کل تمارین کتاب گسسته

رضاپازوکی

REZA PAZOKI

رضا پازوکی

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۲) آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

$$x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲$$

۳) عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^۳ < x^۲$.

۴) آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{۱}{a+b} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \quad (a+b \neq ۰)$$

۵) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + ۲\beta$ گنگ هستند.

۶) ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۷) فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a، b، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۸) اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$$m \leq n \ , \ a|b \Rightarrow a^m | b^n$$

۹) اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۵|۴k + ۱$، ثابت کنید: $۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

۱۰) آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a + c|b + d$؟

۱۱) اگر $a > ۱$ و $a|۹k + ۴$ و $a|۵k + ۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۱۲) ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(راهنمایی: فرض کنید $(m, m+۱) = d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d = ۱$).

۱۳) اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = ۱$.

۱۴) حاصل هریک را به‌دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $([m^۲, m], m^۵)$

ب) $(۲m, ۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

ت) $[m^۷, (m^۲, m^۳)]$

ث) $[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰]$

۱۵) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۶) ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

۱۷) ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۸) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۹) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳ - n$.

۲۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^{۲}+b^{۲}+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۲۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۲۲ عکس عبارت «اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$» را بیان و اثبات کنید.

۲۳ اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است.

$k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_{۳}$ یا $k \in [۱]_{۳}$ یا $k \in [۲]_{۳}$)

۲۴ با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^{۲} + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^{۳} + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۲۵ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۲۶ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۲۷ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۲۸ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مردادماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۲۹ اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۳۰ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۳۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۳۲ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۳۳ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را به‌دست آورید.

۳۴ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید.

۳۵ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۳۶ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را به‌دست آورید.

الف

$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب

$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

پ

$۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۳۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید. (رقم یکان A را بیابید.)

۳۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۳۹ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۴۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

۴۱ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دستهٔ گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۴۲ برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که:

الف) چگونه می‌توانید یک گراف nرأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد؟

۴۳ گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک γ-مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶عضوی از آن را مشخص نمایید.

۴۴ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

۴۵ الف) یک گراف ۶رأسی که γ-مجموعهٔ آن با اندازهٔ یک باشد، رسم کنید.

ب) یک گراف ۶رأسی که γ-مجموعهٔ آن با اندازهٔ دو باشد، رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \le n$. روشی برای رسم یک گراف nرأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

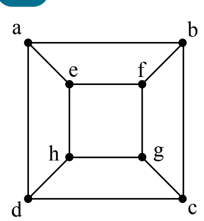
۴۶ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۴۷ اگر G یک گراف k-منتظم nرأسی باشد، نشان دهید: $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \le \gamma(G)$.

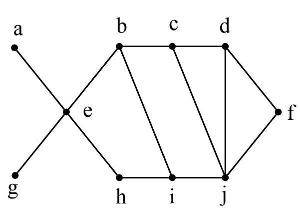
۴۸ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی که گراف G می‌تواند داشته باشد را مشخص کنید)

۴۹ عدد احاطه‌گری را برای هریک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.

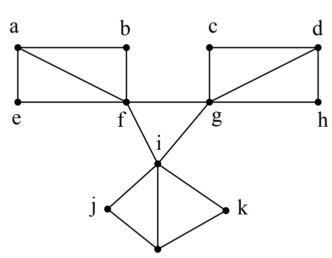
الف



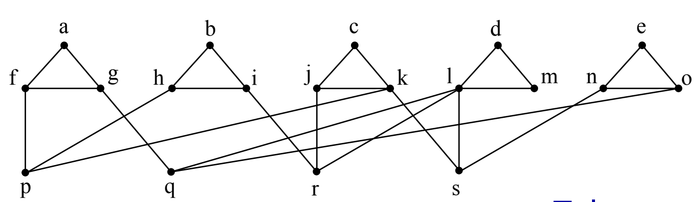
ب



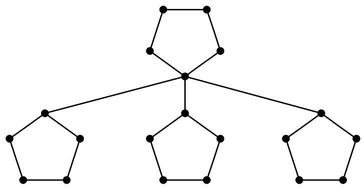
پ



ت



ث



۵۰ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در یک ردیف بچینیم؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۵۱ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $۴! \times ۷!$ باشد.

۵۲ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند، در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیلی شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۵۳ می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولیدشدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شاملِ ۹ حرفِ $a, a, b, a, c, c, d, d, d$، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۵۴ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

۵۵ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند، در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه‌نفره قرار بگیرند؟

۵۶ اگر داشته باشیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۵۷ به چند طریق می‌توان، ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۵۸ به چند طریق می‌توان، ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۵۹ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل، حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم، حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم، بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم، حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۶۰ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده‌شده به دست آورید.

الف

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰ \qquad x_i > ۰, ۲ \leq i \leq ۵$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

ب

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ = ۱۲ \qquad x_۱ > ۲, x_۵ \geq ۴$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

پ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۱ \qquad x_i \geq ۱, ۱ \leq i \leq ۵$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

ت

$$x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۷ \qquad x_i \geq ۰, ۱ \leq i \leq ۴$$

ث

$$x_۱ + \sqrt{x_۲} + x_۳ + x_۴ = ۳ \qquad x_i \geq ۰, ۱ \leq i \leq ۴$$

۶۱ آیا مربع لاتینِ حاصل از اعمالِ یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتینِ دلخواه، می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۶۳) مربع لاتین ۳×۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۶۴) در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی قرار است، ۷ راننده در هفت روزِ هفته با ۷ ماشین مختلف در ۷ مسیر مختلف مسابقه دهند. به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز، با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین، دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز، دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر، دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شود.

- برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

۶۵) قرار است شش مدرس $T_۱$، $T_۲$ و ... و $T_۶$ در شش جلسهٔ متوالی در شش کلاسِ $C_۱$، $C_۲$ و ... و $C_۶$ به‌گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۶۶) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(۱ \leq n \leq ۲۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۶۷) در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند، مشخص کنید:

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۶۸) به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی مختلف را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۶۹) اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند، باز کنیم و تمام اعداد ۵رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۷۰) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ $(۱ \leq n \leq ۹۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۷۱) چه تعداد تابع چون $f : A \to B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A| = ۵$ و $|B| = ۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

۷۲) ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد؟

۷۳) ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموع‌شان عددی زوج باشد؟

۷۴) ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر، حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند؟

۷۵) ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

۷۷ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟

۷۸ مجموعهٔ اعداد $A = \{۱, ۵, ۹, ۱۳, \cdots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۷۹ مجموعهٔ اعداد $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۸۴\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است؟

پاسخنامه تشریحی
۷

۱ الف) اثبات این گزاره به صورت زیر است:

اگر $2n-1$ که $n \in \mathbb{Z}$ عدد فرد دلخواهی باشد، آنگاه داریم:

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1 = 2q+1 \rightarrow \text{فرد است.}$$

$$(2n+1)^3 = 8n^3+12n^2+6n+1 = 2(4n^3+6n^2+3n)+1 = 2q+1 \;\text{فرد است.}$$

ب) فرض کنیم $n+1$، $n+2$، $n+3$، $n+4$ و $n+5$ ($n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) ۵ عدد طبیعی متوالی باشند، داریم:

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{5n+15}{5} = n+3 \rightarrow \text{عدد وسطی}$$

بنابراین حکم برقرار است.

