رضاپازوکی

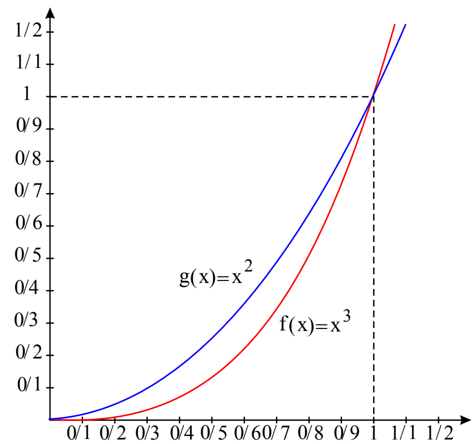
نام آزمون: تمارین ریاضی تجربی فصل ۱تا۳

دوازدهم

REZA PAZOKI
رضا پازوکی

۱ با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^{۳}$ و $g(x)=x^{۲}$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند: الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار $f(x)=x^{۳}$ بالای نمودار $g(x)=x^{۲}$ قرار دارد؟

ب) نمودار این دو تابع را در بازهٔ $[-۱,۰]$ رسم کنید.

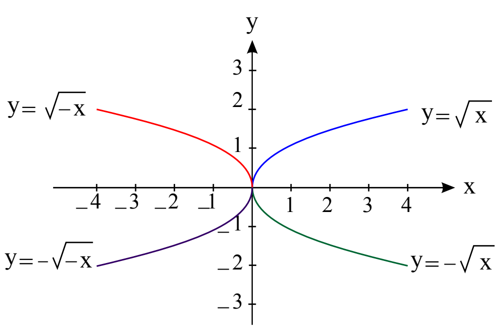


۲ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان، کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف و ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۳ نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-۱)^{۳}-۱$ ب) $y=(x+۲)^{۳}-۲$

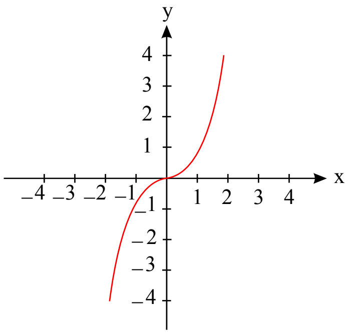
۵ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-۱)=۵ \quad , \quad f(۴)=-۲ \quad , \quad f(۰)=۰$$

نقطهٔ $(۱,۱)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

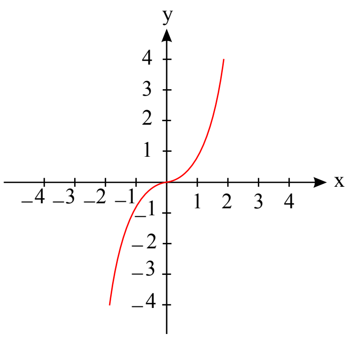
۶ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

الف



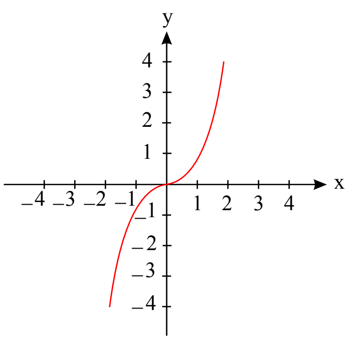
$y = -x^{۳} - ۲$

ب



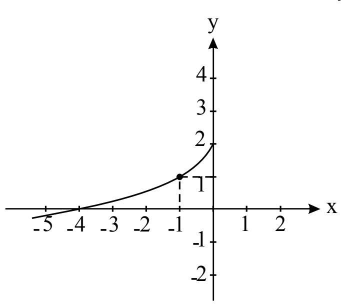
$y = (x + ۲)^{۳}$

پ



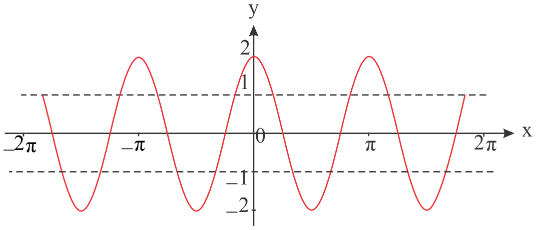
$y = -(x - ۲)^{۳}$

۷ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید.

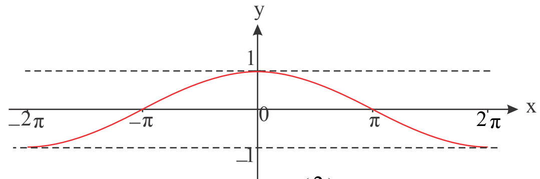


۸ نمودار توابع $y = -\sin ۲x - ۱$ و $y = ۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

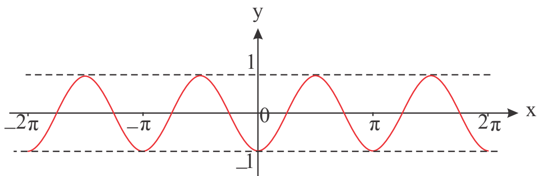
۹) با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.



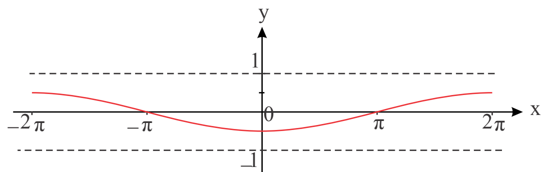
(1)



(2)



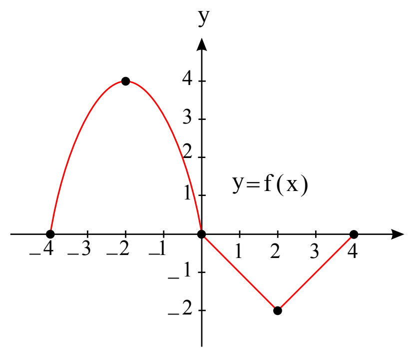
(3)



(4)

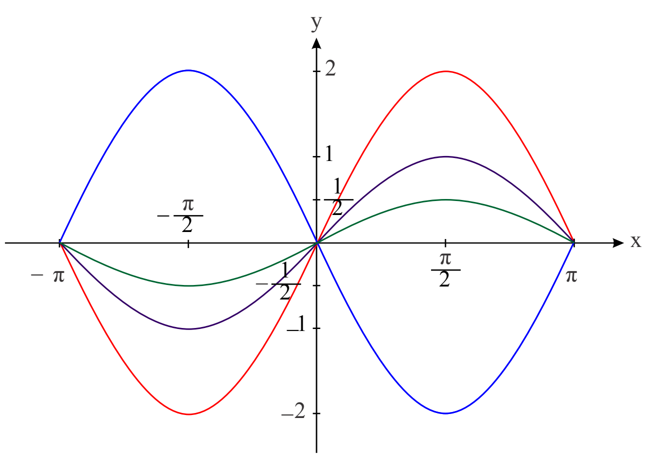
الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ ب) $y=2\cos 2x$ پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)$ ت) $y=-\cos 2x$

۱۰) نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

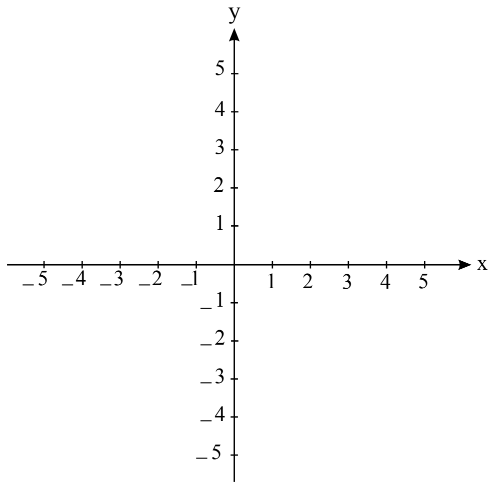


x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0

۱۱) در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=2\sin x$، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



۱۲ نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.



۱۳ تابع نمایی $y=۲^{x}-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_{۲}^{x}+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۱۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف

$f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳}) \qquad D_f=[۰,۲\pi]$

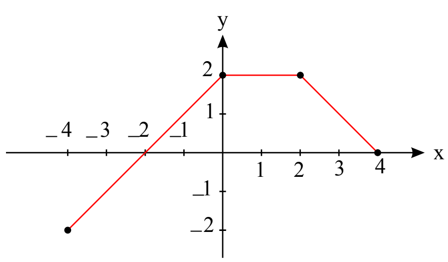
ب

$g(x)=x+|x|$

پ

$t(x)=-x^{۳}-۱$

۱۵ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



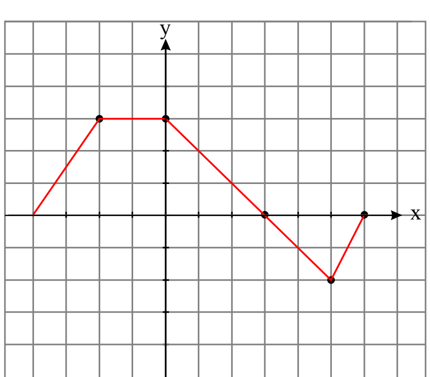
الف

$y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$

ب

$y=۲f(x-۱)-۳$

۱۶ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.



الف

$y=f(-x)$

ب

$y=۲f(x-۱)$

پ

$y=-f(x)+۲$

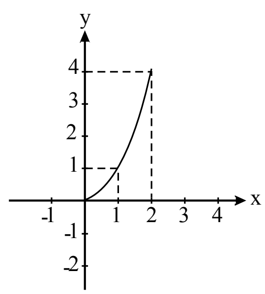
ت

$y=f(۲x-۱)$

ث

$y=f(۳-x)$

۱۷ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.



الف

$y=f(-x)$

ب

$y=-f(x)$

پ

$y=-f(-x)$

۱۸ اگر $f(x)=\dfrac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۳}{x}$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

۱۹ اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.

۲۰ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

۲۱ مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$.

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آنگاه $(fog)(۴)=۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

۲۲ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲۳ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵$, $g(x)=x^۲-۳x+۸$; $(fog)(x)=۷$

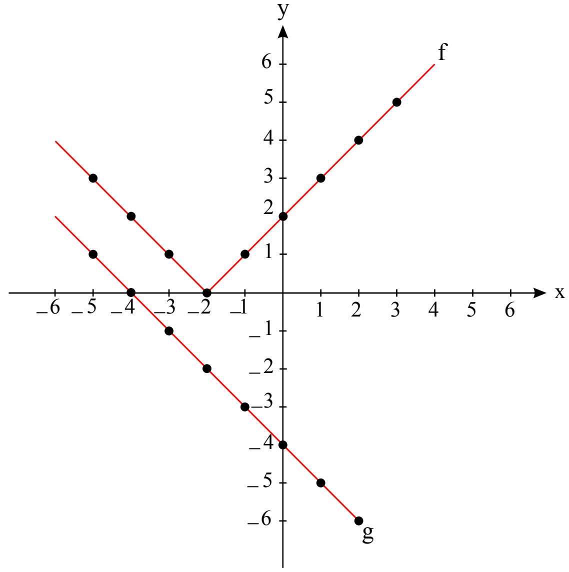
۲۴ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(fog)(۱)$

ت) $(gof)(-۱)$



۲۵ تابع $h(x) = (۳x^۲ - ۴x + ۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[۵]{x}$; $g(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

ب) $k(x) = x^۵$; $l(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

۲۶

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	$g(x)$
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(۱) = \cdots\cdots\cdots$

ب) $(fog)(-۱) = \cdots\cdots\cdots$

پ) $(gof)(۰) = \cdots\cdots\cdots$

ت) $(gog)(-۲) = \cdots\cdots\cdots$

ث) $(gof)(۲) = \cdots\cdots\cdots$

ج) $(fof)(۱) = \cdots\cdots\cdots$

۲۷ هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d(t) = ۴t + ۲ \quad ; \quad ۰ \le t \le ۳ \qquad (\text{واحد } t\text{، ساعت است})$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(۲) = ۱۰$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(۱) = \cdots\cdots\cdots\cdots$

$d(۳) = \cdots\cdots\cdots\cdots$

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰ \quad ; \quad ۲ \le d \le ۱۴$$

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال بر حسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(۱۰) = ۲۰(۱۰)^۲ - ۸۰(۱۰) + ۵۰۰ = ۱۷۰۰$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(۲) = \cdots\cdots\cdots\cdots$

$n(۳) = \cdots\cdots\cdots\cdots$

به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر:

$$\text{زمان} \xrightarrow{d} \text{دما} \xrightarrow{n} \text{تعداد باکتری‌ها}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

۲۸ موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف

$$f(x) = x^۲ - ۵ \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x+۶} \quad : \quad D_{fog}, (fog)(x)$$

ب

$$f(x) = \sqrt{۲x-۳} \quad ; \quad g(x) = \frac{۶}{۳x-۵} \quad : D_{fog}, (fog)(x)$$

پ

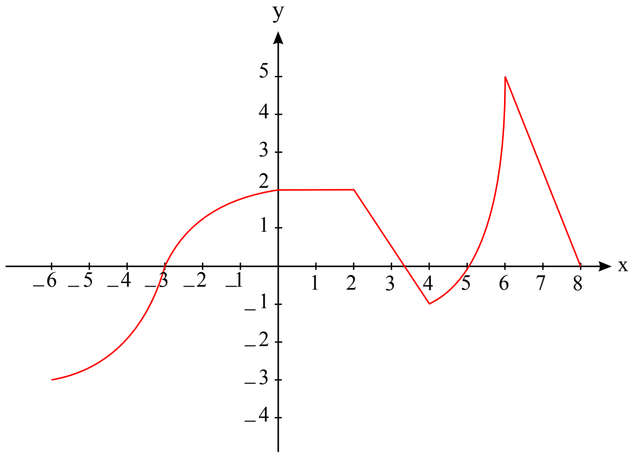
$$f(x) = \sqrt{x+۲} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x^۲-۱۶} \quad : \quad D_{gof}, (gof)(x)$$

ت

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}, (gof)(x)$$

۲۹ تابع $y = x^۲|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

۳۰ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

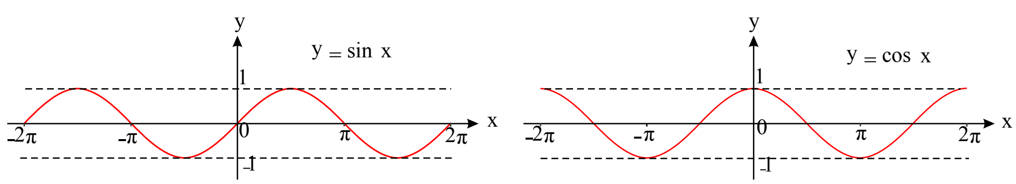


۳۱ تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

۳۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & x<-۴ \\ ۳ & -۴\leq x<۲ \\ ۳x-۲ & x\geq ۲ \end{cases}$$

۳۳ نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آن‌ها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.



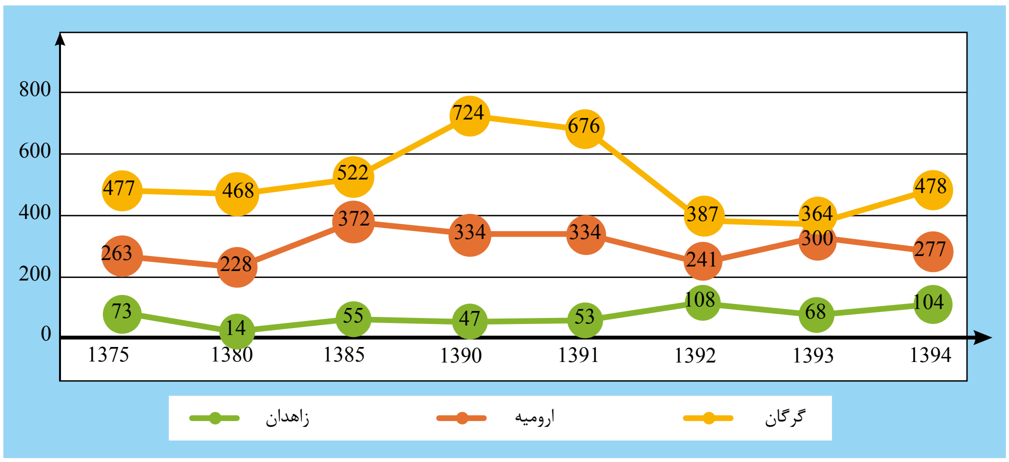
x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
y=sinx					صعودی			

x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
y=cosx							صعودی	

۳۴ یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

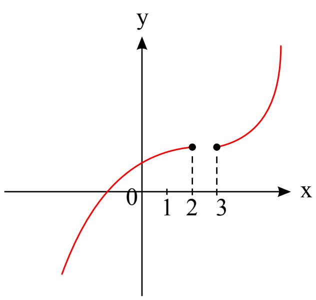
الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

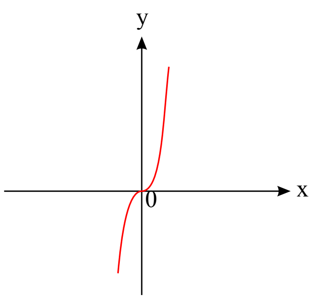


۳۵ هرکدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

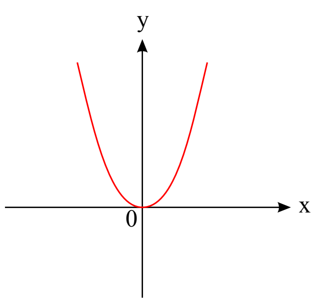
الف



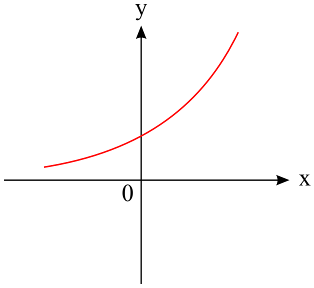
ب



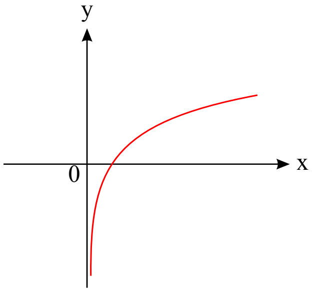
پ



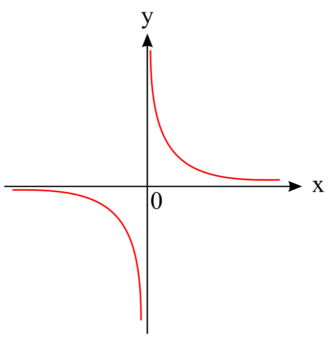
ت



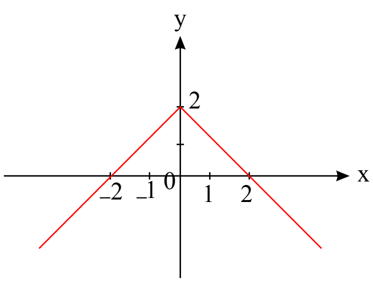
ث



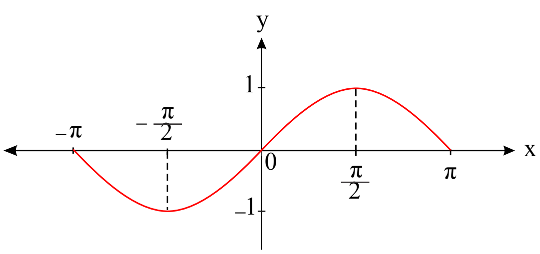
ج



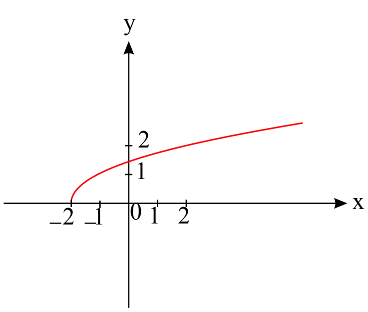
چ

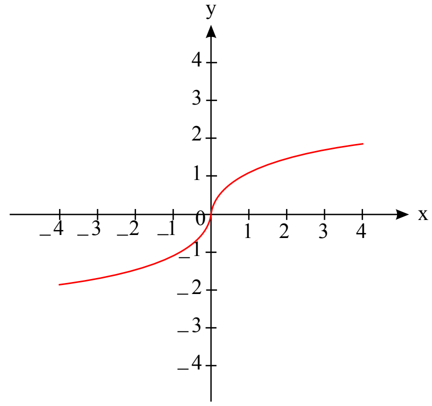


ح



خ





۳۶ به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

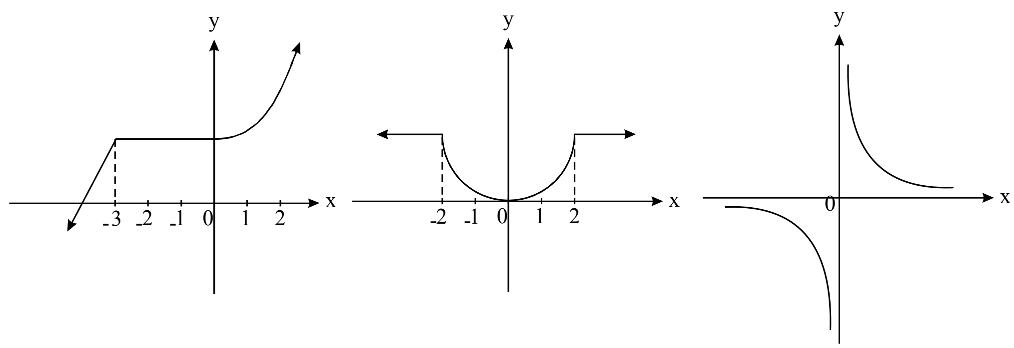
ب) این تابع یک به یک است؟

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

۳۷ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \geq b$.

