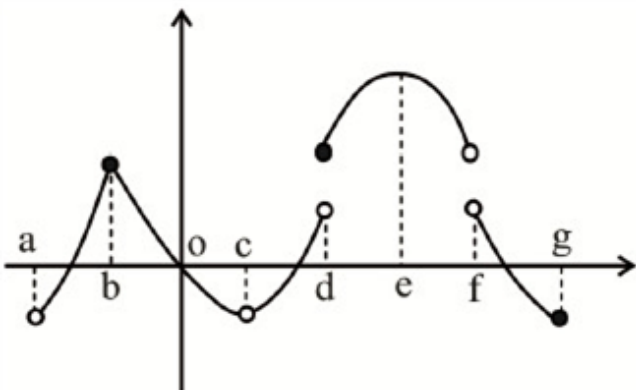
۲ نقطه B مینیمم نسبی است.

۱ سه نقطه بحرانی دارد.

۴ نقطه D بحرانی است ولی اکسترمم نسبی نیست.

۳ سه اکسترمم نسبی دارد.

۲۷ شکل مقابل نمودار تابع f است. نقاط بحرانی تابع f کدام است؟



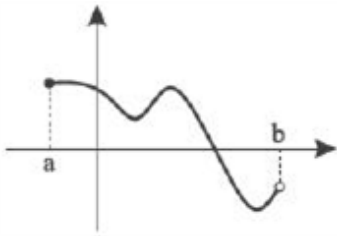
۴ b, c, e, f

۳ a, b, c, g

۲ b, d, e, g

۱ b, e, f, g

۲۸ نمودار تابع $y = f(x)$ در دامنه تعریفش به شکل زیر است. در این صورت تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ چند نقطه بحرانی دارد؟



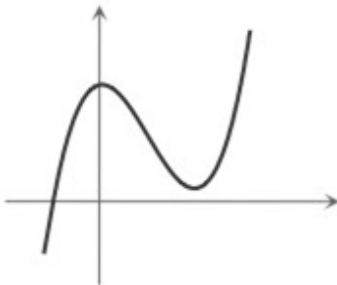
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۲۹ نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ به صورت مقابل است. حدود b کدام است؟

 $b > 4$ (۴) $b > 3$ (۳) $b > 2$ (۲) $b > 1$ (۱)

۳۰ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درواز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. شعاع قاعده‌ی قوطی چند سانتی‌متر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن می‌نیم شود؟

 $10\sqrt{\pi}$ (۴) $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ (۳) $10\sqrt[3]{\pi}$ (۲) $\frac{10}{\sqrt{16}}$ (۱)

۳۱ اگر تعداد نقاط بحرانی، تعداد نقاط ماکزیمم مطلق، تعداد نقاط مینیمم مطلق، تعداد نقاط ماکزیمم نسبی، تعداد نقاط مینیمم نسبی در تابع $f(x) = |x^2 - x - 6|$ را در بازه $[-4, 4]$ به ترتیب با a و b و c و d نمایش دهیم، حاصل $a + 2b + 3c + 4d + 5e$ کدام است؟

۲۹ (۴)

۲۸ (۳)

۲۶ (۲)

۲۷ (۱)

۳۲ اگر $f(x) = x^5 - 5x + a + 1$ و مقدار ماکزیمم مطلق تابع f در بازه $[-2, 0]$ برابر ۱۰ باشد، a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۳۳ کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱ مشتق تابع f در نقطه‌ی اکسترمم نسبی آن تغییر علامت می‌دهد.

۲ نقطه‌ی اکسترمم نسبی، یک نقطه‌ی بحرانی است.

۳ اگر در نقطه‌ی بحرانی علامت f' عوض شود f در آن نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۴ هر نقطه اکسترمم مطلق، یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیز است.

۳۴ حداکثر مقدار عبارت $y = -x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 40$ چقدر است؟

۸۸ (۴)

۹۲ (۳)

۷۲ (۲)

۷۸ (۱)

۳۵ مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

۳۶ و -۲۷ (۴)

۲۷ و -۳۶ (۳)

۲۷ و -۴۵ (۲)

۲۴ و -۱۸ (۱)

۳۶ هرگاه $f(x) = x + 2\sqrt{5 - x^2}$ بیشترین مقدار تابع کدام است؟

۵ (۴)

 $4\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

۳۷ اگر $f(x) = x + [-x]$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ آن‌گاه از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

ماکزیمم - فاقد مینیمم (۲)

ماکزیمم - مینیمم (۱)

فاقد ماکزیمم - فاقد مینیمم (۴)

فاقد ماکزیمم - مینیمم (۳)

۳۸ تابع f در نقطه c دارای \min و مشتق راست دارد، الزاماً این مشتق چگونه است؟

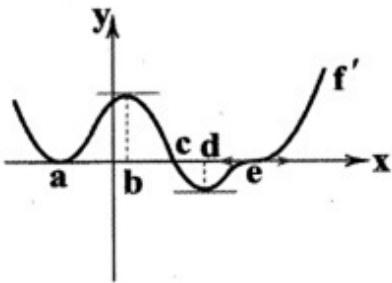
نامثبت (۴)

نامنفی (۳)

منفی (۲)

مثبت (۱)

۳۹ نمودار تابع f' به صورت زیر است. کدام گزینه صحیح نیست؟



(۱) سه نقطه بحرانی دارد.

(۲) نقطه a بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست.

(۳) نقاطی به طول‌های a, d, b و e نقاط بحرانی f هستند.

(۴) مشتق f' در یک نقطه به طول منفی و سه نقطه به طول مثبت، صفر است.

۴۰ اگر تابع f در R مشتق‌پذیر باشد و $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 10x + 9)$ ، تابع f چند ماکزیمم نسبی دارد؟

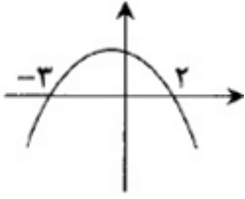
صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۱ اگر نمودار مشتق تابع f به صورت مقابل باشد. نمودار تابع f در دارای است.



- ۱ $x = 2$ ، می‌نیمم نسبی $x = -3$ ، ماکسیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$ ، ماکسیمم نسبی $x = 2$ ، ماکسیمم نسبی
- ۲ $x = -3$ ، ماکسیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$ ، ماکسیمم نسبی $x = 2$ ، ماکسیمم نسبی
- ۳ $x = -\frac{1}{2}$ ، ماکسیمم نسبی $x = -3$ ، ماکسیمم نسبی $x = 2$ ، ماکسیمم نسبی
- ۴ $x = 2$ ، ماکسیمم نسبی $x = -3$ ، ماکسیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$ ، ماکسیمم نسبی

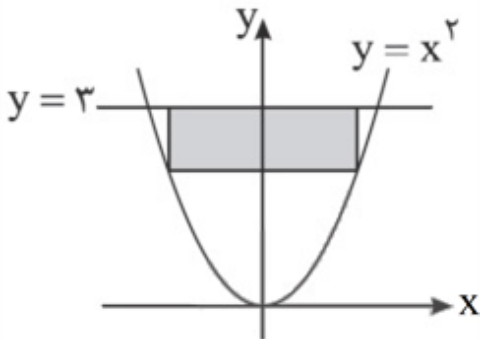
۴۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^k$ به ازای دارای است.