۲

$$x^2+y^2 = x^2+y^2+2xy \rightarrow 2xy = 0 \rightarrow x=0 \;\text{یا}\; y=0$$

اگر حداقل یکی از اعداد x و y برابر صفر باشند، تساوی برقرار است. به‌عنوان مثال $x=0$ و $y=1$ را در نظر بگیرید.

۳ برای مثال: یا $x=-1$ را در نظر بگیرید.

$$x=-1 \Rightarrow (-1)^3 < (-1)^2 \rightarrow -1 < 1$$

۴ خیر؛ فرض کنیم چنین اعدادی وجود داشته باشند بنابراین داریم:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \rightarrow (a+b)^2 = ab$$
$$\rightarrow a^2+b^2+2ab = ab \rightarrow a^2+b^2+ab = 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab = 0$$
$$\rightarrow (a^2+b^2+2ab)+a^2+b^2 = 0 \rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2 = 0$$
$$\rightarrow a=0\;,\; b=0\;,\; a+b=0 \quad \times$$

حال که به تناقض رسیدیم می‌توانیم خلاف حکم را نتیجه بگیریم؛ یعنی به ازای هیچ مقدار ناصفر a و b، رابطه $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ برقرار نیست.

۵ فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha-\beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی $\alpha+\beta$ گویا است، پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha+\beta+\alpha-\beta = 2\alpha$ گویاست در نتیجه α گویا است که با فرض در تناقض است، پس $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha+2\beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون $\alpha+\beta$ گویا است، پس تفاضل آن‌ها یعنی $\alpha+2\beta-(\alpha+\beta) = \beta$ گویا است که با فرض در تناقض است، پس $\alpha+2\beta$ گنگ است.

۶

$$a|b \longrightarrow b = aq\;,\; q\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} b = (-a)(-q) \longrightarrow -a|b \\ -b = (-a)q = a(-q) \longrightarrow -a|-b\;,\; a|-b \end{cases}$$

۷

بنابر تعریف بخش‌پذیری، $a|b$ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b=aq$، بنابراین داریم:

$(1)\; ab = (c)d \longrightarrow d|ab \qquad (2)\; ab = c(d) \longrightarrow c|ab$

$(3)\; ab = cd(1) \longrightarrow cd|ab \qquad (4)\; cd = ab(1) \longrightarrow ab|cd$

$(5)\; cd = (a)b \longrightarrow b|cd \qquad (6)\; cd = a(b) \longrightarrow a|cd$

۸

$$a|b \longrightarrow a^m|b^m \xrightarrow{b\in\pi\;,\; n-m\geq 0} a^m|b^m \times b^{n-m} \longrightarrow a^m|b^n$$

۹ می‌دانیم اگر $a|b$ آنگاه $a^2|b^2$ پس داریم:

$$5|4k+1 \rightarrow 5^2|(4k+1)^2 \rightarrow 25|16k^2+8k+1 \quad (I)$$

$$\left.\begin{matrix} 5|4k+1 \\ 5|5 \end{matrix}\right\} \rightarrow 25|20k+5 \quad (II)$$

از طرفی اگر $a|b$ و $c|d$، آنگاه $ac|bd$، پس داریم:

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} 25|20k+5 \\ 25|16k^2+8k+1 \end{cases} \rightarrow 25|16k^2+28k+6$$

۱۰ خیر؛ می‌دانیم $2|2$ و $3|9$ ولی $2+3 \nmid 2+9$.

۱۱ با خواص بخش‌پذیری، k را حذف می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} a|۵k+۳ \to a|۹(۵k+۳) \\ a|۹k+۴ \to a|۵(۹k+۴) \end{array}\right\} \longrightarrow a|۹(۵k+۳)-۵(۹k+۴) \longrightarrow a|۷ \Rightarrow a=۱ \text{ یا } a=۷ \xrightarrow{a>۱} a=۷$$

بنابراین a عددی اول است.

۱۲ الف) دو عدد صحیح و متوالی را m و $m+۱$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(m,m+۱)=d$. آنگاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|m \\ d|m+۱ \end{array}\right\} \to d|m+۱-m \to d|۱$$

حال چون $d>۰$ می‌توان نتیجه گرفت $d=۱$؛ یعنی دو عدد صحیح و متوالی m و $m+۱$ نسبت به هم اول‌اند.

ب) دو عدد صحیح و فرد متوالی را $۲m+۱$ و $۲m+۳$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(۲m+۱,۲m+۳)=d$. آنگاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|۲m+۱ \\ d|۲m+۳ \end{array}\right\} \to d|۲m+۳-۲m-۱ \to d|۲$$

با توجه به اینکه $d>۰$ می‌توان نتیجه گرفت $d=۱$ یا $d=۲$ چون هیچ عدد فردی مقسوم‌علیه زوج ندارد بنابراین $d=۱$.

۱۳ فرض کنیم $(p,q)=d$ و $d\neq ۱$ بنابراین داریم:

$$d|p\ ,\ d|q \xrightarrow{q,p,d\neq ۱ \text{ اول}} d=p\ ,\ d=q \longrightarrow p=q$$

حال با توجه به اینکه $p=q$ با فرض مسئله در تناقض است نتیجه می‌گیریم $d=۱$.

