



سیستم های کنترل فطی

فصل اول: مقدمه



در این فصل با چند مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، امزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتار های مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.



به چشم انداز

کسب مهارت های لازم
در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی
خوش آمدید



در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. گروه رباتیک ارس به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

عناوین فصل

پیشگفتار

۱ سیستم کنترل چیست، اجزای سیستم کنترل، نمایش فیزیکی و نمودار بلوکی سیستم کنترل، اهداف سیستم کنترل

اعجاز فیدبک

۲ مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته، بررسی همزمان اهداف تنظیم یا ردیابی، رفع اثر اغتشاش و عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

سافتار های مختلف سیستم کنترل

۳ سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با کنترلگر پیش خور، سیستم حلقه بسته با دو کنترلگر آبخاری، سیستم حلقه بسته آبخاری با دو خروجی، سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت

نمایش مدل در سیستم های کنترل

۴ معادلات دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI، مروری بر تبدیل لاپلاس، ویژگی های تبدیل لاپلاس، استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های کنترل خطی، تعیین پاسخ کامل سیستم با تبدیل لاپلاس

نمایش نمودار بلوکی

۵ اجزای نمودار بلوکی، اتصالات نمودار بلوکی، ساده سازی نمودار بلوکی مثال های ساده سازی

نمودار گذر سیگنال SFG

۶ نماد ها و اجزای SFG، قانون بهره Mason در حالت کلی و در حالت خاص، مثال های ساده سازی، مدل سازی موتور DC مغناطیس دائم، نمایش فضای حالت

در این فصل با چندین مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، اجزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتار های مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.

سیستم کنترل چیست؟

• شگفت انگیز ترین سیستم کنترل: انسان

✓ دودین

- ☐ بهینه سازی زمان در دوی ۱۰۰ متر
- ☐ بهینه سازی مصرف انرژی در دوی ماراتون

✓ حرکات دست

- ☐ کنترل همزمان دست و چشم در گرفتن اجسام متحرک
- ☐ مهار توپ توسط دروازه بان
- ☐ خوشنویسی

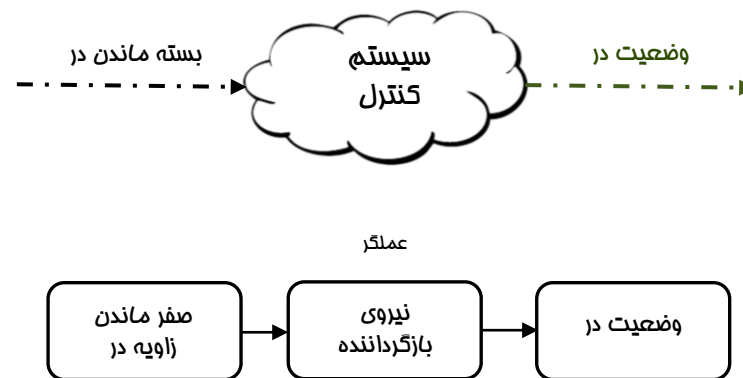


سیستم کنترل چیست؟

• نمونه ای ساده

✓ بسته نگهداشتن در (هدف تنظیم)