- ۱ $k = 7$ ، ماکسیمم نسبی $k = 8$ ، می‌نیمم مطلق $k = 7$ ، می‌نیمم نسبی $k = 8$ ، ماکسیمم مطلق
- ۲ $k = 8$ ، می‌نیمم مطلق $k = 7$ ، می‌نیمم نسبی $k = 8$ ، ماکسیمم مطلق
- ۳ $k = 7$ ، می‌نیمم نسبی $k = 8$ ، می‌نیمم مطلق $k = 7$ ، می‌نیمم نسبی
- ۴ $k = 8$ ، ماکسیمم مطلق $k = 7$ ، می‌نیمم نسبی $k = 8$ ، ماکسیمم مطلق

۴۳ اگر $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\log_8 x + 4 \log_2 x^2}} : x > 1 \right\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

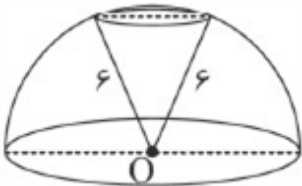
- ۱ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{3}$
- ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$
- ۳ $\sqrt{6}$ $\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- ۴ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۴ مستطیل رنگی شده بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 3$ مطابق شکل قرار گرفته است. بیشترین مساحت آن چه عددی است؟



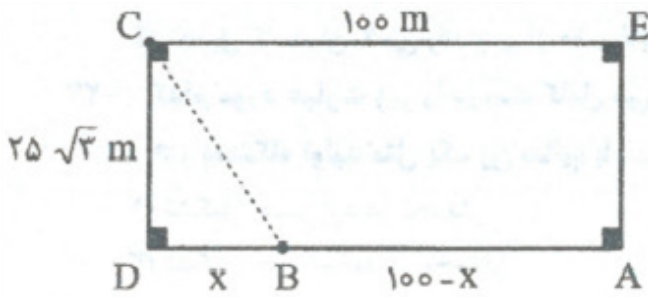
- ۱ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$
- ۲ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$
- ۳ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$
- ۴ ۸ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$

۴۵ مطابق شکل، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، محاط درون نیم‌کره‌ای به شعاع ۶ چقدر است؟



- ۱ $2\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}$ $2\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}$
- ۲ $3\sqrt{3}$ $2\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}$ $2\sqrt{3}$
- ۳ $3\sqrt{2}$ $2\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}$ $2\sqrt{2}$
- ۴ $2\sqrt{3}$ $3\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$ $3\sqrt{3}$

آروین در موقعیت A قرار دارد. او می‌خواهد به موقعیت C که در ۱۰۰ متری غرب و $25\sqrt{3}$ متری شمال موقعیت فعلی او قرار دارد برود. اگر مسیر AB را با سرعت ثابت $4\frac{m}{s}$ و مسیر BC را با سرعت ثابت $2\frac{m}{s}$ طی کند، آنگاه کمترین زمان ممکن برای رسیدن آروین از موقعیت A تا موقعیت C چند ثانیه است؟



۵۶/۲۵ (۴)

۴۳/۷۵ (۳)

۳۱/۲۵ (۲)

۱۸/۷۵ (۱)

۴۷ مستطیل محاط در دایره‌ای به محیط 6π را حول آن دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه بیشترین مقدار خود را دارد، مساحت مستطیل اولیه کدام است؟

$12\sqrt{2}$ (۴)

$12\sqrt{3}$ (۳)

$6\sqrt{2}$ (۲)

$6\sqrt{3}$ (۱)

۴۸ در کره‌ای به شعاع $3\sqrt{2}$ یک استوانه محاط کرده‌ایم. بیشترین حجم استوانه کدام است؟

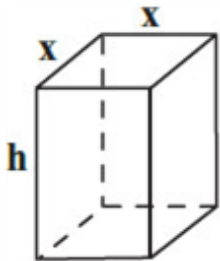
96π (۴)

98π (۳)

108π (۲)

118π (۱)

۴۹ با صفحه فلزی به مساحت ۲۴ سانتی‌متر مربع، یک مکعب مستطیل مطابق شکل روبه‌رو می‌سازیم. حداکثر حجم آن چند سانتی‌متر مکعب است؟



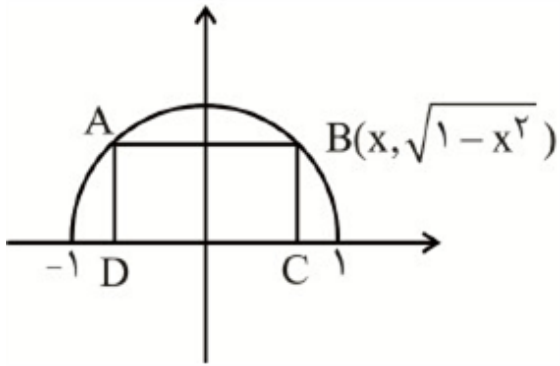
۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

در شکل مقابل، مستطیل ABCD، داخل نیم‌دایره‌ای به معادله $y = \sqrt{1-x^2}$ و به شعاع ۱ واحد محاط شده است. بیشترین مقدار مساحت ممکن، برای این مستطیل کدام است؟



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

۵۱ اگر جمع ارتفاع و شعاع قاعده یک استوانه برابر ۶ باشد، حداکثر حجم استوانه چه عددی است؟

$$۳۶\pi \quad \text{۴}$$

$$۲۸\pi \quad \text{۳}$$

$$۳۲\pi \quad \text{۲}$$

$$۲۴\pi \quad \text{۱}$$

۵۲ مساحت جانبی یک استوانه برابر ۱۲π است. حداقل مقدار مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی استوانه چقدر است؟

$$۴\sqrt{۳} \quad \text{۴}$$

$$۲\sqrt{۶} \quad \text{۳}$$

$$۳\sqrt{۶} \quad \text{۲}$$

$$۳\sqrt{۳} \quad \text{۱}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این تابع در $x = -1$ مشتق ناپذیر است پس:

$$(-1)^r + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = -1$$

از طرفی مقدار $x^r + ax + b$ در $x = 1$ نیز باید برابر صفر باشد.

