رضاپازوکی

هندسه دوازدهم کل تمارین کتاب

REZA PAZOKI

رضا پازوکی

۱ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$. در این صورت حاصل $x+y+z$ را بیابید.

۲ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریس ۴×۳ باشد به‌طوری‌که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۳ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. یک ماتریس ۲×۳ مانند C را طوری پیدا کنید که $A+B-C=O_{۳\times۲}$

۴ کارخانه‌ای سه محصول c, b, a را به دو بازار n, m می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته‌شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

نمایش داده شده است. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} ۱/۸ \\ ۳/۵ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}$ به‌ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام‌شده هر واحد از c, b, a را نشان می دهند.

درایه‌های هر یک از ماتریس‌های $AB-AC, AC, AB$ را تعبیر کنید.

۵ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

۶ با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۹ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبهٔ $A^{۱۰}$.

۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید $A^۲-۴A-۵I_۳=O$.

۱۲ فرض کنید d, c, b, a چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است:

$$A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

در این ماتریس، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به‌عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم، $A^۲$ را پیدا کنید؟

۱۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$ نشان دهید

$CA=C, AC=A, AB=BA=O$

۱۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، به کمک محاسبهٔ توان‌های مختلف A، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n=O$.

۱۵ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه ثابت کنید:

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۱۶ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$، در این صورت حاصل $\left||A|\,A\right|$ را بیابید.

۱۷ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $\left|A^۲\right|$ را به دست آورید.

۱۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۱۹ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^۳-۲)$ را بیابید.

۲۰ نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$ معادلهٔ خطی است که از نقاط $(a,b), (c,d)$ در $\mathbb{R}^۲$ می‌گذرد.

۲۱ اگر $A=(a_۱,a_۲), B=(b_۱,b_۲), C=(c_۱,c_۲)$ رئوس یک مثلث از صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق مقدار زیر:

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

۲۲ فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳×۳ مانند A را به‌صورت حاصل‌ضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ نوشت. ثابت کنید $|A|=۰$.

۲۳ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۴ دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۵ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$، مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر دوم و همچنین ستون سوم پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

۲۶ قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصربه‌فرد است.

۲۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۲۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $۲A^{-۱}-۳B^{-۱}$ را بیابید.

۲۹ نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ است.

۳۰ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۳۱ به‌ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد؟

۳۲ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۳۳ دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۳۴ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۳۵ هرگاه دو خط d و ℓ موازی باشند، از دوران d حول ℓ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ p، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

۳۶ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چیست؟

۳۷ نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۳۸ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)

۳۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۱)$ و بر خط $۳x+۴y=۰$ مماس باشد.

۴۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱,۱)$ مرکز آن و $A(۳,۲)$ نقطه‌ای از آن باشد.

۴۱ حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.

۴۲ وضعیت هریک از نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

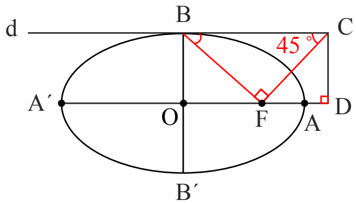
۴۳ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۴۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.

۴۵ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

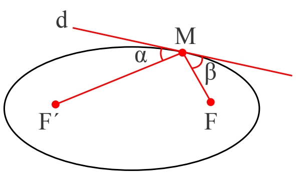
۴۶ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط $x+y=۱$ وتری به طول ۲ جدا کند.

۴۷) در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



۴۸) فرض کنید از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را شرح دهید.

۴۹) فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. ۱- مجموع فواصل کدام‌یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

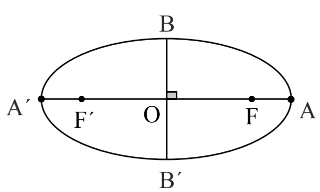


۲- دو زاویهٔ α و β نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- اگر بدنهٔ داخلی بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

۵۰) ثابت کنید اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آنگاه مجموع فواصل M از دو کانون بیشتر از $۲a$ است.

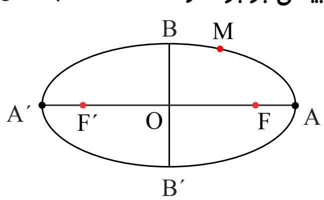
۵۱) در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟



۵۲) نقطهٔ M روی بیضی به طول اقطار کوچک و بزرگ ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ت) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

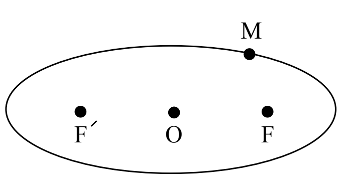


۵۳) دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:

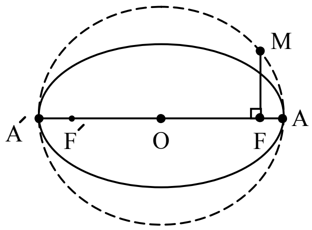
الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

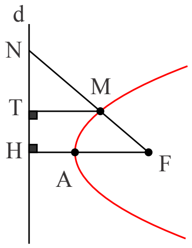
۵۴) در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$



۵۵ قطر دایرهٔ C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۵۶ در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



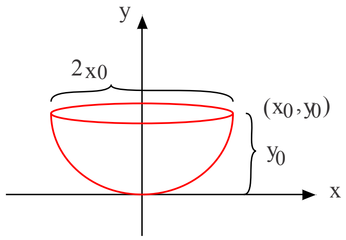
۵۷ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز دو دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و بر عکس دو نقطهٔ روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۵۸ مختصات رأس و کانون سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ را به دست آورید. $(a \neq ۰)$

۵۹ سهمی $y^۲ = ۲x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۶۰ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $S(۱, ۲)$ رأس و $F(۱, -۲)$ کانون آن باشد.

۶۱ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آن به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم‌شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۶۲ سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

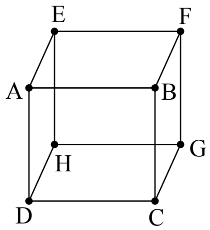
۶۳ سهمی $y = x^۲$ و دو خط موازی $d_۱ \ : y = ax + b$ و $d_۲ \ : y = a'x + b'$ که با سهمی متقاطعند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد $d_۱$ و سهمی $y = x^۲$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد $d_۱$ و سهمی باشند، و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات M را بیابید.

پ) مراحل فوق را برای دو خط $d_۱$ و $d_۲$ انجام داده و سطح‌های آن‌ها را M و M' نام بگذارید و مشخص کنید که MM' نسبت به محور تقارن سهمی چه حالتی دارد؟

۶۴ اگر معادلات وجه‌های یک مکعب مستطیل به‌صورت $x = ۱$، $x = ۳$، $y = ۱$، $y = ۴$، $z = ۲$ و $z = -۲$ باشد،الف) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.



ب) در هریک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

پ) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار گرفته باشند.

ت) معادلات مربوط به یال‌های AB و BF را بنویسید. (دقت کنید یال‌ها پاره‌خط‌اند.)

ث) روابط مشخص‌کنندهٔ دو وجه $ADHE$ و $EFGH$ را بنویسید.

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد.

چ) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که روی یکی از وجه‌های آن و غیرواقع بر یال‌ها باشد.