✓ سیستم حلقه باز



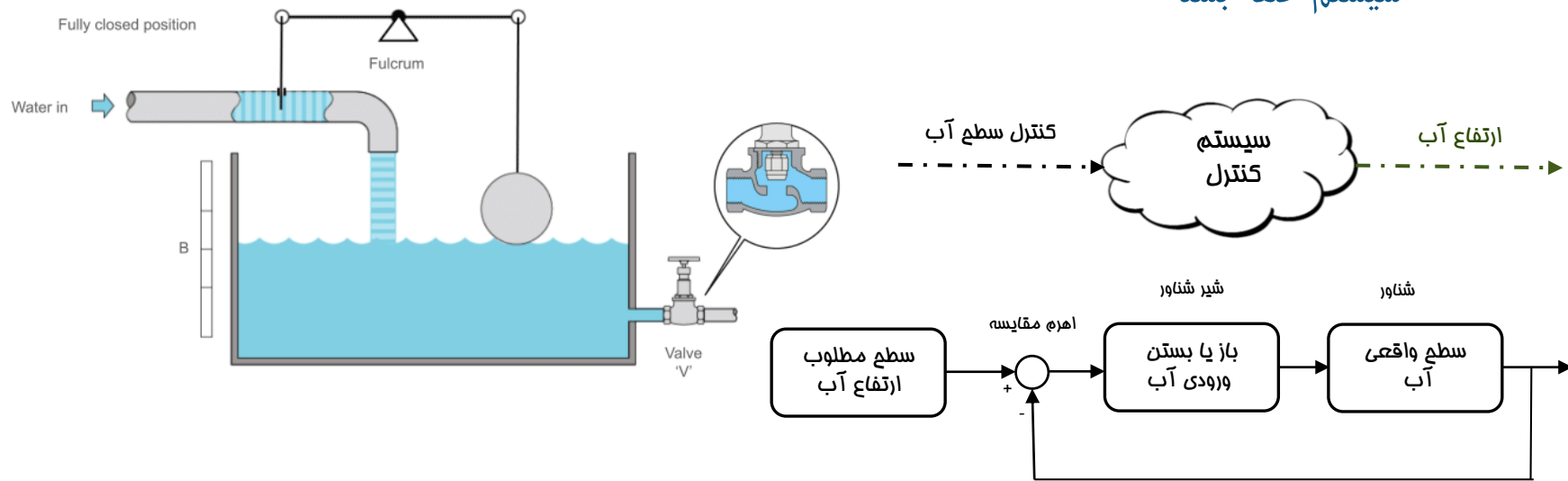
برگرفته از این پیوند

سیستم کنترل چیست؟

• نمونه ای ساده

✓ کنترل اتوماتیک سطح آب در یک مخزن یا کولر آبی

✓ سیستم حلقه بسته



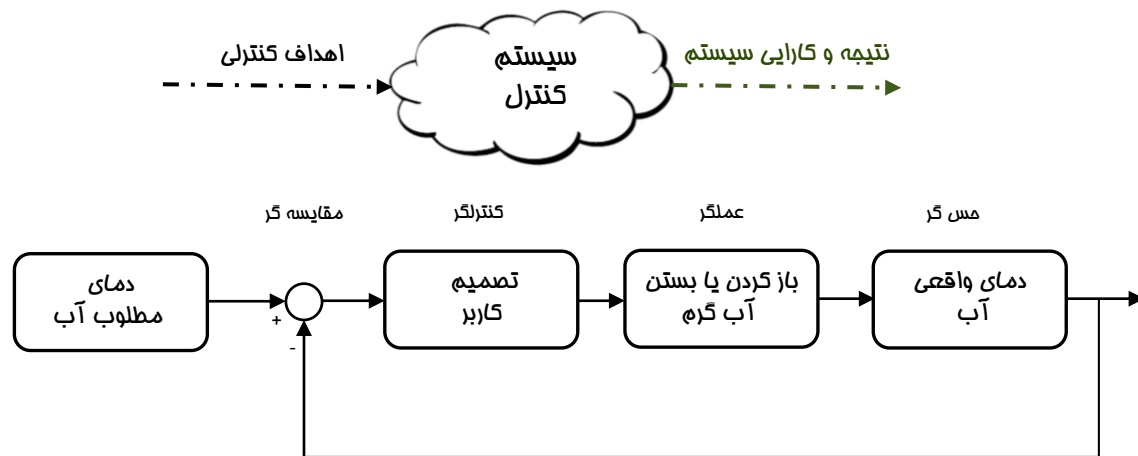
برگرفته از این پیوند

سیستم کنترل چیست؟

• نمونه ای ساده

✓ کنترل دمای شیر آب سرد و گرم (هدف تنظیم دما)

✓ سیستم حلقه بسته

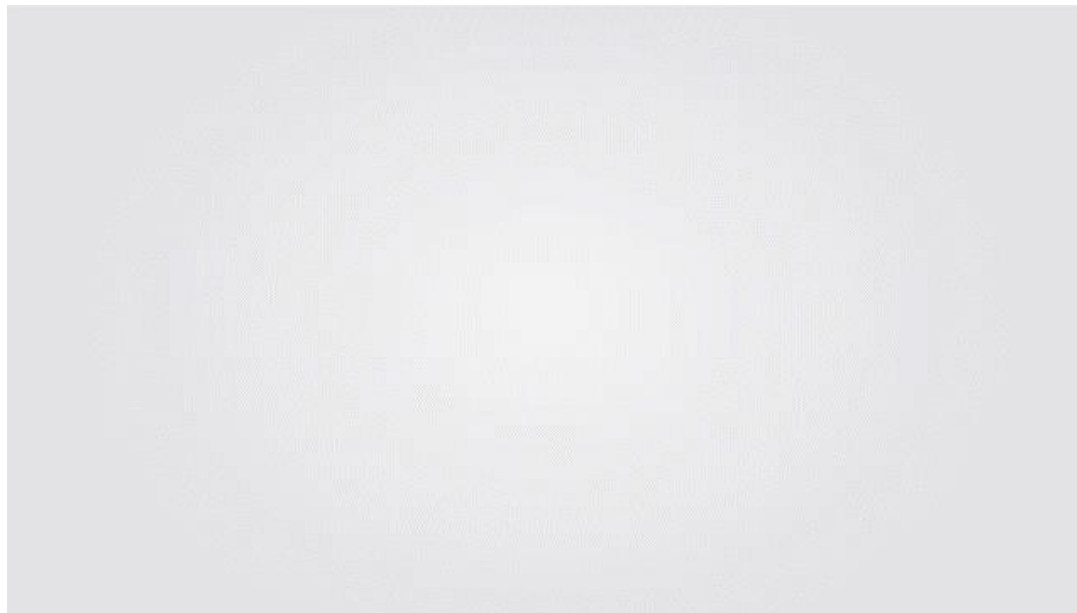


برگرفته از این پیوند

سیستم کنترل چیست؟

• نمونه ای شگفت انگیز

✓ کنترل دمای بدن انسان (هدف تنظیم دما)

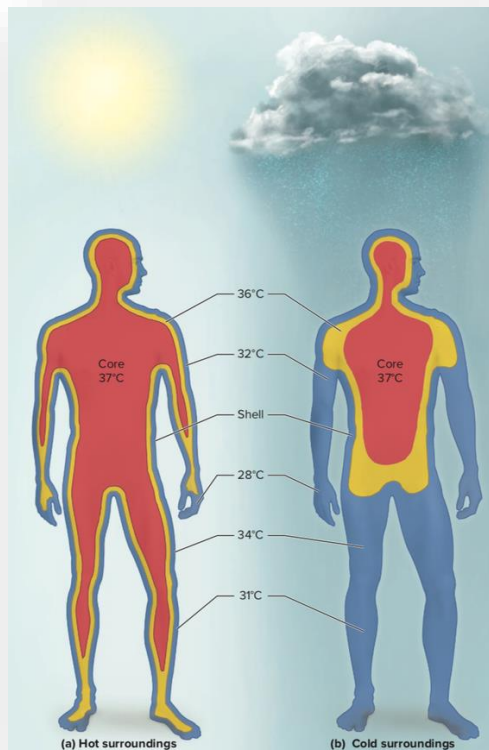


[برگرفته از این پیوند](#)