$$(1)^r + a(1) + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

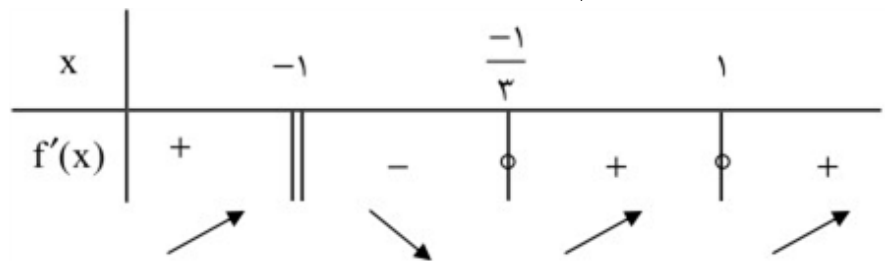
با حل دستگاه حاصل $a = 0$ و $b = -1$ می‌شوند.

$$f(x) = (x-1)|x^r - 1| = \begin{cases} (x-1)(x^r - 1) = (x-1)^r(x+1) & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -(x-1)(x^r - 1) = -(x-1)^{r(x+1)} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم و جدول تعیین علامت مشتق را می‌یابیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1)(x+1) + (x-1)^r = 0 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -2(x-1)(x+1) - (x-1)^r = 0 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

ریشه‌های مشتق $x = 1$ و $x = -\frac{1}{3}$ هستند.

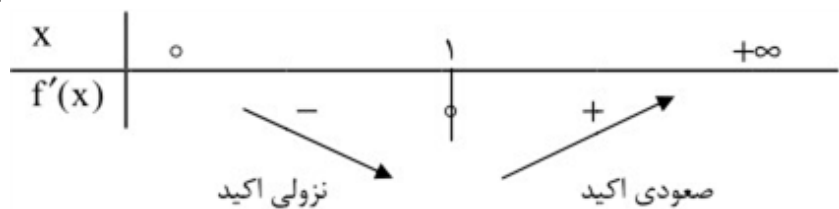


تابع در بازه $[-\frac{1}{3}, 1]$ اکیداً صعودی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^r = \frac{(x-1)^r}{x} \text{ و } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)x - 1(x-1)^r}{x^2} = \frac{x^r - 1}{x^{2r}}$$



بنابراین $f(x)$ در بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی و در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع $y = \frac{5x-1}{x+1}$ به ازای $x > -1$ یا $x < -1$ اکیداً صعودی است چرا که:

$$ad - bc = 5 + 1 = 6 > 0.$$

ضابطه‌ی دوم تابع هم باید اکیداً صعودی باشد:

$$x < 1 \Rightarrow y = x + a\sqrt{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + a}{2\sqrt{x}} \geq 0.$$

مخرج همواره مثبت است برای اینکه صورت هم مثبت باشد، کافی است $a \geq 0$ باشد. شرط اینکه تابع در نقطه‌ی مرزی یعنی $x = 1$ هم اکیداً صعودی باشد را باید بررسی کنیم:

$$f(1^+) \geq f(1^-) \Rightarrow \frac{5-1}{2} \geq 1+a \Rightarrow 2 \geq 1+a \Rightarrow 2 \geq 1+a \Rightarrow a \leq 1$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a : $0 \leq a \leq 1$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با دقت به جدول متوجه می‌شویم با افزایش x مقادیر تابع f نیز افزایش می‌یابد پس تابع f اکیداً صعودی است. یعنی گزینه ۱ یا ۴ صحیح است.

از طرفی شیب خطوط گذرنده از دو نقطه با طول صحیح متوالی در حال کاهش است.

x	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۱۲	۲۰	۲۶	۳۰	۳۲
شیب	۸		۶	۴	۲



پس گزینه ۴ صحیح است.

توجه: اگر شیب‌های گذرنده از دو نقطه با طول صحیح متوالی در حال افزایش باشد، تقعر منحنی رو به بالاست.



اگر شیب‌های گذرنده از دو نقطه متوالی در حال کاهش باشد، تقعر منحنی رو به پایین است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f' > 0$ (نمودار f' بالای محور x ها) باشد f صعودی

$f' < 0$ (نمودار f' بالای محور x ها) باشد f نزولی

$$f'(x) = \frac{a(a+2) - 3}{(-x+a+2)^2} = \frac{a^2 + 2a - 3}{(-x+a+2)^2} < 0.$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(a+3)(a-1) < 0 \Rightarrow -3 < a < 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع f در بازه‌هایی صعودی است که $f' > 0$ باشد، بنابراین در بازه‌های $(1, 2)$ و $(2, 4)$ صعودی است. البته چون تابع f در

R پیوسته است، در اجتماع آن‌ها نیز یعنی در $(1, 4)$ پیوسته است، پس بزرگ‌ترین بازه $(1, 4)$ است:

$$b - a = 4 - 1 = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی است، بنابراین $f' < 0$ (نمودار f' زیر محور x ها)
 f در بازه‌ی $(0, +\infty)$ صعودی است، بنابراین $f' > 0$ (نمودار f' بالای محور x ها)
 در نقطه‌ی صفر مشتق‌پذیر نیست ($f'(0)$ نامتناهی است).

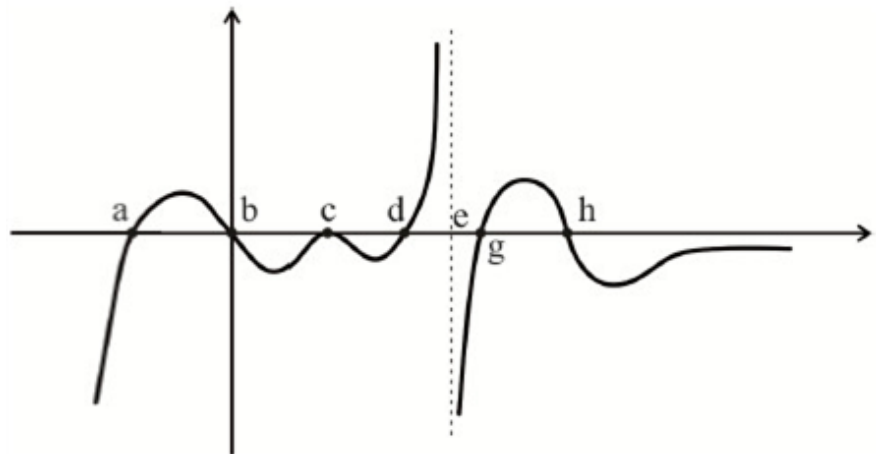
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{2ax^2 - 2ax(2x+1)}{(ax^2)^2} = \frac{2ax(x-2x-1)}{a^2x^4} = \frac{-2(x+1)}{ax^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{a}$$

نقطه‌ی $A\left(-1, -\frac{1}{a}\right)$ روی خط $y = -x$ قرار دارد پس $-\frac{1}{a} = 1$ و در نتیجه $a = -1$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۱) f در $x = a$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_+(a) > 0$ و $f'_-(a) < 0$ و $f'(a) = 0$

۲) f در $x = b$ دارای Min نسبی است، زیرا $f'_+(b) < 0$ و $f'_-(b) > 0$ و $f'(b) = 0$

۳) f در $x = c$ اکسترمم ندارد، زیرا علیرغم $f'(c) = 0$ تغییر علامت مشتق نداریم.