۶۵ چهار نقطهٔ $A(۲,۱,۳)$ و $B(-۱,۱,۳)$ و $C(۲,-۱,۳)$ و $D(-۱,-۱,۳)$ مفروض هستند.

الف) معادلات مشخص‌کنندهٔ سطح محدود به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

۶۶ الف) مختصات چند نقطه را مشخص کنید که در رابطهٔ $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ صدق کنند و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

ب) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادلهٔ $x = ۰$ دارد؟

۶۷ سه بردار a, b, c مثال بزنید که برای آنها $a \cdot b = a \cdot c$ ولی $b \neq c$.

۶۸ فرض کنید a, b, c به‌ترتیب بردارهایی به طول ۲، ۱ و ۳ باشد با این خاصیت که $a + b + c = \vec{۰}$، مقدار $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ را محاسبه کنید.

۶۹ برای هریک از بردارهای a و b که در زیر آمده است تصویر قائم a را در امتداد بردار b به دست آورید.

الف) $a = (۲, -۱, ۲) \quad , \quad b = i$

ب) $a = (۲, ۳, ۱) \quad , \quad b = (۳, ۲, ۱)$

ج) $a = (۱, ۱, ۰) \quad , \quad b = (-۱, ۲, ۴)$

۷۰ اگر $\vec{a} = (۱, -۳, ۴)$، $\vec{b} = (۳, -۴, ۲)$ و $\vec{c} = (-۱, ۱, ۴)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۷۱ بردارهای a و b مفروض‌اند. به‌طوری‌که $|a| = ۳$، $|b| = ۲۶$ و $|a \times b| = ۷۲$، مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۷۲ سه بردار a، b و c مثال بزنید که برای آنها $a \times b = a \times c$ ولی $b \neq c$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟

۷۳ برداری عمود بر دو بردار $b = (-۲, ۱, -۵)$ و $a = (۱, -۳, ۲)$ پیدا کنید.

۷۴ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (۳, ۵, ۷)$، $B = (۵, ۵, ۰)$ و $C = (-۴, ۰, ۴)$ داده شده است را بیابید.

پاسخ‌نامه تشریحی

۷

۱

$$A=B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \rightarrow \\ z=-2 \end{cases} \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$x+y+z=2+1+(-2)=1$$

۲

$$a_{ij}=\begin{cases} 7 & ,i=j \\ i+j & ,i>j \\ i^2 & ,i<j \end{cases}$$

$$A=[a_{ij}]_{3\times 4}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۳

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A+B-C=O_{3\times 2} \Rightarrow C=A+B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

۴

$$AB=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار m را نشان می‌دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار n را نشان می‌دهد.

$$AC=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.8 \\ 3.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام‌شده محصولات در بازار m و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام‌شده محصولات در بازار n می‌باشد.

$$AB-AC=\begin{bmatrix} 2750 \\ 1900 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم سود یعنی از قیمت فروش، قیمت تمام‌شده را کم کنیم، پس ۲۷۵۰ میزان سود فروش محصولات در بازار m و عدد ۱۹۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار n را نشان می‌دهد.

۵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۶

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}_{C} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB=AC$$

همانطور که مشاهده می‌کنید $AB=AC$ اما $B\neq C$

۷

$$A^2=AA=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$A^2=I \xrightarrow{\times A} A^3=A$$

$$A^2=I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} A^6=I \xrightarrow{\times A} A^7=A$$

۸

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\rightarrow b=۳\end{cases}$$

۹

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۶\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲۷ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۶۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-۲)^{۳} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳^{۳} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴^{۳}\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $A^{n}=\begin{bmatrix}a^{n} & ۰ & ۰\\ ۰ & b^{n} & ۰\\ ۰ & ۰ & c^{n}\end{bmatrix}$

۱۰

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^{۲}=I\Rightarrow (A^{۲})^{۵}=I^{۵}\Rightarrow A^{۱۰}=I$$

۱۱

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۴A=\begin{bmatrix}۴ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۴ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۴\end{bmatrix}\qquad ۵I_{۳}=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-۴A-۵I_{۳}=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۴ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

۱۲ می‌دانیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می‌توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases}a=mb\\ b=nc\end{cases}\Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده‌شده به‌طور مثال $a_{۱۲}$ یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و $a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از b چند واحد از d است. بنابراین $a_{۱۲}\times a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از a چند واحد از d است که این همان مقدار $a_{۱۴}$ می‌باشد.

پس در حالت کلی می‌توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطهٔ فوق اگر $A^{۲}=[m_{ij}]_{۴\times۴}$ باشد:

$$m_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴}a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک‌تک درایه‌های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه‌های $A^{۲}$ ایجاد شوند.

۱۳

$$AB=BA=O\Longrightarrow\begin{cases}AB=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۴ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}\\ \\ BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۴ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}\end{cases}$$

$$AC=A\Rightarrow AC=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۴ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۲ & -۴\\ -۱ & ۳ & ۴\\ ۱ & -۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۴ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۴\end{bmatrix}\Rightarrow AC=A$$

$$CA = C \Rightarrow CA = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow CA = C$$

۱۴

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = ۰ \Rightarrow n = ۳$$

در اینجاست که ماتریس A را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۱۵

الف) $(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B^۲ \xrightarrow{AB=BA} A^۲ + ۲AB + B^۲$

ب) $(A-B)(A+B) = A^۲ + AB - BA - B^۲ \xrightarrow{AB=BA} A^۲ - B^۲$

۱۶

$$||A|\,A| \overset{|A|=۵}{=\!=\!=} |۵A| = ۱۲۵\underbrace{|A|}_{۵} = ۶۲۵$$

۱۷ می‌دانیم $|A^n| = |A|^n$ بنابراین داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{vmatrix} = -۲\begin{vmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{vmatrix} = -۳۰$$

$$\rightarrow \left|A^۲\right| = |A|^۲ = (-۳۰)^۲ = ۹۰۰$$

۱۸

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ -۳ \end{bmatrix} = [-۲-۲-۹] = [-۱۳] \rightarrow |AB| = -۱۳$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |BA| = -۲\underbrace{\begin{vmatrix} -۲ & ۳ \\ ۶ & -۹ \end{vmatrix}}_{۰} - (-۴)\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & -۹ \end{vmatrix}}_{۰} - ۶\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}}_{۰} = ۰$$

۱۹

$$A = \begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۲۰|A|^۳ - ۵|A| \rightarrow ۲۰|A|^۳ - ۶|A| = ۰ \rightarrow ۲|A|(۱۰|A|^۲ - ۳) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} |A| = ۰ \rightarrow |A|^۳ - ۲ = -۲ \\ |A| = \pm\dfrac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{+} |A|^۳ - ۲ = \dfrac{۳}{۱۰}\sqrt{\dfrac{۳}{۱۰}} - ۲ \\ \xrightarrow{-} |A|^۳ - ۲ = -\dfrac{۳}{۱۰}\sqrt{\dfrac{۳}{۱۰}} - ۲ \end{cases} \end{cases}$$

۲۰

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow +x(b-d) - y(a-c) + ۱(ad-bc) = ۰$$

$$\Rightarrow Ax + By + C = ۰$$

پس معادلهٔ داده‌شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می‌کنیم

$A(a,b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ برقرار است

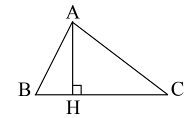
$$B(c,d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$ برقرار است

پس معادلهٔ داده‌شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه $B(c,d), A(a,b)$ عبور می‌کند.