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴} \leq (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود x را به دست آورید.

۳۸ نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y = f(x)$ $y = g(x)$ $y = h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۳۹ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟

۴۰ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

۴۱ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. کدام‌یک از آنها در تمام دامنهٔ خود، اکیداً یکنواست؟

الف

$f(x) = \sqrt{۲-x}$

ب

$g(x) = ۲^{-x}$

پ

$h(x) = \log_{۲}^{x}$

۴۲ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع

۴۳ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۴۴ تابع $f(x)=(x-۲)^۳+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید.

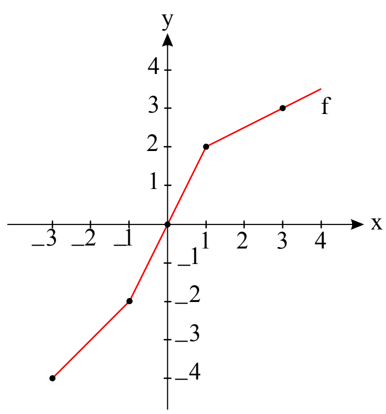
ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

پ) ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست آورید.

۴۵ اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

۴۶ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

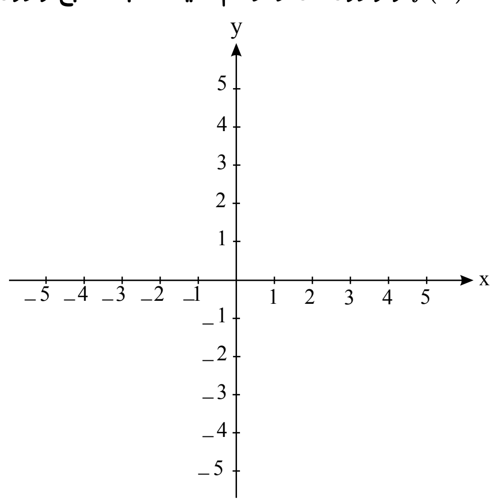
۴۷ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x)=\dfrac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به‌دست آورده و توضیح دهد چه چیزی را نشان می‌دهد.

۴۸ در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳ \quad , \quad g(x)=-\dfrac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸} \quad , \quad g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰$

۴۹ آیا تابع $f(x)=x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر، نمودار تابع $f(x)=x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



۵۰ ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف

$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

ب

$g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲}$

پ

$h(x) = x^۲ + ۱$

۵۱ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف

$f(x) = |x|$

ب

$g(x) = -x^۲$

پ

$h(x) = x^۲ + ۴x + ۳$

۵۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به‌ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

۵۳ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به‌ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

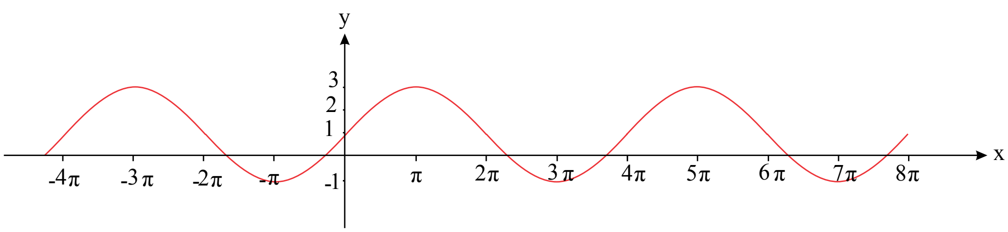
۵۴ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$

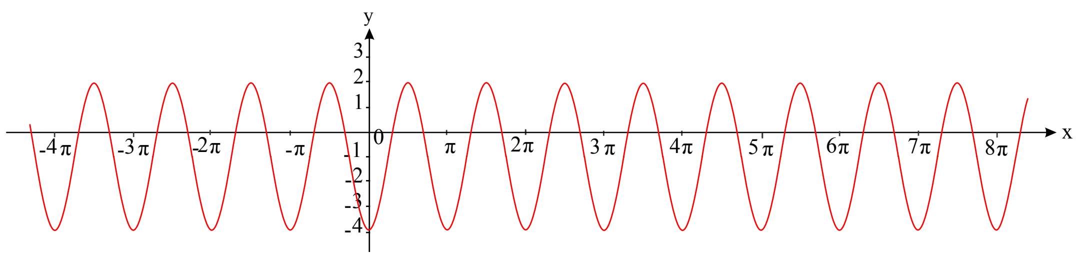
۵۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $۲۲/۵^\circ$ را به‌دست آورید.

۵۶ ضابطهٔ مربوط به هریک از نمودارهای داده‌شده را بنویسید.

الف)

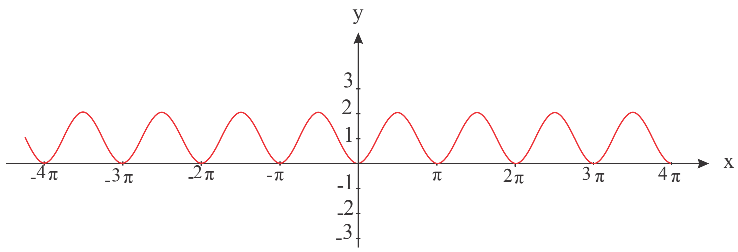


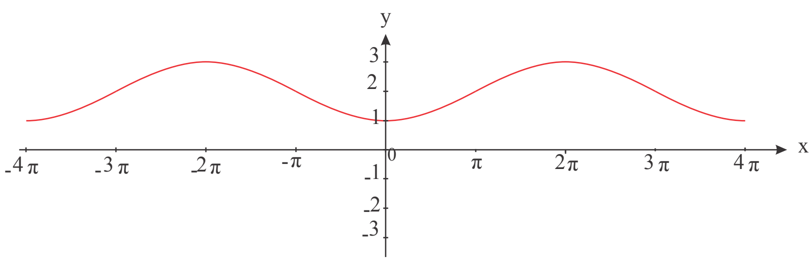
ب)

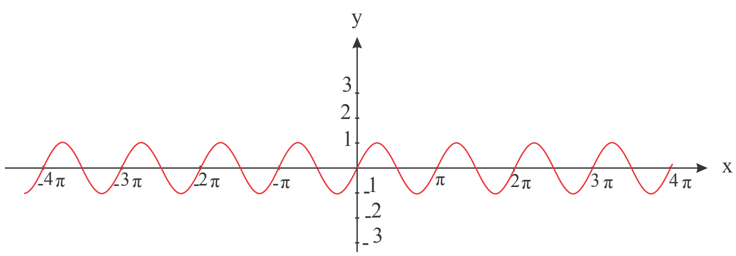


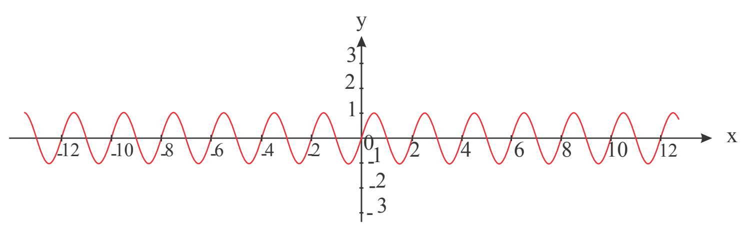
۵۷ هریک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos \dfrac{۱}{۲}x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

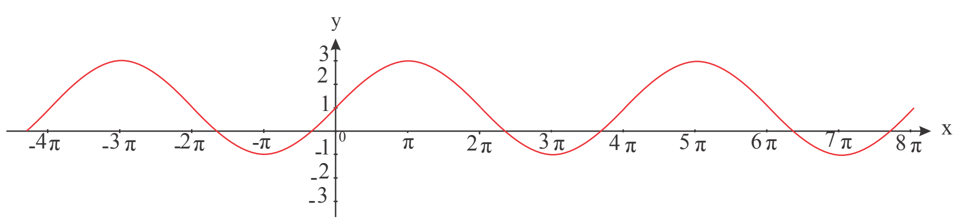
1)


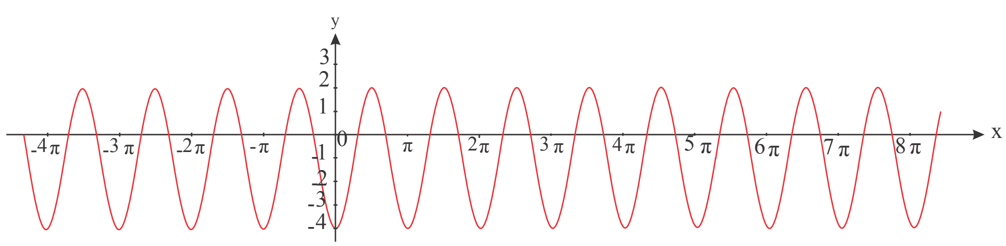
2)


3)


4)


۵۸ ضابطهٔ مربوط به هریک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)


ب)


$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

$\cos x = \cos ۲x$

۶۱ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف

$y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب

$y = \sqrt{۳} - \cos \frac{\pi}{۲}x$

پ

$y = -\pi \sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت

$y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

۶۲ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف

$T = \pi \quad , \quad Max = ۳ \quad , \quad Min = -۳$

ب

$T = ۳ \quad , \quad Max = ۹ \quad , \quad Min = ۳$

پ

$T = ۴\pi \quad , \quad Max = -۱ \quad , \quad Min = -۷$

ت

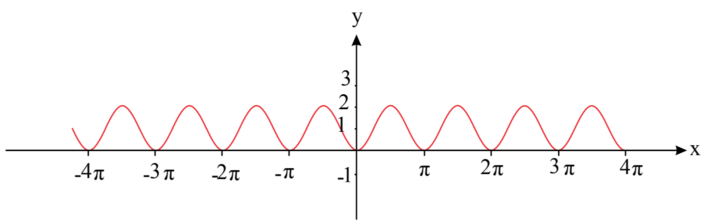
$T = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad Max = ۱ \quad , \quad Min = -۱$

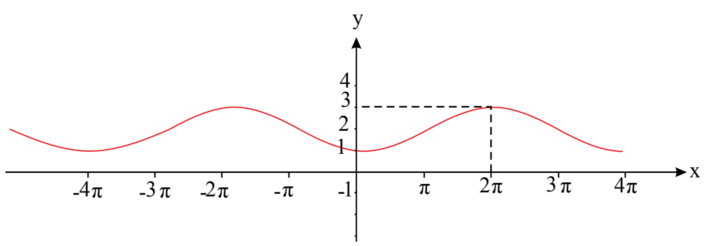
۶۳ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

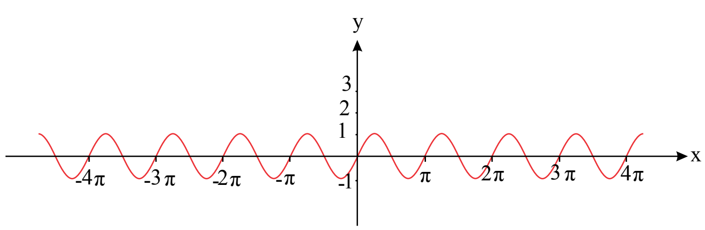
الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

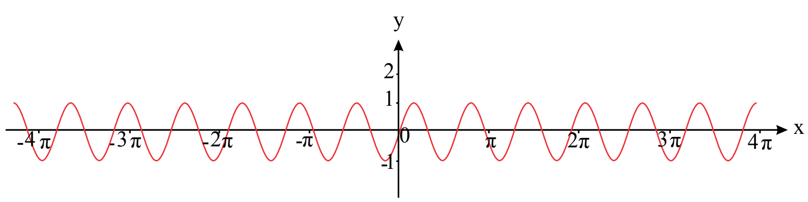
۶۴ هریک از توابع داده‌شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y=\sin \pi x$ ب) $y=۲-\cos \frac{۱}{۲}x$ پ) $y=\sin ۲x$ ت) $y=۱-\cos ۲x$

1)


2)


3)


4)


۶۵ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف

$y=۱+۲\sin ۷x$

ب

$y=\sqrt{۳}-\cos \frac{\pi}{۲}x$

پ

$y=-\pi \sin(\frac{x}{۲})-۲$

ت

$y=-\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

۶۶ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.

الف

$T=\pi \quad , \quad \max=۳ \quad , \quad \min=-۳$

ب

$T=۳ \quad , \quad \max=۹ \quad , \quad \min=۳$

پ

$T = ۴\pi \quad , \quad \max = -۱ \quad , \quad \min = -۷$

ت

$T = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max = ۱ \quad , \quad \min = -۱$

۶۷ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶۸ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶۹ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\sin \frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

ب

$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

پ

$\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

ت

$\sin x - \cos ۲x = ۰$

۷۰ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\sin \frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

ب

$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

پ

$\cos x = \cos ۲x$

ت

$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

ث

$\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

ج

۷۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

۷۲ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=۲x^{۳}+۵x^{۲}-۳x-۱۰$ بر دوجمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر است.

۷۳ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=۲x^{۳}+x^{۲}+۱$ بر دوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۷۴ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^{۳}+kx^{۲}+۲$ بر $x-۲$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

۷۵ چندجمله‌ای $g(x)=۲x^{۳}+x^{۲}+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$۲x^{۳}+x^{۲}+۱ \;\Big|\; \underline{x+۱}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۷۶ در چندجمله‌ای $f(x)=۳x^{۲}-۵x-۲$، مقدار $f(۲)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r|l} ۳x^{۲}-۵x-۲ & x-۲ \\ \cline{2-2} & ۳x+\cdots \\ \underline{-(۳x^{۲}-۶x)} & \\ x-۲ & \\ \underline{-(\cdots)} & \\ R=\cdots & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم داریم: $f(x)=۳x^{۲}-۵x-۲=(x-۲)(۳x+\cdots)$

هماهنگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

۷۷ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف $x^{۶}-۱$ با عامل $x-۱$

ب $x^{۶}-۱$ با عامل $x+۱$

پ $x^{۵}+۳۲$ با عامل $x+۲$

۷۸ الف) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=+\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=-\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

۷۹ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to -۳}\frac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+۳x}$$

ب

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}-۴x+۱}{۲x^{۲}+x-۱}$$

پ

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x+۶}{۲x^{۳}-۱۳x^{۲}+۲۴x-۹}$$

$$\lim \frac{x^{۲}-۱}{}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲}$$

۸۳ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$$

ب

$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}$$

پ

$$\lim_{x\to -۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}$$

۸۴ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$$

پ

$$\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$$

۸۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -۲ تعریف شده باشد. به طوری که $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=+\infty$

۸۶ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

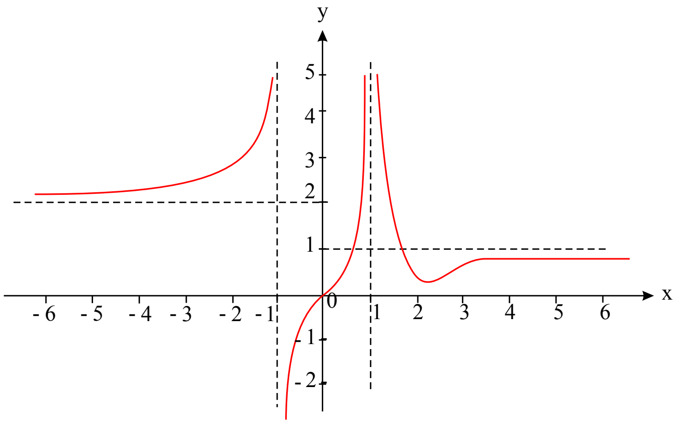
ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$



۸۷ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵}$$

ب

$$\lim_{x\to ۵^+} \frac{۲x}{x-۵}$$

پ

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲}$$

ت

$$\lim_{x\to ۳} \frac{۲}{|x-۳|}$$

ث

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|}$$

ج

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x}$$

۸۸ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x}$$

ب

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{|x|}$$

پ

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{۱}{x-۱}$$

ت

$$\lim_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲}$$

ث

$$\lim_{x\to ۳} \frac{-۱}{(x-۳)^۴}$$

ج

$$\lim_{x\to \frac{-۱}{۲}} \frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}$$

چ

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۱-۵x}{x^۲-۹}$$

ح

$$\lim_{x\to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴}$$

خ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x}$$

د

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x$$

ذ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$$

ر

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$$

۸۹ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲} = +\infty$$

ب

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۱}{(x-۲)^۴} = +\infty$$

پ

$$\lim_{x\to -۲} \left|\frac{۵-x}{۲+x}\right| = +\infty$$

۹۰ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{x+۱}{۹-x^۲}$$

۹۱ مفهوم هریک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = ۲$

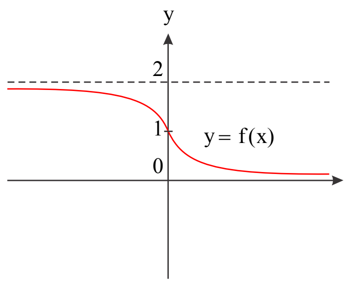
ب) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = ۴$

۹۲ الف) هریک از رابطه‌های $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -۱$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x) = ۲$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

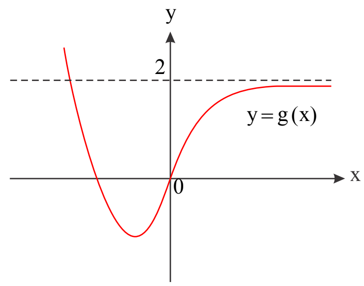
ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۹۳ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

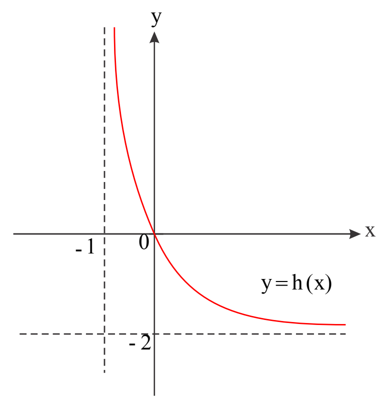
(الف)



(ب)



(پ)



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} h(x) = \cdots$

۹۴ نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \dfrac{۱}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

ب) $g(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

۹۵ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-۱) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

۹۶ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

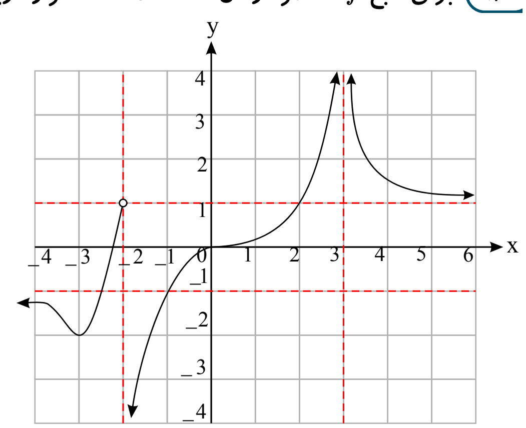
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) =$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) =$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) =$

ج) مجانب‌های افقی و قائم



۹۷ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+۲}{x-۱}$$

ب

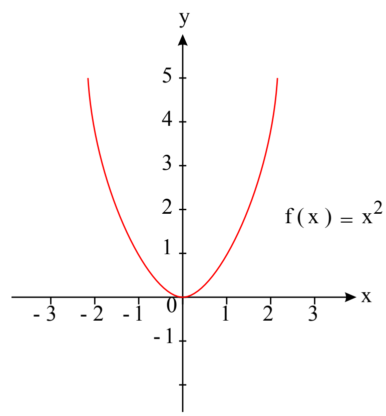
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}$$

پ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲-۳x}$$

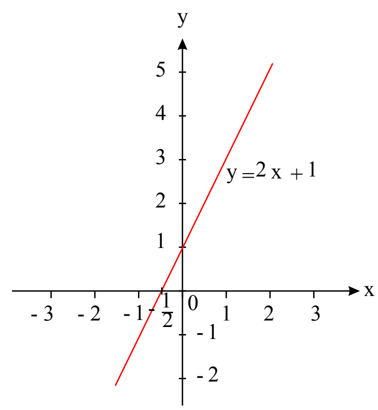
۹۸ با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.