۴) f در $x = d$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_+(d) > 0$ و $f'_-(d) < 0$ و $f'(d) = 0$

۵) f در $x = e$ نقطه بحرانی گوشه‌ای به صورت  دارد که Max نسبی است، زیرا $f'_+(e) = -\infty$ و

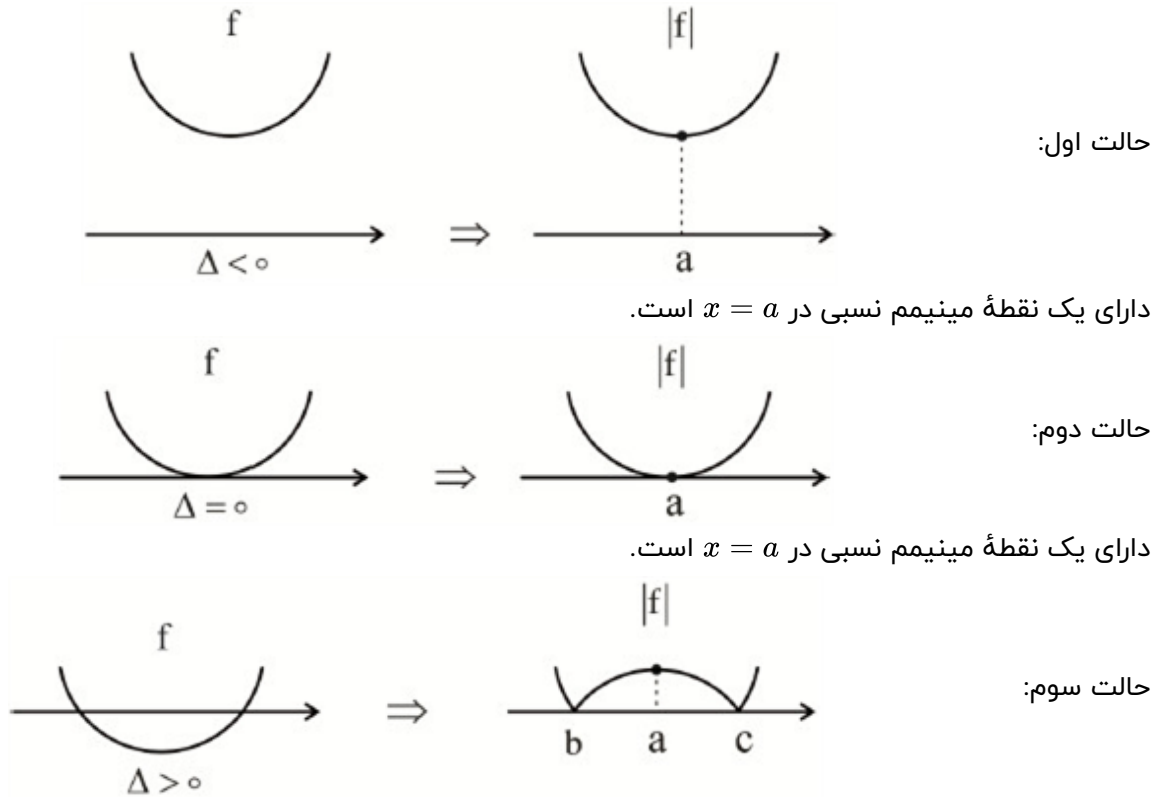
$f'_-(e) = +\infty$ در این نقطه پیوسته است.

۶) f در $x = g$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_+(g) > 0$ و $f'_-(g) < 0$ و $f'(g) = 0$

۷) f در $x = h$ دارای Min نسبی است، زیرا $f'_+(h) < 0$ و $f'_-(h) > 0$ و $f'(h) = 0$

بنابراین تابع f در ۶ نقطه اکسترمم نسبی دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:



دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.

دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.

دارای دو نقطهٔ مینیمم نسبی در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.

(واضح است در حالتی که در دهانهٔ نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)

چون می‌خواهیم که تابع یک نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 5$$

دقت کنید که به ازای $m = 1$ ، ضریب x^2 در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به

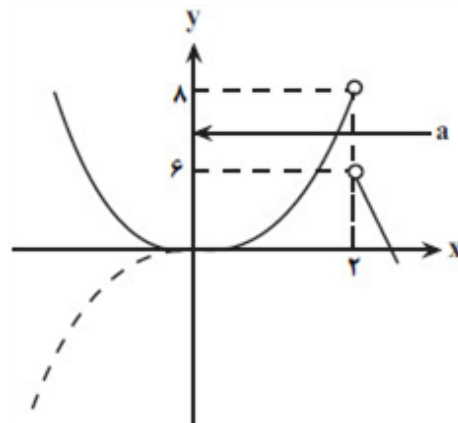
صورت تابع ثابت $y = 1$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه مینیمم نسبی است و حالت مطلوب این تست نیست.

پس $1 < m \leq 5$ ، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در حل و بررسی اکسترمم توابع چندضابطه‌ای یکی از بهترین روش‌ها رسم شکل است، البته لازم نیست که کل نمودار را رسم می‌کنیم و تنها در اطراف $x = 2$ رسم می‌کنیم. $|x|$ در نزدیکی $x_1 = 2$ مشابه x^2 است و از طرف دیگر رسم $[2x] - x$ شاید کمی طولانی باشد ولی در 2^+ مقدار براکت برابر ۴ و نمودار به صورت $4x - 14$ است. پس شکل تقریبی به صورت مقابل است:

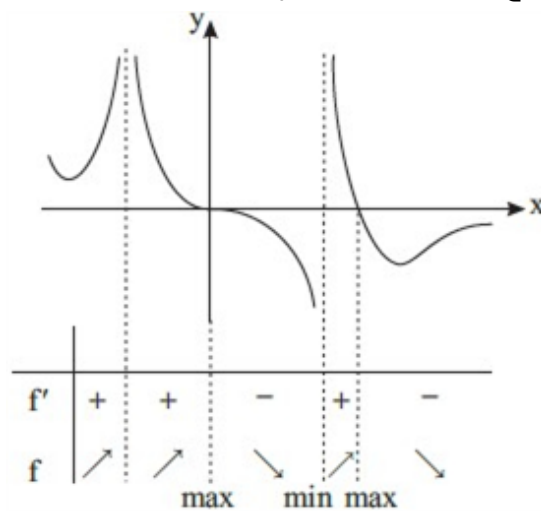
$$a = 6, 7$$

در نتیجه مقادیر قابل قبول و صحیح a ، دو مقدار است:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اکسترمم نسبی در نقاطی رخ می‌دهد که f' تغییر علامت می‌دهد. تابع مجموعاً ۳ اکسترمم نسبی دارد.