۱۴

الف) $m|m^۲ \to [m^۲,m]=m^۲ \quad , \quad m^۲|m^۵ \to (m^۲,m^۵)=m^۲$

$\Rightarrow ([m^۲,m],m^۵)=(m^۲,m^۵)=m^۲$

ب) $۲m|۶m^۳ \to (۲m,۶m^۳)=۲m$

پ) $(۳m+۱,۳m+۲)=d \to \begin{cases} d|۳m+۱ \\ d|۳m+۲ \end{cases} \to d|۱ \to d=۱$

ت) $m^۲|m^۳ \to (m^۲,m^۳)=m^۲ \quad , \quad m^۲|m^۷ \to [m^۲,m^۷]=m^۷$

$\Rightarrow [m^۷,(m^۲,m^۳)]=[m^۷,m^۲]=m^۷$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]=[(۲^۳\times ۳^۲,۲^۴\times ۳),۱۲۰]=[۲۴,۱۲۰]=۱۲۰$

(توجه کنید که $۲۴|۱۲۰$)

۱۵ طبق فرض به‌ازای اعداد صحیح $q_۱$ و $q_۲$ داریم: $a=nq_۱$ و $b=nq_۲$.

$$a=bq+r \to nq_۱=nq_۲q+r \to r=nq_۱-nq_۲q=n(q_۱-q_۲q)$$

بنابراین r هم بر n بخش‌پذیر است.

۱۶ اعداد صحیح متوالی دلخواه n، $n+۱$ و $n-۱$ را در نظر می‌گیریم با توجه به تمرین ۱۱ نشان دادیم که حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی نیز بر ۲ بخش‌پذیر است؛ پس حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی نیز مضرب ۲ می‌باشد؛ در نتیجه $n(n+۱)(n-۱)$ بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۷

$$(n+۱)^۳-n^۳=n^۳+۳n^۲+۳n+۱-n^۳=۳n^۲+۳n+۱=۳\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۱=۶k+۱$$

حال n می‌تواند زوج یا فرد باشد. در هر دو صورت حاصل $(n+۱)^۳-n^۳$ عددی فرد می‌شود پس حکم برقرار است.

۱۸ برای عدد صحیح و دلخواه a یکی از ۳ حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $a=۳k$ آنگاه $۳|a$.

(۲) اگر $a=۳k+۱$ آنگاه $۳|a+۲$.

(۳) اگر $a=۳k+۲$ آنگاه $۳|a+۴$.

۱۹ می‌توان نوشت:

$$n^۳-n=n(n^۲-۱)=n(n+۱)(n-۱)$$

حالت ۱: فرض کنیم $n=۳k$ که $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$n^۳-n=(۳k)(۳k+۱)(۳k-۱) \to ۳|n^۳-n$$

حالت ۲: فرض کنیم $n=۳k+۱$ که $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$n^۳-n=(۳k+۱)(۳k+۲)(۳k) \to ۳|n^۳-n$$

حالت ۳: فرض کنیم $n=۳k+۲$ که $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$n^۳-n=(۳k+۲)(۳k+۳)(۳k+۱) \to ۳|n^۳-n$$

پس در هر حالت ثابت کردیم $۳|n^۳-n$.

۲۰ طبق فرض $a=۲n+۱$ که $n\in\mathbb{Z}$ داریم:

$b|a+۲ \to b|۲n+۳ \to$ عددی فرد است $b \to b=۲n'+۱ \quad (-n$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+۳=(۲n+۱)^۲+(۲n'+۱)^۲+۳=۴n^۲+۴n+۱+۴n'^۲+۴n'+۱+۳$$
$$=۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۴\underbrace{n'(n'+۱)}_{۲k'}+۵=۸k+۸k'+۵=۸(\underbrace{k+k'}_{q})+۵$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ برابر ۵ است.

۲۱ طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} a=۷k+۵\ (k\in\mathbb{Z})\xrightarrow{\times ۸} ۸a=۵۶k+۴۰ \\ a=۸k'+۷\ (k\in\mathbb{Z})\xrightarrow{\times ۷} ۷a=۵۶k'+۴۹ \end{array}\right\}$$
$$\to a=۵۶k-۵۶k'-۹\Rightarrow a=۵۶(k-k')-۹\Rightarrow a=۵۶k''-۹$$
$$\Rightarrow a=۵۶(\underbrace{k''-۱}_{q})+۵۶-۹\Rightarrow a=۵۶q+۴۷$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ است.

۲۲ باید ثابت کنیم که $a\overset{m}{\equiv}b$ آن‌گاه a و b در تقسیم بر m هم‌باقی‌مانده‌اند. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a=mq+r & ۰\le r<m \\ b=mq'+r' & ۰\le r'<m \end{cases}$$

$$a\overset{m}{\equiv}b\to m|a-b\to m|mq+r-mq'-r'\to m|r-r'$$

$$\to r-r'=mk\ \ (k\in\mathbb{Z})\to r=r'+mk\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow[۰\le r'<m]{۰\le r<m} k=۰\to r=r'$$

۲۳ طبق قضیهٔ تقسیم k را می‌توان به یکی از سه فرم $۳q$، $۳q+۱$ یا $۳q+۲$ نمایش داد.

بنابراین ۳ حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $k=۳q$، $q\in\mathbb{Z}$:

$$۳|k\to k\overset{۳}{\equiv}۰\to k\in[۰]_۳$$

حالت دوم: $k=۳q+۱$، $q\in\mathbb{Z}$:

$$۳|۳q+۱-۱\to ۳|k-۱\to k\overset{۳}{\equiv}۱\to k\in[۱]_۳$$

حالت سوم: $k=۳q+۲$، $q\in\mathbb{Z}$:

$$۳|۳q+۲-۲\to ۳|k-۲\to k\overset{۳}{\equiv}۲\to k\in[۲]_۳$$

۲۴

$$(a+b)^n-(a^n+b^n)=\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+\cdots+\binom{n}{n-۱}ab^{n-۱}$$
$$=\sum_{i=۱}^{n-۱}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$
$$\to ab|(a+b)^n-(a^n+b^n)\to (a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۲۵ طبق فرض می‌توان نوشت $a=mq+r$ و $b=mq'+r$ داریم:

$$a-b=mq+r-(mq'+r)=mq-mq'=m(q-q')=mk$$

بنابراین $m|a-b$ در نتیجه $a\overset{m}{\equiv}b$.

۲۶ با توجه به فرض $(m,n)=d$ بنابراین $d|m$ و $d|n$:

$$a\overset{m}{\equiv}b\xrightarrow{d|m}a\overset{d}{\equiv}b\quad (I)$$

$$b\overset{n}{\equiv}c\xrightarrow{d|n}b\overset{d}{\equiv}c\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)}\begin{cases} a\overset{d}{\equiv}b \\ b\overset{d}{\equiv}c \end{cases}\to a\overset{d}{\equiv}c$$

۲۷

$$a\overset{m}{\equiv}b\to m|a-b$$

طبق فرض: $\left.\begin{array}{l} m|a-b \\ n|m \end{array}\right\}\to n|a-b\to a\overset{n}{\equiv}b$

۲۸ فرض کنیم ۱۲ بهمن x-امین و ۳۱ مردادماه y-امین روز سال باشند در این صورت، داریم:

$$x = ۶ \times ۳۱ + ۴ \times ۳۰ + ۱۲ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$y = ۴ \times ۳۱ + ۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

حال چون x-امین روز سال جمعه است پس سومین روز سال نیز جمعه می‌باشد پس اولین روز سال چهارشنبه است در نتیجه ۳۱ مردادماه نیز چهارشنبه است.