الف



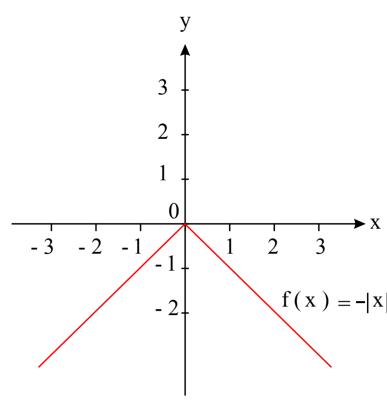
$$\lim_{x\to-\infty} x^۲ = \cdots$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^۲ = \cdots$$

ب



$$\lim_{x\to-\infty} (۲x+۱) = \cdots$$
$$\lim_{x\to+\infty} (۲x+۱) = \cdots$$

پ

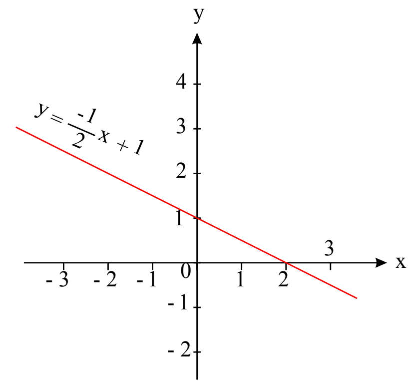


$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$$

ت

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-۱}{۲}x+۱\right)=\cdots$$

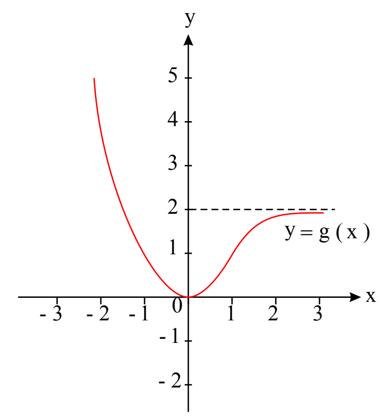
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-۱}{۲}x+۱\right)=\cdots$$



ث

$$\lim_{x\to -\infty} g(x)=\cdots$$

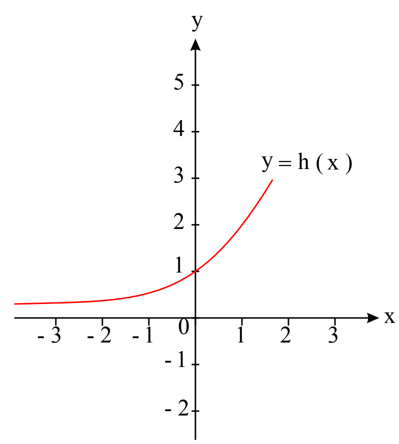
$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\cdots$$



ج

$$\lim_{x\to -\infty} h(x)=\cdots$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\cdots$$



۹۹ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x^{۳}-۵x+۴}{۷x^{۳}-۱۱x^{۲}-۶x}$$

ب

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}$$

پ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}$$

۱۰۰ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to-\infty}(۹+\frac{۷}{x^۳})$$

ب

$$\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳}$$

ت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$$

ث

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۱}$$

ج

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}$$

چ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$$

ح

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+x}{۳-x}$$

خ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$$

د

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{۴}$$

۱۰۱ حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۵}{x-۲}$$

ب

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱}$$

پ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}$$

ت

$$\lim_{x\to-\infty}(x^۳-۲x^۲)$$

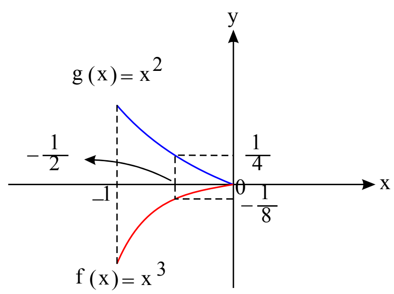
پاسخنامه تشریحی

۱ الف) xهای نامنفی یعنی $x \geq ۰$. خیر. با توجه به نقاط تلاقی دو تابع f و g (که از حل معادلهٔ $x^۲ = x^۳$ به صورت $x^۳ - x^۲ = ۰ \to x^۲(x-۱) = ۰ \to x = ۰, ۱$ به دست می‌آیند) به وضوح می‌بینیم که برای $۰ < x < ۱$ نمودار $g(x) = x^۲$ بالاتر از نمودار $f(x) = x^۳$ قرار دارد و برای تمام xهایی که $x > ۱$ هستند نمودار f بالاتر از نمودار g قرار می‌گیرد.

این جوری هم ببین: اعداد بین ۰ و ۱ هرچه به توان‌های بزرگ‌تری می‌رسند کوچک‌تر می‌شوند (یعنی برای $۰ < x < ۱$ ، $x^۳ < x^۲$) به همین ترتیب اعداد بزرگ‌تر از یک هرچه به توان‌های بزرگ‌تری برسند بزرگ‌تر می‌شوند (یعنی برای $x > ۱$، $x^۳ > x^۲$ است)

ب) پرواضح است که برای $-۱ \leq x \leq ۰$، حاصل $x^۳$ نامثبت و حاصل $x^۲$ نامنفی است. با توجه به این موضوع و این که برای $-۱ \leq x \leq ۰$ ، $x^۲ \geq |x^۳|$ می‌باشد، به نمودار مقابل می‌رسیم.

حتماً دقت دارید که این دو نمودار نسبت به محور xها قرینه یکدیگر نیستند!



۲ بیایید در هر حالت حساب کنیم و ببینیم که الناز چقدر می‌تواند تخفیف بگیرد:

$$\text{انتخاب اول}: \xrightarrow[\text{برای ۲ میلیون تومان}]{\text{ابتدا تخفیف ۲۰ درصدی}} \text{مقدار تخفیف} = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲,۰۰۰,۰۰۰ = \underbrace{۴۰۰,۰۰۰}_{\text{باقی‌مانده: ۱,۶۰۰,۰۰۰ تومان}}$$

$$\xrightarrow[\text{برای باقی‌ماندهٔ ۲ میلیون تومان}]{\text{سپس تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی}} ۱,۶۰۰,۰۰۰ - ۲۰۰,۰۰۰ = ۱,۴۰۰,۰۰۰ \ \text{تومان}$$

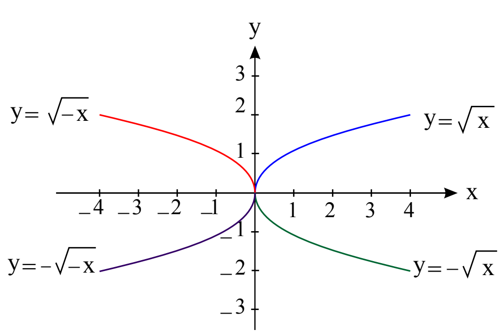
پس در انتخاب اول، الناز باید یک میلیون و چهارصد هزار تومان پرداخت کند.

$$\text{انتخاب دوم}: \xrightarrow[\text{برای ۲ میلیون تومان}]{\text{ابتدا تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی}} ۲,۰۰۰,۰۰۰ - ۲۰۰,۰۰۰ = ۱,۸۰۰,۰۰۰$$

$$\xrightarrow[\text{برای باقی‌مانده}]{\text{سپس تخفیف ۲۰ درصدی}} \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱,۸۰۰,۰۰۰ = \underbrace{۳۶۰,۰۰۰}_{\text{مقدار تخفیف}} \to \text{مقدار پرداختی} = ۱,۸۰۰,۰۰۰ - ۳۶۰,۰۰۰ = ۱,۴۴۰,۰۰۰$$

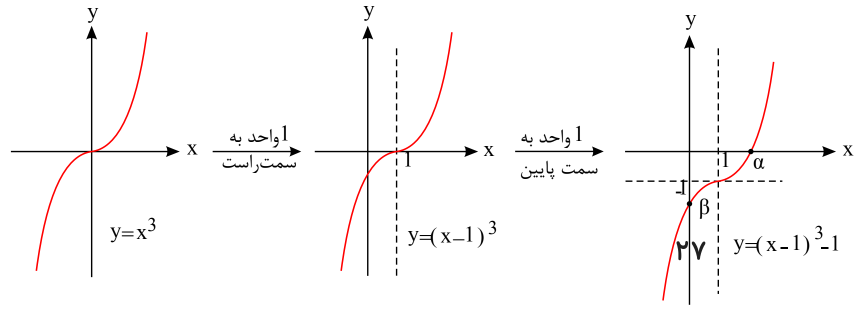
یعنی در انتخاب دوم، الناز باید یک میلیون و چهارصد و چهل هزار تومان پرداخت کند. پس معلوم شد که انتخاب اول معقول‌تر است.

۳ تابع $y = \sqrt{x}$ با برد $R = [۰, +\infty)$ بر روی فاصلهٔ (دامنهٔ) $D = [۰, +\infty)$ قابل تعریف بوده و از نمودارها پیداست که هریک از توابع $y = \sqrt{-x}$، $y = -\sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{-x}$ به ترتیب در فاصله‌های (دامنهٔ) $(-\infty, ۰]$ ، $[۰, +\infty)$ و $(-\infty, ۰]$ معین هستند. از همین نمودارها معلوم است که برد $y = \sqrt{-x}$ به صورت $[۰, +\infty)$ و برد $y = -\sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{-x}$ به صورت $(-\infty, ۰]$ می‌باشد.

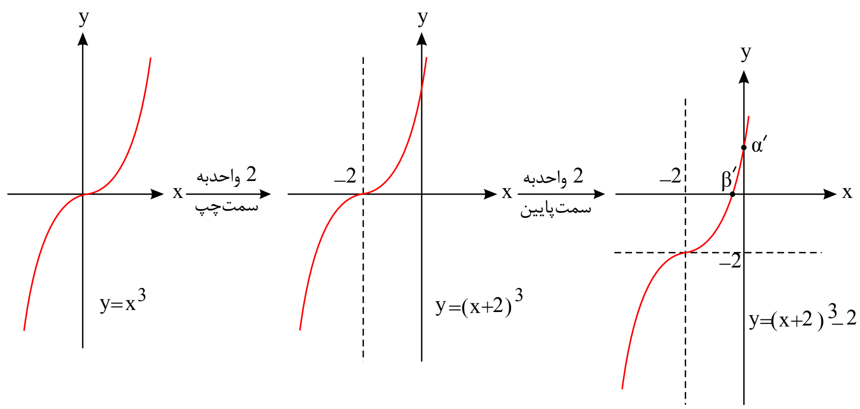


۴ هر دو نمودار را با توجه به نمودار تابع $y = x^۳$ (به عنوان پایه) و به کمک انتقال نمودارها رسم کرده و دامنه و برد هرکدام را مشخص می‌کنیم:

الف)



ب)



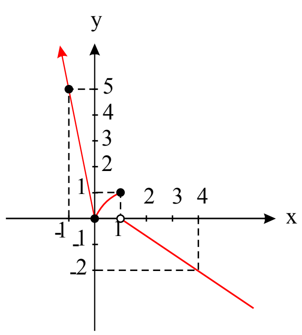
این نمودارها به ما می‌گویند که دامنه و برد هر دو تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است چرا که تصویر نمودار روی محور xها و yها تمام محورها را پوشش می‌دهد.

و اما برای یافتن محل تلاقی نمودارها با محورهای مختصات اینگونه عمل می‌کنیم:

الف $\begin{cases} x = 0 \to y = (0-1)^3 - 1 = -2 = \beta \\ y = 0 \to (x-1)^3 - 1 = 0 \to (x-1)^3 = 1 \to x - 1 = 1 \to x = 2 = \alpha \end{cases}$

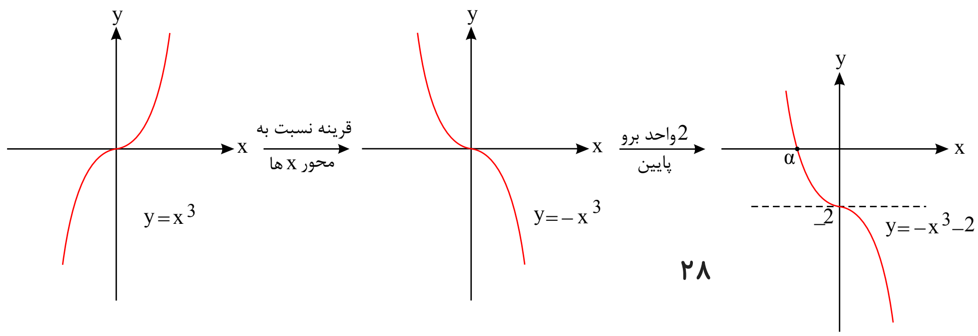
ب $\begin{cases} x = 0 \to y = (0+2)^3 - 2 = 8 - 2 = 6 = \alpha' \\ y = 0 \to (x+2)^3 - 2 = 0 \to (x+2)^3 = 2 \\ \to x + 2 = \sqrt[3]{2} \to x = \sqrt[3]{2} - 2 = \beta' \end{cases}$

۵



۶

الف برای رسم نمودار $y = -x^3 - 2$ از روی نمودار $y = x^3$ می‌بایستی ابتدا نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا y قرینه شده و به نمودار $y = -x^3$ برسیم و در ادامه نمودار حاصل را ۲ واحد در راستای قائم به پایین انتقال دهیم تا بالاخره به نمودار $y = -x^3 - 2$ برسیم. داریم:

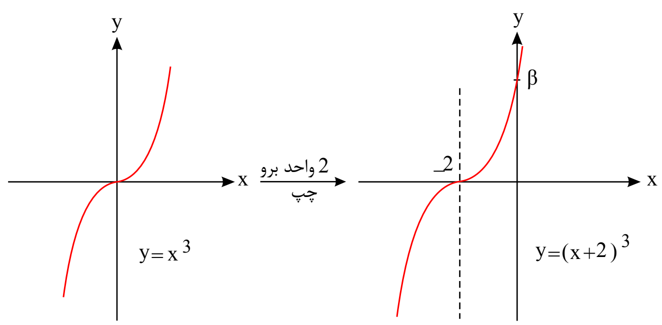


۲۸

به نظر شما محل تلاقی این نمودار با محور xها (یعنی α) چه طولی دارد؟! آری در این نقطه $y=\text{۰}$ بوده و داریم:

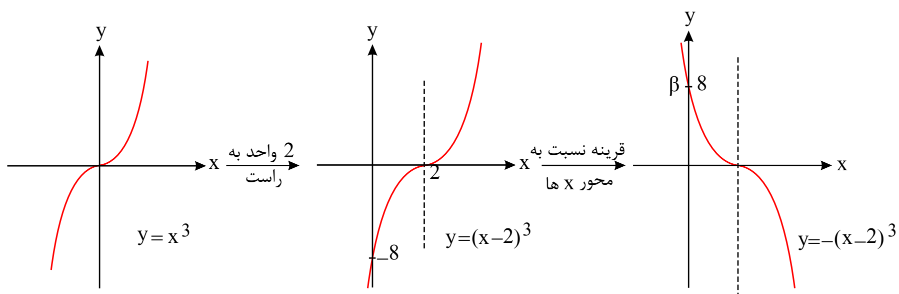
$$y=-x^{۳}-۲=۰\rightarrow x^{۳}=-۲\xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{ریشه سوم}}\sqrt[۳]{x^{۳}}=\sqrt[۳]{-۲}\rightarrow x=\sqrt[۳]{-۲}=-\sqrt[۳]{۲}=\alpha$$

ب برای رسم نمودار $y=(x+۲)^{۳}$ کافی است نمودار $y=x^{۳}$ را ۲ واحد در راستای محور طول‌ها به سمت چپ انتقال دهیم (این موضوع را می‌توانید از محل تلاقی نمودار با محول طول‌ها نیز درک کنید: $y=(x+۲)^{۳}=۰\rightarrow x=-۲$)



آیا شما هم موافقید که محل تلاقی این نمودار با محور yها (یعنی β) به صورت $\beta=y(۰)=(۰+۲)^{۳}=۸$ است؟!

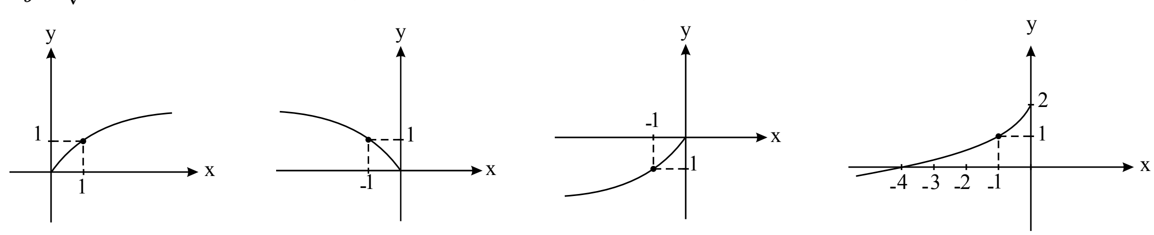
پ خب دیگر، با توجه به دو مورد قبلی حتماً دریافته‌اید که برای رسم نمودار $y=-(x-۲)^{۳}$، ابتدا نمودار $y=(x-۲)^{۳}$ را با ۲ واحد انتقال به سمت راست دادن نمودار $y=x^{۳}$ به دست آورده و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-(x-۲)^{۳}$ حاصل شود:



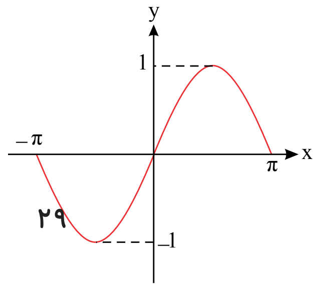
$\beta=y(۰)=-(۰-۲)^{۳}=-(-۸)=۸$

۷

$y=\sqrt{x}\xrightarrow{x\rightarrow -x}$ $\quad y=\sqrt{-x}\Rightarrow$ $\quad y=-\sqrt{-x}\Rightarrow$ $\quad y=-\sqrt{-x}+۲$

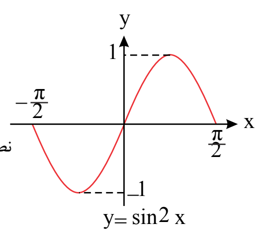


۸ نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به‌صورت

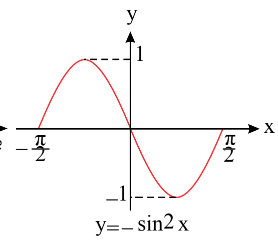


بوده و به کمک انتقال نمودارها داریم:

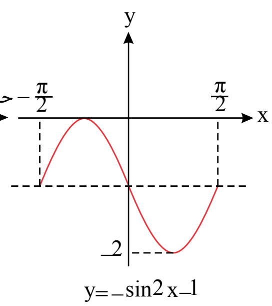
$y=-\sin 2x-1$: ابتدا نمودار $\sin 2x$ رو با نصف کردن طول هر نقطه رسم‌کن



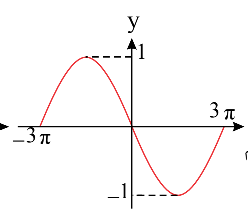
قرینه نسبت به محور x ها



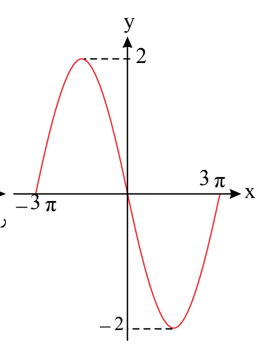
حالا یک واحد برو پایین



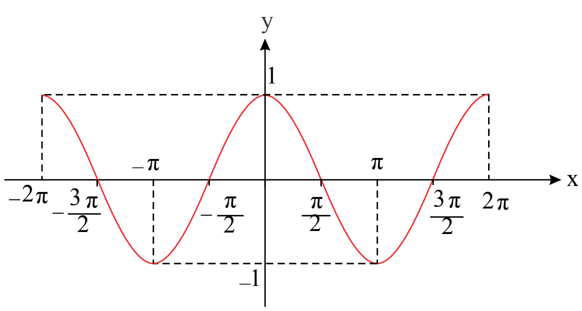
$y=2\sin(\frac{-1}{3}x)$: ابتدا نمودار $\sin(-\frac{1}{3}x)$ رو با 3_ برابر طول هر نقطه رسم می‌کنیم



عرض هر نقطه را 2 برابر می‌کنیم



۹ ابتدا به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دورهٔ تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)\rightarrow$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را -2 برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-1}{2}$ برابرمی‌کنیم.

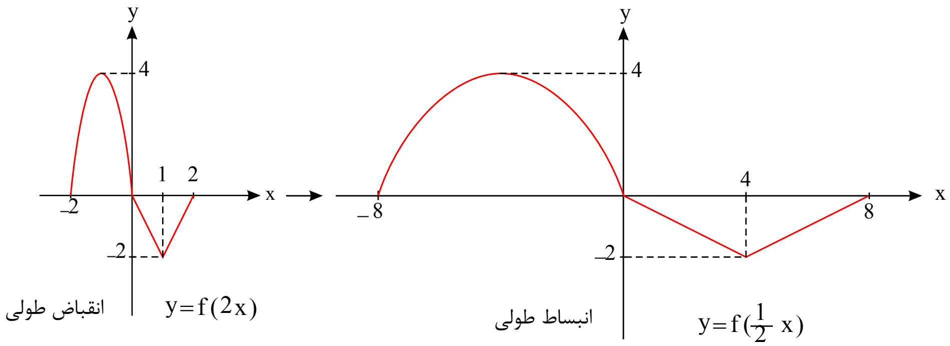
ب) $y=2\cos 2x\rightarrow$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{1}{2}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم.

پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)\rightarrow$ با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد.

ت) $y=-\cos 2x\rightarrow$ طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم.

۱۰ باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت

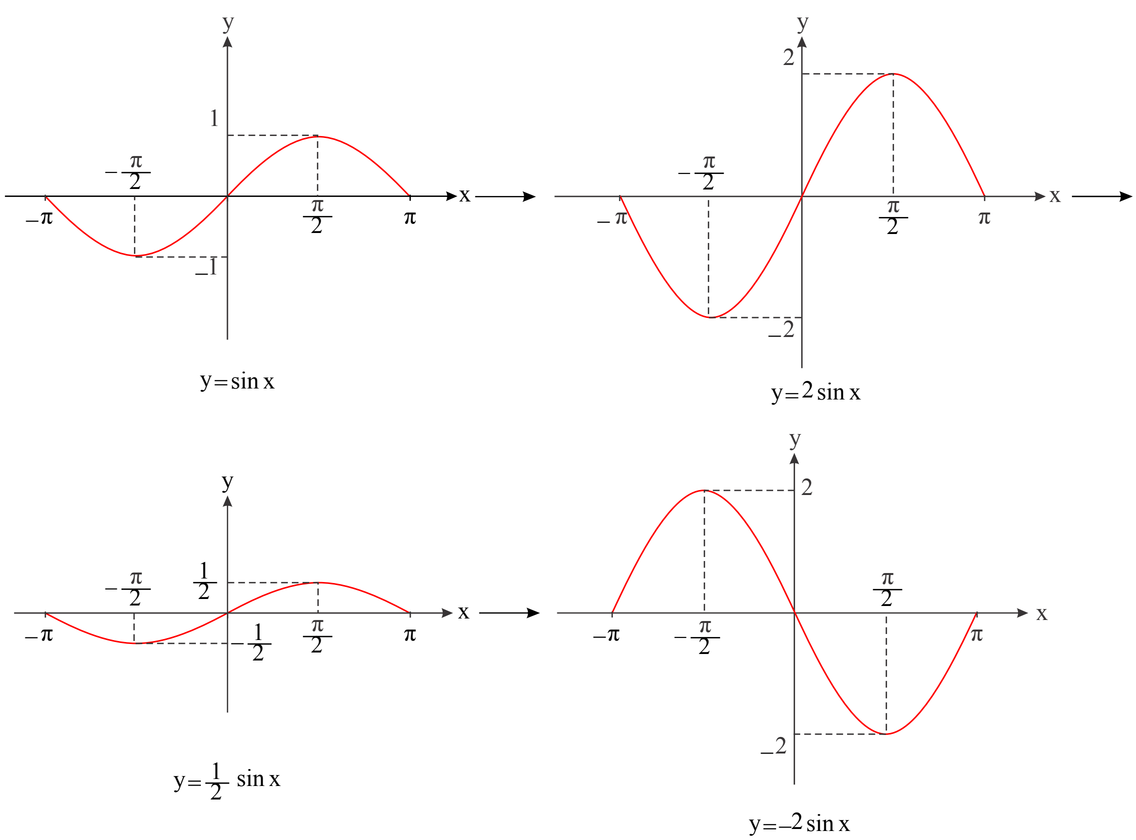
می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y=f(x)$، برای kهای بزرگتر از یک ($k>1$) با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای kهای بین ۰ و ۱ ($0<k<1$) با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.