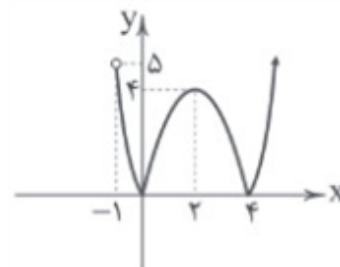
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع در بازه‌ی $[0, +\infty)$ پیوسته است و هرگز منفی نمی‌شود. پس $\min = y(0) = 0$ است. با توجه به پیوسته بودن تابع و اینکه هرگز منفی نیست و همچنین $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ ، پس یک max هم دارد.



$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

x	-1	3	
f'	+	-	+
f	↘		↗
	max	min	
	$\frac{7}{3}$	$-\frac{25}{3}$	

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را در فاصله $(-1, +\infty)$ ببینید:



تابع در نقاط $(0, 0)$ و $(4, 0)$ می‌نیمم نسبی و در نقطه $(2, 4)$ ماکزیمم نسبی دارد، پس $k > 4$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط $y = 2$ در نقطه $x = 0$ بر نمودار تابع مماس است، پس شیب خط مماس در این نقطه برابر صفر است یعنی مقدار مشتق تابع در نقطه $x = 0$ برابر صفر است، بنابراین $f'(0) = 0$ است.

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(x^2 + 2) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + 2a}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

از طرفی نقطه $(0, 2)$ روی منحنی تابع f قرار دارد، پس باید $f(0) = 2$ باشد یعنی داریم:

$$f(0) = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4(-2x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-8x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(-2) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}, f(-2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(-2) + f(-2) = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2 = 6(x-a)(x-2a)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a, 2a$$

واضح است که a باید مقداری مثبت باشد در غیر این صورت شرط گفته شده در صورت سؤال برقرار نخواهد شد.

x		a		$2a$	
f'	+	o	-	o	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

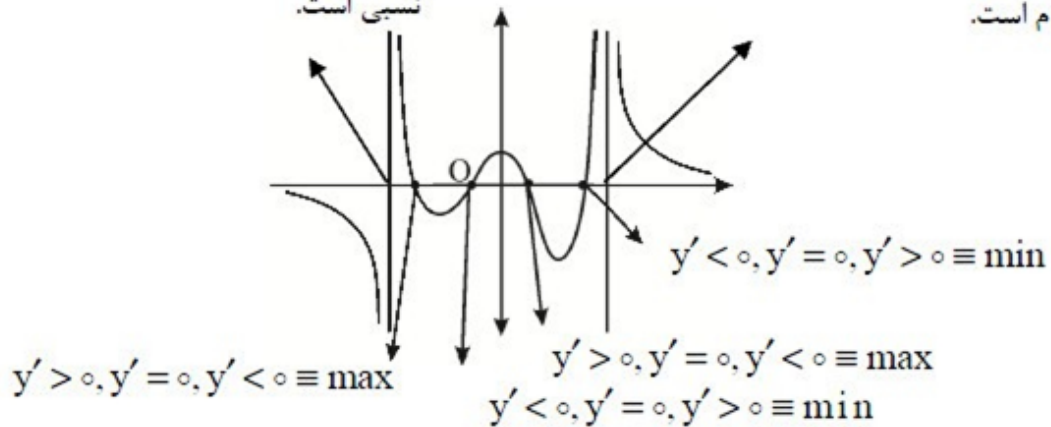
$$x_{\min} = x_{\max}^2 \Rightarrow 2a = a^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غقق..} \\ a = 2 \end{cases}$$

دقت کنید که اگر $a = 0$ باشد، $f(x) = 2x^2 + 1$ خواهد شد که این تابع اکسترمم نسبی ندارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹

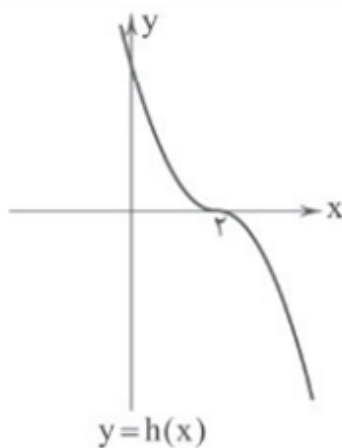
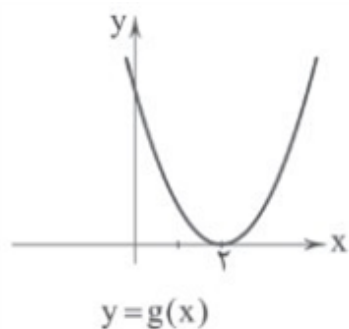
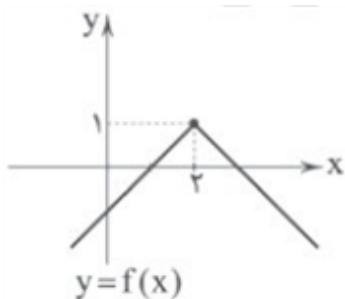
در این نقطه: $f'_+ = +\infty, f'_- = -\infty$ و نمودار پیوسته f به شکل \cup ظاهر می شود که \min نسبی است.

در این نقطه: $f'_- = f'_+ = +\infty$ و نمودار به صورت \cap ظاهر می شود و فاقد اکسترموم است.



در مجموع تابع ۵ اکسترمم نسبی دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ساده‌ترین روش حل این سؤال، رسم توابع است.



ملاحظه می‌کنید که نقطه‌ی $A(2, 1)$ برای f ماکزیمم نسبی و نقطه‌ی $(2, 0)$ برای g می‌نیمم نسبی است، اما نقطه‌ی $(2, 0)$ برای $h(x)$ اکسترمم نسبی نیست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned}
 -3 \leq x < -2 &\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x = \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases} \\
 -2 \leq x < -1 &\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x = \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = -\frac{4}{3} & \text{ق ق ق} \end{cases} \\
 -1 \leq x < 0 &\Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x = \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = -\frac{2}{3} & \text{ق ق ق} \end{cases} \\
 0 \leq x < 1 &\Rightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark \\
 -1 \leq x < 2 &\Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x = \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{2}{3} & \text{غ ق ق} \end{cases} \\
 2 \leq x < 3 &\Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x = \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{4}{3} & \text{غ ق ق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

بنابراین تابع f در نقاط $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{-4}{3}$ دارای $f' = 0$ است و بحرانی هستند. همچنین در نقاط $x = -2$ ، $x = -1$ و $x = 1$ و $x = 2$ مشتق وجود ندارد ($f' - \neq f' +$). از طرفی $x = -3$ و $x = 3$ نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی و بحرانی‌اند. بنابراین تابع f در ۹ نقطه از این بازه بحرانی است.