سیستم کنترل چیست؟

اجزای این سیستم کنترل

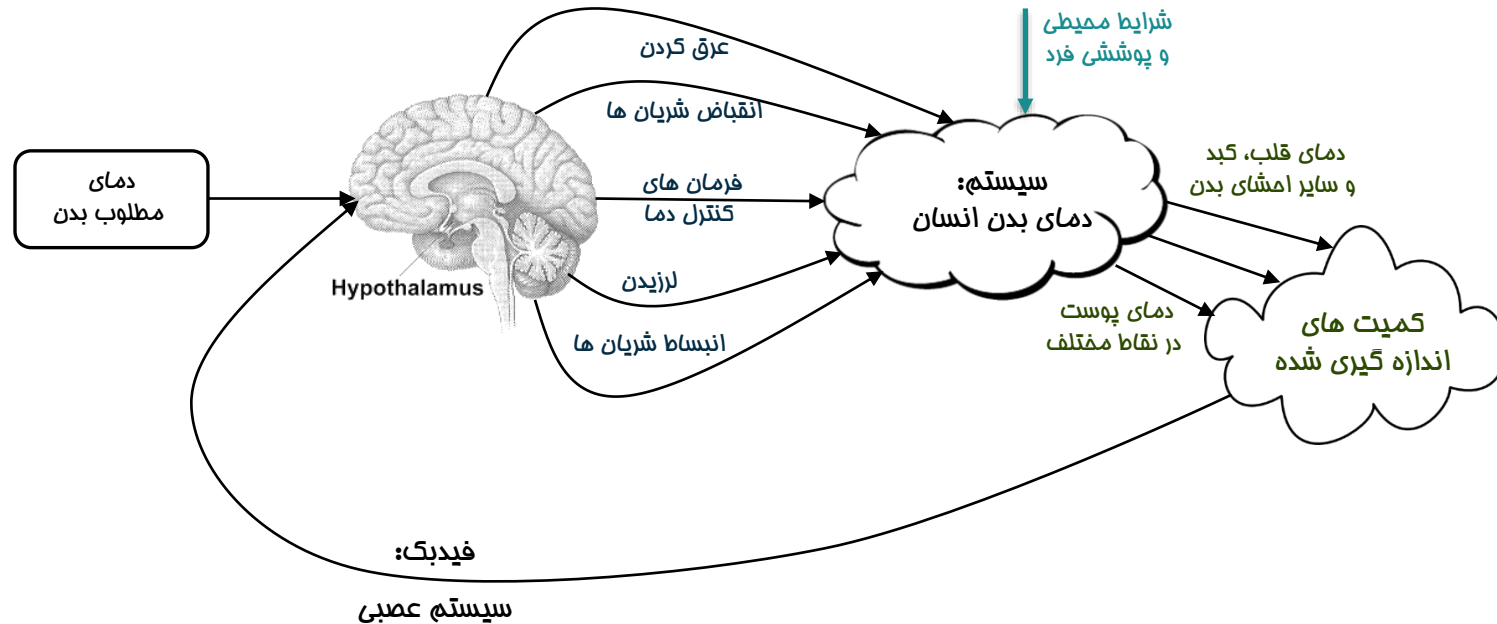
- ✓ سیستم و اهمیت کنترل یک یا چند کمیت آن
 - انسان خونگرم، زنده ماندن سلول های بدن در دمای ۳۰ تا ۴۰ درجه
- ✓ حسگرهای کمیت مورد نظر
 - پوست بدن، حسگرهای اجزای بدن (قلب، کبد، احشاء داخلی و ...)
- ✓ فیدبک
 - سیستم عصبی بدن
- ✓ مرکز دریافت اطلاعات، تصمیم گیری و ارسال فرمان کنترلی
 - بخش هایپوتالاموس hypothalamus مغز
- ✓ عملگرهای گرمایش یا سرمایش بدن
 - انتقال حرارت در پوست در اثر عرق کردن (اثر فوق العاده موی بدن)
 - انقباض و انبساط رگ ها
 - لرزیدن، حرکت بدن و ماهیچه ها و ...
 - توزیع گرمایش یا سرمایش در بخش مهم بدن (قلب و مغز)



برگرفته از این پیوند

سیستم کنترل چیست؟

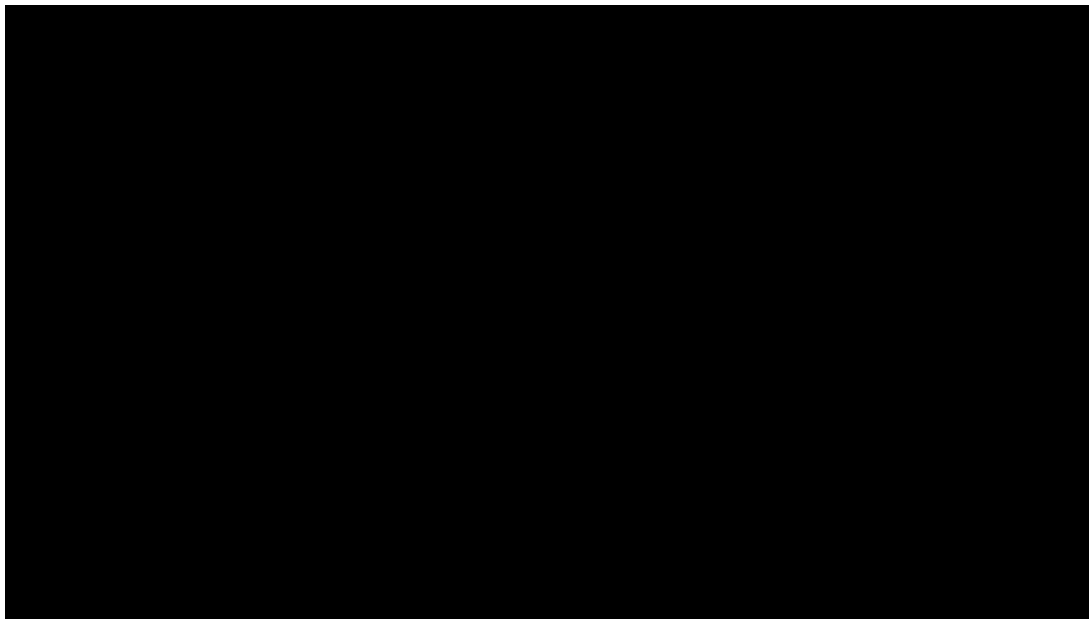
• نمودار فیزیکی اجزای این سیستم کنترل



سیستم کنترل چیست؟

• نمونه شگفت انگیز دیگر: مرغ زرین پر (Hummingbird)

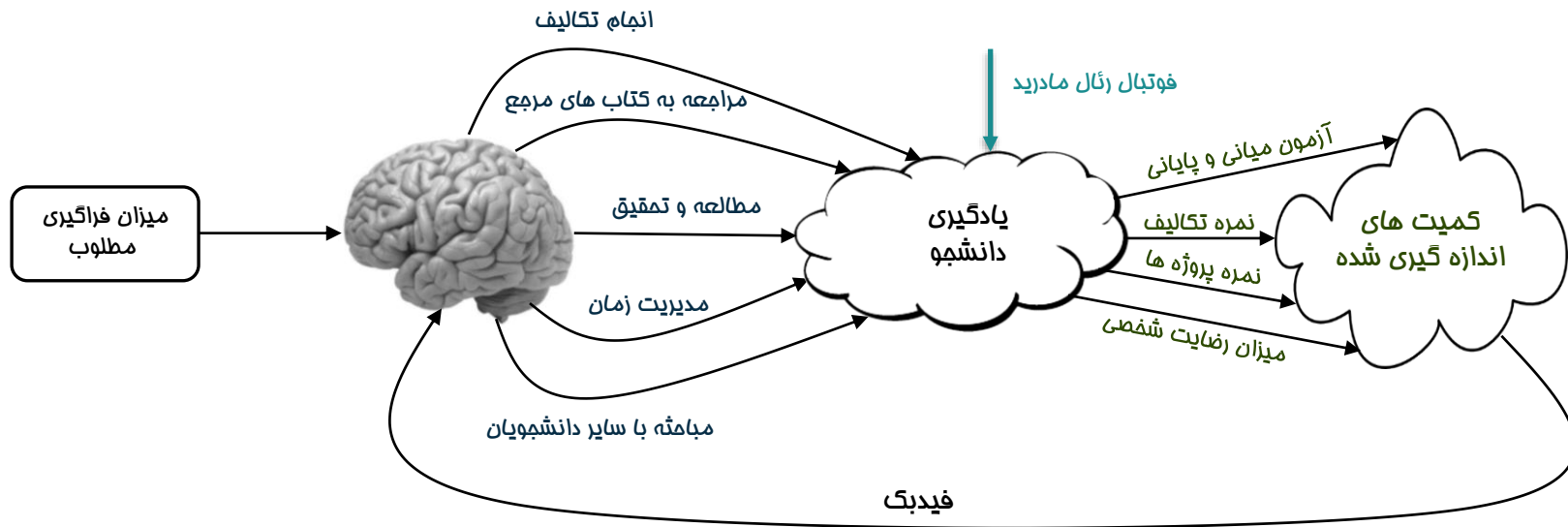
✓ ثابت ماندن در هوا (با حضور اغتشاش)