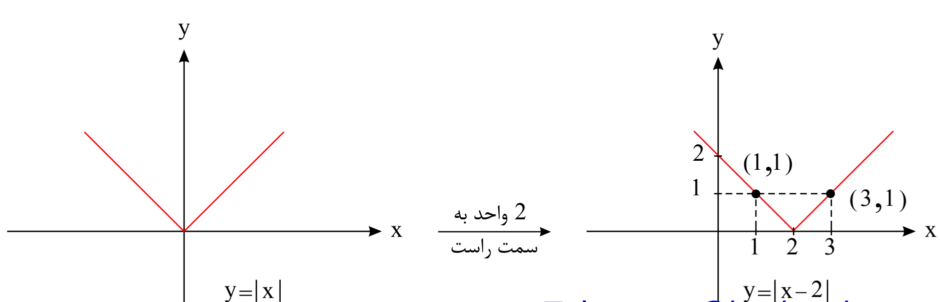
$D=[-2,2]\,,\,R=[-2,4]$

$D=[-8,8]\,,\,R=[-2,4]$

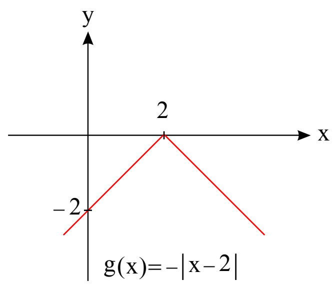
(۱۱) هر چهار نمودار $y=\sin x$، $y=2\sin x$، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ دامنه‌ای به صورت $[-\pi,\pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایهٔ $y=\sin x$، که فاصلهٔ بستهٔ $[-1,1]$ است، برد تابع $y=r\sin x$ برای $r>0$ به صورت $[-r,r]$ و برای $r<0$ به صورت $[r,-r]$ بوده و شکل نمودار برای $|r|>1$ کشیده‌تر و برای $0<|r|<1$ بسته‌تر خواهد شد. حواستان باشد که برای rهای منفی نمودار دقیقاً قرینه نمودار $y=|r|\sin x$ نسبت به محور xها خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود:



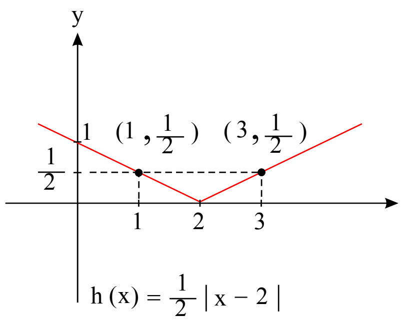
(۱۲) ابتدا نمودار تابع $y=|x-2|$ را به کمک انتقال نمودار نام‌آشنای $y=|x|$ رسم می‌کنیم:

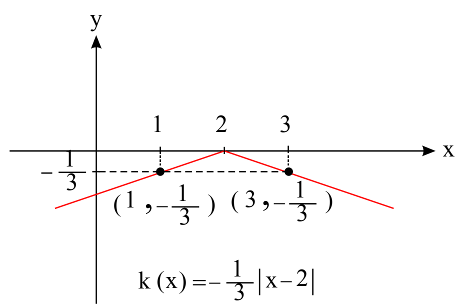


حالا برای رسم $y=-|x-2|$، نمودار $y=|x-2|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

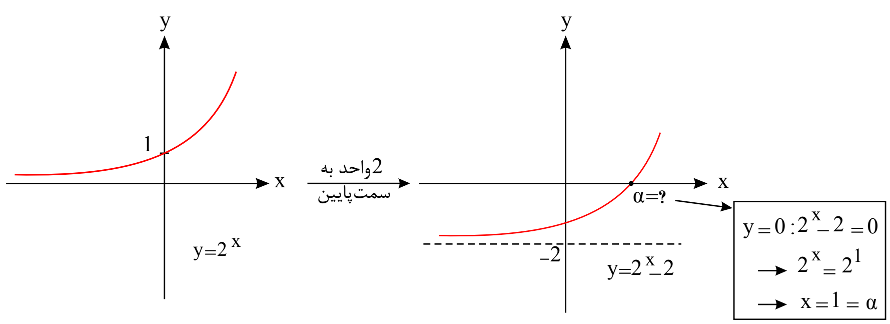


و برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}|x-2|$، می‌بایستی عرض هر نقطه از نمودار $y=|x-2|$ را (با ثابت ماندن طول) نصف کنیم. به همین منوال اگر عرض نقاط را با ثابت ماندن طول آن‌ها در $\frac{-1}{3}$ ضرب کنیم به نمودار $y=\frac{-1}{3}|x-2|$ می‌رسیم:



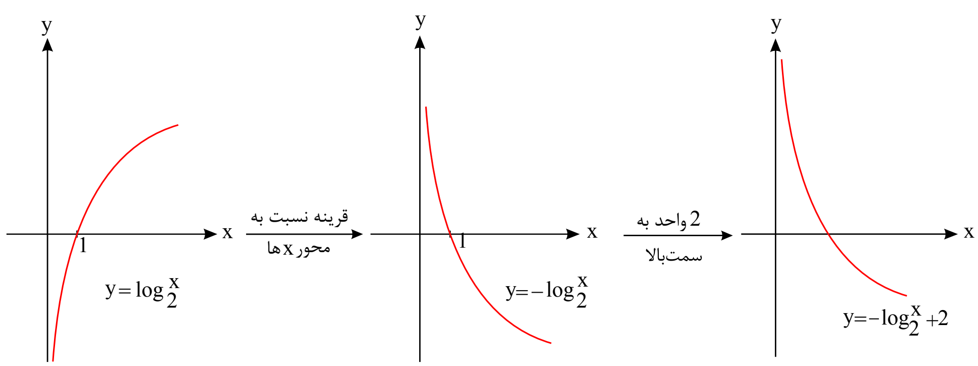


۱۳ برای رسم تابع نمایی $y=2^x-2$، با توجه به نمودار پایهٔ $y=2^x$ (که حالت کلی آن $y=a^x$ برای $a>1$ می‌باشد) داریم:



می‌بینیم که تابع $y=2^x-2$ در دامنهٔ خود $(D=\mathbb{R})$ همواره صعودی (اکیداً صعودی) است.

و اما برای رسم تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$، داریم:

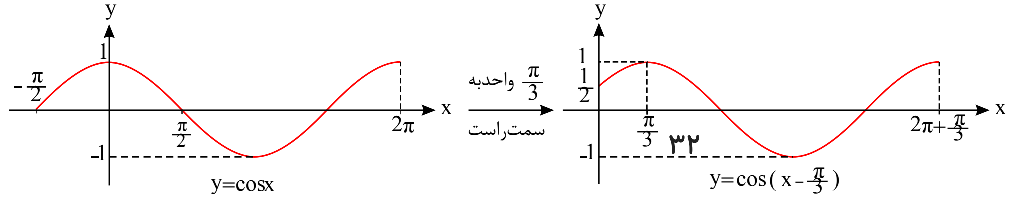


برای یافتن α معادلهٔ $y=0$ را حل می‌کنیم:

$$-\log_2^x+2=0 \to \log_2^x=2 \longrightarrow x=2^2=4$$

۱۴

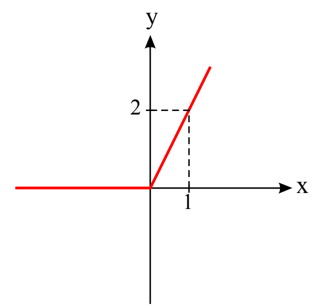
الف) برای رسم نمودار $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ در فاصلهٔ $D_f=[0,2\pi]$ کافی است نمودار $y=\cos x$ را در راستای محور طول‌ها به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست انتقال دهیم:



به جای اینکه نمودار را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست ببرید می‌توان محور y را همین اندازه به سمت چپ کشید!

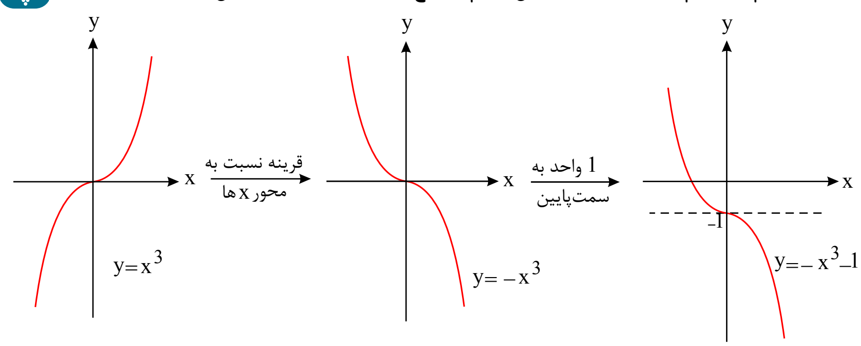
ب برای رسم تابع g ابتدا با توجه به مفهوم قدر مطلق، تابع را به صورت دو ضابطه‌ای تبدیل کرده و رسم می‌کنیم:

$$g(x)=x+|x|=\begin{cases} x+x=۲x\ ;\ x\geq ۰ \\ x-x=۰\quad ;\ x<۰ \end{cases}\xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$$



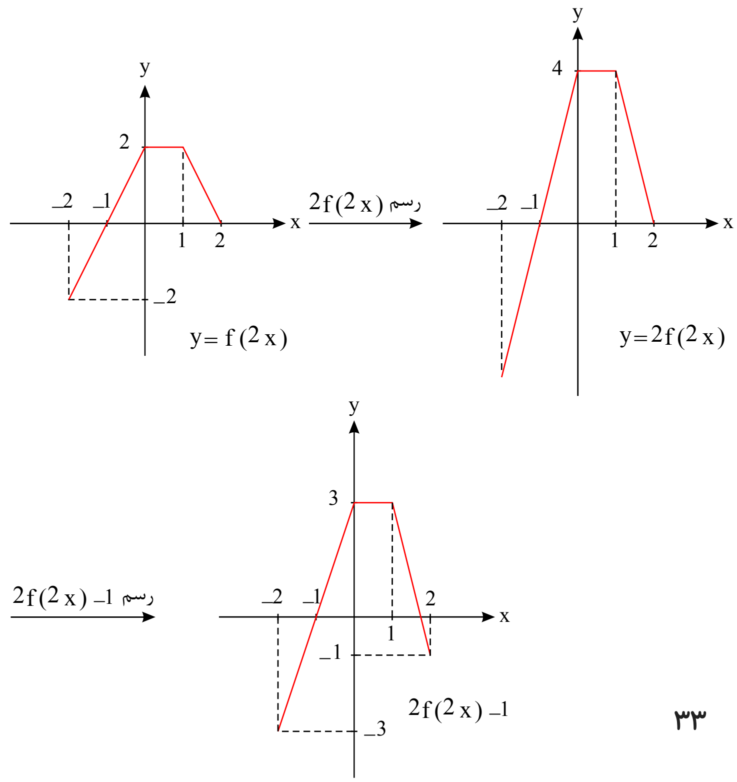
از این نمودار پیداست که تابع g برای $x\leq ۰$ ثابت و برای $x\geq ۰$ صعودی اکید و در کل صعودی است.

پ نمودار تابع $t(x)=-x^۳-۱$ را به کمک انتقال نمودار پایهٔ $y=x^۳$ مطابق مکانیسم زیر رسم کرده و از آن نتیجه می‌گیریم که تابع روی $D_t=\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



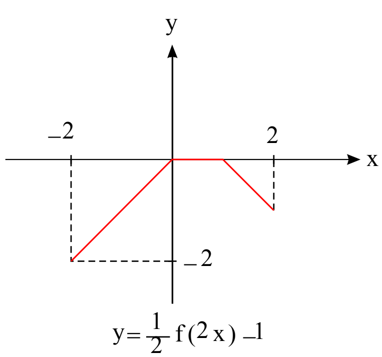
۱۵

الف نمودار تابع $f(x)$ را داریم و می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارها، نمودارهای توابع داده شده را نیز ترسیم کنیم:

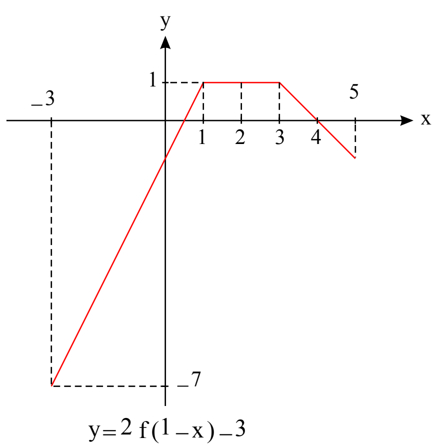


۳۳

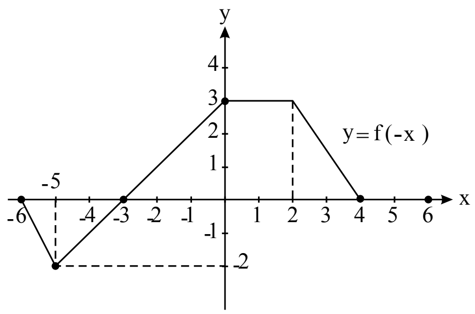
برای رسم نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$ نیز کافی است ابتدا در نمودار $f(۲x)$ با ثابت ماندن عرض نقاط، طول آن‌ها را نصف کنیم و سپس در نمودار حاصل، با ثابت ماندن طول هر نقطه، عرض آن‌ها را نصف کنیم تا نمودار $\frac{۱}{۲}f(۲x)$ به‌دست آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به پایین ببریم (انگار که محور xها را یک واحد به بالا کشیده باشیم!) به نمودار مطلوب می‌رسیم. اگر این روند را به درستی انجام دهیم به این نمودار خواهیم رسید:



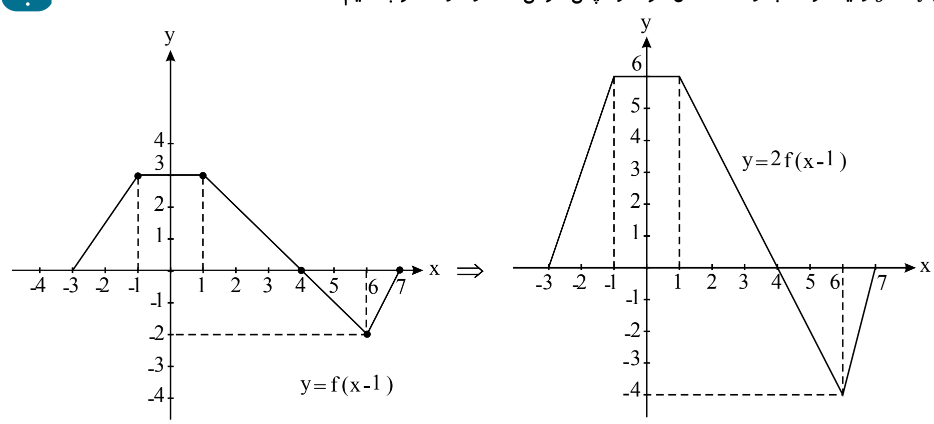
ب برای رسم نمودار $y = ۲f(x - ۱) - ۳$ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا به نمودار $f(x - ۱)$ برسیم. حال اگر با ثابت ماندن طول نقاط این نمودار، عرض هرکدام را ۲ برابر کنیم نمودار $۲f(x - ۱)$ پدید می‌آید که با انتقال آن به اندازهٔ ۳ واحد به پایین به نمودار مورد نظر خواهیم رسید. با رعایت این مکانیسم به نمودار زیر می‌رسیم:



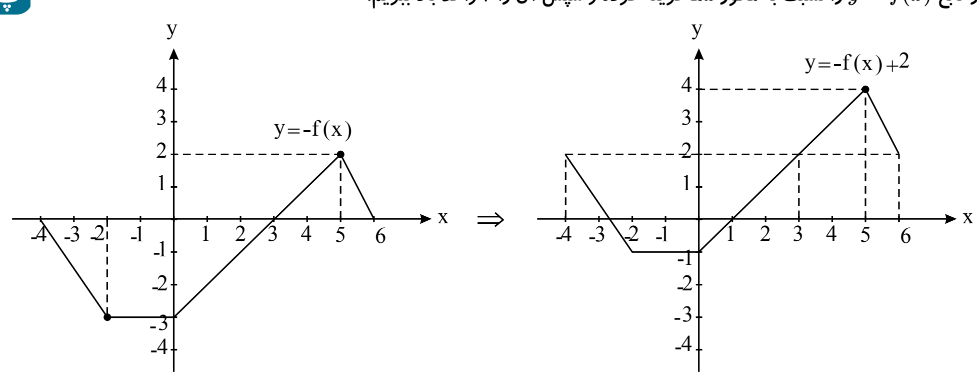
الف برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، باید طول نقاط تابع $y=f(x)$ را بر -1 تقسیم کنیم که معنای آن این است که نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود.



ب برای رسم نمودار تابع $y=2f(x-1)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



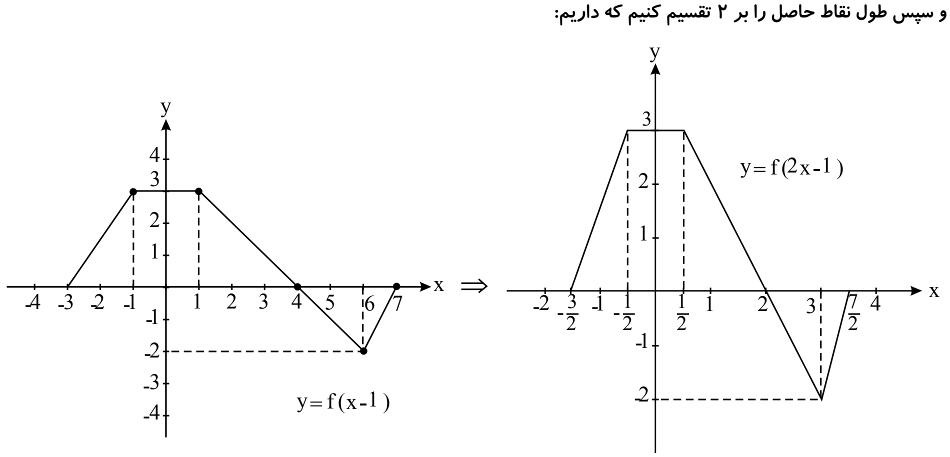
پ برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)+2$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس آن را ۲ واحد بالا ببریم.



ت برای رسم نمودار تابع $y=f(2x-1)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ باید در هر مرحله x را برداشته و عبارت مناسب به‌جای آن قرار دهیم تا $y=f(2x-1)$ حاصل شود، داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to x-1}y=f(x-1)\xrightarrow{x\to 2x}y=f(2x-1)$$

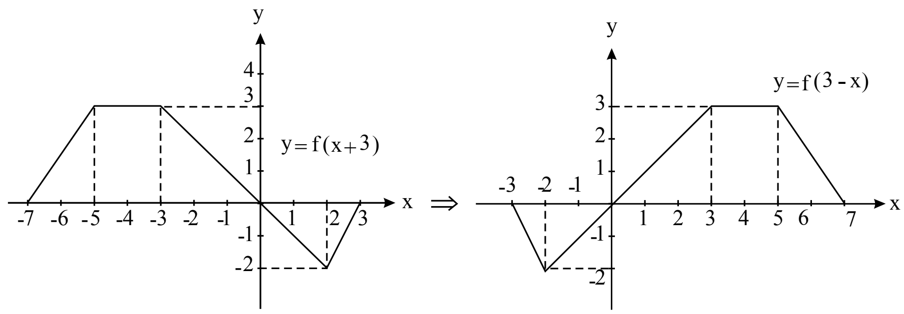
پس باید ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به راست و سپس طول نقاط حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم که داریم:



ث برای رسم نمودار تابع $y=f(3-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to x+۳} y=f(x+۳)\xrightarrow{x\to -x} y=f(-x+۳)=f(۳-x)$$

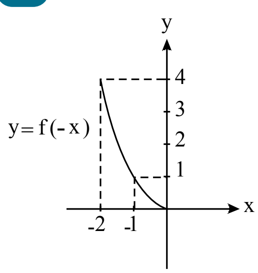
بنابراین باید ابتدا نمودار تابع f را ۳ واحد به چپ منتقل کرده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور yها قرینه کنیم.



۱۷

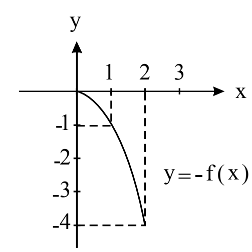
الف

برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.