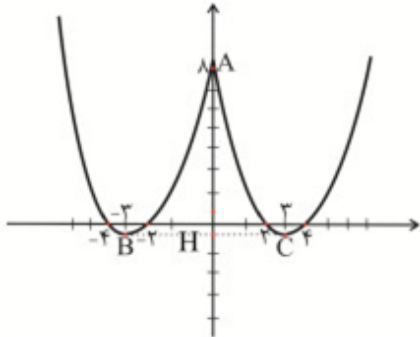
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۲

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3, y = -1$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3, y = -1$$

نقاط بحرانی این تابع $A \left| \begin{matrix} 0 \\ 8 \end{matrix} \right.$ (مشتق وجود ندارد)، $B \left| \begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix} \right.$ (مشتق برابر صفر است) و $C \left| \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$ (مشتق برابر صفر است) هستند، بنابراین:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(BC)(AH) = \frac{1}{2}(6)(9) = 27$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۳

$x = 0$ ریشه ساده قدرمطلق، مشتق‌ناپذیر و بحرانی است. حال قدرمطلق را حذف و مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

تابع مشتق ریشه ندارد و در $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر است که عضو دامنه نیستند تنها نقطه‌ی بحرانی تابع $x = 0$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۴

$$y' = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt{(x^2 - 3x^2)^2}} = 0$$

مخرج مشتق همواره مثبت است. کافی است صورت آن را تعیین علامت کنیم. ریشه‌های صورت آن ۰ و ۲ است که

$x = 2$ طول نقطه‌ی بحرانی تابع در این بازه است. چون مشتق به ازای مقادیر کمتر از ۲ منفی و به ازای بیشتر از ۲

مثبت است، $x = 2$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

۲۵

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & ; -1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{x-1} & ; x < -1 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

و تابع مشتق هم به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x(x-1)(2x-1) & ; -1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} & ; x > 2 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

مشتق تابع در $x = -1$ و $x = 2$ وجود ندارد. همچنین در نقاط $x = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ ، مشتق برابر صفر است. پس این

تابع ۵ نقطه بحرانی دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاط A, B, C, D و بحرانی‌اند. نقطه‌ی B ماکزیمم نسبی، نقطه‌ی C مینیمم نسبی و

۲۶

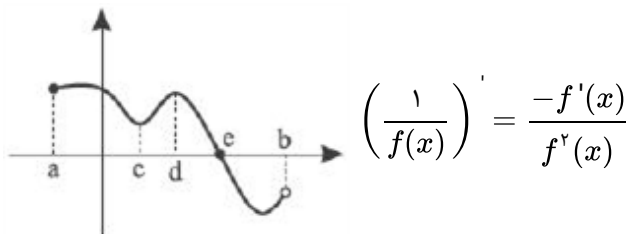
نقطه‌ی D نه ماکزیمم و نه مینیمم نسبی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط a, c و f متعلق به دامنه‌ی تابع f نیستند بنابراین نقطه‌ی بحرانی تابع به حساب نمی‌آیند.

در نقاط b, d و g تابع مشتق‌پذیر نیست در نتیجه نقاط بحرانی تابع هستند. در نقطه‌ی e مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین e طول نقطه بحرانی تابع f است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

برای پیدا کردن نقاط بحرانی $y = \frac{1}{f(x)}$ باید از ضابطه آن مشتق بگیریم.



نقطه‌ی $f'(x)$ که صفر است یا موجود نیست، بحرانی است.

پس نقاط بحرانی تابع $x = a, x = c, x = d$ و $x = e$ در دامنه تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ نیست، نمی‌تواند بحرانی باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یکی از نقاط بحرانی تابع $x = 0$ است، پس $f'(0) = 0$ ، بنابراین:

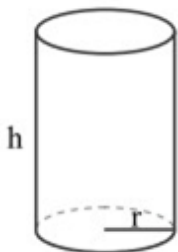
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$$

$$\Rightarrow f'(0) = a = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

مقدار تابع در نقاط بحرانی مثبت است، پس:

$$f(2) > 0 \Rightarrow 8 - 12 + 0 + b > 0 \Rightarrow b > 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.



$$V = \pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

مساحت کل استوانه $S =$ مساحت جانبی + مساحت قاعده

$$= \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقاط $x = \pm 4$ نقاط انتهایی بازه هستند (۲ نقطه بحرانی) برای یافتن اکسترمم‌های مطلق و نسبی باید تابع مشتق را بررسی کنیم:

$$f(x) = |x^2 - x - 6| = \begin{cases} x^2 - x - 6; & x \leq -2 \text{ یا } x \geq 3 \\ -x + x + 6; & -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x < -2 \text{ یا } x > 3 \\ 1 - 2x; & -2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(-2) = -5 \\ f'_+(-2) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در } x = -2 \text{ مشتق‌ناپذیر است (بحرانی)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(3) = -5 \\ f'_+(3) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در } x = 3 \text{ مشتق‌ناپذیر است (بحرانی)}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ بحرانی}$$

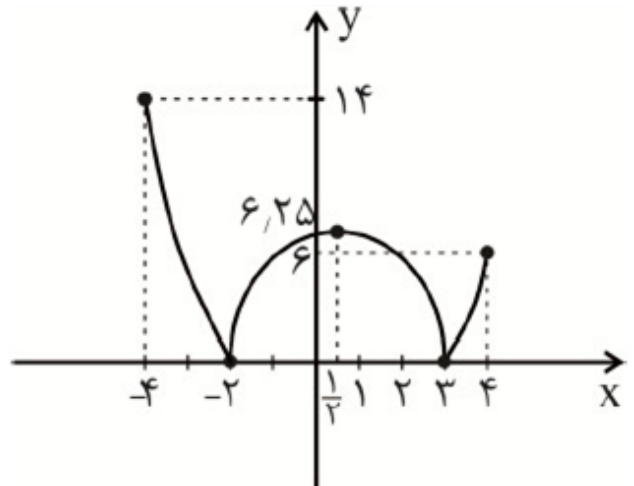
بنابراین: تابع f در ۵ نقطه $x = \pm 4$ و $x = -2$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 3$ بحرانی است. لذا $a = 5$.

$$\begin{array}{cccccc} f(-4) = 4 & , & f(-2) = 0 & , & f\left(\frac{1}{2}\right) = 6/25 & , & f(3) = 0 & , & f(4) = 6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{max مطلق} & & \text{min مطلق و} & & \text{max نسبی} & & \text{min مطلق و} & & \text{فقط بحرانی} \\ \text{(بحرانی)} & & \text{نسبی (بحرانی)} & & & & \text{نسبی (بحرانی)} & & \end{array}$$

$$a = 5, b = 1, c = 2, d = 1, e = 2 \text{ (بحرانی)}$$

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e = 5 + 2(1) + 3(2) + 4(1) + 5(2) = 27$$