[برگرفته از این پیوند](#)

سیستم کنترل چیست؟

• نمونه ای دیگر: فرایند یادگیری در دانشجویان



اجزای سیستم کنترل

سیستم یا فرایند

✓ ذات سیستم با ویژگی ها و دینامیک مخصوص خود

□ سیستم واقعی

□ مدل سیستم برای پیش بینی رفتار سیستم

✓ تبیین وضعیت مطلوب

• کنترلگر: بخش انگیزه بخش، ملامت گر، مقایسه گر، اراده و تصمیم گیر

• مسگرها: بخش اندازه گیر کمیت های مهم سیستم

• عملگرها: بخش اجرای فرامین کنترل کننده

• اغتشاش خارجی: فوتبال رئال مادرید!

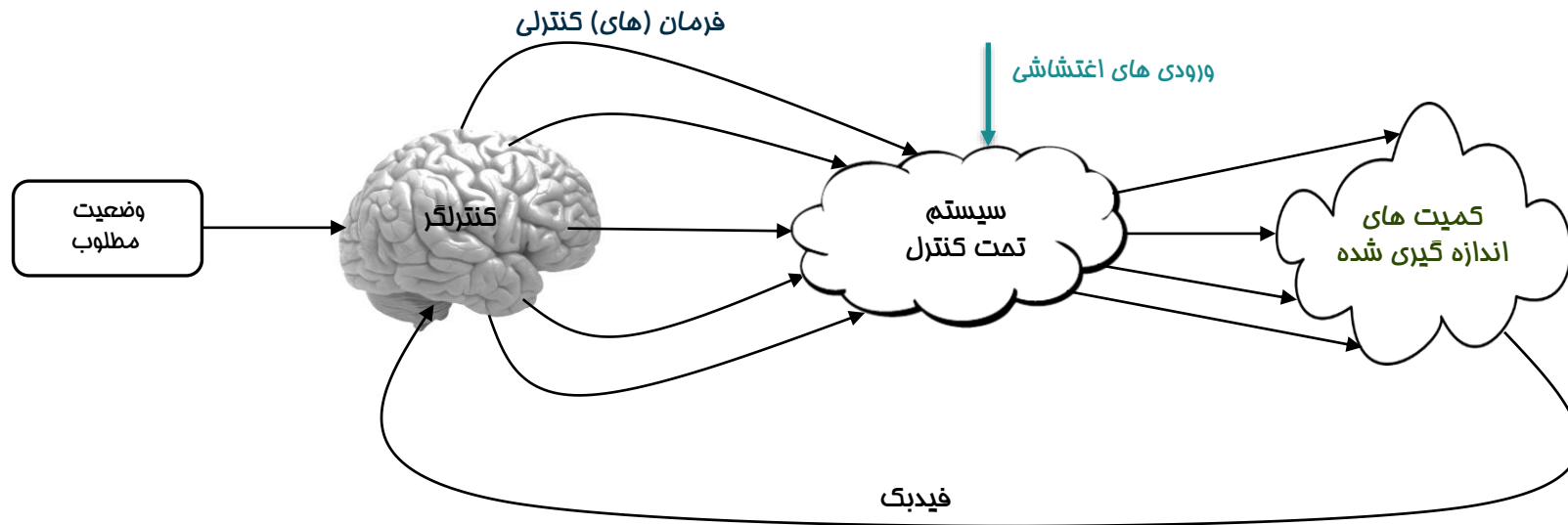
• فیدبک: مهمترین عامل موفقیت یک سیستم کنترل