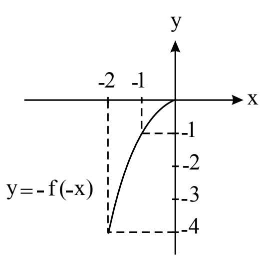
ب

برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



پ

برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم که نتیجهٔ آن این است که نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.



۱۸ با توجه به ضابطه‌های $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، برای تعیین ضابطهٔ توابع مرکب fog و fof داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۳}{x})\xrightarrow[\frac{۳}{x}\ \text{قرارمی‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنهٔ این تابع در مرحلهٔ $\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=۰$ و $x=۳$) را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{۲}{x-۱})\xrightarrow[\frac{۲}{x-۱}\ \text{قرار بده}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

برای تعیین دامنهٔ این تابع نیز با توجه به مرحلهٔ ساده نشدهٔ $\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}$، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=۳$ و $x=۱$) را از $\mathbb{R}$ برداریم. لذا: $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$

۱۹ خیلی ساده است: ببینید:

$$\begin{cases} f(x)=۳x-۴ \\ f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴ \end{cases} \rightarrow ۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴$$

$$\xrightarrow{+۴} ۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸ \xrightarrow{\div ۳} g(x)=x^۲-۲x+۶$$

۲۰ الف) تابع $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$ را می‌توانیم به‌صورت ترکیب توابع $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌صورت $gof(x)=g(f(x))=g(x^۲+۱)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$ بنویسیم.

ب) تابع $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ را می‌توانیم از ترکیب توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+۵$ به‌صورت $fog(x)=f(g(x))=f(x^۲+۵)=\sqrt{x^۲+۵}$ به‌دست آوریم.

حتماً می‌دانید که این جواب، منحصر به فرد نبوده و مثلاً تابع $l(x)$ را می‌توانیم از ترکیب توابع $A(x)=\sqrt{\frac{x}{۲}}$ و $B(x)=۲x^۲+۱۰$ به‌صورت $AoB(x)=l(x)$ نیز به‌دست آوریم.

۲۱ الف)این مورد نادرست است. زیرا حاصل $fog(۵)$ برابر ۱۷ است نه ۲۵-.

$$\begin{cases} f(x)=x^۲-۴ \\ g(x)=\sqrt{x^۲-۴} \end{cases} \rightarrow fog(۵)=f(\underbrace{g(۵)}_{g(۵)=\sqrt{۲۵-۴}=\sqrt{۲۱}})=f(\sqrt{۲۱})=(\sqrt{۲۱})^۲-۴=۲۱-۴=۱۷$$

ب)این مورد هم نادرست است. چراکه با فرض $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x$ شرط $f\neq g$ برای هر $x\neq \pm ۱$ برقرار بوده و داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(x)=\frac{۱}{x}\ ,\ gof(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}$$

می‌بینیم که علی‌رغم برابر نبودن f و g توابع fog و gof برابرند.

پ)این مورد درست است. زیرا $fog(۴)=f(\underbrace{g(۴)}_{۷})=f(۷)=۵$

ت)این مورد نیز درست است. زیرا:

$$fog(۵)=f(g(۵))\xrightarrow[g(۵)=۲(۵)-۱=۹]{g(x)=۲x-۱} f(۹)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}}\sqrt{۹}=۳$$

از طرف دیگر با توجه به $g(x)=۲x-۱$، $g(۲)=۲(۲)-۱=۳$ می‌باشد. یعنی تساوی $fog(۵)=g(۲)$ برقرار است.

۲۲ با توجه به این نکته که «در $fog(a)$ ابتدا a وارد ماشین g شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین f شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید» داریم:

$$\begin{cases} f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\} \\ g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} fog=? \begin{cases} ۵\xrightarrow{g}۷\xrightarrow{f}۸ : fog(۵)=۸ \\ ۳\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}۳ : fog(۳)=۳ \\ ۷\xrightarrow{g}۹\xrightarrow{f}۸ : fog(۷)=۸ \\ ۹\xrightarrow{g}۱۱\xrightarrow{f}۴ : fog(۹)=۴ \end{cases} =\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\} \\ gof=? \begin{cases} ۷\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\times \\ ۵\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}۵ : gof(۵)=۵ \\ ۹\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\times \\ ۱۱\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}\times \end{cases} =\{(۵,۵)\} \end{cases}$$

۲۳

الف)

$$\begin{cases} f(x)=۲x-۵ \\ g(x)=x^۲-۳x+۸ \end{cases} \rightarrow fog(x)=f(g(x))=f(x^۲-۳x+۸)=۲(x^۲-۳x+۸)-۵=۷$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱۱=۷ \xrightarrow{\text{مرتب کن}} ۲x^۲-۶x+۴=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب، صفر است.}} x=۱ \text{ یا } x=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۲}=۲$$

ب)

$$\begin{cases} f(x)=۳x^۲+x-۱ \\ g(x)=۱-۲x \end{cases} \rightarrow gof(x)=g(f(x))=g(۳x^۲+x-۱)=۱-۲(۳x^۲+x-۱)=-۵$$

$$\Rightarrow -۶x^۲-۲x+۳=-۵ \xrightarrow{\text{مرتب کن}} -۶x^۲-۲x-۸=۰ \xrightarrow{\times(-۱)} ۶x^۲+۲x+۸=۰ \xrightarrow{\text{حل از } \Delta} \Delta=(۲)^۲-۴(۶)(۸)<۰ \rightarrow \text{فاقد جواب}$$

۲۴

الف) $fog(-۱) = f(\underbrace{g(-۱)}_{(-۱,-۳)\in g}) = \underbrace{f(-۳)}_{(-۳,۱)\in f} = ۱$

ب) $gof(۰) = g(f(۰)) \xrightarrow[f(۰)=۲]{(۰,۲)\in f} g(۲) \xrightarrow[g(۲)=-۶]{(۲,-۶)\in g} -۶$

پ) $fog(۱) = f(g(۱)) \xrightarrow[g(۱)=-۵]{(۱,-۵)\in g} f(-۵) \xrightarrow[f(-۵)=۳]{(-۵,۳)\in f} ۳$

ت) $gof(-۱) = g((f(-۱)) \xrightarrow[f(-۱)=۱]{(-۱,۱)\in f} g(۱) \xrightarrow[g(۱)=-۵]{(۱,-۵)\in g} -۵$

بنابراین اگر نمودارهای fog و gof را داشته باشیم می‌توانیم ببینیم که نقاط $(-۱,۱)$ و $(۱,۳)$ روی نمودار fog و نقاط $(۰,-۶)$ و $(-۱,-۵)$ روی نمودار gof قرار دارند.

۲۵

در هر مورد، تابع مرکب را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم حاصل کدام برابر $h(x)$ می‌شود.

الف) $\begin{cases} f(x) = \sqrt[۵]{x} \\ g(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} fog(x) = f(g(x)) = f(۳x^۲ - ۴x + ۱) = \sqrt[۵]{۳x^۲ - ۴x + ۱} \neq h(x) \\ gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[۵]{x}) = ۳\sqrt[۵]{x^۲} - ۴\sqrt[۵]{x} + ۱ \neq h(x) \end{cases}$

ب) $\begin{cases} k(x) = x^۵ \\ l(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kol(x) = k(l(x)) = k(۳x^۲ - ۴x + ۱) = (۳x^۲ - ۴x + ۱)^۵ = h(x) \\ lok(x) = l(k(x)) = l(x^۵) = ۳x^{۱۰} - ۴x^۵ + ۱ \neq h(x) \end{cases}$

۲۶

الف) $(fog)(۱) = f(\underbrace{g(۱)}_{\substack{g \\ ۱\to ۰}}) = \underbrace{f(۰)}_{\substack{f \\ ۰\to -۱}} = -۱$

ب) $(fog)(-۱) = f(\underbrace{g(-۱)}_{\substack{g \\ -۱\to ۰}}) = \underbrace{f(۰)}_{\substack{f \\ ۰\to -۱}} = -۱$

پ) $(gof)(۰) = g(\underbrace{f(۰)}_{\substack{f \\ ۰\to -۱}}) = \underbrace{g(-۱)}_{\substack{g \\ -۱\to ۰}} = ۰$

ت) $(gog)(-۲) = g(\underbrace{g(-۲)}_{\substack{g \\ -۲\to ۳}}) = \underbrace{g(۳)}_{\substack{g \\ ۳\to ۸}} = ۸$

ث) $(gof)(۲) = g(\underbrace{f(۲)}_{\substack{f \\ ۲\to ۵}}) = \underbrace{g(۵)}_{\substack{g \\ ۵\to x}} =$ غیر قابل تعریف

ج) $(fof)(۱) = f(\underbrace{f(۱)}_{\substack{f \\ ۱\to ۳}}) = \underbrace{f(۳)}_{\substack{g \\ ۳\to ۵}} = ۵$

۲۷ وقتی که رابطهٔ مربوط به دمای غذا پس از t ساعت بیرون ماندن از یخچال از دستور $d(t) = ۴t + ۲$ $(۰ \leq t \leq ۳)$ و رابطهٔ افزایش تعداد باکتری‌های غذای بیرون مانده از یخچال در دمای d از دستور $n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰$ $(۲ \leq d \leq ۱۴)$ به دست می‌آید، مقادیر $n(۲)$ و $n(۳)$ که به ترتیب برابر $n(۲) = ۲۰(۲)^۲ - ۸۰(۲) + ۵۰۰ = ۴۲۰$ و $n(۳) = ۲۰(۳)^۲ - ۸۰(۳) + ۵۰۰ = ۴۴۰$ تا باکتری می‌باشد به این معناست که" در لحظهٔ بیرون آوردن غذا از یخچال به اندازهٔ ۴۲۰ تا باکتری روی غذا بوده و ۱۵ دقیقه پس از بیرون ماندن غذا از یخچال تعداد باکتری‌ها به ۴۴۰ می‌رسد. زیرا:

$n(۲) = ۴۲۰ \;:\; d = ۲\,,\; d(t) = ۴t + ۲ \to ۴t + ۲ = ۲ \to ۴t = ۰ \to t = ۰$ (لحظهٔ بیرون آوردن غذا از یخچال)

$n(۳) = ۴۴۰ \;:\; d = ۳\,,\; d(t) = ۴t + ۲ \to ۴t + ۲ = ۳ \to ۴t = ۱ \to t = \underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{ساعت}} = ۱۵\,\text{min}$

۲۸

$f(x) = x^۲ - ۵ \,,\; g(x) = \sqrt{x+۶}$

$D_f = \mathbb{R} \,,\; D_g : x + ۶ \geq ۰ \to x \geq -۶ \to D_g = [-۶, +\infty)$

$D_{fog} = \{x \in D_g \,,\; g(x) \in D_f\} = \{x \geq -۶ \underset{\text{اشتراک}}{\underset{\downarrow}{\text{و}}} \underbrace{\sqrt{x+۶} \in \mathbb{R}}_{\text{این بدیهی است!}}\} = [-۶, +\infty)$

$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+۶}) = (\sqrt{x+۶})^۲ - ۵ \xrightarrow[x \geq -۶]{\text{با فرض}} fog(x) = x + ۶ - ۵ = x + ۱$

ب

$f(x) = \sqrt{۲x - ۳} \,,\; g(x) = \dfrac{۶}{۳x - ۵} \to \begin{cases} D_f : ۲x - ۳ \geq ۰ \to x \geq \dfrac{۳}{۲} \\ D_g : ۳x - ۵ \neq ۰ \to x \neq \dfrac{۵}{۳} \end{cases}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \,,\; g(x) \in D_f\} = \{x \neq \dfrac{۵}{۳} \,,\; \dfrac{۶}{۳x - ۵} \in D_f\}$

$\dfrac{۶}{۳x - ۵} \in D_f$ یعنی حل نامعادلهٔ $\dfrac{۶}{۳x-۵} \geq \dfrac{۳}{۲}$ که معادل $\dfrac{۶}{۳x-۵} - \dfrac{۳}{۲} \geq ۰$ یا $\dfrac{۲۷ - ۹x}{۶x - ۱۰} \geq ۰$ می‌باشد که بعد از تعیین علامت به جواب $(\dfrac{۵}{۳}, ۳]$ می‌رسیم.

$\to D_{fog} = \{x \neq \dfrac{۵}{۳} \,,\; x \in (\dfrac{۵}{۳}, ۳]\} = (\dfrac{۵}{۳}, ۳]$

$fog(x) = f(g(x)) = f(\dfrac{۶}{۳x - ۵}) = \sqrt{۲(\dfrac{۶}{۳x-۵}) - ۳} = \sqrt{\dfrac{۲۷ - ۹x}{۳x - ۵}}$

البته می‌توانستیم دامنهٔ fog را بعد از تشکیل ضابطهٔ آن نیز به‌دست آوریم.

پ

$f(x) = \sqrt{x+۲} \,,\; g(x) = \sqrt{x^۲ - ۱۶}$

$D_f : x + ۲ \geq ۰ \to x \geq -۲ \,,\; D_g : x^۲ - ۱۶ \geq ۰ \to |x| \geq ۴ \to x \geq ۴$ یا $x \leq -۴$

$gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+۲}) = \sqrt{(\sqrt{x+۲})^۲ - ۱۶} \xlongequal{\text{با فرض } x \geq -۲} \sqrt{x - ۱۴}$

$\xrightarrow[gof \text{ دامنهٔ}]{\text{برای تعیین}} x - ۱۴ \geq ۰ \to x \geq ۱۴ \xrightarrow[x \geq -۲]{\text{اعمال شرط}} x \geq ۱۴ \to D_{gof} = [۱۴, +\infty)$

ت

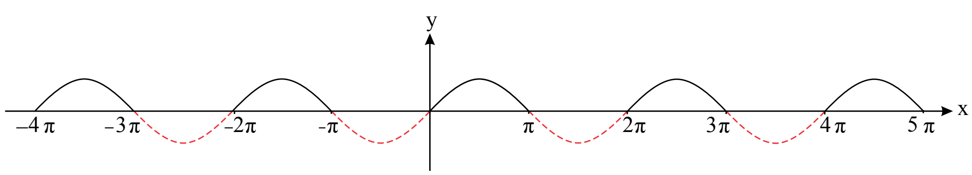
$f(x) = \sin x \,,\; g(x) = \sqrt{x}$

$D_f = \mathbb{R} \,,\; D_g = x \geq ۰ \to D_{gof} = \{x \in D_f \,,\; f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \,,\; \sin x \geq ۰\} = \{$تمام x هایی که در نواحی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند$\}$

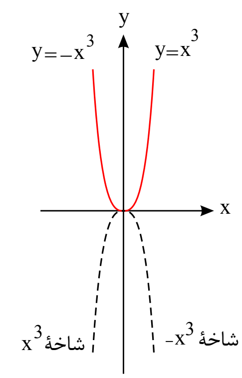
$\xlongequal{\text{مانند}} \cdots \cup [-۴\pi, -۳\pi] \cup [-۲\pi, -\pi] \cup [۰, \pi] \cup [۲\pi, ۳\pi] \cup [۴\pi, ۵\pi] \cup \cdots$

برای درک بهتر موضوع با توجه به نمودار $y = \sin x$ بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است را می‌توانیم ببینیم:



۲۹ برای اینکه بیابیم تابع در چه فاصله‌ای نزولی است، پیشنهاد می‌کنیم نمودار آن را رسم کنید. (اساساً این شعار من است که: همه چیز در نمودار نمود پیدا می‌کند!) با توجه به وجود قدر مطلق و مفهوم آن تابع را دو ضابطه‌ای می‌کنیم:

$y = x^۲|x| = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$



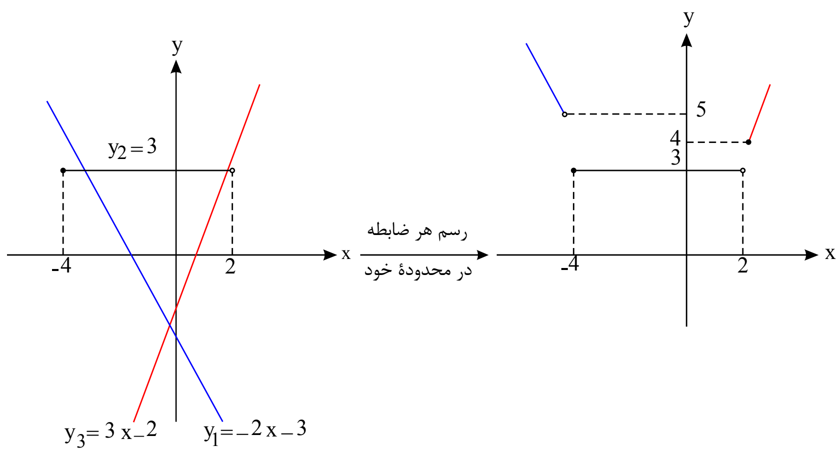
حالا دیگر معلوم شد که تابع در فاصلهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است. که با مقایسهٔ نزولی بودن تابع در بازهٔ $(-\infty, a]$ مشخص می‌شود که باید $a = ۰$ باشد.

دقت کنید که تابع $y=x^2|x|$ علی‌رغم شبیه بودن نمودار آن به $y=x^2$، با این تابع یکی نیست!

۳۰ از نمودار پیداست که تابع در بازهٔ $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[0, 2]$ ثابت و لذا در اجتماع این دو بازه، یعنی در $(-\infty, 2]$، صعودی است. به همین منوال، تابع در بازه‌های $[2, 4]$ و $[6, 8]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[4, 6]$ اکیداً صعودی است. حالا به عقیدهٔ شما تابع در بازهٔ $[2, 8]$ چگونه رفتاری دارد؟! آری درست است، رفتاری غیر یکنوا دارد.

۳۱ هر تابع به فرم کلی $y=x^{2n+1}+b$ روی دامنهٔ خود (یعنی $D_f=\mathbb{R}$) اکیداً صعودی و هر تابع به فرم کلی $y=-x^{2n+1}+b$ روی دامنهٔ خود اکیداً نزولی است. مثلاً تابع‌های $y=x^3$، $y=x^3-1$ و $y=2x^3+3$ همگی صعودی اکید و تابع‌های $y=-x^3$، $y=-2x^3+1$ و $y=5-\frac{1}{2}x^3$ همگی نزولی اکید هستند. حتی می‌توان موضوع را ساده‌تر هم بیان کرد. هر تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ با شرط $a>0$ صعودی اکید و با شرط $a<0$ نزولی اکید می‌باشد.

۳۲ رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:

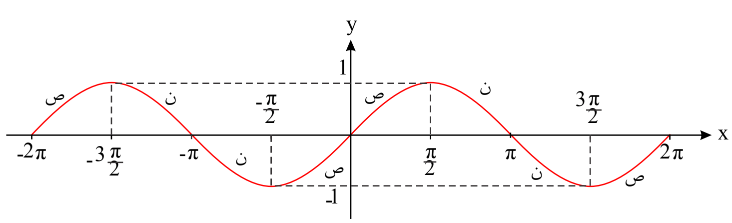


می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty, -4)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-4, 2)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty, 2)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-4, +\infty)$ صعودی است.

۳۳

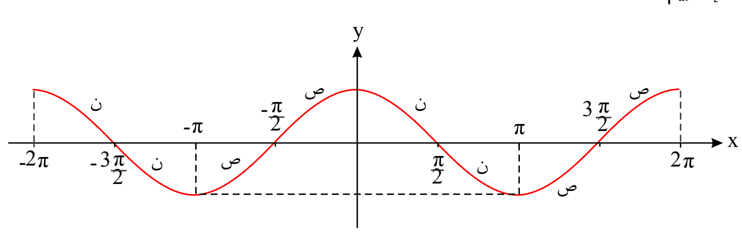
الف) برای تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ داریم:

(در شکل‌های رسم شده «ن» به معنای نزولی و «ص» به معنای صعودی است.)



x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

ب) برای تابع $y=\cos x$ در فاصلهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ داریم:



x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

۳۴ الف) ابتدا با توجه به اطلاعات داده شده مشخص می‌کنیم که نمودارهای بالا به پایین به ترتیب مربوط به شهرهای گرگان، ارومیه و زاهدان است. حال با توجه به نمودار شهر گرگان

می‌بینیم که میزان بارندگی تنها از سال ۸۰ تا ۹۰ (یعنی در دهۀ ۸۰) روندی صعودی (افزایشی یا روبه‌رشد) را تجربه کرده است. پس جواب این مرحله فاصلهٔ $[۸۰,۹۰]$ می‌باشد.

ب)نمودار شهر ارومیه از سال ۹۱ تا ۹۴ برای فاصله‌های $[۹۱,۹۲]$ و $[۹۳,۹۴]$ روندی نزولی (کاهشی یا رو به زوال) را تجربه کرده است. در حقیقت طی سه سال از سال ۹۱ تا ۹۴ میزان بارندگی شهر ارومیه در سال‌های اول و سوم روندی نزولی و در سال دوم، بازۀ $[۹۲,۹۳]$، روندی صعودی دارد.

۳۵

الف در بازه‌های $(-\infty,۲]$ و $[۳,+\infty)$ که به معنای $\mathbb{R}-(۲,۳)$ است اکیداً صعودی است.

ب این تابع همواره (روی $\mathbb{R}$ به عنوان دامنهٔ تابع) صعودی اکید است زیرا نمودار تابع با حرکت از چپ به راست همواره بالا می‌رود. (این تابع می‌تواند $y=x^۳$ باشد!)

پ این تابع، که می‌تواند متعلق به تابع $y=x^۲$ باشد، در بازۀ $(-\infty,۰]$ نزولی اکید و در بازۀ $[۰,+\infty)$ صعودی اکید است.