۲۹ روزهای هفته دورهٔ گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر $a \overset{۷}{\equiv} b$ آن‌گاه a-امین و b-امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر x-امین و ۷ اسفند y-امین روز سال باشند داریم:

$$x = ۶ \times ۳۱ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$y = ۶ \times ۳۱ + ۵ \times ۳۰ + ۷ \overset{۷}{\equiv} ۷$$

بنابراین x-امین روز سال مانند ۵-امین روز سال و y-امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون x-امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال سه‌شنبه می‌باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه‌شنبه است.

۳۰

$$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳ + ۹ + ۸ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

بنابراین $۱۳۹۸ \in [۳]_۹$.

۳۱ می‌توان نوشت: $۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۹^۲ \times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} (۲^۵)^۲ \times ۲ = ۲^{۱۱} \quad , \quad ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۲^۵ = ۳۲$

$$\Rightarrow (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} (۱ + ۷) \times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$$

۳۲ می‌توان نوشت $۱۲ + ۱۱ = ۲۳$ بنابراین $(۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱}) - (۱۱ + ۱۲)^{۵۱} = ۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$ که با توجه به تمرین قبل $۱۱ \times ۱۲ | (۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$ بنابراین $۱۳۲ | ۲۳^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$.

۳۳

$$۷x + ۵y = ۱۱ \to ۷x \overset{۵}{\equiv} ۱۱ \overset{۵}{\equiv} ۱۱ + ۱۰ \overset{۵}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{(۷,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \to x = ۵k + ۳$$

$$۷(۵k + ۳) + ۵y = ۱۱ \to ۵y = ۱۱ - ۷ \times ۵k - ۲۱ \to ۵y = -۱۰ - ۷ \times ۵k \to y = -۲ - ۷k$$

بنابراین تمام جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $۷x + ۵y = ۱۱$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} x = ۵k + ۳ \\ y = -۲ - ۷k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۳۴ طبق فرض داریم:

$$۳a - ۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a - ۷ \to ۱۰ | (۴a - ۷) - (۳a - ۵) \to ۱۰ | a - ۲ \to a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(I)} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \times ۹ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II)} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

۳۵ باید همهٔ اعداد صحیح a را بیابیم که در معادلهٔ همنهشتی $۵a + ۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ صدق کنند داریم:

$$۵a + ۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to ۵a \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲ + (۳ \times ۱۱) \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \to a = ۱۱k + ۷\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

۳۶

الف

با توجه به اینکه $۴۲۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$ و $۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$ می‌توان نوشت:

$$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹ \to ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲ + ۳ \times ۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \to x = ۱۱k + ۷$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ همنهشتی $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$ به‌صورت $x = ۱۱k + ۷$ است.

ب

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ + ۱۲ \times ۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۵۶ \xrightarrow{(۸,۱۲)=۴} x \overset{۳}{\equiv} ۷ \overset{۳}{\equiv} ۱ \to x = ۳k + ۱$$

پ

$$۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow[۱۱ \overset{۶}{\equiv} ۵]{۵۱ \overset{۶}{\equiv} ۳} ۳x \overset{۶}{\equiv} ۵$$

این معادله جواب ندارد زیرا $(۳,۶) = ۳$ ولی $۳ \nmid ۵$.

۳۷ می‌دانیم به‌ازای $n > ۴$، $۱۰ | n!$ بنابراین داریم:

$$\forall n \geq ۵ \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots ۵۰۰! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

$(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۵)$ بنابراین رقم یکان A برابر ۳ می‌باشد.

$$۳x+۵y=۲۳ \to ۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \to x=۵k+۱$$

$$۳(۵k+۱)+۵y=۲۳ \to ۵y=۲۳-۳\times ۵k-۳ \to y=۴-۳k$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $۳x+۵y=۲۳$ به فرم زیر هستند:

$$\begin{cases} x=۵k+۱ \\ y=۴-۳k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

برای یافتن جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=۵k+۱\geq ۰ \\ y=۴-۳k\geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k\geq ۰ \\ k\leq ۱ \end{cases}$$

بنابراین فقط به‌ازای $k=۰$ و $k=۱$ معادله جواب صحیح و نامنفی دارد پس به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۳۹ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$ را بیابیم:

$$۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰ \to ۲x+۵y=۲۹ \to ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \overset{۵}{\equiv} ۲۹+۵ \overset{۵}{\equiv} ۳۴$$
$$\xrightarrow{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \to x=۵k+۲$$

$$۲(۵k+۲)+۵y=۲۹ \to ۵y=۲۹-۲\times ۵k-۴ \to y=۵-۲k$$

بنابراین تمام جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=۵k+۲ \\ y=۵-۲k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ مفروض به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \to ۵k+۲\geq ۰ \to k\geq ۰ \\ y\geq ۰ \to ۵-۲k\geq ۰ \to k\leq ۲ \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای $۰\leq k\leq ۲$ جواب صحیح برای معادله به‌دست می‌آید پس به ۳ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۴۰ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x+۹y=۷۳$ را به‌دست آوریم:

$$۷x \overset{۹}{\equiv} ۷۳ \xrightarrow{۷۳\overset{۹}{\equiv}۱} ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱+۳\times ۹ \overset{۹}{\equiv} ۲۸ \xrightarrow{(۷,۹)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۴ \to x=۹k+۴$$

$$۷(۹k+۴)+۹y=۷۳ \to ۹y=۷۳-۷\times ۹k-۲۸ \to y=۵-۷k$$

بنابراین صورت کلی جواب معادلهٔ سیالهٔ $۷x+۹y=۷۳$ به فرم زیر است:

$$\begin{cases} x=۹k+۴ \\ y=۵-۷k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

حال برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۹k+۴\geq ۰ \\ ۵-۷k\geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k\geq ۰ \\ k\leq ۰ \end{cases}$$

بنابراین تنها به‌ازای $k=۰$ جواب صحیح و نامنفی برای معادله به‌دست می‌آید بنابراین این شخص فقط به یک طریق توانسته این امتیاز را به‌دست آورد.