✓ پایش آنی و همیشگی وضعیت

اجزای سیستم کنترل

• نمایش سیستم یا فرایند

✓ نمایش فیزیکی

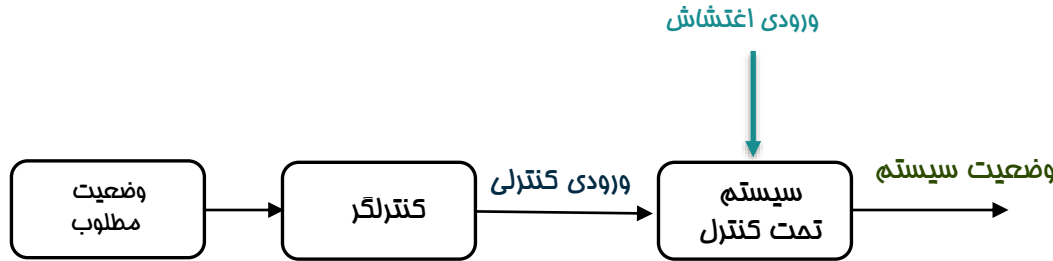


اجزای سیستم کنترل

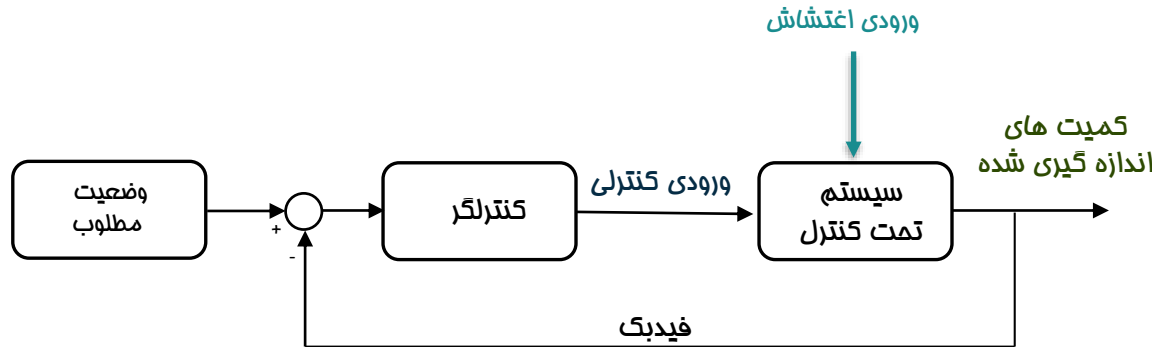
• نمایش سیستم یا فرایند

✓ نمودار بلوکی

□ سیستم حلقه باز



□ سیستم حلقه بسته





اهداف سیستم های کنترل

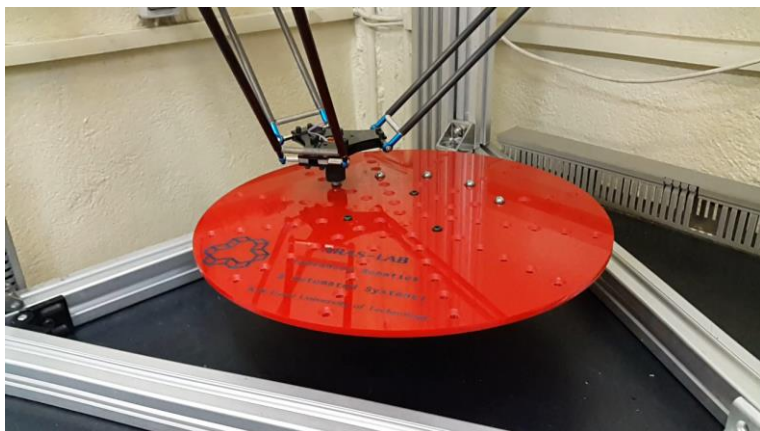
• رسیدن به مقدار مطلوب

✓ تنظیم (Regulation): مقدار مطلوب ثابت $r = cte$

- کنترل دمای بدن (۳۷ درجه سانتی گراد)
- رسیدن به سطح یادگیری مناسب (نمره ۲۰)
- ثابت ماندن منقار مرغ زرین پر (ارتفاع و جهت گیری ثابت)
- کنترل ضخامت کاغذ در فرایند تولید کاغذ
- ثابت نگهداشتن فرکانس برق شهر (۵۰ یا ۶۰ هرتز) و ...

✓ ردیابی (Tracking): مقدار مطلوب متغیر $r = r(t)$

- گرفتن پناالتی توسط دروازه بان
- ردیابی موشک ضد هواپیما
- پرواز خودران کوادکوپتر
- برداشت قطعات از تسمه نقاله متحرک توسط ربات



ربات [دلتا](#) متصل گروه رباتیک ارس



اهداف سیستم های کنترل

• رفع اثر اغتشاش در تنظیم یا ردیابی

✓ کاهش اثر اغتشاش در رسیدن به مقدار مطلوب

□ کنترل دمای بدن در سرما یا گرمای شدید محیطی

□ رسیدن به سطح یادگیری مناسب حتی در زمان جام جهانی فوتبال!

□ ثابت ماندن منقار مرغ زرین پر در حضور باد شدید

□ سیستم تعلیق فعال خودرو: تراش الماس در خودروی متحرک

• قوام: عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

✓ هیچگاه رفتار سیستم را نمی توان دقیقاً شناخت و ارزیابی کرد

□ کنترل دمای بدن حتی در سن بالا

□ رسیدن به سطح یادگیری مناسب برای خلاق ها یا پرکارها

□ کنترل سیستم های پیچیده

□ کنترل سیستم های ابعاد وسیع



اهداف سیستم های کنترل

• تنظیم و ردیابی با وجود محدودیت در عملگرها

✓ به جز خداوند متعال همه چیز و همگان محدودیت دارند

- کنترل دمای بدن با وجود انقباض یا انقباض محدود در شریان ها
- رسیدن به سطح یادگیری مناسب با وجود زمان محدود
- ثابت ماندن منقار مرغ زرین پر با وجود محدودیت سرعت بال زدن پرنده
- دقت و سرعت ربات با وجود ولتاژ و جریان محدود موتورها

• رفع اثر نویز مسگر ها در تنظیم یا ردیابی

✓ فیدبک به دریافت اطلاعات و مشاهده محیط بسیار وابسته است

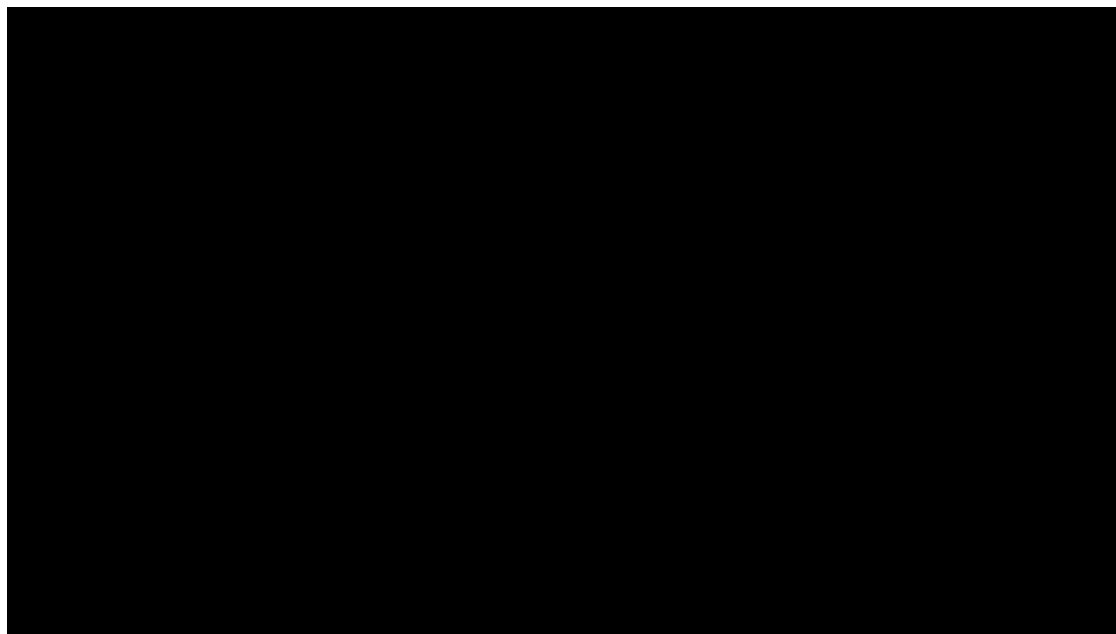
- کنترل ضخامت کاغذ با وجود عدم دقت در اندازه گیری ضخامت
- چگونگی پاس شدن درس های بدون تمرین و پروژه!
- چگونگی اندازه گیری جهت گیری سر مرغ زرین پر (اسلاید بعد!)