۲۱ برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله A از خط BC.

ابتدا معادله خط BC را می نویسیم.



$$\begin{cases} B(b_1,b_2) \\ C(c_1,c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1} \\ y-b_2 = \dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}(x-b_1) \Rightarrow (y-b_2)(c_1-b_1) = (c_2-b_2)(x-b_1) \end{cases}$$

$$|AH| = \frac{|(a_2-b_2)(c_1-b_1)-(c_2-b_2)(a_1-b_1)|}{\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}} = \frac{|a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)|}{\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}$$

از طرفی $|BC| = \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}$، پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AH| \times |BC| = \frac{1}{2}|a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده‌شده به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)$$

بنابراین نصف قدرمطلق این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۲۲ فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \left|\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix}\right| \left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0 \times 0 = 0$$

۲۳

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{0} - e\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{0} + f\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{0} = 0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا دو ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۲۴

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow |A| = (\underbrace{4-9-8}_{-13}) - (\underbrace{3-12-8}_{-17}) = 4$$

۲۵ سطر دوم:

$$|A| \xlongequal{\text{بسط حول سطر ۲}} -2(-10-35)+(-1)(-2-28)-3(5-20) = 90+30+45 = 165$$

ستون سوم:

$$|A| \xlongequal{\text{بسط حول ستون ۳}} +7(10+4)-3(5-20)-2(-1-10) = 165$$

دترمینان: به کمک روش ساروس:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right| = (2+60+70)-(-28+15-20) = 132+33 = 165$$

۲۶ فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B=C$.

طبق فرض : $AB=BA=I$

طبق فرض : $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$

۲۷

$$A^{-1}=\frac{1}{۴}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$$

$$\to \left|A^{-1}\right|=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴})-(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴})\to\left|A^{-1}\right|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}\ \ (۱)$$

$$|A|=(۵\times ۲)-(۳\times ۲)=۱۰-۶=۴\ \ (۲)$$

$$(۱),(۲)\to\left|A^{-1}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

۲۸

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}\to A^{-1}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\to ۲A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷} & -\frac{۳}{۷}\\ -\frac{۲}{۷} & \frac{۴}{۷}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}\to B^{-1}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}\to ۳B^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۱۷} & \frac{۹}{۱۷}\\ -\frac{۱۵}{۱۷} & -\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}$$

$$\to ۲A^{-1}-۳B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}+\frac{۳}{۱۷} & -\frac{۳}{۷}-\frac{۹}{۱۷}\\ -\frac{۲}{۷}+\frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۴}{۷}+\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۰۶}{۱۱۹} & -\frac{۱۱۴}{۱۱۹}\\ \frac{۷۱}{۱۱۹} & \frac{۱۱۰}{۱۱۹}\end{bmatrix}$$

۲۹ کافیست نشان دهیم: $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

۳۰ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ به‌صورت $A^{-1}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}\to A^{-1}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۴ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}$$

۳۱ شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases}kx+۳y=۴\\ x-۲y=۳\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{۱}\neq\frac{۳}{-۲}\to\boxed{k\neq-\frac{۳}{۲}}$$

۳۲

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}\to\begin{cases}۳x-۵y=۱\\ ۴x+۲y=۱۰\end{cases}$$

$$A^{-1}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۲۶}\\ -\frac{۲}{۱۳} & \frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B\to X=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۲۶}\\ -\frac{۲}{۱۳} & \frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}+\frac{۵۰}{۲۶}\\ -\frac{۲}{۱۳}+\frac{۳۰}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۵۲}{۲۶}\\ \frac{۲۶}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}\to\begin{matrix}x=۲\\ y=۱\end{matrix}$$

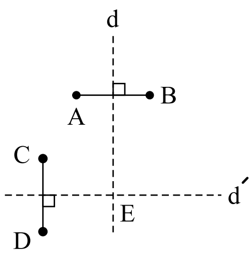
۳۳

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X = A^{-۱}B,\ A^{-۱} = \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x = ۳ \\ \rightarrow y = ۲ \end{matrix}$$

۳۴ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم؛ همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم.



بنابراین نقطهٔ برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطهٔ E)

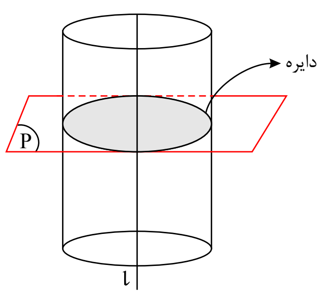
اگر خطوط d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

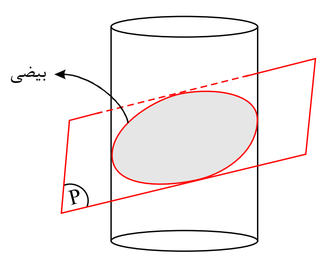
اگر خطوط d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد.

۳۵

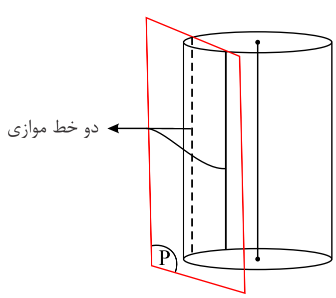
– اگر صفحهٔ p عمود بر محور سطح استوانهٔ (ℓ) آن را قطع کند سطح مقطع حاصل دایره است.



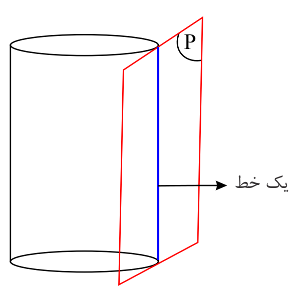
– اگر صفحهٔ p بر محور سطح استوانه‌ای عمود نباشد و آن را قطع کند سطح مقطع حاصل بیضی است.



– اگر صفحهٔ P شامل محور سطح استوانه‌ای یا موازی آن باشد، در دو خط موازی، سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند.

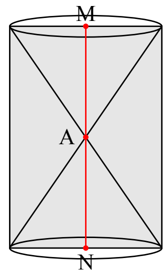


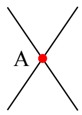
– اگر صفحهٔ p مماس بر سطح استوانه‌ای باشد آن را در یک خط قطع می‌کند.



۳۶

فصل مشترک صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، برابر با، دو خط متقاطع در نقطهٔ A است (شکل را ببینید).





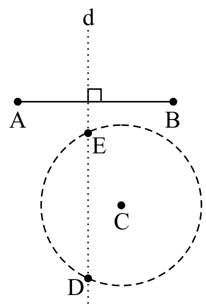
۳۷ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف پاره‌خط AB است.

مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.

بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف و دایره جواب مسئله است.

اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند (نقاط D و E) مسئله دو جواب دارد . (همانند شکل روبه‌رو)

اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.