۴۱ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $x+y=۹$ را بیابیم. صورت کلی جواب این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح عبارت است از:

$$\begin{cases} x=k \\ y=۹-k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

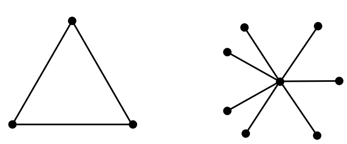
چون باید جواب‌های صحیح و نامنفی را بیابیم بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \\ x\geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k\geq ۰ \\ ۹-k\geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k\geq ۰ \\ k\leq ۹ \end{cases} \to ۰\leq k\leq ۹$$

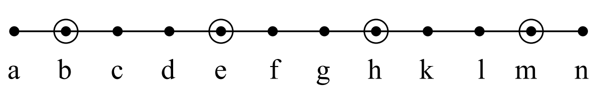
پس به‌ازای ۱۰ مقدار از k جواب‌های صحیح و نامنفی برای معادلهٔ سیاله به‌دست می‌آید بنابراین این کار را به ۱۰ طریق می‌توان انجام داد.

۴۲ الف) کافی است گراف را به‌صورت یک زیرگراف ستاره‌ای و یک رأس تنها در نظر بگیریم. در این صورت، رأس وسط گراف ستاره‌ای و رأس تنها مجموعهٔ احاطه‌گر را تشکیل می‌دهند.

ب) اگر گراف را به‌صورت مقابل در نظر بگیریم که شامل یک مثلث و یک گراف ستاره‌ای است، هر رأس گراف مثلث با رأس وسط گراف ستاره‌ای تشکیل یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۲عضوی می‌دهند که این مجموعه یکتا نیست.

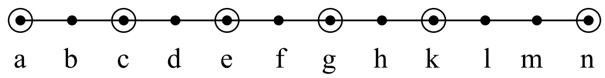


۴۳ الف)



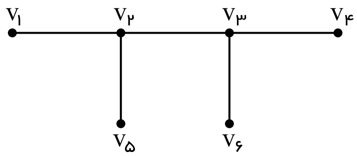
$\{b,e,h,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است. $\gamma(G)=۴$

ب)

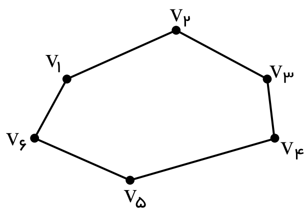


$\{a, c, e, g, k, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

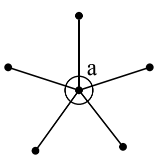
۴۴ الف) مجموعهٔ $\{v_۲, v_۳\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ است.



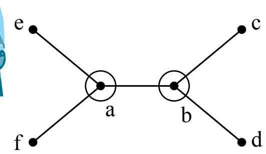
ب) مجموعه‌های $\{v_۳, v_۶\}$ و $\{v_۲, v_۵\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ هستند.



۴۵ الف) مجموعهٔ $\{a\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر است: $\gamma(G) = ۱$



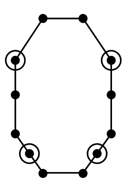
ب)



مجموعهٔ $\{a, b\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر است. $\gamma(G) = ۲$ زیرا رأس‌های e و f درجهٔ یک هستند و باید حتماً یکی از رأس‌های f و e و a در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. رئوس c و d نیز درجهٔ یک هستند. باید حتماً یکی از رئوس b و d و c در مجموعهٔ احاطه‌گر باشد.

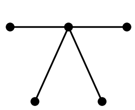
پ) هر گرافی با n رأس رسم کنیم، عدد احاطه‌گری کوچک‌تر یا مساوی n خواهد بود. در گراف تهی عدد احاطه‌گری برابر n است. اگر بخواهیم عدد احاطه‌گری k باشد، کافی است $k - ۱$ رأس را به‌صورت منفرد در نظر بگیریم و $n - (k - ۱)$ رأس باقی‌مانده را به‌صورت گراف ستاره‌ای رسم کنیم. در این صورت، عدد احاطه‌گری k خواهد بود.

۴۶ عدد احاطه‌گری حداقل برابر ۴ است، زیرا $۴ = \left\lceil \frac{۱۲}{۳} \right\rceil \leq \gamma(G)$. پس کافی است گراف ۲-منتظم مرتبهٔ ۱۲ را رسم کنیم که عدد احاطه‌گری آن ۴ باشد.



۴۷ می‌دانیم در هر گراف nرأسی $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ می‌باشد. در گراف k-منتظم داریم: $\Delta = k$، پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{k + ۱} \right\rceil$.

۴۸ اگر در گراف G با n رأس، $\gamma(G) = ۱$ باشد، یعنی گراف رأسی دارد که با تمام رئوس گراف با یک یال متصل است، پس $\Delta(G) = n - ۱$.



کمترین تعداد یال را در گراف مقابل داریم، یعنی $q = n - ۱$ و بیشترین تعداد یال مربوط به گراف کامل است $q = \frac{n(n-۱)}{۲}$.

۴۹

الف

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil = ۲$

از طرفی مجموعهٔ $\{e, c\}$ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) \leq ۲$، در نتیجه $\gamma(G) = ۲$ است.

ب

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۵} \right\rceil = ۲$ از طرفی $\{e, j\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq ۲$ پس $\gamma(G) = ۲$

پ

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۶} \right\rceil = ۲$$

در گراف هیچ دو عضوی وجود ندارد که گراف را پوشش دهد، یعنی هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی وجود ندارد.

از طرفی مجموعهٔ $\{f, g, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = ۳$.

ت

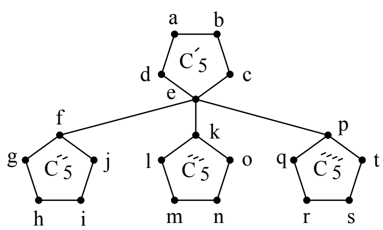
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۹}{۶} \right\rceil = ۴$$

در گراف هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی وجود ندارد، از طرفی مجموعهٔ $\{f, h, j, l, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = ۵$.

ث

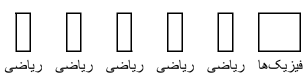
گراف موردنظر مطابق شکل از ۴ گراف $C_۵$ تشکیل شده است که در هرکدام از آنها به حداقل دو رأس برای مجموعهٔ احاطه‌گر نیاز داریم.

بنابراین، مجموعه‌ای با هشت عضو مانند مجموعهٔ $\{a, c, g, i, l, o, q, t\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای این گراف بوده و $\gamma(G) = ۸$ است.