اهداف سیستم های کنترل

- پایدار سازی شگفت انگیز سر مرغ

✓ استفاده از آن در تصویربرداری ورزشی!



برگرفته از این پیوند

اهداف سیستم های کنترل

• پایدارسازی

✓ پایدار کردن سیستم های ذاتا ناپایدار

□ تنها توسط سیستم کنترلی مغز است که انسان راست قامت می تواند بایستد.

□ راه رفتن روی طناب



عناوین فصل

پیشگفتار

۱ سیستم کنترل چیست، اجزای سیستم کنترل، نمایش فیزیکی و نمودار بلوکی سیستم کنترل، اهداف سیستم کنترل

اعجاز فیدبک

۲ مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته، بررسی همزمان اهداف تنظیم یا ردیابی، رفع اثر اغتشاش و عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

سافتار های مختلف سیستم کنترل

۳ سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با کنترلگر پیش خور، سیستم حلقه بسته با دو کنترلگر آبخاری، سیستم حلقه بسته آبخاری با دو خروجی، سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت

نمایش مدل در سیستم های کنترل

۴ معادلات دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI، مروری بر تبدیل لاپلاس، ویژگی های تبدیل لاپلاس، استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های کنترل خطی، تعیین پاسخ کامل سیستم با تبدیل لاپلاس

نمایش نمودار بلوکی

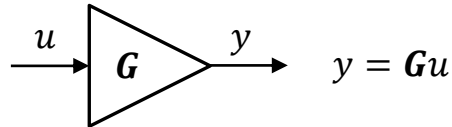
۵ اجزای نمودار بلوکی، اتصالات نمودار بلوکی، ساده سازی نمودار بلوکی مثال های ساده سازی

نمودار گذر سیگنال SFG

۶ نماد ها و اجزای SFG، قانون بهره Mason در حالت کلی و در حالت خاص، مثال های ساده سازی، مدل سازی موتور DC مغناطیس دائم، نمایش فضای حالت

در این فصل با چندین مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، اجزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتار های مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.

• مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته



✓ سیستم ساده با بهره ثابت

سیستم حلقه باز	سیستم حلقه بسته
$y = Pu, \quad u = Cr, \quad y = CPr$	$e = r - y, \quad y = CPe = CP(r - y)$ $y(1 + CP) = CPr \rightarrow y = \frac{CP}{1 + CP} r$

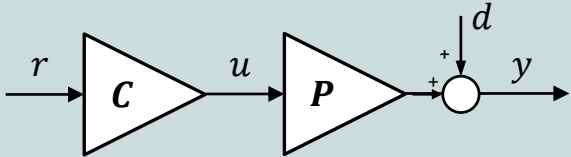
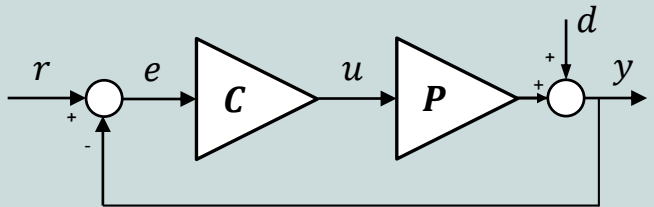
✓ بسته به نوع سیستم بهره سیستم P متفاوت است و هدف طراحی بهره کنترل کننده C است.



• هدف اول تنظیم یا ردیابی $y \approx r$

سیستم حلقه باز	سیستم حلقه بسته
برای تنظیم یا ردیابی $y \approx r$ بایستی $y = CP r \rightarrow CP = 1$ در نتیجه اگر سیستم دارای بهره P باشد کنترل کننده بایستی دارای بهره وارون آن باشد: $C = 1/P$ – بهره کنترل کننده بایستی متناسب با سیستم انتخاب شود	برای تنظیم یا ردیابی $y \approx r$ بایستی $y = \frac{CP}{1 + CP} r \rightarrow \frac{CP}{1 + CP} = 1$ در نتیجه فارغ از اینکه بهره سیستم P چه میزان باشد، کنترل کننده بایستی دارای بهره زیاد باشد: $CP \gg 1 \rightarrow C \gg 1$ – محدودیت عملگرها مانع ازدیاد بیش از حد بهره کنترلگر خواهد شد.

• هدف دوم رفع اثر اغتشاش در تنظیم یا ردیابی $y \approx r$ با مضمور d

سیستم حلقه باز	سیستم حلقه بسته
	
$y = d + Pu, \quad u = Cr, \quad y = d + CPr$	$e = r - y, \quad y = d + CPe = d + CP(r - y)$ $y(1 + CP) = d + CPr \rightarrow y = \frac{CP}{1 + CP} r + \frac{1}{1 + CP} d$
در این ساختار کنترلی رفع اغتشاش امکان پذیر نیست و اغتشاش به صورت کامل در خروجی دیده می شود.	با طراحی کنترل کننده با بهره زیاد $CP \gg 1$ هم ردیابی صورت می گیرد $\frac{CP}{1+CP} \approx 1$ و هم رفع اغتشاش $\frac{1}{1+CP} \approx 0$



• هدف سوم قوام: عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

✓ تعریف ریاضی حساسیت نرمالیزه شده: رفتار خروجی سیستم $M = \frac{y}{r}$ به شناخت مدل P

$$S_P^M = \frac{\partial M/M}{\partial P/P} = \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \frac{P}{M}$$

سیستم حلقه بسته

$$M = \frac{CP}{1+CP}$$

در این ساختار

$$\begin{aligned} S_P^M &= \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \frac{P}{M} \\ &= \frac{C \cdot (1+CP) - C \cdot CP}{(1+CP)^2} \cdot \frac{C \cdot (1+CP)}{CP} = \frac{1}{1+CP} \end{aligned}$$

در نتیجه

بدین ترتیب با کنترلگر بهره بالا $CP \gg 1$ حساسیت رفتار خروجی به مدل نزدیک صفر می شود!