ت نمودار این تابع نیز (که می‌تواند مربوط به تابع نمایی $y=۲^x$ باشد) همواره صعودی است.

ث نمودار این تابع هم (که می‌تواند متعلق به تابع لگاریتمی $y=\log_a^x$ با شرط $a>۱$ باشد) روی دامنۀ خود که بازۀ $(۰,+\infty)$ است با حرکت از چپ به راست همواره بالا رفته و این یعنی اکیداً صعودی است.

ج این تابع که می‌تواند متعلق به تابع گویای $y=\frac{۱}{x}$ باشد نکته بسیار جالبی را در خود نهفته دارد و آن اینکه تابع در هرکدام از فاصله‌های $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ نزولی اکید بوده در حالی که روی هر بازه‌ای که شامل $x=۰$ (ریشۀ مخرج) باشد غیر یکنواست (نه صعودی و نه نزولی).

چ این تابع نیز با دامنهٔ $\mathbb{R}$ روی فاصلهٔ $(-\infty,۰]$ صعودی اکید و روی فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ نزولی اکید است. این بدان معناست که تابع روی دامنهٔ خود غیر یکنواست.

ح این نمودار که متعلق به تابع مثلثاتی $y=\sin x$ در بازۀ $[-\pi,\pi]$ می‌باشد، در فاصله‌های $[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ نزولی اکید و در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید است. یعنی تابع روی $[-\pi,\pi]$ غیر یکنواست.

خ این نمودار که متعلق به تابعی با ضابطۀ $y=\sqrt{x+۲}$ است روی دامنۀ خود یعنی فاصلهٔ $[-۲,+\infty)$ همواره رو به بالا رفته و اکیداً صعودی است.

۳۶ الف)

احتمالاً با درنگی کوتاه در می‌یابید که این نمودار متعلق به تابع با ضابطۀ $y=\sqrt[۳]{x}$ بوده و در دامنۀ خود اکیداً صعودی است.

ب)

یادتان باشد که توابع اکیداً یکنوا حتماً یک به یک هم هستند. در این نمودار برای هر y متعلق به برد تنها و تنها یک x در دامنه وجود دارد و به عبارت دیگر هر خط موازی محور xها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع کرده و این به معنای یک به یک (و البته معکوس‌پذیر) بودن آن است.

پ)

با توجه به این نکتۀ مهم که «هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک نیز است» می‌توان گفت که پاسخ این مورد از فعالیت منفی است. یعنی ما نمی‌توانیم تابعی پیدا کنیم که علیرغم یکنوای اکید بودن، یک به یک نباشد!

۳۷ الف)

برهان خلف: اگر $a\geq b$ برقرار نباشد، آنگاه $a<b$ است و چون f اکیداً نزولی است، داریم:

$$a<b\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f}f(a)>f(b)$$

نتیجۀ $f(a)>f(b)$ خلاف فرض است، زیرا طبق فرض $f(a)\leq f(b)$ است، پس باید $a\geq b$ باشد.

ب)

می‌دانیم تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ اکیداً نزولی است، یعنی برای دو مقدار a و b داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^a\leq(\frac{۱}{۲})^b\Rightarrow a\geq b$$

حال برای حل نامعادلۀ داده‌شده داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\leq\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\leq(\frac{۱}{۲})^۶\Rightarrow ۳x-۲\geq ۶\Rightarrow x\geq\frac{۸}{۳}$$

۳۸

الف) صعودی $\Leftarrow (-\infty,۰]$, اکیداً صعودی $\Leftarrow (-\infty,-۳]$

صعودی $\Leftarrow \mathbb{R}$, اکیداً صعودی $\Leftarrow [۰,+\infty)$, صعودی $\Leftarrow [-۳,+\infty)$

ب) اکیداً نزولی $\Leftarrow [-۲,۰]$, نزولی $\Leftarrow (\infty,۰]$

پ) تابع h در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۳۹ می‌دانیم دو نامساوی هم‌جهت را فقط می‌توان باهم جمع کرد، بنابراین برای دو مقدار $x_۱$ و $x_۲$ از فاصلۀ مورد نظر داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)\\x_۱<x_۲\Rightarrow g(x_۱)<g(x_۲)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_۱)+g(x_۱)<f(x_۲)+g(x_۲)$$

بنابراین داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) + g(x_۱) < f(x_۲) + g(x_۲) \Rightarrow (f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲)$$

اگر f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، تابع $f-g$ در این فاصله ممکن است اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی و یا اینکه غیریکنوا باشد. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = ۴x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ g(x) = x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{cases} \Rightarrow (f-g)(x) = ۴x - x = ۳x \longrightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

$$\begin{cases} f(x) = ۲x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ g(x) = ۵x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{cases} \Rightarrow (f-g)(x) = ۲x - ۵x = -۳x \longrightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

$$\begin{cases} f = \{(۲,۱),(۳,۶),(۴,۱۱)\} \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ g = \{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱۰)\} \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{cases} \Rightarrow (f-g) = \{(۲,۱-۳),(۳,۶-۴),(۴,۱۱-۱۰)\}$$

$$\Rightarrow f - g = \{(۲,-۲),(۳,۲),(۴,۱)\} \Rightarrow$$

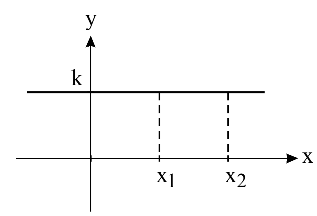
x	۲		۳		۴
y	-۲	↗	۲	↘	۱

غیریکنوا

۴۰ بله، تابع ثابت $f(x) = k$ هم صعودی و هم نزولی است، زیرا برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع ثابت داریم:

$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲) \Rightarrow$ تابع f صعودی است.

$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲) \Rightarrow$ تابع f نزولی است.

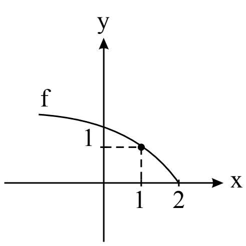


در هردو تعریف فوق، حالت تساوی یعنی $f(x_۱) = f(x_۲)$ برقرار است.

۴۱

الف

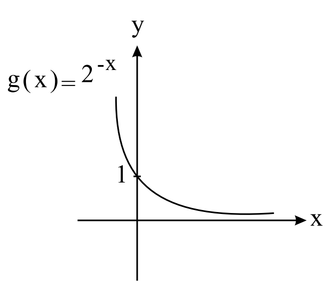
تابع $f(x) = \sqrt{۲-x}$ در دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(-\infty, ۲]$ اکیداً نزولی است.



ب

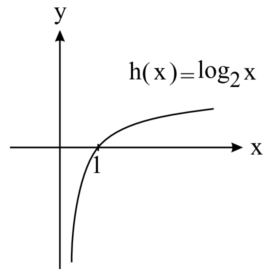
$$g(x) = ۲^{-x} = (۲^{-۱})^x = (\frac{۱}{۲})^x$$

نمودار تابع $g(x) = ۲^{-x}$ به‌صورت زیر است. تابع g در کل $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



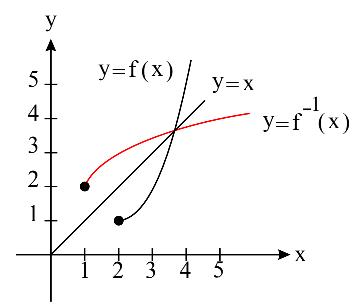
پ

نمودار تابع $h(x) = \log_۲^x$ به‌صورت زیر است و دامنهٔ آن $D_h = (۰, +\infty)$ می‌باشد. تابع h در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.



۴۲ تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$ معرف سهمی $f(x)=(x-۲)^۲+۱$ با محور تقارن $x_s=۲$ می‌باشدکه غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.
حال اگر دامنهٔ تابع را به یکی از فاصله‌های $[x_s,+\infty)=[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,x_s]=(-\infty,۲]$ محدود کنیم تابع f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

حالت اول:



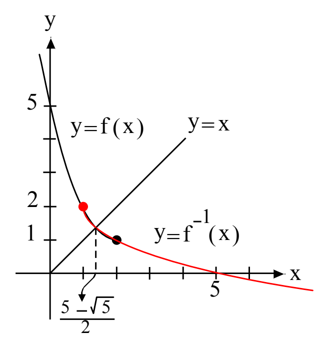
$$\begin{cases} f(x)=(x-۲)^۲+۱ \\ D_f=[۲,+\infty) \end{cases} \to y=(x-۲)^۲+۱$$

$$\to (x-۲)^۲=y-۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\geq ۰]{\text{با توجه به } D_f} x-۲=\sqrt{y-۱} \to x=\sqrt{y-۱}+۲$$

$$\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۲$$

حالت دوم:



$$\begin{cases} f(x)=(x-۲)^۲+۱ \\ D_f=(-\infty,۲] \end{cases} \to y=(x-۲)^۲+۱$$

$$\to (x-۲)^۲=y-۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\leq ۰]{\text{با توجه به } D_f} -(x-۲)=\sqrt{y-۱} \to x-۲=-\sqrt{y-۱} \to x=-\sqrt{y-۱}+۲$$

$$\to f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۱}+۲$$

۴۳

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}\ :\ y=\dfrac{-۸x+۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲y=-۸x+۳ \xrightarrow{-۳} -۸x=۲y-۳$

$$\xrightarrow{\div(-۸)} x=\frac{۲y-۳}{-۸}=\frac{-۱}{۴}y+\frac{۳}{۸} \xrightarrow{\text{حالا}} f^{-۱}(x)=\frac{-۱}{۴}x+\frac{۳}{۸}$$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\ :\ y=-۵-\sqrt{۳x+۱} \to y+۵=-\sqrt{۳x+۱}$

$$\xrightarrow[\begin{pmatrix} y+۵\leq ۰ \\ y\leq -۵ \end{pmatrix},\ x\geq \frac{-۱}{۳}]{\text{به توان ۲ برسان}} (y+۵)^۲=(۳x+۱) \xrightarrow{-۱} (y+۵)^۲-۱=۳x \xrightarrow{\div ۳} x=\frac{۱}{۳}(y+۵)^۲-\frac{۱}{۳}$$

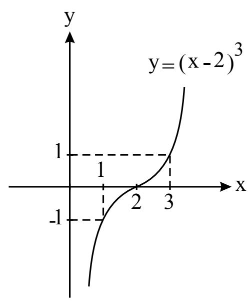
$$\xrightarrow{\text{حالا}} g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}(x+۵)^۲-\frac{۱}{۳}$$

که با توجه به شرایط $y\leq -۵$ و $x\geq \dfrac{-۱}{۳}$، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

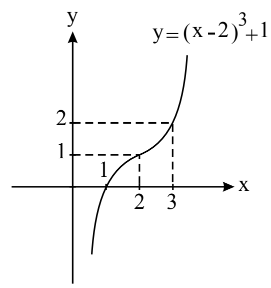
$$D_{g^{-۱}}=R_g=(-\infty,-۵]\ ,\ R_{g^{-۱}}=D_g=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$$

۴۴ الف)

برای رسم نمودار تابع f باید نمودار تابع $y=x^۳$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به بالا منتقل کنیم.



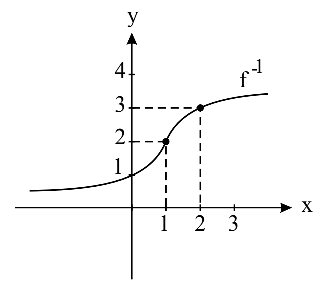
$\Rightarrow$



ب)

هر خط افقی (موازی محور xها) نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع f تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. برای رسم نمودار تابع f^{-1} باید نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

$$(۱,۰)\in f \Rightarrow (۰,۱)\in f^{-۱}$$
$$(۲,۱)\in f \Rightarrow (۱,۲)\in f^{-۱}$$
$$(۳,۲)\in f \Rightarrow (۲,۳)\in f^{-۱}$$



پ)

در تابع f باید x را برحسب y حل کنیم که داریم:

$$y=(x-۲)^۳+۱ \Rightarrow (x-۲)^۳=y-۱ \Rightarrow x-۲=\sqrt[۳]{y-۱} \Rightarrow x=۲+\sqrt[۳]{y-۱}$$
$$\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۱}$$

۴۵ الف)

برای محاسبهٔ $(fog)^{-۱}(۵)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب fog را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای xهای آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطهٔ $(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$، تابع مرکب $g^{-۱}of^{-۱}$ را محاسبه کرده و به‌جای xهایش ۵ قرار دهیم. ما هردو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \\ g(x)=x^۳ \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \to fog(x)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبهٔ } (fog)^{-۱}} y=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \xrightarrow{+۳} \frac{۱}{۸}x^۳=y+۳ \xrightarrow{\times ۸} x^۳=۸y+۲۴$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم بگیر.}} x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴} \to (fog)^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴} \xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \to y=\frac{۱}{۸}x-۳ \to \frac{۱}{۸}x=y+۳ \to x=۸y+۲۴ \to f^{-۱}(x)=۸x+۲۴ \\ g(x)=x^۳ \to y=x^۳ \to x=\sqrt[۳]{y} \to g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(۸x+۲۴)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

$$\xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، با توجه به ضابطه‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)=f^{-۱}(f^{-۱}(۶)) \xrightarrow[f^{-۱}(۶)=۴۸+۲۴=۷۲]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} f^{-۱}(۷۲)=۸(۷۲)+۲۴=۶۰۰$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(۵)=g^{-1}(f^{-1}(۵))\xrightarrow[f^{-1}(۵)=۴۰+۲۴=۶۴]{f^{-1}(x)=۸x+۲۴} g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

۴۶ با توجه به جدول زیر و این نکته که «اگر $(a,b)\in f$ آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$ و بالعکس» می‌توان نوشت:

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	α	β	γ	λ

$(-۴,\alpha)\in f^{-1}\to(\alpha,-۴)\in f$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض -۴ دارای طول -۳ است و لذا $\alpha=-۳$

$(-۲,\beta)\in f^{-1}\to(\beta,-۲)\in f$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض -۲ طولی برابر -۱ داشته و لذا $\beta=-۱$

$(۲,\gamma)\in f^{-1}\to(\gamma,۲)\in f$

از نمودار f پیداست که نقطه‌ای با عرض ۲ طولی برابر ۱ دارد و لذا $\gamma=۱$

$(۳,\gamma)\in f^{-1}\to(\gamma,۳)\in f\xrightarrow[(۳,۳)\in f]{\text{از نمودار } f \text{ می‌بینیم}}\gamma=۳$

۴۷

$f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲\to y=\frac{۹}{۵}x+۳۲\xrightarrow{-۳۲}\frac{۹}{۵}x=y-۳۲\xrightarrow{\times\frac{۵}{۹}}x=\frac{۵}{۹}(y-۳۲)$

$\xrightarrow{\text{حالا}}f^{-1}(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$

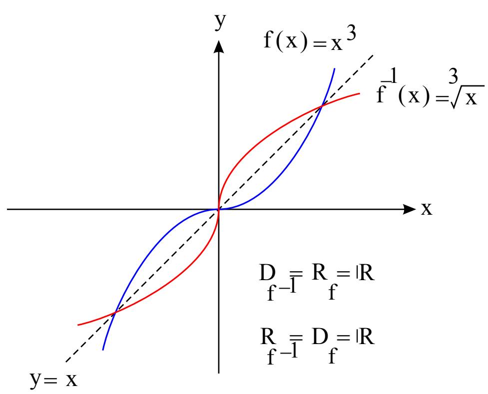
رابطهٔ $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ نشان می‌دهد که x درجهٔ سلسیوس معادل $f(x)$ درجهٔ فارنهایت است مثلاً $x=۵^\circ C$ معادل $f(۵)=\frac{۹}{۵}(۵)+۳۲=۴۱$ درجهٔ فارنهایت است. درحالی که رابطهٔ $f^{-1}(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ به ما می‌گوید هر x درجهٔ فارنهایت معادل $f^{-1}(x)$ درجهٔ سلسیوس می‌باشد. مثلاً $x=۳۲$ درجهٔ فارنهایت معادل $f^{-1}(۳۲)=\frac{۵}{۹}(۳۲-۳۲)$ یا ۰ درجهٔ سلسیوس است.

۴۸ در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبهٔ x برحسب y در آن ساده‌تر است) و نشان می‌دهیم که تابع وارون به‌دست آمده همان تابع دوم است.

الف)
$$\begin{cases} f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳ \\ g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}\to y=-\frac{۲x+۶}{۷}\xrightarrow{\times(-۷)}-۷y=۲x+۶\xrightarrow{-۶}۲x=-۷y-۶ \\ \xrightarrow{\div۲}x=\frac{-۷y-۶}{۲}=\frac{-۷}{۲}y-۳\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-1}(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳\longrightarrow g^{-1}(x)=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{x-۸} \\ g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰\to y=۸+x^۲\xrightarrow{-۸}x^۲=y-۸\xrightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{y-۸} \\ \xrightarrow[|x|=-x]{\text{با توجه به } x\leq ۰}-x=\sqrt{y-۸}\to x=-\sqrt{y-۸}\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-1}(x)=-\sqrt{x-۸}=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

۴۹ تابع $y=x^۳$ به دلیل اکیداً صعودی بودن، تابعی یک به یک و وارون‌پذیر است که برای دست‌یابی به نمودار تابع وارون آن کافی است نمودار $y=x^۳$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم:



احتمالاً می‌دانید که برای رسیدن به ضابطهٔ تابع معکوس تابع $y=x^۳$ کافی است x را برحسب y یافته و در نهایت به جای x از $f^{-1}(x)$ و به جای y از x استفاده کنیم. داریم:

$y=x^۳\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم بگیر.}}\sqrt[۳]{y}=\sqrt[۳]{x^۳}\to x=\sqrt[۳]{y}\to f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x}$

۵۰

الف کافی است که در هر مورد x را برحسب y پیدا کرده و y را با x و x را با $f^{-1}(x)$ جایگزین کنیم. همچنین برای دامنه و برد تابع وارون از روابط $R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$ بهره می‌بریم.

$$f(x)=\frac{-۱}{۲}x+۳\to y=\frac{-۱}{۲}x+۳\xrightarrow{-۳}y-۳=\frac{-۱}{۲}x\xrightarrow{\times(-۲)}-۲y+۶=x$$
$$\xrightarrow{\text{حالا}}f^{-۱}(x)=-۲x+۶$$

و اما با توجه به خطی بودن تابع می‌توان نوشت:

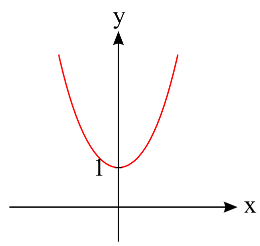
$$D_f=\mathbb{R}=R_{f^{-۱}}\quad,\quad R_f=\mathbb{R}=D_{f^{-۱}}$$

ب

$$g(x)=۱+\sqrt{x-۲}\to y=۱+\sqrt{x-۲}\xrightarrow{-۱}y-۱=\sqrt{x-۲}\xrightarrow[(x\geq ۲)]{\text{به توان ۲}}(y-۱)^۲=x-۲$$
$$\to x=(y-۱)^۲+۲\longrightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^۲+۲$$
$$\begin{cases}D_f\ \text{برای}\ :\ x-۲\geq ۰\to x\geq ۲\to D_f=[۲,+\infty)=R_{f^{-۱}}\\ R_f\ \text{برای}\ :\ y=۱+\underbrace{\sqrt{x-۲}}_{\min=۰}\to \min(y)=۱+۰=۱\to y\geq ۱\to R_f=[۱,+\infty)=D_{f^{-۱}}\end{cases}$$

پ

تابع $h(x)=x^۲+۱$ که معرف یک سهمی به شکل



است، به دلیل یک به یک نبودن روی دامنهٔ خود $(D_h=\mathbb{R})$ وارون‌پذیر نخواهد بود.

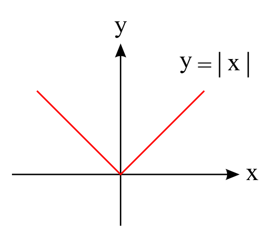
پرسش: آیا راهی است که تابع $h(x)=x^۲+۱$ را تبدیل به یک تابع وارون پذیر کند؟!

پاسخ: آری. با توجه به نمودار فوق اگر چناچه دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ محدود کنیم تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌شود. مثلاً:

$$h(x)=x^۲+۱\ ,\ D_h=[۰,+\infty)\to y=x^۲+۱\xrightarrow{-۱}x^۲=y-۱\xrightarrow[y\geq ۱]{\text{جذر بگیر}}x=\sqrt{y-۱}$$
$$\xrightarrow{\text{حالا}}h^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}\ ;\ D_{h^{-۱}}=[۱,+\infty)=R_h\ ,\ R_{h^{-۱}}=D_h=[۰,+\infty)$$

۵۱

الف با توجه به نمودار

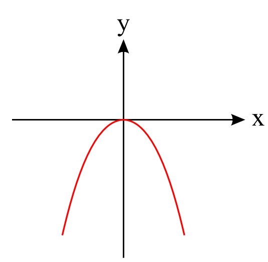


اگر دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ محدود کنیم، آن‌گاه تابع مورد نظر یک‌به‌یک خواهد بود.

حالت اول: $\begin{cases}f(x)=|x|\\ x\geq ۰\end{cases}\to f(x)=x\to y=x\to f^{-۱}(x)=x$

حالت دوم: $\begin{cases}f(x)=|x|\\ x\leq ۰\end{cases}\to f(x)=-x\to y=-x\to x=-y\to f^{-۱}(x)=-x$

ب تابع $g(x)=-x^۲$ که معرف سهمی



است که یک‌به‌یک نیست و با محدود کردن دامنهٔ آن به یکی از دو فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر می‌شود.