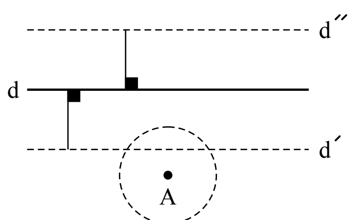


۳۸ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به‌موازات d است، این دو خط را رسم می‌کنیم. محل برخورد دو خط d' و d'' با دایره، مطابق شکل، جواب مسئله است.

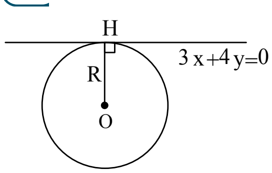
اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسئله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' و d'' بر دایره مماس باشد، مسئله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط d' و d'' دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



۳۹



$$۳x + ۴y = ۰$$

$$OH = R = \frac{|۳ \times ۲ + ۴ \times ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$$

۴۰

$$R = OA = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

۴۱

شرط معادلهٔ دایره بودن: $a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰ \to ۹ + ۲۵ - ۴a > ۰ \to ۴a < ۳۴ \to a < \frac{۱۷}{۲}$

۴۲ نقطهٔ A درون دایره قرار دارد.

$$A(-۱,-۱) \to (-۱)^۲ + (-۱)^۲ - ۲(-۱) + ۴(-۱) - ۵ = -۵ < ۰$$

نقطهٔ B درون دایره قرار دارد.

$$B(۱,-۲) \to ۱^۲ + (-۲)^۲ - ۲ \times ۱ + ۴ \times (-۲) - ۵ = -۱۰ < ۰$$

نقطهٔ C بیرون دایره قرار دارد.

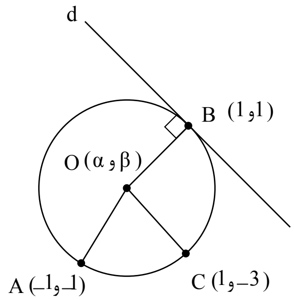
$C(2,3) \to 2^2+3^2-2\times 2+4\times 3-5=16>0$

نقطهٔ D روی دایره قرار دارد.

$D(4,-1) \to 4^2+(-1)^2-2\times 4+4\times(-1)-5=0$

۴۳

فاصلهٔ هریک از نقاط A، B و C تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$OA=OB \to \sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}$

$\to (1+\alpha)^2+(1+\beta)^2=(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2$

$\to \cancel{1}+2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}+2\beta+\cancel{\beta^2}=\cancel{1}-2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}-2\beta+\cancel{\beta^2}$

$\to 4\alpha+4\beta=0 \to \alpha+\beta=0 \quad (1)$

$OB=OC \to \sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2}$

$\to \cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+1+\cancel{\beta^2}-2\beta=\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+9+\cancel{\beta^2}+6\beta$

$\to 8\beta+8=0 \to \beta=-1 \xrightarrow{(1)} \alpha=1$

مختصات مرکز: $O(1,-1) \quad , \quad R=OB=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2}=2$

$\Rightarrow$ معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

شیب خط مماس در نقطهٔ B (m_d) معکوس قرینهٔ شیب BO می‌باشد.

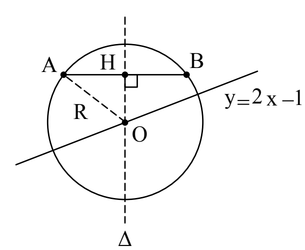
$m_{BO}=\dfrac{-1-1}{1-1}=\infty$

بنابراین شیب‌خط مماس بر دایره در نقطهٔ B صفر است. پس معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر می‌باشد:

معادلهٔ خط مماس: $y=1$

۴۴

مطابق شکل مرکز دایره محل برخورد دو خط $y=2x-1$ و Δ (عمودمنصف AB) می‌باشد. داریم:



H وسط AB $\left|\begin{array}{l} x_H=\frac{x_A+x_B}{2}=2 \\ y_H=\frac{y_A+y_B}{2}=1 \end{array}\right. \Rightarrow H\left|\begin{array}{l}2\\1\end{array}\right.$ و $m_{AB}=\dfrac{0-2}{3-1}=-1$

$AB\perp\Delta \Rightarrow m_{AB}\times m_\Delta=-1 \Rightarrow m_\Delta=\dfrac{-1}{-1}=1$

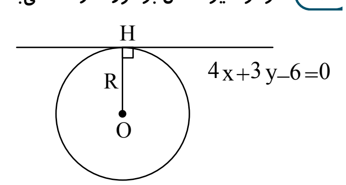
$\Delta: y-3=1(x-0) \Rightarrow y=x+3$

$O:\begin{cases} y=x+3 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow 2x-1=x+3 \Rightarrow x=-4$ و $y=-1$

$O(-4,-1)$ و $R=OA+\sqrt{(-4-3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{50}$

معادلهٔ دایره : $(x+4)^2+(y+1)^2=50$

۴۵ مرکز دایره محل برخورد دو خط می‌باشد:

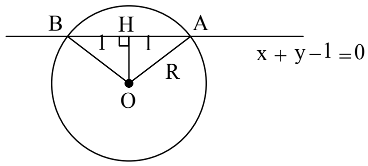


$O:\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow O:\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$$OH = \frac{|۴\times ۲ + ۳\times(-۱) - ۶|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{۱}{۵}$$

$$\text{معادلهٔ دایره} : (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱}{۲۵}$$

۴۶



$$x + y - ۱ = ۰$$

$$OH = \frac{|-۱-۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \text{ و } AH = BH = ۱$$

$$R^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow R^۲ = ۱ + \frac{۹}{۲} = \frac{۱۱}{۲}$$

$$\text{معادلهٔ دایره} : (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱۱}{۲}$$

۴۷

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ \rightarrow BF = FC \\ BF = a \end{matrix}\right\} \rightarrow BF = FC = a$$

$$\left.\begin{matrix} B\overset{\triangle}{F}C : a^۲ + a^۲ = BC^۲ \rightarrow BC = a\sqrt{۲} \\ OD = BC \end{matrix}\right\} \rightarrow BC = OD = a\sqrt{۲}$$

$$AD = OD - OA = a\sqrt{۲} - a = a(\sqrt{۲}-۱)$$

$$C\hat{F}D = F\hat{C}D = ۴۵^\circ \rightarrow DF = DC$$

$$F\overset{\triangle}{D}C : DF^۲ + DC^۲ = a^۲ \rightarrow DF^۲ = \frac{a^۲}{۲} \rightarrow DF = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$AF = FD - AD = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a - (a\sqrt{۲} - a) = a(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۲} + ۱) = a(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{a(\sqrt{۲}-۱)}{a(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

۴۸

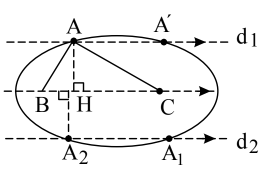
$$\left\{\begin{matrix} ۲P = \text{محیط مثلث} = AB + AC + BC \\ BC : \text{معلوم} \end{matrix}\right. \Rightarrow AB + AC = ۲R - BC = \text{معلوم}$$

با توجه به اینکه مجموعه فواصل A از B و C ثابت و معلوم بوده و B و C ثابت هستند، پس مکان هندسی A، بیضی به کانون‌های B و C می‌باشد. از آنجا که ارتفاع AH معلوم است، پس مکان هندسی دیگر A، دو خط موازی با BC و به فاصله AH از آن است. محل برخورد این دو خط با محیط بیضی پاسخ مسأله می‌باشد.