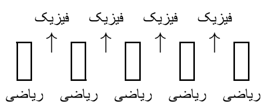
۵۰ الف) جایگشت ۹ کتاب برابر !۹ است.

ب) جایگشت ۶ شیء مقابل برابر با !۶ است. جایگشت کتاب‌های فیزیک کنار هم !۴ است.



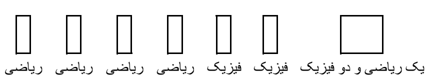
پس جواب نهایی برابر است با: !۶!۴

پ) کتاب‌ها باید یک‌درمیان قرار بگیرند که با توجه به شکل مقابل، کتاب‌های ریاضی !۵ جایگشت و کتاب‌های فیزیک !۴ جایگشت دارند.



پس جواب نهایی برابر است با: !۵!۴

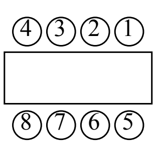
ت) جایگشت ۷ شیء مقابل !۷ است و جایگشت ۲ کتاب فیزیک و یک کتاب ریاضی خاص کنارهم، !۳ است.



پس جواب نهایی برابر است با: !۷!۳

۵۱ ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند، به گونه‌ای که دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم، کنار هم باشند؟

۵۲ برای جایگاه شمارهٔ ۱، هشت انتخاب وجود دارد. سپس برای جایگاه شمارهٔ ۵، یک انتخاب وجود دارد. (چون باید ۱ و ۵ برادر باشند.) به همین ترتیب برای شمارهٔ ۲، شش انتخاب، برای شمارهٔ ۶، یک انتخاب، برای شمارهٔ ۳، چهار انتخاب، برای شمارهٔ ۷، یک انتخاب، برای شمارهٔ ۴، دو انتخاب و برای شمارهٔ ۸، یک انتخاب وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:



$$۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۸۴$$

۵۳ جایگشت ۹ شیء برابر با !۹ است. اما چون ۳ شیء تکراری (a) و ۲ شیء تکراری (c) و ۳ شیء تکراری (d) وجود دارد، طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار، جواب برابر است با:

$$\frac{۹!}{۳!۲!۳!}$$

۵۴ جایگشت ۶ شیء برابر با !۶ است. اما چون سه عدد تکراری ۷ و دو عدد تکراری ۵، وجود دارد، جواب برابر است با:

$$\frac{۶!}{۳!۲!} = ۶۰$$

۵۵ ابتدا ۲ نفر را برای اتاق ۲نفری انتخاب می‌کنیم. تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۷}{۲} = ۲۱$$

سپس ۲ نفر دیگر را از بین ۵ نفر باقی‌مانده، برای اتاق ۲نفری دیگر انتخاب می‌کنیم. تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۵}{۲} = ۱۰$$

حالا ۳ نفر باقی می‌مانند که به یک حالت می‌توانند در اتاق ۳نفره قرار بگیرند.

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲} = ۲۱ \times ۱۰ = ۲۱۰$$

۵۶ تعداد انتخاب دو رقم از A:

$$\binom{۴}{۲}=۶$$

تعداد انتخاب سه رقم از B:

$$\binom{۵}{۳}=۱۰$$

جایگشت ۵ رقم:

$$۵!=۱۲۰$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۶\times۱۰\times۱۲۰=۷۲۰۰$$

۵۷ جواب برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۵$ است که برابر است با:

$$\binom{۳+۵-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

۵۸ تعداد جواب‌های مسئله برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ است که برابر است با:

$$\binom{۸-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

۵۹ باید تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱$ را بیابیم. در هر قسمت شرط خاصی بیان شده است.

الف) این قسمت شرط جدیدی ندارد. پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۵}{۴}$$

ب) اینجا شرط $x_i\geq ۱\ ,\ i=۱,۲,\cdots,۵$ برقرار است. با تغییر متغیر $x_i=y_i+۱$ کافی است تعداد جواب صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را بیابیم:

$$y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۱۱-۵=۶$$

جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۶-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$$

پ) با تغییر متغیر $x_۲=y_۲+۲$ و $x_۵=y_۵+۴$ داریم:

$$x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۱۱-۶=۵$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}$$

ت) با تغییر متغیر $x_۴=y_۴+۵$ و با فرض $x_۳=۰$ داریم:

$$x_۱+x_۲+y_۴+x_۵=۱۱-۵=۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۴+۶-۱}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}$$

۶۰

الف

با تغییر متغیر $x_i=y_i+۱\ ,\ ۲\leq i\leq ۵$ داریم:

$$x_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۱۰-۴=۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۶-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$$

ب

با تغییر متغیر $x_۱=y_۱+۳\ ,\ x_۵=y_۵+۴$ داریم:

$$y_۱+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۱۲-۴-۳=۵$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}$$

پ

با تغییر متغیر $x_i=y_i+۱\ ,\ ۱\leq i\leq ۵$ داریم:

$$y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۱۱-۵=۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۶-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$$

ت

اگر $x_۲=۰$ باشد، $x_۱+x_۳+x_۴=۷$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۷-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}$$

اگر $x_۲=۱$ باشد، $x_۱+x_۳+x_۴=۴$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۴-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}$$

اگر ۲ $= x_2$ باشد، ۱ $= x_1+x_3+x_4$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۱-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\binom{۹}{۲}+\binom{۶}{۲}+\binom{۳}{۲}=۳۶+۱۵+۳=۵۴$$

ث

اگر ۰ $= x_2$ باشد، ۳ $= x_1+x_3+x_4$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}$$

اگر ۱ $= x_2$ باشد، ۲ $= x_1+x_3+x_4$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۲-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}$$

اگر ۴ $= x_2$ باشد، ۱ $= x_1+x_3+x_4$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۱-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}$$

اگر ۹ $= x_2$ باشد، ۰ $= x_1+x_3+x_4$ است و یک جواب دارد.