حالت اول:

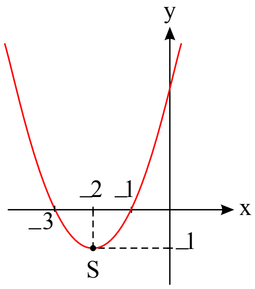
$$\begin{cases}g(x)=-x^۲\\ x\geq ۰\end{cases}\to y=-x^۲\to x^۲=-y\xrightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{-y}\xrightarrow[|x|=x]{x\geq ۰}x=\sqrt{-y}\to g^{-۱}(x)=\sqrt{-x}$$

حالت دوم:

$\begin{cases} g(x) = -x^۲ \\ x \le ۰ \end{cases} \to y=-x^۲ \to x^۲=-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{-y} \xrightarrow[|x|=-x]{x\le ۰} x=-\sqrt{-y} \to g^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$

پ

سهمی $h(x)=x^۲+۴x+۳$ نیز که می‌شود آن را به صورت $h(x)=(x+۲)^۲-۱$ نوشت نموداری به شکل



داشته و در کل دامنهٔ خود غیر یک‌به‌یک است.

حال اگر دامنهٔ آن را از $\mathbb{R}$ به $[-۲,+\infty)$ یا $(-\infty,-۲]$ محدود کنیم، آن‌گاه با یکی از دو شاخهٔ سهمی مواجه بوده و تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} h(x)=(x+۲)^۲-۱ \\ D_h=[-۲,+\infty) \end{cases} \to y=(x+۲)^۲-۱ \to (x+۲)^۲=y+۱ \xrightarrow{\text{جذر}}$$

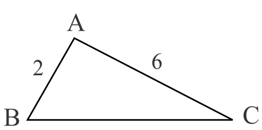
$$|x+۲|=\sqrt{y+۱} \xrightarrow[x+۲\ge ۰]{x\ge -۲} x+۲=\sqrt{y+۱} \to x=\sqrt{y+۱}-۲ \to h^{-1}(x)=\sqrt{x+۱}-۲$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} h(x)=(x+۲)^۲-۱ \\ D_h=(-\infty,-۲] \end{cases} \to y=(x+۲)^۲-۱ \to (x+۲)^۲=y+۱ \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+۲|=\sqrt{y+۱} \xrightarrow[x+۲\le ۰]{x\le -۲} -(x+۲)=\sqrt{y+۱} \to x+۲=-\sqrt{y+۱} \to x=-\sqrt{y+۱}-۲ \to h^{-1}(x)=-\sqrt{x+۱}-۲$$

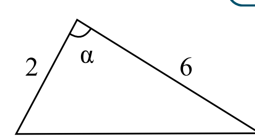
۵۲



$S=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot \sin\hat{A} \to ۳=\frac{۱}{۲}(۲)(۶)\sin\hat{A}$

$\to \sin\hat{A}=\frac{۱}{۲} \to \hat{A}=۳۰^\circ$ یا $\hat{A}=۱۵۰^\circ \to$ دو مثلث وجود دارد.

۵۳ مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع، پس داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\sin\alpha=۳ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ (۱)\ ,\ \alpha=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\ (۲)$$

با توجه به اینکه زاویهٔ مثلث بین صفر تا ۱۸۰° می‌باشد، داریم:

$(۱)\ k=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۶}\ ,\ (۲)\ k=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{۵\pi}{۶}$

بنابراین دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۵۴

$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹} \to \sin\alpha=\pm\frac{۱۲}{۱۳} \xrightarrow{\alpha\ \text{حاده است.}} \sin\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$

الف) $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۲۵}{۱۶۹})-۱=\frac{۵۰}{۱۶۹}-۱=\frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$

ب) $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۱۲}{۱۳})(\frac{۵}{۱۳})=\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$

۵۵

$۱)\ \sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲} \to \sin^۲ ۲۲٫۵^\circ=\frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}$

$=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \to \sin ۲۲٫۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$

$$۲)\ \cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \to \cos^۲ ۲۲{,}۵^\circ = \frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}$$

$$= \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \to \cos ۲۲{,}۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$۳)\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to \tan ۲۲{,}۵^\circ = \frac{\sin ۲۲{,}۵^\circ}{\cos ۲۲{,}۵^\circ} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}$$

$$۴)\ \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} \to \cot ۲۲{,}۵^\circ = \frac{۱}{\tan ۲۲{,}۵^\circ} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$$

۵۶ الف)

ضابطهٔ مربوط به این نمودار به‌صورت $f(x) = a\sin bx + c$ می‌باشد که داریم:

$$T = ۴\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\max = |a|+c = ۳\\ \min = -|a|+c = -۱\end{array}\right\} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

با توجه به نمودار، a و b هردو مثبت هستند، پس داریم:

$$f(x) = ۲\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱$$

ب)

ضابطهٔ مربوط به این نمودار به‌صورت $f(x) = a\cos bx + c$ می‌باشد که داریم:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = ۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\max = |a|+c = ۲\\ \min = -|a|+c = -۴\end{array}\right\} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = -۳$$

با توجه به نمودار، a منفی و b مثبت است، پس داریم:

$$f(x) = -۳\cos(۲x) - ۱$$

۵۷

الف) $y = \sin \pi x \to T = \frac{۲\pi}{|\pi|} = ۲ \to$ شکل شمارهٔ ۴

ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x \to T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = ۴\pi \to$ شکل شمارهٔ ۲

پ) $y = \sin ۲x \to T = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi \to$ شکل شمارهٔ ۳

ت) $y = ۱ - \cos ۲x \to T = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi \to$ شکل شمارهٔ ۱

۵۸ الف) نمودار داده شده یک تابع سینوسی با $T = ۴\pi$ و $Max = ۳$ و $Min = -۱$ است. $(y = a\sin bx + c)$

$$T = ۴ \to \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \to |b| = \frac{۱}{۲} \to b = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}Max = ۳ \to |a|+c = ۳\\ Min = -۱ \to -|a|+c = -۱\end{array}\right\} \to c = ۱\ ,\ a = \pm ۲$$

چون شکل، فرمت خود سینوس را دارد باید $ab > ۰$ باشد پس:

$y = ۲\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱$ یا $y = -۲\sin(\frac{-۱}{۲}x) + ۱$

ب) نمودار داده شده یک تابع کسینوسی با $T = \pi$ و $Max = ۲$ و $Min = -۴$ است. $(y = a\cos bx + c)$

$$T = \pi \to \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \to |b| = ۲ \to b = \pm ۲$$

$$\left.\begin{array}{l}Max = ۲ \to |a|+c = ۲\\ Min = -۴ \to -|a|+c = -۴\end{array}\right\} \to c = -۱\ ,\ a = \pm ۳$$

چون شکل، فرمت قرینهٔ کسینوس را دارد باید $a<0$ باشد پس:

$$y=-3\cos(\pm 2x)-1$$

$$\cos 2x-\cos x+1=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\cos x=\cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+x \Rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x \Rightarrow 3x=2k\pi \Rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

۶۱

الف

$$y=1+2\sin 7x \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c,\ T=\frac{2\pi}{|b|}} T=\frac{2\pi}{|7|}=\frac{2\pi}{7}$$

$$,\quad Max=|2|+1=3 \quad , \quad Min=-|2|+1=-1$$

ب

$$y=\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{2}x \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c,\ T=\frac{2\pi}{|b|}} T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|}=4$$

$$,\quad Max=|-1|+\sqrt{3}=1+\sqrt{3} \quad , \quad Min=-|-1|+\sqrt{3}=-1+\sqrt{3}$$

پ

$$y=-\pi\sin(\frac{x}{2})-2 \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c,\ T=\frac{2\pi}{|b|}} T=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi$$

$$,\quad Max=|-\pi|-2=\pi-2 \quad , \quad Min=-|-\pi|-2=-\pi-2$$

ت

$$y=-\frac{3}{4}\cos 3x \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c,\ T=\frac{2\pi}{|b|}} T=\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2\pi}{3}$$

$$,\quad Max=|-\frac{3}{4}|+0=\frac{3}{4} \quad , \quad Min=-|-\frac{3}{4}|+0=\frac{-3}{4}$$

۶۲

الف

تابع مثلثاتی را $y=a\sin bx+c$ در نظر می‌گیریم.

$$T=\pi \to \frac{2\pi}{|b|}=\pi \to |b|=2 \to b=\pm 2$$

$$\begin{cases} Max=|a|+c=3 \\ Min=-|a|+c=-3 \end{cases} \to c=0\ ,\ a=\pm 3 \xrightarrow{\text{با فرض } b>0\ ,\ a>0} y=3\sin 2x$$

ب

تابع مثلثاتی را $y=a\sin bx+c$ در نظر می‌گیریم.

$$T=3 \to \frac{2\pi}{|b|}=3 \to |b|=\frac{2\pi}{3} \to b=\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} Max=|a|+c=9 \\ Min=-|a|+c=3 \end{cases} \to c=6\ ,\ a=\pm 3 \xrightarrow{\text{با فرض } b>0\ ,\ a>0} y=3\sin(\frac{2\pi}{3})x+6$$

پ

تابع مثلثاتی را $y=a\sin bx+c$ در نظر می‌گیریم.

$$T=4\pi \to \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \to |b|=\frac{1}{2} \to b=\pm\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} Max = |a| + c = -۱ \\ Min = -|a| + c = -۷ \end{cases} \to c = -۴ \;,\; a = \pm ۳ \xrightarrow{b > ۰ \,,\, a > ۰ \text{ با فرض}} y = ۳\sin(\frac{x}{۲}) - ۴$$

ت

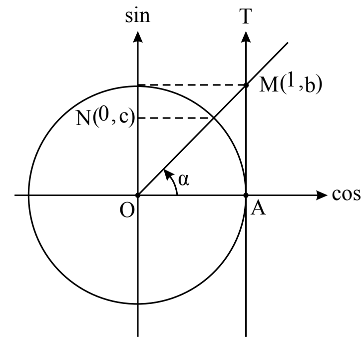
تابع مثلثاتی را $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

$$T = \frac{\pi}{۲} \to \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \to |b| = ۴ \to b = \pm ۴$$

$$\begin{cases} Max = ۱ \to |a| + c = ۱ \\ Min = -۱ \to -|a| + c = -۱ \end{cases} \to c = ۰ \;,\; a = \pm ۱ \xrightarrow{b > ۰ \,,\, a > ۰ \text{ با فرض}} y = \sin ۴x$$

۶۳ الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ اول در نظر می‌گیریم، داریم:



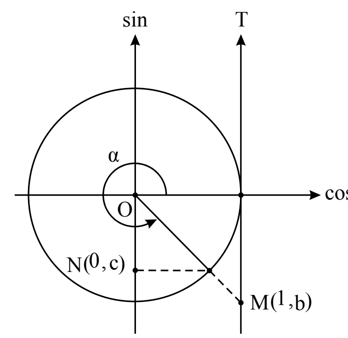
$$\sin\alpha = ON = y_N = c > ۰$$
$$\tan\alpha = AM = y_M = b > ۰$$

از روی شکل واضح است که:

$$c < b \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$$

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:



$$\sin\alpha = y_N = c < ۰$$
$$\tan\alpha = y_M = b < ۰$$

از روی شکل واضح است که:

$$b < c \Rightarrow \tan\alpha < \sin\alpha$$

۶۴

با استفاده از دورهٔ تناوب توابع داریم:

الف) $y = \sin \pi x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲ \Rightarrow$ (۴) نمودار

ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi \Rightarrow$ (۲) نمودار

پ) $y = \sin ۲x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \Rightarrow$ (۳) نمودار

ت) $y = ۱ - \cos ۲x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \Rightarrow$ (۱) نمودار

۶۵

الف

$$y = ۱ + ۲\sin ۷x \longrightarrow T = \frac{۲\pi}{۷} \;,\; \max = ۱ + |۲| = ۱ + ۲ = ۳ \;,\; \min = ۱ - |۲| = ۱ - ۲ = -۱$$

ب

$$y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \longrightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴$$

$$\max = \sqrt{۳} + |-۱| = \sqrt{۳} + ۱ \;,\; \min = \sqrt{۳} - |-۱| = \sqrt{۳} - ۱$$

$$y=-\pi\sin(\frac{۱}{۲}x)-۲\longrightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

$$\max=|-\pi|-۲=\pi-۲\ ,\ \min=-|-\pi|-۲=-\pi-۲$$

ت

$$y=-\frac{۳}{۴}\cos ۳x\longrightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ \max=|-\frac{۳}{۴}|=\frac{۳}{۴}\ ,\ \min=-|-\frac{۳}{۴}|=-\frac{۳}{۴}$$

۶۶

با فرض $f(x)=a\cos bx+c$ داریم:

الف

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=۲\Rightarrow b=۲$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۳\\ \min=-|a|+c=-۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۰\Rightarrow c=۰\Rightarrow |a|=۳\Rightarrow a=۳\Rightarrow f(x)=۳\cos ۲x$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به‌دست آورد.

با فرض $f(x)=a\sin bx+c$ داریم:

ب

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۳\Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۹\\ \min=-|a|+c=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۱۲\Rightarrow c=۶\Rightarrow |a|=۳\Rightarrow a=-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=-۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)+۶$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به دست آورد.

با فرض $f(x)=a\cos bx+c$ داریم:

پ

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=-۱\\ \min=-|a|+c=-۷\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=-۸\Rightarrow c=-۴\Rightarrow |a|=۳\Rightarrow a=۳$$

$$\Rightarrow f(x)=۳\cos(\frac{۱}{۲}x)-۴$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به‌دست آورد.

با فرض $f(x)=a\sin bx+c$ داریم:

ت

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |b|=۴\Rightarrow b=۴$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۱\\ \min=-|a|+c=-۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۰\Rightarrow c=۰\Rightarrow |a|=۱\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=-\sin ۴x$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به دست آورد.

۶۷

الف نادرست

ب نادرست

پ درست ← در بازهٔ ۰ تا π تابع غیرصعودی است.

ت درست

۶۸

الف نادرست، تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

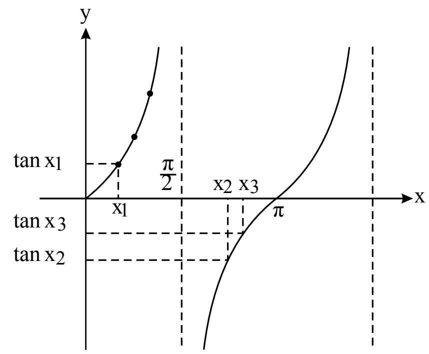
ب نادرست، تابع تانژانت در هیچ بازه‌ای نزولی نمی‌باشد.

پ درست، به‌عنوان مثال با توجه به نمودار تانژانت اگر بازهٔ $[۰,\pi]$ را در نظر بگیریم داریم:

$$x_۱<x_۲\Rightarrow \tan x_۱>\tan x_۲$$

بنابراین تابع تانژانت در این بازه غیرصعودی است. توجه کنید که این بدان معنی نیست که تابع تانژانت در این بازه نزولی است زیرا برای $x_۲$ و $x_۳$ از این بازه داریم:

$$x_۲ < x_۳ \Rightarrow \tan x_۲ < \tan x_۳$$



در کل تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم باشد، غیریکنواست.

ت درست، تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم نباشد یعنی بازه‌ای که تابع تانژانت در آن بازه تعریف شده باشد، صعودی (اکیداً صعودی) است.

۶۹

الف

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

ب

$$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱ \Rightarrow \cos ۲x = \sin x$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$ داریم:

$$\cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

$$۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

پ

$$\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۱ - \sin^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x + \sin x - \frac{۳}{۴} = ۰$$

با فرض $\sin x = t$ داریم:

$$t^۲ + t - \frac{۳}{۴} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۴ \times ۱ \times (-\frac{۳}{۴}) = ۴ \Rightarrow t = \frac{-۱ \pm ۲}{۲} = \frac{۱}{۲}, -\frac{۳}{۲}$$

$$\sin x = -\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق }, \ \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$

ت

$$\sin x - \cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \sin x \Rightarrow \cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۷۰

الف

$$\sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۲} \to \sin ۳x = ۱ \xrightarrow[x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}]{\text{حالت خاص}} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

ب

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱} ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰$$

$$\to \begin{cases} \cos x = ۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \\ \cos x = \dfrac{۱}{۲} = \cos\dfrac{\pi}{۳} \xrightarrow{x=۲k\pi\pm\alpha} x = ۲k\pi \pm \dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

پ

$$\cos ۲x = \cos x \xrightarrow{x=۲k\pi\pm\alpha} ۲x = ۲k\pi \pm x$$

$$\to \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \to x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \to ۳x = ۲k\pi \to x = \dfrac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

ت

$$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱ \to \cos ۲x - \sin x = ۰$$

$$\xrightarrow{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x} ۱ - ۲\sin^۲ x - \sin x = ۰ \to ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\sin x = A} ۲A^۲ + A - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -۱ \\ A = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$A = -۱ \to \sin x = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$A = \frac{۱}{۲} \to \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \to x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \to x = ۲k\pi + \dfrac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

ث

$$\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \to ۱ - \sin^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴}$$

$$\to \sin^۲ x + \sin x - \frac{۳}{۴} = ۰ \xrightarrow{\sin x = A} A^۲ + A - \frac{۳}{۴} = ۰$$

$$\to \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ - ۴(۱)(\frac{-۳}{۴}) = ۱ + ۳ = ۴$$

$$\to \begin{cases} A = \dfrac{-۱+۲}{۲} = \dfrac{۱}{۲} \to \sin x = \dfrac{۱}{۲} = \sin\dfrac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \to x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \to x = ۲k\pi + \dfrac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ A = \dfrac{-۱-۲}{۲} = \dfrac{-۳}{۲} \to \sin x = -\dfrac{۳}{۲} < -۱ \ \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

ج

$$\sin x - \cos ۲x = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x} \sin x - (۱ - ۲\sin^۲ x) = ۰$$

$$\to ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin x = A} ۲A^۲ + A - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -۱ \\ A = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$A = -۱ \to \sin x = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$A = \frac{۱}{۲} \to \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \to x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \to x = ۲k\pi + \dfrac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

۷۱

$$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$$
$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow r=f(۲)=۰\Rightarrow ۲^{۳}+a\times ۲^{۲}+b\times ۲+۱=۰$$
$$\Rightarrow ۸+۴a+۲b+۱=۰\Rightarrow ۴a+۲b=-۹\quad (۱)$$
$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow r=f(-۱)=۰\Rightarrow (-۱)^{۳}+a(-۱)^{۲}+b(-۱)+۱=۰$$
$$\Rightarrow -۱+a-b+۱=۰\Rightarrow a-b=۰\Rightarrow a=b$$
$$\xrightarrow{(۱)} ۴a+۲a=-۹\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$$

۷۲

$$\begin{array}{l|l} ۲x^{۳}+۵x^{۲}-۳x-۱۰ & x+۲ \\ \hline -(۲x^{۳}+۴x^{۲}) & ۲x^{۲}+x-۵ \\ \hline x^{۲}-۳x-۱۰ & \\ -(x^{۲}+۲x) & \\ \hline -۵x-۱۰ & \\ -(-۵x-۱۰) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

چون باقی‌مانده تقسیم برابر صفر شده در نتیجه $f(x)$ بر $(x+۲)$ بخش‌پذیر است.

۷۳ الف)

$$\begin{array}{l|l} ۲x^{۳}+x^{۲}+۱ & x+۱ \\ \hline -(۲x^{۳}+۲x^{۲}) & ۲x^{۲}-x+۱ \\ \hline -x^{۲}+۱ & \\ -(-x^{۲}-x) & \\ \hline x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

چون باقیمانده تقسیم برابر صفر است، در نتیجه $f(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب)

$$f(x)=(x+۱)(۲x^{۲}-x-۱)$$

۷۴ باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار داده و حاصل را برابر ۶ قرار دهیم.

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow (۲)^{۳}+k(۲)^{۲}+۲=۶\Rightarrow ۸+۴k+۲=۶\Rightarrow ۴k=-۴\Rightarrow k=-۱$$

۷۵ الف) نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $g(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $g(a)$ است اگر $g(a)$ برابر صفر باشد آن‌گاه $g(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$g(-۱)=۲(-۱)+۱+۱=۰\rightarrow$ $g(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب)

$$\begin{array}{l|l} ۲x^{۳}+x^{۲}+۱ & x+۱ \\ \hline -(۲x^{۳}+۲x^{۲}) & ۲x^{۲}-x+۱ \\ \hline x^{۲}+۱ & \\ -(-x^{۲}-x) & \\ \hline x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\rightarrow ۲x^{۳}+x^{۲}+۱=(۲x^{۲}-x+۱)(x+۱)$$

۷۶ تابع $f(x)=۳x^{۲}-۵x-۲$ را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۳x^{۲}-۵x-۲ & x-۲ \\ \hline -(۳x^{۲}-۶x) & ۳x+۱ \\ \hline x-۲ & \\ -(x-۲) & \\ \hline ۰\rightarrow R=۰ & \end{array}$$

پس: $f(x)=۳x^{۲}-۵x-۲=(x-۲)\times(۳x+۱)$

۷۷

الف

$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

ب

$$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

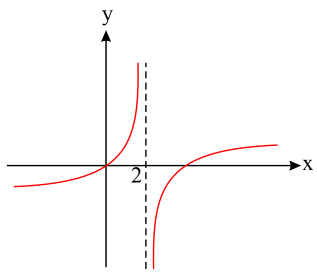
پ

$$x^5+32=x^5+2^5=(x+2)(x^4-x^3\times 2+x^2\times 2^2-x\times 2^3+2^4)$$
$$\Rightarrow x^5+32=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

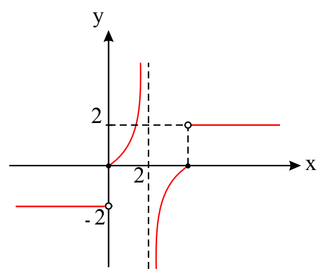
۷۸ الف) یعنی در همسایگی چپ $x=2$ مقادیر $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر است به شرط آنکه x با مقادیر کمتر از ۲، به قدر کافی به عدد ۲ نزدیک شوند.