اگر AH با نصف قطر کوچک بیضی برابر باشد، مسأله فقط دارای یک جواب برای رأس A می‌باشد.

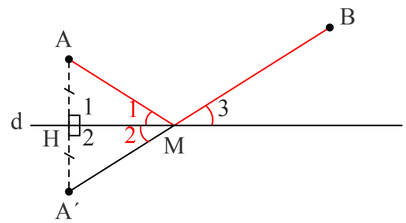
همچنین اگر AH از نصف قطر کوچک بیضی کوچکتر باشد، ۴ رأس برای A و بدلیل همنشتی مثلث‌ها، تنها یک مثلث جواب داریم.

اگر AH از نصف قطر کوچک بیضی بزرگتر باشد مسأله جواب ندارد.



۴۹ ۱) اگر نقطه‌ای خارج از بیضی باشد مجموع فواصل آن از دو کانون بیشتر از مجموع فواصل نقطهٔ روی بیضی از دو کانون است بنابراین نقطهٔ M از d که روی بیضی قرار دارد کمترین مقدار مجموع فواصل از دو کانون F و F' را دارد.

۲) یادآوری مسئله کوتاه‌ترین مسیر:



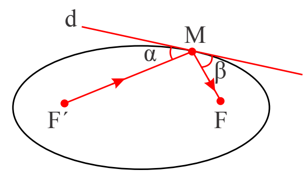
در شکل روبه‌رو برای اینکه نقطهٔ M را روی خط d طوری پیدا کنیم که طول $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا بازتاب A را نسبت به d پیدا کرده و A' می‌نامیم. سپس A' را به B وصل می‌کنیم. محل تلاقی $A'B$ با d نقطهٔ مورد (M) است. در ادامه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ HM = HM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\triangle}{H}M \cong A'\overset{\triangle}{H}M$$

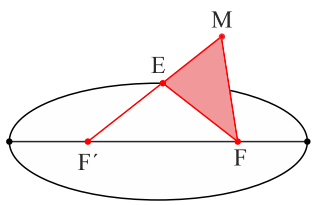
$$\xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{\text{اجزای نظیر}} \left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ \hat{M}_۲ = \hat{M}_۳ \end{array}\right\} \rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{M}_۳ \rightarrow \alpha = \beta$$

۳) در تابش نور، زاویهٔ تابش و بازتابش باهم برابرند بنابراین اگر اشعهٔ نوری از کانون F' بر بیضی در نقطهٔ M با زاویهٔ α تابیده شود زاویهٔ بازتاب برابر α خواهد بود، چون $\beta=\alpha$ است بنابراین اشعهٔ بازتاب نور از کانون دیگر یعنی F می‌گذرد.



۵۰

بنابر قضیه حمار در مثلث EMF داریم:

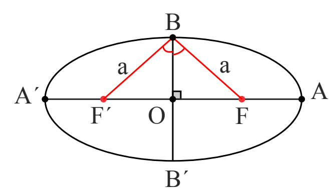


$$ME+MF > EF \xrightarrow{+EF'} (ME+EF')+MF > EF+EF'$$

$$\xrightarrow{EF+EF'=۲a} MF'+ME > ۲a$$

۵۱ راه‌حل اول:

طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. بنابراین:



$$AA' = ۲BB' \rightarrow \cancel{۲}a = ۲\times\cancel{۲}b \rightarrow a=۲b \rightarrow b=\frac{a}{۲} \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} BF+BF' = ۲a \\ BF = BF' \end{array}\right\} \rightarrow BF = BF' = a$$

$$B\overset{\triangle}{O}F: BO^۲+OF^۲ = BF^۲ \rightarrow b^۲+c^۲ = a^۲ \xrightarrow{(۱)} \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + c^۲ = a^۲$$

$$\rightarrow c^۲ = a^۲-\frac{a^۲}{۴} = \frac{۴a^۲-a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴} \rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\rightarrow B\overset{\triangle}{O}F: \sin(O\hat{B}F) = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ$$

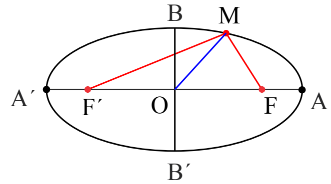
$$F\hat{B}F' = O\hat{B}F + O\hat{B}F' = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

در مثلث قائم‌الزاویه $O\overset{\triangle}{B}F$:

$$b = \frac{a}{۲} \Rightarrow OB = \frac{BF}{۲} \Rightarrow \cos(O\hat{B}F) = \frac{OB}{BF} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ$$

پس در مثلث BFF' زاویهٔ B برابر $۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ \times ۲$ درجه است.



$$۲a = ۱۰ \rightarrow a = ۵ \qquad ۲b = ۶ \rightarrow b = ۳$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + c^۲ \rightarrow c = ۴$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} OF = OF' = c = ۴ \\ \text{فرض } OM = ۴ \end{array}\right\} \rightarrow OF = OF' = OM$$

ب) میانهٔ OM نصف FF' است. می‌دانیم اگر در مثلثی میانهٔ اندازهٔ میانه وارد بر یک ضلع نصف اندازهٔ آن ضلع باشد آن مثلث قائم‌الزاویه است بنابراین $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$ می‌باشد.

$$MF + MF' = ۲a \rightarrow MF + MF' = ۱۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}} MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF' = ۱۰۰ \\ \overset{\triangle}{FMF'}: MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = ۶۴ \end{array}\right\}$$

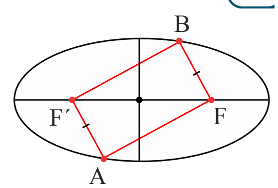
$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow ۶۴ + ۲MF \times MF' = ۱۰۰ \rightarrow ۲MF \times MF' = ۳۶ \rightarrow MF \times MF' = ۱۸ \\ MF + MF' = ۱۰ \rightarrow MF = ۱۰ - MF' \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow MF' \times (۱۰ - MF') = ۱۸ \rightarrow MF'^۲ - ۱۰MF' + ۱۸ = ۰$$

$$\rightarrow MF' = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۱۸}}{۱} = ۵ \pm \sqrt{۷} \rightarrow MF' = ۵ + \sqrt{۷}, \; MF = ۵ - \sqrt{۷}$$

۵۳

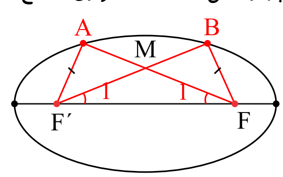
الف)



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} B \text{ روی بیضی است } \rightarrow BF + BF' = ۲a \\ A \text{ روی بیضی است } \rightarrow AF + AF' = ۲a \end{array}\right\} \rightarrow BF + BF' = AF + AF' \\ AF' = BF \end{array}\right\} \rightarrow AF = BF' \\ AF' = BF \end{array}\right\}$$

چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است پس AF و BF' موازی‌اند.