نمودار نهایی تابع در بازه $[-4, 4]$ به صورت زیر است:



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در گام اول با مشتق گرفتن، نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

که $x = 1$ در بازه $[-2, 0]$ نیست، حالا مقدار تابع در $x = -1$ و ابتدا و انتهای بازه را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(0) = a + 1 \\ f(-1) = -1 + 5 + a + 1 = 5 + a \\ f(-2) = -32 + 10 + a + 1 = a - 21 \end{cases}$$

پس ماکزیمم مطلق در این بازه برابر $a + 5$ است و داریم:

$$5 + a = 10 \Rightarrow a = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

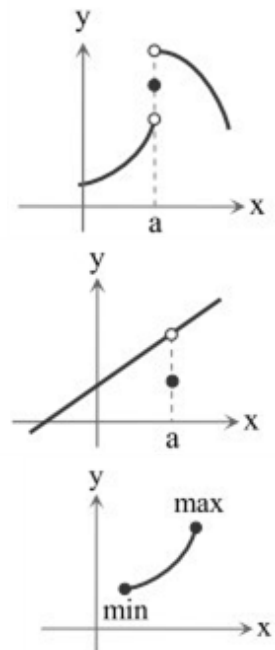
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی «۱» نادرست است، چون اگر تابع در این نقطه پیوسته نباشد، ممکن است f' تغییر علامت ندهد، مانند شکل مقابل.

گزینه‌ی «۲»: در نقطه‌ی اکسترمم نسبی مشتق یا صفر است یا موجود نیست، پس هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، نقطه‌ی بحرانی است.

گزینه‌ی «۳»: نادرست است. مانند گزینه‌ی «۱» اگر تابع f ناپیوسته باشد، ممکن است علی‌رغم تغییر علامت f' ، اکسترمم نسبی موجود نباشد. مانند شکل مقابل.

گزینه‌ی «۴»: نادرست است. چون ممکن است تابع در یک همسایگی آن تعریف شده نباشد، مانند شکل مقابل.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع R است. اکسترمم مطلق تابع در صورت وجود در نقاط بحرانی آن رخ می‌دهد:

$$y' = -4x^2 + 12x + 16x = -4x(x^2 - 3x - 4) = -4x(x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, -1, 4$$

مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم:

$$y(0) = -40, \quad y(-1) = -37$$

$$y(4) = 8, \quad y(\pm\infty) = -\infty$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$$

نقاط بحرانی $x_1 = 5, x_2 = -3$ چون بازه‌ی مطلوب، بازه‌ی $[-4, 3]$ است، پس فقط $x = -3$ قابل قبول است. بنابراین برای تعیین مقادیر ماکزیمم مطلق

$$f(-4) = \frac{1}{3}(-64) - 16 + 60 = \frac{68}{3}$$

و مینیمم مطلق تابع f داریم:

$$f(3) = \frac{1}{3}(27) - 9 - 45 = -45$$

$$f(-3) = \frac{1}{3}(-27) - 9 + 45 = 27$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲۷ و مینیمم مطلق تابع برابر -۴۵ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$D = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

$$f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$$

$$f(-\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} = \sqrt{5-x^2} = 2x \Rightarrow 5-x^2 = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \max_{\text{مطلق}} = 5$$

$$f(x) = x + [-x] = -(-x - [-x]) = -(t - [t])$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۷

می‌دانیم $1 < t - [t] \leq 0$ ؛ پس $-1 < f(x) \leq 0$. از طرفی g تابعی اکیداً نزولی است؛ پس:

$$g(-1) > g(f(x)) \geq g(0) \Rightarrow 2 > g(f(x)) \geq 1$$

ملاحظه می‌شود که تابع مینیمم مطلق و نسبی دارد؛ اما ماکزیمم مطلق و نسبی ندارد.

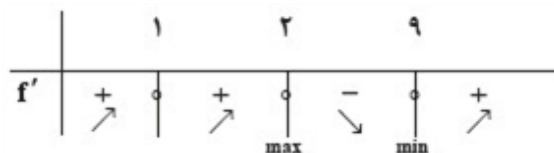
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون نمودار مربوط به f' است، پس جایی که f' وجود ندارد یا صفر است، برای f بحرانیخواهد بود که این شرایط در a, c و e رخ داده است. ضمناً نقطه‌ی a بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست، زیرا f' تغییر علامت نداده است.خط مماس بر نمودار f' در نقاط b, d و e (به طول مثبت) و در نقطه‌ی a (به طول منفی) افقی است، پس مشتق تابع f' در سه نقطه به طول مثبت و یک نقطه به طول منفی، صفر می‌شود.گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین تعداد ماکزیمم‌های نسبی تابع f ، از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. ۴۰

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 10x + 9)$$

$$= (x-1)(x-2)(x-1)(x-9)$$

$$= (x-1)^2(x-2)(x-9)$$

همان‌طور که در جدول بالا ملاحظه می‌کنید، تابع f در $x = 2$ دارای ماکزیمم نسبی و در $x = 9$ دارای مینیمم نسبی می‌باشد، بنابراین این تابع دارای ۱ ماکزیمم نسبی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق در نقطه‌ی $x = 2$ صفر شده است. قبل از ۲ مقادیر مثبت (بالای محور x) و بعد از ۲، مقادیر منفی دارد.

پس $x = 2$ ماکسیمم نسبی است:

x	-۳	۲	
f'	-	+	-
		max	

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع‌های x^k با توان فرد، صعودی اکید هستند و اکسترمم ندارند. اما تابع‌های x^k با توان زوج، در نقطه‌ی $x = 0$ می‌نیمم مطلق دارند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{\lambda} x + 4 \log_{x^r} 2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} \log_{\lambda} x + \frac{4}{r} \log_x 2}} \xrightarrow{\log_{\lambda} x = t} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} \left(t + \frac{4}{t} \right)}}$$

$$t \cdot \frac{4}{t} = 4 \Rightarrow \text{Min} \left(t + \frac{4}{t} \right) = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \text{Max } A = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{r}}} = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