ب) یعنی در همسایگی راست $x=2$ مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچکتر است به شرط آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲، به قدر کافی به عدد ۲ نزدیک شود.

پ)



یا



۷۹

الف

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+3x}=\frac{0}{0}$$ مبهم

پس: $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+3x}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x}=\frac{-6}{-3}=2$$

ب

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

برای رفع ابهام، صورت و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-4x+1 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} & 4x-2 \\ \underline{-4x^2+2x} & \\ \underline{\quad -2x+1} & \\ \underline{\quad\ \ 2x-1} & \\ \quad \text{صفر} & \end{array}$$

و

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+x-1 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} & 2x+2 \\ \underline{-2x^2+x} & \\ \underline{\quad\ 2x-1} & \\ \underline{\quad -2x+1} & \\ \quad \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(x-\frac{1}{2})(4x-2)}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x-2}{2x+2}=\frac{0}{3}=0$$

پ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}=\frac{0}{0}$$ مبهم

برای رفع ابهام، مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-3$ تقسیم می‌کنیم و برای تجزیهٔ صورت از اتحاد جملهٔ مشترک کمک می‌گیریم.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ - ۱۳x^۲ + ۲۴x - ۹ & x-۳ \\ \hline -۲x^۳ + ۶x^۲ & ۲x^۲ - ۷x + ۳ \\ -۷x^۲ + ۲۴x - ۹ & \\ ۷x^۲ - ۲۱x & \\ ۳x - ۹ & \\ -۳x + ۹ & \\ \text{صفر} & \end{array}$$

۵۵

$$\text{پس: } \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۳)(۲x^۲-۷x+۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{x-۲}{۲x^۲-۷x+۳}$$

به‌ازای $x = ۳$ مخرج صفر می‌شود پس مخرج را بر $x - ۳$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲ - ۷x + ۳ & x-۳ \\ \hline -۲x^۲ + ۶x & ۲x - ۱ \\ -x + ۳ & \\ x - ۳ & \\ \text{صفر} & \end{array}$$

$$\text{پس: } \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۲)}{(x-۳)(۲x-۱)} \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{(x-۲)}{(x-۳)(۲x-۱)} = \dfrac{۱}{(۰^+)(۵)} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{(x-۲)}{(x-۳)(۲x-۱)} = \dfrac{۱}{(۰^-)(۵)} = \dfrac{۱}{۰^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{پس: } \lim_{x\to -۱} \frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}} \times \frac{x-\sqrt{۲x+۳}}{x-\sqrt{۲x+۳}} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x^۲-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-۲x-۳}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x-۳)(x+۱)} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x-۳)}$$

$$= \frac{(-۲)(-۲)}{-۴} = \frac{۴}{-۴} = -۱$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{پس: } \lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-x}{(x^۲+x-۲)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{x}{(x+۲)(x+\sqrt{x})} = \frac{۱}{(۳)(۲)} = \frac{۱}{۶}$$

$$\lim_{x\to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم: $(a+b)(a^۲+b^۲-ab) = a^۳+b^۳$

$$\text{پس: } \lim_{x\to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۱-\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۱-\sqrt[۳]{x}} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)}{(x+۱)(x+۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۱-\sqrt[۳]{x})}$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲ - x}{۴x^۲ - ۱} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

پس: $$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲ - x}{۴x^۲ - ۱} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{x(۲x-۱)}{(۲x-۱)(۲x+۱)} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{x}{۲x+۱} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

ب

$$\lim_{x\to ۵} \frac{x^۳ - ۴x^۲ - ۴x - ۵}{x^۲ - ۲۵} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، کافی است صورت را بر عامل ابهام یعنی $x - ۵$ تقسیم کنیم و مخرج را با استفاده از اتحاد مزدوج، تجزیه کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۴x^۲ - ۴x - ۵ & x - ۵ \\ \cline{2-2} -(x^۳ - ۵x^۲) & x^۲ + x + ۱ \\ \cline{1-1} x^۲ - ۴x - ۵ & \\ -(x^۲ - ۵x) & \\ \cline{1-1} x - ۵ & \\ -(x - ۵) & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

پس: $$\lim_{x\to ۵} \frac{x^۳ - ۴x^۲ - ۴x - ۵}{x^۲ - ۲۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{(x-۵)(x^۲+x+۱)}{(x+۵)(x-۵)} = \lim_{x\to ۵} \frac{x^۲+x+۱}{x+۵} = \frac{۳۱}{۱۰}$$

پ

$$\lim_{x\to -۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{x^۳ + ۴x^۲ + x + ۴} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x = ۴$ تقسیم می‌کنیم و صورت را به‌کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳ + ۴x^۲ + x + ۴ & x + ۴ \\ \cline{2-2} -(x^۳ + ۴x^۲) & x^۲ + ۱ \\ \cline{1-1} ۰ + x + ۴ & \\ -(x + ۴) & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

پس: $$\Rightarrow \lim_{x\to -۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{x^۳ + ۴x^۲ + x + ۴} = \lim_{x\to -۴} \frac{(x-۱)(x+۴)}{(x+۴)(x^۲+۱)} = \lim_{x\to -۴} \frac{x-۱}{x^۲+۱} = \frac{-۵}{۱۷}$$

۸۴

الف

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x - \sqrt{۲x-۱}}{x^۲ - x} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

پس : $$\lim_{x\to ۱} \frac{x - \sqrt{۲x-۱}}{x^۲ - x} \times \frac{x + \sqrt{۲x-۱}}{x + \sqrt{۲x-۱}} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - (۲x-۱)}{(x^۲-x)(x+\sqrt{۲x-۱})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)^۲}{x(x-۱)(x+\sqrt{۲x-۱})} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)}{x(x+\sqrt{۲x-۱})} = \frac{۰}{۱(۱+۱)} = ۰$$

ب

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{۲ - \sqrt{x+۱}} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{۲ - \sqrt{x+۱}} \times \frac{۲ + \sqrt{x+۱}}{۲ + \sqrt{x+۱}} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{۴ - (x+۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-(x-۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-۱} = -(۶)(۴) = -۲۴$$

پ

$$\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{۰}{۰}$$

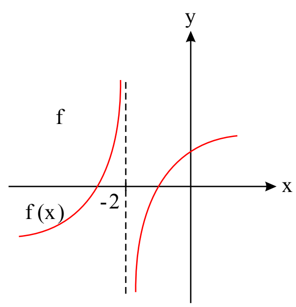
برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم: $(a+b)(a^۲+b^۲-ab)=a^۳+b^۳$

پس: $$\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲(x+۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x})}{(x+۸)}$$

$$=\lim_{x\to -۸}۲(\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x})=۲(۴+۴+۴)=۲۴$$

۸۵

برای مثال تابعی مانند f مطابق شکل روبرو را در نظر بگیرید.



چون همسایگی محذوف -۲ تعریف شده است پس تابع در نقطهٔ $x=-۲$ تعریف نشده است و داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=-\infty$$

۸۶

با توجه به شکل داریم:

الف) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=۲$

ب) $\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=+\infty$

پ) $\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=-\infty$

ت) $\lim_{x\to۱^-}f(x)=+\infty$

ث) $\lim_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$

ج) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱$

۸۷

الف

$$\lim_{x\to۵^-}\frac{۲x}{x-۵}=\frac{۱۰}{۵^- -۵}=\frac{۱۰}{۰^-}=-\infty$$

ب

$$\lim_{x\to۵^+}\frac{۲x}{x-۵}=\frac{۱۰}{۵^+ -۵}=\frac{۱۰}{۰^+}=+\infty$$

پ

$$\lim_{x\to۰}\frac{-۱}{x^۲}\begin{cases}\lim_{x\to۰^+}\frac{-۱}{x^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty\\ \lim_{x\to۰^-}\frac{-۱}{x^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=۰$ برابر $-\infty$ است.

ت

$$\lim_{x\to۳}\frac{۲}{|x-۳|}\begin{cases}\lim_{x\to۳^+}\frac{۲}{|x-۳|}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty\\ \lim_{x\to۳^-}\frac{۲}{|x-۳|}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty\end{cases}$$

$\rightarrow$ حد تابع در $x=۰$ برابر $+\infty$ است.

ث

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۳})}\frac{[x]}{|۳x+۱|}\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۳})^+}\dfrac{[x]}{|۳x+۱|}=\dfrac{[(-\frac{۱}{۳})^+]}{۰^+}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۳})^-}\dfrac{[x]}{|۳x+۱|}=\dfrac{[(-\frac{۱}{۳})^-]}{۰^+}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=-\frac{۱}{۳}$ برابر $-\infty$ است.

ج

$$\lim_{x\to۰}\frac{x+۱}{\sin^۲ x}\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}\dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}=\dfrac{۱}{(۰^+)^۲}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to۰^-}\dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}=\dfrac{۱}{(۰^-)^۲}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=۰$ برابر $+\infty$ است.

۸۸

الف

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

ب

$$\lim_{x\to۰}\frac{-۱}{|x|}\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}\dfrac{-۱}{|x|}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to۰^-}\dfrac{-۱}{|x|}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=۰$ برابر $-\infty$ است.

پ

$$\lim_{x\to۱^-}\frac{۱}{x-۱}=\frac{۱}{۱^--۱}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

ت

$$\lim_{x\to-۶}\frac{۹}{(x+۶)^۲}\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۶)^+}\dfrac{۹}{(x+۶)^۲}=\dfrac{۹}{(۰^+)^۲}=\dfrac{۹}{۰^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to(-۶)^-}\dfrac{۹}{(x+۶)^۲}=\dfrac{۹}{(۰^-)^۲}=\dfrac{۹}{۰^+}=+\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=-۶$ برابر $+\infty$ است.

ث

$$\lim_{x\to۳}\frac{-۱}{(x-۳)^۴}\begin{cases}\lim\limits_{x\to۳^+}\dfrac{-۱}{(x-۳)^۴}=\dfrac{-۱}{(۰^+)^۴}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to۳^-}\dfrac{-۱}{(x-۳)^۴}=\dfrac{-۱}{(۰^-)^۴}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=۳$ برابر $-\infty$ است.

ج

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})}\frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}\dfrac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}=\dfrac{-۲+۱}{(۰^+)^۲}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\dfrac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}=\dfrac{-۲+۱}{(۰^-)^۲}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$

حد تابع در $x=-\frac{۱}{۲}$ برابر $-\infty$ است.

چ

می‌دانیم: $\boxed{\dfrac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty \quad \text{و} \quad \dfrac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty \quad \text{و} \quad \dfrac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty \quad \text{و} \quad \dfrac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty}$

$$\lim_{x\to۳^+}\frac{۱-۵x}{x^۲-۹}=\frac{۱-۱۵}{(۳^+)^۲-۹}=\frac{-۱۴}{۹^+-۹}=\frac{-۱۴}{۰^+}=-\infty$$

ح

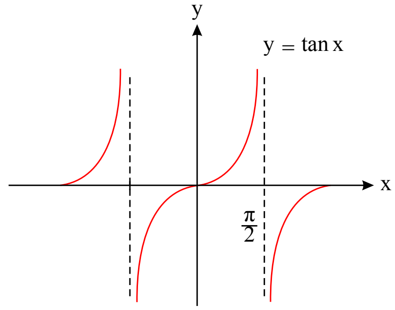
$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-۳x}{x^۲-۴}=\frac{-۳(-۲)}{((-۲)^-)^۲-۴}=\frac{۶}{۴^+-۴}=\frac{۶}{۰^+}=+\infty$$

خ

توجه کنید $(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیهٔ دوم است و در این ناحیه، کسینوس منفی است.

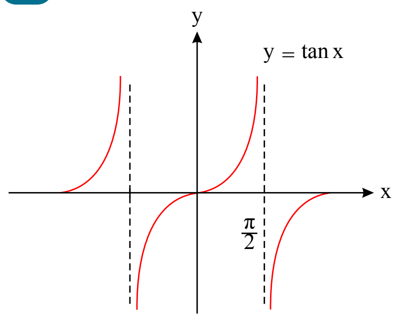
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

د) به شکل توجه نمایید.



$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x = +\infty$$

ذ) به شکل توجه نمایید:



$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x = -\infty$$

ر)

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳} = \frac{[۳^-]-۳}{۳^- - ۳} = \frac{۲-۳}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

۸۹

الف) با فرض $f(x)=\sqrt{۳+x^۲}$ و $g(x)=x^۲$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۳+x^۲} = \sqrt{۳} > ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰} g(x) = \lim\limits_{x\to ۰} x^۲ = ۰ \ , \ g(x)=x^۲ \geq ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۰^+} = +\infty$$

ب) با فرض $f(x)=۱$ و $g(x)=(x-۲)^۴$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲} ۱ = ۱ > ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲} g(x) = \lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)^۴ = ۰ \ , \ g(x)=(x-۲)^۴ \geq ۰ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x-۲)^۴} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

پ) با فرض $f(x)=|۵-x|$ و $g(x)=|۲+x|$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = \lim\limits_{x\to -۲} |۵-x| = |۵-(-۲)| = ۷ \\ \lim\limits_{x\to -۲} g(x) = \lim\limits_{x\to -۲} |۲+x| = ۰ \ , \ g(x)=|۲+x| \geq ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -۲}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -۲}\frac{|۵-x|}{|۲+x|}$$

$$= \frac{۷}{۰^+} = +\infty$$

۹۰

الف) با تجزیهٔ مخرج داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲+۲x-۱}{(x-۳)(x+۴)} = \frac{۹+۶-۱}{(۳-\varepsilon-۳)\times ۷} = \frac{۱۴}{-۷\varepsilon} = \frac{۱۴}{۰^-} = -\infty$$

ب) با تجزیهٔ مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۱}{۹-x^۲} = \lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۱}{(۳-x)(۳+x)} = \frac{۴}{(۳-(۳+\varepsilon))\times ۶} = \frac{۲}{-\varepsilon\times ۳} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty$$

۹۱ الف)

$f(x)$ را هرچقدر بخواهیم می‌توانیم به ۲ نزدیک کنیم. به شرط آنکه x به قدر کافی بزرگ انتخاب شود.

ب)

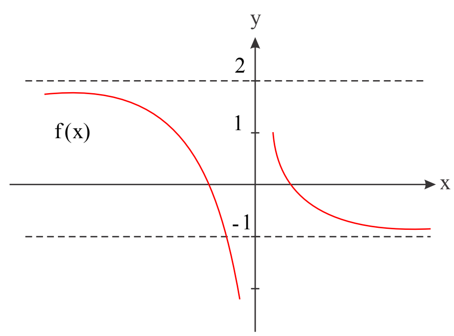
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ یعنی در تابع f اگر x به دلخواه کوچک (منفی) باشد یعنی x به $-\infty$ برود، مقادیر تابع یعنی $f(x)$ها به عدد ۴ نزدیک می‌شوند، به زبان دیگر مقادیر تابع $f(x)$ را هرچقدر بخواهیم می‌توانیم به ۴ نزدیک کنیم به شرط آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی انتخاب شود.

۹۲ الف)

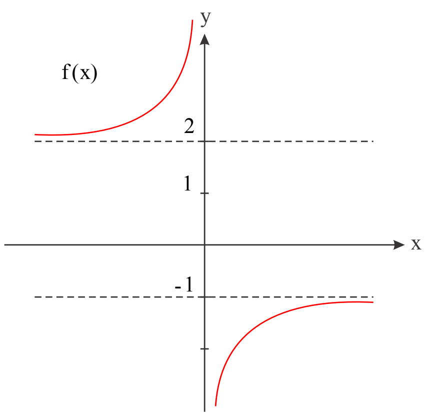
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ به این معناست که مقدار $f(x)$ برابر -1 است، به شرط آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ به این معناست که مقدار $f(x)$ برابر ۲ است، به شرط آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

ب)



یا



مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۹۳ الف)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

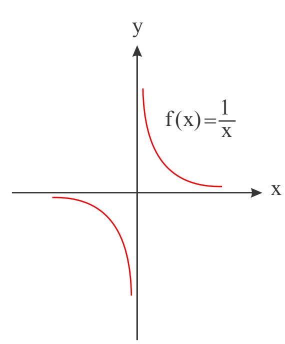
ب)

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$

پ)

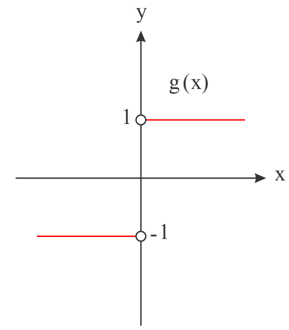
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-2$ ، $\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)=+\infty$

۹۴ الف) با توجه به شکل داریم:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

ب) با توجه به شکل داریم:



$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -۱$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +۱$$

۹۵ الف)

$$f(x) = \frac{-x^۳ + x}{+۴x^۲ + x^۳} \quad \text{یا} \quad f(x) = \frac{۱ - ۵x^۵}{۵x^۵ - x^۴ + ۳}$$

ب)

$$f(x) = \frac{-۱۰۰۰x - ۱}{۳ - ۱۰x} \quad \text{یا} \quad f(x) = \frac{۵ - ۳x + ۱۰۰x^۳}{x^۳ - x^۲ + ۳}$$

۹۶

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۱$

هرچه x به $+\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت ۱ نزدیک‌تر می‌شوند.

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱$

هرچه x به $-\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت -۱ نزدیک‌تر می‌شوند.

پ) $\lim_{x\to۳^+} f(x) = +\infty$

هرچه x به ۳ از سمت راست نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

ت) $\lim_{x\to۳^-} f(x) = +\infty$

هرچه x به ۳ از سمت چپ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

ث) $\lim_{x\to-۲^+} f(x) = -\infty$

هرچه x به -۲ از سمت راست نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $-\infty$ میل می‌کنند.

ج) مجانب‌های افقی و قائم

خطوط $x = ۳$ و $x = -۲$ مجانب‌های قائم تابع و خطوط $y = ۱$ $y = -۱$ مجانب‌های افقی تابع هستند زیرا:

$$\lim_{x\to۳} f(x) = +\infty \;\text{و}\; \lim_{x\to-۲^+} f(x) = -\infty \;\text{و}\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = ۱ \;\text{و}\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱$$

۹۷

الف

می‌دانیم: $\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$ فرض کنیم n عدد طبیعی باشد.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x + ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(۳ + \frac{۲}{x})}{x(۱ - \frac{۱}{x})} = \frac{۳ + ۰}{۱ - ۰} = ۳$$

ب

می‌دانیم: $\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$ فرض کنیم n عدد طبیعی باشد.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{۱ - ۵t^۲}{t^۲ + ۳t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\cancel{t^۲}(\frac{۱}{t^۲} - ۵)}{\cancel{t^۲}(۱ + \frac{۳}{t})} = \frac{۰ - ۵}{۱ + ۰} = -۵$$

پ

می‌دانیم: $\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$ فرض کنیم n عدد طبیعی باشد.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲ - ۳x} = \frac{۱}{-\infty} = ۰$$

۹۸

الف

$$\lim_{x\to-\infty} x^۲ = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x^۲ = +\infty$$

$\lim_{x\to -\infty}(۲x+۱)=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}(۲x+۱)=+\infty$

پ

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

ت

$\lim_{x\to -\infty}(\frac{-۱}{۲}x+۱)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}(\frac{-۱}{۲}x+۱)=-\infty$

ث

$\lim_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)=۲$

ج

$\lim_{x\to -\infty} h(x)=۰$ و $\lim_{x\to +\infty} h(x)=+\infty$

۹۹

الف

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x^۳-۵x+۴}{۷x^۳-۱۱x^۲-۶x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x^۳}{۷x^۳}=\frac{۲}{۷}$$

ب

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۵x}{x^۳}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۵}{x^۲}=\frac{۵}{+\infty}=۰$$

پ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۴x^۷}{۲x^۳}=\lim_{x\to -\infty}-۲x^۴=-\infty$$

۱۰۰

الف

$$\lim_{x\to -\infty}(۹+\frac{۷}{x^۳})=۹+۰=۹$$

ب

می‌دانیم:
$$\lim_{x\to +\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (\text{مثبت } a)\\ -\infty & (\text{منفی } a)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)=\lim_{x\to +\infty}x^۳(-\frac{۱}{۲}+\frac{۷}{x}-\frac{۶}{x^۳})=\lim_{x\to +\infty}-\frac{۱}{۲}x^۳=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{۲x-۳}=\frac{۱}{-\infty}=۰$$

ت

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}=\frac{۳+۰}{۰-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

ث

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}$$

ج

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

چ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x^۵}{x^۲}=\lim_{x\to -\infty}۲x^۳=-\infty$$

ح

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲+x}{۳-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲}{-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{-۱}=\frac{+\infty}{-۱}=-\infty$$

خ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۶x^۳}{۲x^۳}=-۳$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{۴}=\frac{+\infty}{۴}=+\infty$$

۱۰۱

الف

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۵}{x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x}=۳$$

ب

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ ، داریم:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t^۲}{t^۳}=\lim_{t\to-\infty}\frac{۱}{t}=\frac{۱}{-\infty}=۰$$

پ

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲}{۴x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{۴}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{۱}{۴}x=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{۱}{۴}x=-\frac{۱}{۴}(+\infty)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{۱}{۴}x=-\frac{۱}{۴}(-\infty)=+\infty\end{cases}$$

ت

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^۳-۲x^۲)=\lim_{x\to-\infty}x^۳=(-\infty)^۳=-\infty$$