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}+۱=۲۰$$

۶۱ خیر، به‌عنوان مثال:

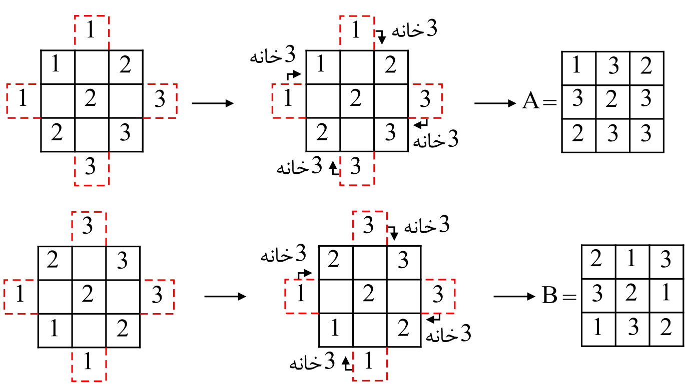
$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline\end{array} \xrightarrow[۳\to۲]{۱\to۳\ ,\ ۲\to۱} A_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline\end{array}$$

با توجه به اینکه

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

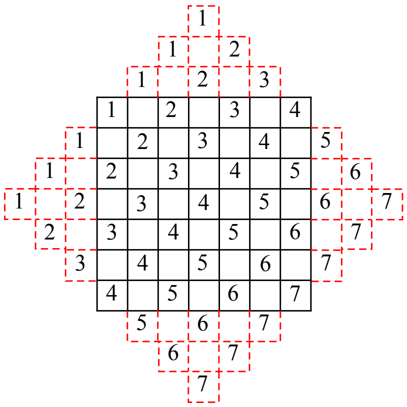
اعداد دورقمی تکراری دارد، پس A و A_1 متعامد نیستند.

۶۲ برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳، به‌ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

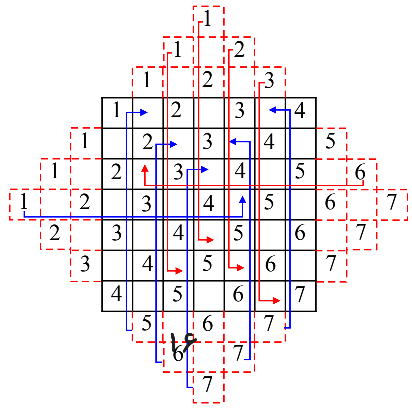


مربع لاتین A و B متعامد هستند.

برای ساخت مربع لاتین مرتبهٔ ۷ نیز به همین روش عمل می‌کنیم:

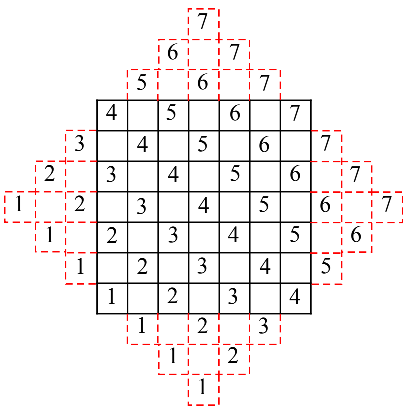


→

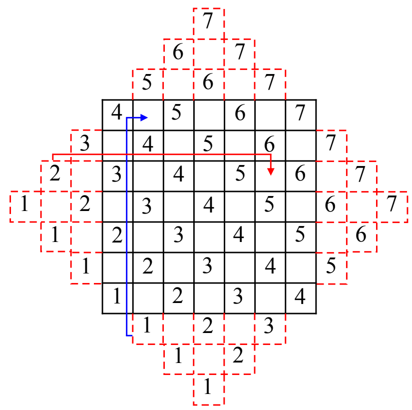


→

1	5	2	6	3	7	4
5	2	6	3	7	4	1
2	6	3	7	4	1	5
6	3	7	4	1	5	2
3	7	4	1	5	2	6
7	4	1	5	2	6	3
4	1	5	2	6	3	7



→



→

4	1	5	2	6	3	7
7	4	1	5	2	6	3
3	7	4	1	5	2	6
6	3	7	4	1	5	2
2	6	3	7	4	1	5
5	2	6	3	7	4	1
1	5	2	6	3	7	4

به این ترتیب دو ماتریس حاصل متعامد خواهند بود.

۶۳

الف) با توجه به اینکه

۳۳	۱۱	۲۲
۲۱	۳۲	۱۳
۱۲	۲۳	۳۱

درایهٔ تکراری ندارد، A و A_1 متعامدند.

$A_1 =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

ب) با توجه به اینکه

۲۳	۳۱	۱۲
۳۱	۱۲	۲۳
۱۲	۲۳	۳۱

درایهٔ تکراری دارد، A و A_2 متعامد نیستند.

$A_2 =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

پ) ۱- خیر   ۲- خیر

۶۴ برنامه‌ریزی مطابق شکل زیر، شامل دو مربع لاتین متعامد یکی برای ماشین‌ها و دیگری برای مسیرهاست.

A_i ماشین شمارهٔ i و B_i مسیر شمارهٔ i است.

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
راننده ۱	A_7B_7	A_6B_6	A_5B_5	A_4B_4	A_3B_3	A_2B_2	A_1B_1
راننده ۲	A_6B_1	A_5B_7	A_4B_6	A_3B_5	A_2B_4	A_1B_3	A_7B_2
راننده ۳	A_5B_2	A_4B_1	A_3B_7	A_2B_6	A_1B_5	A_7B_4	A_6B_3
راننده ۴	A_4B_3	A_3B_2	A_2B_1	A_1B_7	A_7B_6	A_6B_5	A_5B_4
راننده ۵	A_3B_4	A_2B_3	A_1B_2	A_7B_1	A_6B_7	A_5B_6	A_4B_5
راننده ۶	A_2B_5	A_1B_4	A_7B_3	A_6B_2	A_5B_1	A_4B_7	A_3B_6
راننده ۷	A_1B_6	A_7B_5	A_6B_4	A_5B_3	A_4B_2	A_3B_1	A_2B_7

۶۵ کافی است یک مربع لاتین 6×6 طراحی کنیم که سطرهای آن متناظر با جلسات و ستون‌های آن متناظر با کلاس‌ها است.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
جلسهٔ ۱	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
جلسهٔ ۲	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
جلسهٔ ۳	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
جلسهٔ ۴	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
جلسهٔ ۵	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
جلسهٔ ۶	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

۶۶

$$A = \{1 \le n \le 200 | n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{200}{4}\right] = 50 \quad , \quad B = \{1 \le n \le 200 | n = 7k\}$$

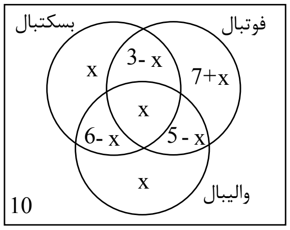
$$A \cap B = \{1 \le n \le 200 | n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{200}{28}\right] = 7$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۶۷ با توجه به اطلاعات سؤال نمودار مقابل را رسم می‌کنیم:

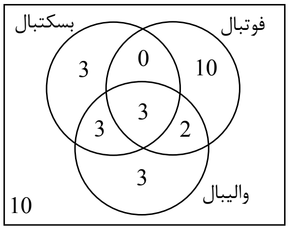
باید مجموع تعداد اعضای همهٔ نواحی برابر با ۳۴ باشد.