سیستم حلقه باز

$$M = CP$$

در این ساختار

$$S_P^M = \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \frac{P}{M} = C \cdot \frac{P}{CP} = 1$$

در نتیجه

بدین ترتیب با هر کنترلگری ۱۰۰٪ حساسیت به مدل وجود دارد!



اعجاز فیدبک

• دستیابی به سه هدف همزمان تنها با استفاده از فیدبک



✓ تنظیم یا ردیابی

✓ در حضور اغتشاش

✓ و مقاوم در برابر عدم شناخت دقیق مدل

□ در طول درس در خصوص اهمیت استفاده

از فیدبک در پایداری سیستم حلقه بسته و همچنین
با حضور محدودیت های عملگر ها و نویز اندازه گیری
گفتگو خواهیم کرد ...

عناوین فصل

پیشگفتار

۱ سیستم کنترل چیست، اجزای سیستم کنترل، نمایش فیزیکی و نمودار بلوکی سیستم کنترل، اهداف سیستم کنترل

اعجاز فیدبک

۲ مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته، بررسی همزمان اهداف تنظیم یا ردیابی، رفع اثر اغتشاش و عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

سافتار های مختلف سیستم کنترل

۳ سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با کنترلگر پیش خور، سیستم حلقه بسته با دو کنترلگر آبخاری، سیستم حلقه بسته آبخاری با دو خروجی، سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت

نمایش مدل در سیستم های کنترل

۴ معادلات دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI، مروری بر تبدیل لاپلاس، ویژگی های تبدیل لاپلاس، استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های کنترل خطی، تعیین پاسخ کامل سیستم با تبدیل لاپلاس

نمایش نمودار بلوکی

۵ اجزای نمودار بلوکی، اتصالات نمودار بلوکی، ساده سازی نمودار بلوکی مثال های ساده سازی

نمودار گذر سیگنال SFG

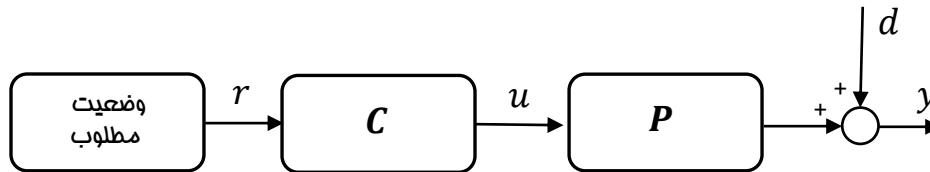
۶ نماد ها و اجزای SFG، قانون بهره Mason در حالت کلی و در حالت خاص، مثال های ساده سازی، مدل سازی موتور DC مغناطیس دائم، نمایش فضای حالت

در این فصل با چندین مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، اجزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتار های مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.

ساختارهای مختلف سیستم کنترل

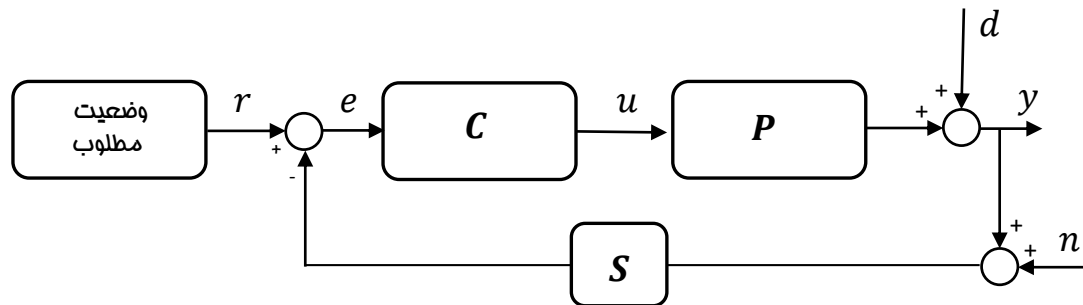
سیستم حلقه باز

✓ با اغتشاش d در خروجی



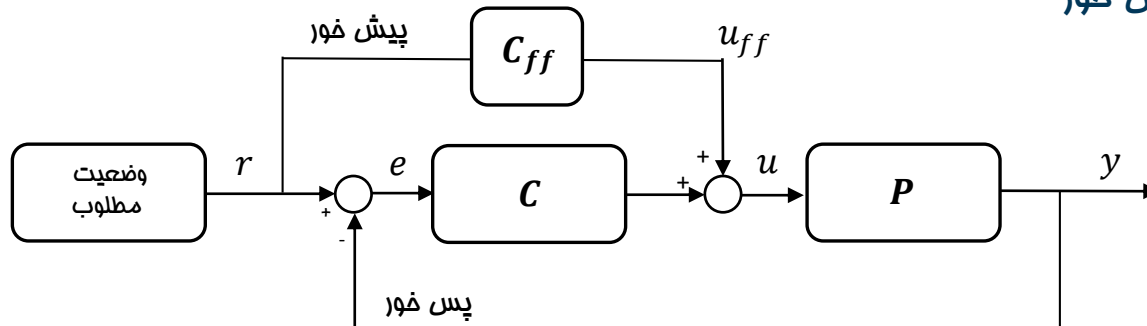
سیستم حلقه بسته

✓ با حضور حسگر S و نویز اندازه گیری n و اغتشاش d در خروجی

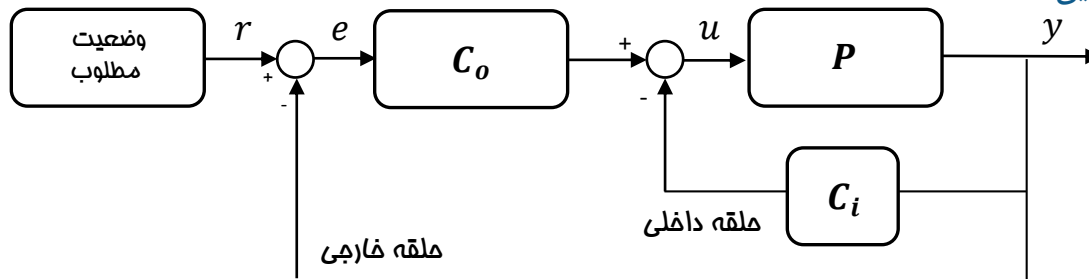


ساختارهای مختلف سیستم کنترل

- سیستم ملقه بسته با کنترلگر پیش خور
✓ دو کنترلگر (رفع اغتشاش معین)