ب)



$$\left.\begin{array}{r} A \text{ روی بیضی است } \rightarrow AF + AF' = ۲a \\ B \text{ روی بیضی است } \rightarrow BF + BF' = ۲a \\ AF' = BF \end{array}\right\} \rightarrow AF = BF'$$

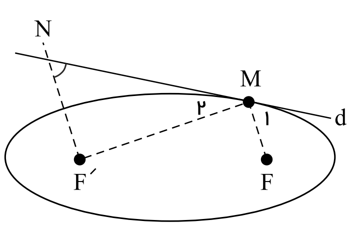
$$\left.\begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AFF'} \cong \overset{\triangle}{BFF'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{F}_۱ = \hat{F'}_۱ \rightarrow \overset{\triangle}{FMF'} \text{ متساوی‌الساقین است.}$$

$\rightarrow FMF'$ متساوی‌الساقین است $\rightarrow MF = MF' \rightarrow$ بنابراین روی عمودمنصف آن $\rightarrow$ (قطر کوچک بیضی) قرار دارد

۵۴ مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، داریم: $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$

از طرفی: $MF' || NF$ و d مورب، پس $\hat{N} = \hat{M}_۱$ و در نتیجه $\hat{N} = \hat{M}_۲$.

مثلث MNF' متساوی‌الساقین است یعنی $MF' = NF'$.



۵۵

$$OM = OA = a$$

$$\overset{\triangle}{OMF}: OF^۲ + MF^۲ = OM^۲ \rightarrow c^۲ + MF^۲ = a^۲ \rightarrow MF^۲ = a^۲ - c^۲ = b^۲ \rightarrow MF = b$$

۵۶ فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است، بنابراین:

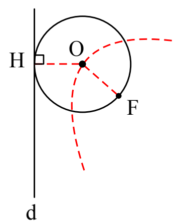
$MT = MF \ , \ FA = AH$

$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \rightarrow \dfrac{MT}{FH} = \dfrac{NT}{NH} \rightarrow \dfrac{MT}{۲FA} = \dfrac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \rightarrow \dfrac{MF}{FN} = \dfrac{TH}{HN} \rightarrow \dfrac{MT}{FN} = \dfrac{TH}{NH} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \dfrac{\dfrac{\cancel{MT}}{۲FA}}{\dfrac{\cancel{MT}}{FN}} = \dfrac{\dfrac{NT}{\cancel{NH}}}{\dfrac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\rightarrow \frac{FN}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

۵۷ می‌دانیم که سهمی مکان هندسی نقاطی است که از کانون F و خط هادی d به یک فاصله باشد. پس مرکز دایره حتما روی سهمی قرار می‌گیرد و با این ترتیب عکس این مطلب هم درست است.

سهمی مکان هندسی مرکز دوایری است که از نقطه ثابت F می‌گذرد و بر خط ثابت d مماس است.



۵۸

$$y = ax^۲ + bx + c \rightarrow ax^۲ + bx = y - c \xrightarrow{\div a} x^۲ + \frac{b}{a}x = \frac{y}{a} - \frac{c}{a}$$

$$\xrightarrow{+(\frac{b}{۲a})^۲} x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} = \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^۲}{۴a^۲}$$

$$\rightarrow (x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{۱}{a}(y + \frac{b^۲}{۴a} - c) \rightarrow (x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{۱}{a}(y + \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a})$$

سهمی قائم است.

مختصات رأس $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}) = (-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$

$$۴m = \left|\frac{۱}{a}\right| \rightarrow m = \frac{۱}{۴|a|}$$

الف) اگر $a > ۰$ باشد دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است و مختصات کانون آن برابر است با:

$$F(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a} + \frac{۱}{۴a}) = (-\frac{b}{۲a}, \frac{۱ - \Delta}{۴a})$$

ب) اگر $a < ۰$ باشد دهانهٔ سهمی رو به پایین است و مختصات کانون آن برابر است با:

$$F(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a} - \frac{۱}{-۴a}) = (-\frac{b}{۲a}, \frac{۱ - \Delta}{۴a})$$

بنابراین در هر حالت مختصات کانون سهمی $F(-\frac{b}{۲a}, \frac{۱ - \Delta}{۴a})$ می‌باشد.

۵۹

$$y^۲ + ۴y = ۲x \xrightarrow{+۴} y^۲ + ۴y + ۴ = ۲x + ۴$$

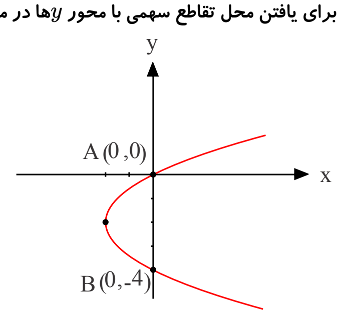
$\rightarrow (y + ۲)^۲ = ۲(x + ۲) \rightarrow$ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مختصات راس } S(-۲, -۲) \\ ۴a = ۲ \rightarrow a = \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow \text{مختصات کانون } F(-۲ + \frac{۱}{۲}, -۲) = (-\frac{۳}{۲}, -۲)$$

برای یافتن محل تقاطع سهمی با محور yها در معادلهٔ سهمی $x = ۰$ قرار می‌دهیم:

$$(y + ۲)^۲ = ۲(۰ + ۲) \rightarrow (y + ۲)^۲ = ۴$$

$$\rightarrow \begin{cases} y + ۲ = ۲ \rightarrow y = ۰ \\ y + ۲ = -۲ \rightarrow y = -۴ \end{cases}$$



سهمی در نقاط $A(۰, ۰)$ و $B(۰, -۴)$ محور yها را قطع می‌کند.

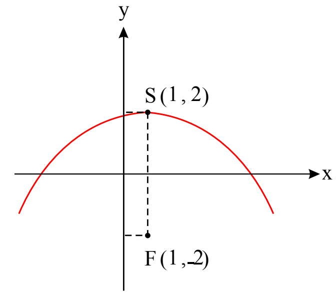
۶۰

$$\left.\begin{matrix} S(1,2) \\ F(1,-2)\end{matrix}\right\} \to x_S = x_F = 1$$
$$y_F < y_S$$
$\to$ سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است

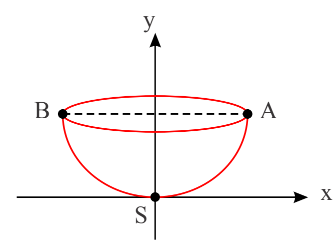
$$SF = a = \sqrt{(1-1)^2 + (2-(-2))^2} = 4$$

معادلهٔ سهمی: $(x-1)^2 = -4 \times 4(y-2)$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -16(y-2)$$



۶۱ رأس سهمی را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. اگر قطر دهانهٔ دیش برابر $2x_0$ و گودی (عمق) دیش برابر y_0 باشد مختصات نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ در معادلهٔ $x^2 = 4ay$ صدق می‌کند.



$$\left.\begin{matrix} x_0^2 = 4ay_0 \to a = \dfrac{x_0^2}{4y_0} \\ x_0 = \dfrac{AB}{2} \end{matrix}\right\} \to a = \frac{(\frac{AB}{2})^2}{4y_0}$$

$$\to a = \frac{AB^2}{16y_0}$$

۶۲

$$y^2 = 4(x-1) \to S(1,0)\,,\; F(2,0)$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 9\,,\; \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \text{ قق} \\ x = -3 \text{ غقق} \end{cases}$$

$$M(3, 2\sqrt{2})\,,\; M'(3, -2\sqrt{2})$$

۶۳

الف) $\begin{cases} x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0 \\ x^2 = a'x + b' \Rightarrow x^2 - a'x - b' = 0 \end{cases}$

ریشه‌های این دو معادله، نقاط برخورد d_1 با سهمی d_2 با سهمی می‌باشد.