پس: $31 + x = 34 \Rightarrow x = 3$



پس مجدداً نمودار را رسم می‌کنیم و به سؤالات جواب می‌دهیم:

الف) ۳ ب) ۱۰ پ) ۵ ت) ۱۶



۶۸ تعداد جواب‌های این سؤال، معادل تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۶ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی است. تعداد این توابع برابر است با:

$۳^۶ - ۳ \times ۲^۶ + ۳ = ۷۲۹ - ۱۹۲ + ۳ = ۵۴۰$

۶۹ یک رمز ۵رقمی را به‌صورت $\overline{abcde}$ در نظر می‌گیریم که در آن a، b، c، d و e ارقام ۱ تا ۹ می‌باشند.

$A = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۷\} \to |A| = ۸^۵$

$B = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۲\} \to |B| = ۸^۵$

$C = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۳\} \to |C| = ۸^۵$

$A \cap B = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۷,۲\} \to |A \cap B| = ۷^۵$

$A \cap C = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۷,۳\} \to |A \cap C| = ۷^۵$

$B \cap C = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۲,۳\} \to |B \cap C| = ۷^۵$

$A \cap B \cap C = \{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e \neq ۲,۳,۷\} \to |A \cap B \cap C| = ۶^۵$

تعداد کل اعداد ۵ رقمی: $|S| = ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۹^۵$

$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$

$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = ۹^۵ - ۸^۵ - ۸^۵ - ۸^۵ + ۷^۵ + ۷^۵ + ۷^۵ - ۶^۵ = ۳۳۹۰$

حداکثر زمان لازم: $۳۳۹۰ \times ۶ = ۳۳۹ \times ۶۰ \ s = ۳۳۹ \ min$

۷۰ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۲:

$|A| = \left[\frac{۹۰}{۲}\right] = ۴۵$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳:

$|B| = \left[\frac{۹۰}{۳}\right] = ۳۰$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۳:

$|A \cap B| = \left[\frac{۹۰}{۶}\right] = ۱۵$

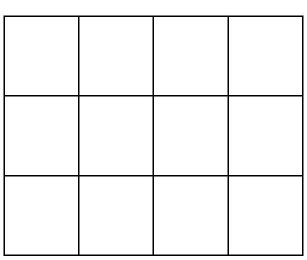
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۴۵ + ۳۰ - ۱۵ = ۶۰$

۷۱ برای هر عضو از A یکی از ۴ عضو B را می‌توان نسبت داد. پس تعداد کل توابع برابر است با:

$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۵ = ۱۰۲۴$

طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل یکی از اعضای B با بیش از یک عضو از A نسبت دارد. پس این تابع در هیچ حالتی نمی‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۷۲



در شکل مقابل مستطیل ۸×۶ به مربع‌های ۲×۲ تقسیم شده است. قطر هرکدام از مربع‌ها برابر با $\sqrt{۸}$ خواهد بود. پس برای اینکه فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای بیش از $\sqrt{۸}$ نشود، حداکثر ۱۲ نقطه می‌توان انتخاب کرد (یک نقطه داخل هر مربع).

بنابراین با انتخاب ۱۳ نقطه، مطمئن خواهیم بود، حداقل یک جفت نقطه با فاصلهٔ کمتر از $\sqrt{۸}$ داریم.

۷۳ وضعیت‌های مختلف برای سه عدد طبیعی به‌صورت زیر است:

۱- هر سه زوج ۲- هر سه فرد

۳- یک فرد و یک زوج ۴- یک زوج و دو فرد

در حالت ۱ و ۲ هرکدام از دو عدد را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.

در حالت ۳ اگر دو زوج را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.

در حالت ۴ اگر دو فرد را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.

۷۴

۳۶۸ از تعداد روزهای یک سال بیشتر است. طبق اصل لانهٔ کبوتری امکان ندارد هرکسی در یک روز متفاوت به دنیا آمده باشد. پس حداقل دو نفر در یک روز سال متولد شده‌اند.

۷۵ فرض کنیم می‌خواهیم ۴ نقطهٔ صحیح را در نظر بگیریم طوری که مختصات وسط هیچ دو نقطه‌ای صحیح نباشد. مختصات این ۴ نقطه حتماً باید به‌صورت زیر باشد:

$A_۱ =$ (فرد , فرد) $\qquad$ $A_۲ =$ (زوج , زوج)

$A_۳ =$ (زوج , فرد) $\qquad$ $A_۴ =$ (فرد , زوج)

حالا هر نقطه‌ای به این ۴ نقطه اضافه شود، به کمک یکی از آنها نقطهٔ وسط با مختصات صحیح می‌سازد. بنابراین در بین ۵ نقطه حداقل یک جفت نقطه وجود دارد که وسط آنها صحیح است.

۷۶ تعداد کبوترها $=$ ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها $=$ تعداد روزهای هفته $\times$ تعداد ماه‌های سال. $n = ۷ \times ۱۲ = ۸۴$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$\text{تعداد کبوترها} = kn + ۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵ = k \times ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۷۷

$$k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹ \ , \ kn + ۱ = ۱۹ \times ۷ + ۱ = ۱۳۴$$

۷۸ هر عضو از مجموعهٔ ۱۰ عضوی $\{۵, ۹, \cdots, ۴۱\}$ با یک عضو از مجموعهٔ ۱۰ عضوی $\{۴۹, ۵۳, \cdots, ۸۵\}$، مجموعی برابر با ۹۰ می‌سازد. حالا ما حداکثر می‌توانیم ۱۲ عضو از A را انتخاب کنیم تا مجموع هیچ دو عضوی ۹۰ نشود. (۱۰ عضو از این مجموعه‌ها و دو عضو از مجموعهٔ $\{۱, ۴۵\}$)

بنابراین با حداقل ۱۳ عضو، مطمئن خواهیم بود، حداقل یک جفت عدد با مجموع ۹۰ خواهیم داشت.

۷۹ تعداد کبوترها = ۴۳ و تعداد لانه ها =۴۲ و به‌صورت زیر هستند.

$$\underbrace{\qquad}_{۱,۸۴}, \underbrace{\qquad}_{۲,۸۳}, \underbrace{\qquad}_{۳,۸۲}, \cdots, \underbrace{\qquad}_{۴۲,۴۳}$$

چنانچه قرار باشد کبوترها، لانه‌ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموع‌شان ۸۵ است.