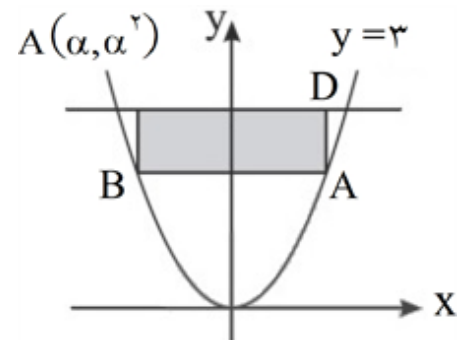
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر رأس مستطیل که روی سهمی در ناحیه‌ی اول واقع شده است را A در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} AB = 2x_A = 2\alpha = \text{طول مستطیل} \\ AD = 3 - y_A = 3 - \alpha^2 = \text{عرض مستطیل} \end{cases}$$

$$S = 2\alpha(3 - \alpha^2) = 6\alpha - 2\alpha^3$$

$$S' = 6 - 6\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow S_{\max} = 4$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ارتفاع مخروط را h و شعاع قاعده‌ی آن را r فرض کنید.

$$V = \frac{1}{3} h \pi r^2 = \frac{\pi}{3} h (36 - h^2) = \frac{\pi}{3} (36h - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (36 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قوانین فیزیک می‌دانیم که در حرکت با سرعت ثابت، زمان حرکت از رابطه $t = \frac{x}{V}$ به دست می‌آید که در آن x مسافت پیموده شده و V اندازه سرعت ثابت است.

$$\text{AB مسیر} \text{ زمان پیمودن} = t_1 = \frac{100 - x}{4}; 0 \leq x \leq 100$$

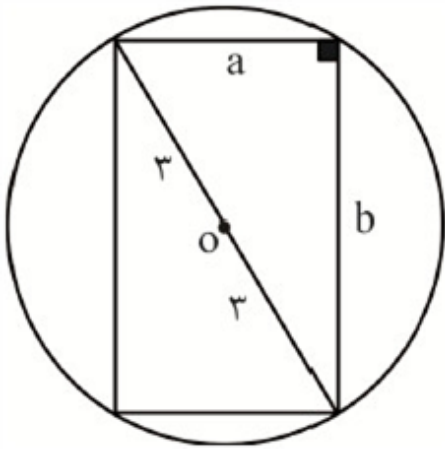
$$\text{BC مسیر} \text{ زمان پیمودن} = t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (25\sqrt{3})^2}}{2}$$

$$\text{کل } t = t_1 + t_2 = \frac{100 - x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 1875}}{2}$$

$$t' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1875}} = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ متر}$$

$$\text{ثانیه کل مینیمم } t = \frac{75}{4} + \frac{50}{2} = \frac{175}{4} = 43.75$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره با عرض a و طول b را حول آن یعنی b دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای با شعاع قاعده a و ارتفاع b حاصل شود. می‌خواهیم حجم استوانه یعنی $V = \pi a^2 b$ ماکزیمم شود. چون:



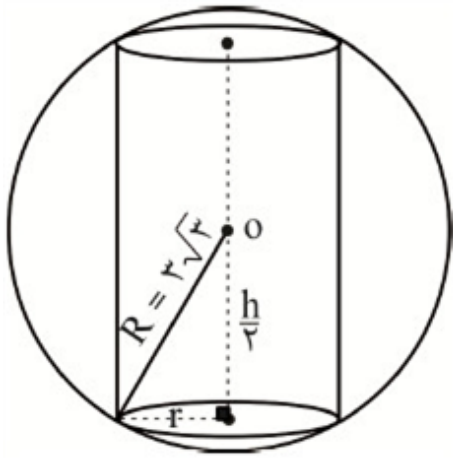
$$\left. \begin{aligned} \text{محیط دایره} &= 6\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 3 \\ \text{قطر دایره} &= 2R = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 36$$

$$\Rightarrow a^2 = 36 - b^2$$

$$V = \pi a^2 b = \pi(36 - b^2)b \Rightarrow V = 36\pi b - \pi b^3$$

$$V'(b) = 36\pi - 3\pi b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 12 \begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ a = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{مساحت مستطیل اولیه با شرط ماکزیمم بودن حجم استوانه حاصل} \quad S_{\square} = a \times b = 12\sqrt{2}$$



$$(3\sqrt{3})^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow r^2 = 27 - \frac{1}{4}h^2 \quad (1)$$

$$\text{استوانه } V = \pi r^2 \cdot h = \pi \left(27 - \frac{1}{4}h^2 \right) \cdot h$$

$$\text{استوانه } V(h) = 27\pi h - \frac{\pi}{4}h^3; 0 \leq h \leq 6\sqrt{3}$$

برای یافتن نقاط بحرانی تابع حجم استوانه در بازه $[0, 6\sqrt{3}]$ ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = 27\pi - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow r^2 = 18$$

$$V_{\max} = \pi r^2 \cdot h = \pi \times 18 \times 6 = 108\pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در گام اول مساحت مکعب مستطیل را می‌نویسیم و مساوی ۲۴ قرار می‌دهیم تا رابطه‌ای بر حسب x و h به دست می‌آید: ۴۹

$$2x^2 + 2xh = 24 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2xh = 12 \Rightarrow h = \frac{12 - x^2}{2x}$$

در گام دوم حجم $v = x^2 h$ را به صورت تک‌متغیره بر حسب x می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$V = x^2 h = x^2 \left(\frac{12 - x^2}{2x} \right) = \frac{12x - x^3}{2} \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow \frac{12 - 3x^2}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} h = \frac{12 - 4}{4} = 2 \Rightarrow V_{\max} = 8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۰

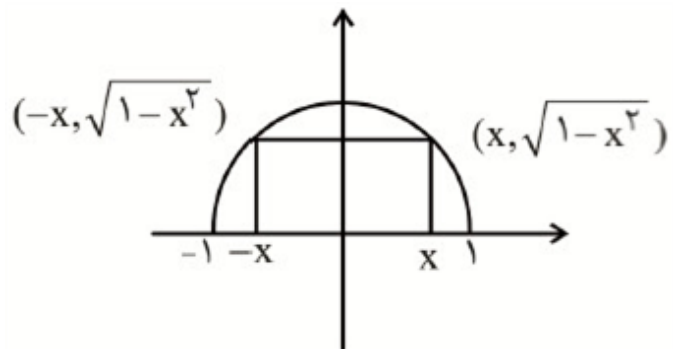
$$S_{ABCD} = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$S' = 2\sqrt{1 - x^2} + \frac{(-2x)(2x)}{2\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

$$S' = \frac{2(1 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۱

$$h + r = 6$$

$$V = h\pi r^2 = \pi r^2(6 - r) = \pi(6r^2 - r^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 12r - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow V = \pi(96 - 64) = 32\pi$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۲

$$\text{مساحت جانبی استوانه} = 2\pi rh = 12\pi \Rightarrow rh = 6$$

$$P = h + 2r = \frac{6}{r} + 2r$$

$$P' = -\frac{6}{r^2} + 2 \xrightarrow{P'=0} r = \sqrt{3} \Rightarrow P_{\min} = 4\sqrt{3}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴

۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