ب) $x^2 - ax - b = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_A + x_B = a \text{ و } x_A \cdot x_B = -b \\ y_B = ax_A + b \text{ و } y_B = ax_B + b \end{matrix}$

مختصات M وسط AB $\left|\begin{matrix} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{a}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a(x_A + x_B) + 2b}{2} = \dfrac{a^2 + 2b}{2} \end{matrix}\right.$

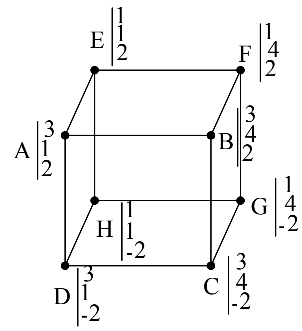
پ) $x^2 - a'x - b' = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_{A'} + x_{B'} = a' \text{ و } x_{A'} \cdot x_{B'} = -b' \\ y_{A'} = ax_{A'} + b' \text{ و } y_{B'} = axB' + b' \end{matrix}$

مختصات M' وسط $A'B'$ $\left|\begin{matrix} x_{M'} = \dfrac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \dfrac{a'}{2} \\ y_{M'} = \dfrac{y_{A'} + y_{B'}}{2} \end{matrix}\right. \Rightarrow M' \left|\begin{matrix} \dfrac{a'}{2} \\ \dfrac{a'^2 + 2b'}{2} \end{matrix}\right.$

$$m_{MM'} = \frac{y_{M'} - y_M}{x_{M'} - x_M} = \frac{\dfrac{a'^2 + 2b'}{2} - \dfrac{a^2 + 2b}{2}}{\dfrac{a'}{2} - \dfrac{a}{2}} = \frac{(a'^2 - a^2) + 2(b' - b)}{a' - a}$$

حال چون دو خط موازیند پس شیب آن‌ها برابر است پس $a = a'$ در نتیجه $m_{MM'} = \infty$ یعنی MM' با محور y ها موازیست. محور y ها محور تقارن $y = x^2$ می‌باشد.

۶۴ الف)



$$\begin{cases} ABCD \quad \text{وجه: } x=۳ \quad , \quad EFGH \quad \text{وجه: } x=۱ \\ ADHE \quad \text{وجه: } y=۱ \quad , \quad BCGF \quad \text{وجه: } y=۴ \\ CDHG \quad \text{وجه: } z=-۲ \quad , \quad ABFE \quad \text{وجه: } z=۲ \end{cases}$$

نقطهٔ A بر سه وجه $ABCD$ و $ADHE$ و $ABEF$ قرار دارد پس مختصات A برابر است با: $A\left|\begin{matrix}۳\\۱\\۲\end{matrix}\right.$

به همین ترتیب مختصات بقیه رأس‌ها به دست آمده است.

ب)

$$\begin{cases} x=\underline{\underline{۱}} \to (\underline{\underline{۱}},۲,۱) \quad , \quad x=\underline{\underline{۳}} \to (\underline{\underline{۳}},۲,۰) \quad , \quad y=\underline{\underline{۱}} \to (۲,\underline{\underline{۱}},-۱) \\ y=\underline{\underline{۴}} \to (۲,\underline{\underline{۴}},۱) \quad , \quad z=\underline{\underline{۲}} \to (۲,۳,\underline{\underline{۲}}) \quad , \quad z=\underline{\underline{-۲}} \to (۲,۲,\underline{\underline{-۲}}) \end{cases}$$

پ) نقطهٔ $(\underline{\underline{۱}},\underline{\underline{۴}},۱)$ فقط بر دو وجه $x=\underline{\underline{۱}}$ و $y=\underline{\underline{۴}}$ قرار دارد یعنی روی فصل مشترک آنها یعنی روی یال FG قرار دارد.

و نقطهٔ $(\underline{\underline{۳}},۲,\underline{\underline{۲}})$ فقط بر دو وجه ۳ $x=$ و ۲ $z=$ قرار دارد و نقطهٔ $(۲,\underline{\underline{۴}},\underline{\underline{-۲}})$ بر دو وجه $y=\underline{\underline{۴}}$ و $z=\underline{\underline{-۲}}$ قرار دارد.

ت)

معادلهٔ خط AB: $\begin{cases} x=۳ \\ z=۲ \end{cases} \Rightarrow$ یال AB (پاره‌خط AB): $\begin{cases} x=۳ \\ z=۲ \\ ۱\leq y\leq ۴ \end{cases}$ خط BF: $\begin{cases} y=۴ \\ z=۲ \end{cases} \Rightarrow$ یال BF: $\begin{cases} y=۴ \\ z=۲ \\ ۱\leq x\leq ۳ \end{cases}$

ث)

وجه $ADHE$: $\begin{cases} ۱\leq x\leq ۳ \\ -۲\leq z\leq ۲ \\ y=۱ \end{cases}$ وجه $EFGH$: $\begin{cases} ۱\leq y\leq ۴ \\ -۲\leq z\leq ۲ \\ x=۱ \end{cases}$

ج) $(۲,۳,۱)$ درون مکعب قرار دارد.

چ) $(۲,۲,۲)$ روی وجه ۲ $z=$ قرار دارد که روی هیچ یالی قرار نگرفته است.

۶۵

الف) $A(۲,۱,۳)\,,B(-۱,۱,۳)\,,C(۲,-۱,۳)\,,\;D(-۱,-۱,۳)$

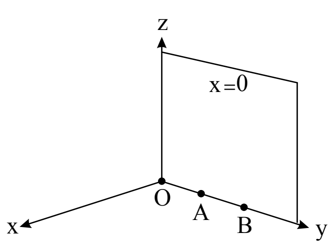
حدود تغییرات طول نقاط، بین ۱ $-$ و ۲ و حدود تغییرات عرض نقاط، بین ۱ $-$ و ۱ بوده و چهارضلعی $ABCD$ به ارتفاع ۳ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} -۱\leq x\leq ۲ \\ -۱\leq y\leq ۱ \\ z=۳ \end{cases}$$

ب) $\begin{cases} -۱\leq x\leq ۲ \\ -۱\leq y\leq ۱ \\ z=۱ \end{cases}$ این صفحه، ۲ واحد پایین‌تر از چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد.

۶۶

الف) مختصات چند نقطه که در رابطهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ صدق کنند عبارتند از: $O(۰,۰,۰), A(۰,۱,۰), B(۰,۲,۰)$ و مکان آن نقاط طبق شکل مقابل روی محور yهاست.



ب) نمودار معادلهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ یک خط (همان محور yها) است.

$x=۰$ معادلهٔ صفحه‌ای شامل محور yها است. (صفحهٔ $x=۰$ همان صفحهٔ yoz است).

۶۷

$$a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow a\cdot b-a\cdot c=۰\Rightarrow a\cdot(b-c)=۰$$

$$|a||b-c|\cos\theta=۰\Rightarrow \text{یا: } \begin{cases} |a|=۰\Rightarrow a=\vec{۰}=(۰,۰,۰) \quad (۱) \\ |b-c|=۰\Rightarrow b-c=۰\Rightarrow b=c \\ \cos\theta=۰\Rightarrow\theta=۹۰^\circ\Rightarrow a\perp(b-c) \quad (۳) \end{cases}$$

از آنجا که می‌خواهیم $b \neq c$ باشد، بنابراین مثال‌هایی می‌توان ارائه داد که یکی از دو حالت (۱) یا (۲) اتفاق بیفتد. مثالی در مورد حالت (۱):

$$\begin{cases} \vec{a} = (۰, ۰, ۰) \ , \ b = (۱, ۲, ۳) \ , \ c = (-۱, ۷, ۵) \ , \ b \neq c \\ \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = ۰ + ۰ + ۰ = ۰ \\ a \cdot c = ۰ + ۰ + ۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c \end{cases}$$

مثالی در مورد حالت (۲):

$$b = (۱, ۲, -۱) \ , \ c = (۳, ۲, ۴) \xrightarrow{b \neq c} b - c = (-۲, ۰, -۵)$$

حال کافی است بردار a را طوری در نظر بگیریم که ضرب داخلی آن در $b - c$ برابر صفر شود.

$$a = (۵, ۰, -۲) \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = ۵ + ۰ + ۲ = ۷ \\ a \cdot c = ۱۵ + ۰ - ۸ = ۷ \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c$$

۶۸

$$|a| = ۲ \ , \ |b| = ۱ \ , \ |c| = ۳ \qquad a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = ?$$

فرض: $a + b + c = \vec{۰} \xrightarrow{\text{توان دوم}} \underbrace{|a + b + c|^۲}_{۰} = |a|^۲ + |b|^۲ + |c|^۲ + ۲a \cdot b + ۲a \cdot c + ۲b \cdot c$

$$\Rightarrow ۰ = ۴ + ۱ + ۹ + ۲(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -۷$$

$$\xrightarrow{+} ۲(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = -۱۴ \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -۷$$

۶۹

تصویر قائم بردار a در امتداد b: $a' = \dfrac{a \cdot b}{|b|^۲} b$

الف) $\begin{cases} a = (۲, -۱, ۲) \\ b = i = (۱, ۰, ۰) \Rightarrow |b| = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = ۲ + ۰ + ۰ = ۲ \Rightarrow a' = \dfrac{۲}{۱} b = ۲b = (۲, ۰, ۰)$

ب) $\begin{cases} a = (۲, ۳, ۱) \Rightarrow a \cdot b = ۶ + ۶ + ۱ = ۱۳ \\ b = (۳, ۲, ۱) \Rightarrow |b| = \sqrt{۹ + ۴ + ۱} = \sqrt{۱۴} \end{cases} \Rightarrow a' = \dfrac{۱۳}{۱۴} b = \dfrac{۱۳}{۱۴}(۳, ۲, ۱)$

ج) $\begin{cases} a = (۱, ۱, ۰) \Rightarrow a \cdot b = -۱ + ۲ + ۰ = ۱ \\ b = (-۱, ۲, ۴) \Rightarrow |b| = \sqrt{۱ + ۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۱} \end{cases} \Rightarrow a' = \dfrac{۱}{۲۱} b = \dfrac{۱}{۲۱}(-۱, ۲, ۴)$

۷۰

$$\vec{b} + \vec{c} = (۲, -۳, ۶) \ , \ \overrightarrow{a'} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|(\vec{b} + \vec{c})|^۲} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{۳۵}{۴۹}(۲, -۳, ۶)$$

۷۱

$$|a| = ۳ \ , \ |b| = ۲۶$$

$$|a \times b| = ۷۲ \Rightarrow |a|\,|b| \sin\theta = ۷۲ \Rightarrow ۳ \times ۲۶ \sin\theta = ۷۲ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \pm\sqrt{۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = \pm\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = \pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta = ۳ \times ۲۶ \times (\pm\frac{۵}{۱۳}) = \pm ۳۰$$

۷۲

$$a \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - a \times c = \vec{۰} \Rightarrow a \times (b - c) = \vec{۰}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \vec{۰} \ (۱) \\ b - c = \vec{۰} \Rightarrow b = c \\ a \parallel (b - c) \ (۲) \end{cases} \Rightarrow$ (۲) صورت مسئله حالتی را می‌خواهد که $b \neq c$ یعنی حالت (۱) یا

مثال حالت (۱):

$$\begin{cases} a = \vec{۰} = (۰, ۰, ۰) \\ b = (۱, ۲, ۵) \\ c = (۳, ۱, ۴) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b = (۰, ۰, ۰) \times (۱, ۲, ۵) = (۰, ۰, ۰) = \vec{۰} \\ a \times c = (۰, ۰, ۰) \times (۳, ۱, ۴) = (۰, ۰, ۰) = \vec{۰} \\ b \neq c \end{cases} \Rightarrow a \times b = a \times c$$

مثال حالت (۲):

$$\begin{cases} b = (۱, ۲, ۵) \\ c = (۳, ۱, ۴) \end{cases} \xrightarrow{b \neq c} b - c = (-۲, ۱, ۱) \xrightarrow[\text{مثلاً } a = ۲(b-c)]{\text{باید: } a \parallel (b-c)} a = (-۴, ۲, ۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\times b = \begin{matrix}(-۴,۲,۲)\times \\ (۱,۲,۵)\end{matrix} \Rightarrow a\times b = (۶,۲۲,-۱۰) \\ a\times c = \begin{matrix}(-۴,۲,۲)\times \\ (۳,۱,۴)\end{matrix} \Rightarrow a\times c = (۶,۲۲,-۱۰)\end{cases} \Rightarrow a\times b = a\times c$$

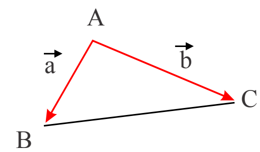
۷۳ بردار عمود بر دو بردار a و b، برداری است که از ضرب خارجی آن دو به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a = (۱,-۳,۲)\times \\ b = (-۲,۱,-۵)\end{cases}$$
$$a\times b = (۱۵-۲,-۴+۵,۱-۶) = (۱۳,۱,-۵)$$

و نیز هر مضربی از این بردار بر a و b عمود است.

۷۴

$A(۳,۵,۷)\ ,\ B(۵,۵,۰)\ ,\ C(-۴,۰,۴)$



فرض: $\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (۲,۰,-۷) \\ \vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-۷,-۵,-۳)\end{cases}$

$$\Rightarrow a\times b = \begin{matrix}(۲,۰,-۷)\times \\ (-۷,-۵,-۳)\end{matrix}$$
$$a\times b = (-۳۵,۵۵,-۱۰) = ۵(-۷,۱۱,-۲)$$
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|a\times b| = \frac{۵}{۲}\sqrt{۴۹+۱۲۱+۴} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۱۷۴}$$