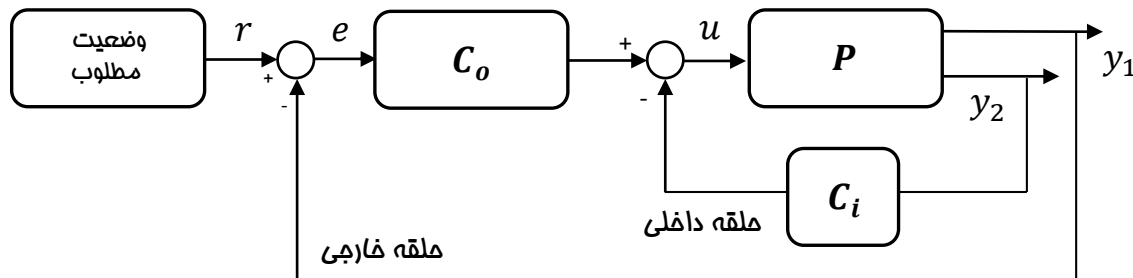
- سیستم ملقه بسته با دو کنترلگر آبهاری
✓ کاهش حساسیت و رفع اغتشاش نامعین



ساختارهای مختلف سیستم کنترل

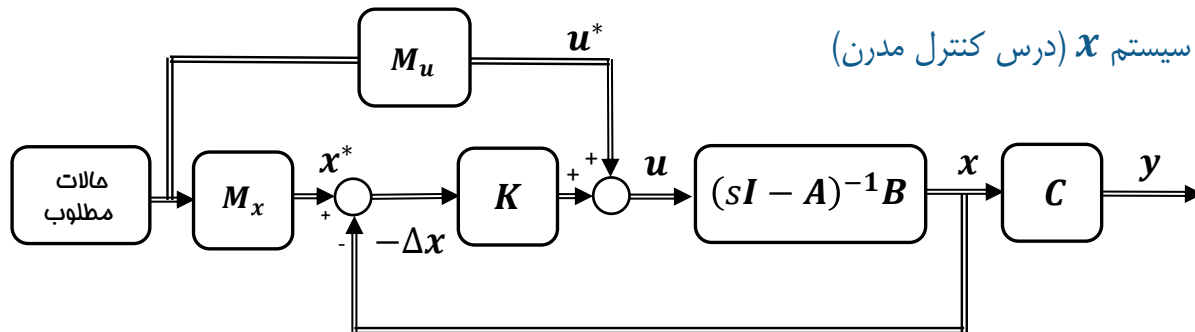
سیستم حلقه بسته آبهاری با دو خروجی

✓ کنترل دو هدفه



سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت K

✓ استفاده از بردار متغیر حالت سیستم x (درس کنترل مدرن)



برگرفته از کتاب [کنترل مدرن](#) ص ۳۲۸

عناوین فصل

پیشگفتار

۱ سیستم کنترل چیست، اجزای سیستم کنترل، نمایش فیزیکی و نمودار بلوکی سیستم کنترل، اهداف سیستم کنترل

اعجاز فیدبک

۲ مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته، بررسی همزمان اهداف تنظیم یا ردیابی، رفع اثر اغتشاش و عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

سافتار های مختلف سیستم کنترل

۳ سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با کنترلگر پیش خور، سیستم حلقه بسته با دو کنترلگر آبخاری، سیستم حلقه بسته آبخاری با دو خروجی، سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت

نمایش مدل در سیستم های کنترل

۴ معادلات دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI، مروری بر تبدیل لاپلاس، ویژگی های تبدیل لاپلاس، استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های کنترل خطی، تعیین پاسخ کامل سیستم با تبدیل لاپلاس

نمایش دیگرام بلوکی

۵ اجزای نمودار بلوکی، اتصالات نمودار بلوکی، ساده سازی نمودار بلوکی مثال های ساده سازی

نمودار گذر سیگنال SFG

۶ نماد ها و اجزای SFG، قانون بهره Mason در حالت کلی و در حالت خاص، مثال های ساده سازی، مدل سازی موتور DC مغناطیس دائم، نمایش فضای حالت

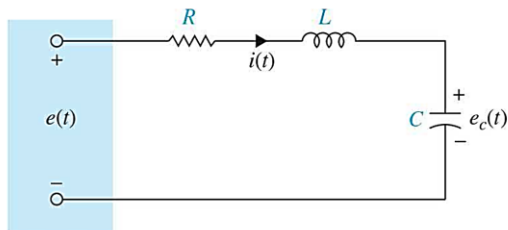
در این فصل با چندین مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، اجزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتار های مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.

نمایش مدل در سیستم های کنترل

مشخصات مدل

✓ نقطه شروع طراحی در سیستم های کنترل (هدف ردیابی)

□ مدل یک مدار الکتریکی

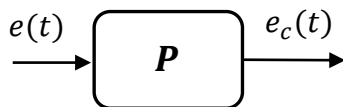


$$e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e_c(t), \quad C \dot{e}_c(t) = i(t)$$

با جایگذاری $i(t)$ در معادله دیفرانسیل اول و نماد $\dot{e}_c(t) = \frac{de_c(t)}{dt}$ خواهیم داشت:

$$LC \ddot{e}_c(t) + RC \dot{e}_c(t) + e_c(t) = e(t)$$

با در نظر گرفتن نمایش ورودی خروجی سیستم معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورودی-خروجی به صورت زیر به دست می آید.



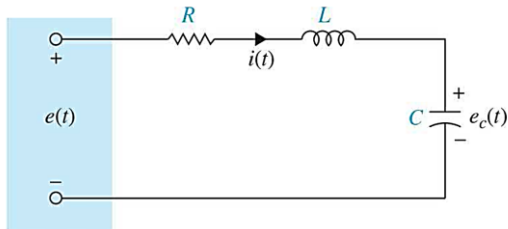
$$\ddot{e}_c(t) + \frac{R}{L} \dot{e}_c(t) + \frac{1}{LC} e_c(t) = \frac{1}{LC} e(t)$$

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• مشخصات مدل

□ مدل یک مدار الکتریکی

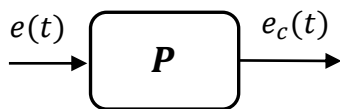
بسیار متداول است از نمادهای زیر برای سیستم های مرتبه دوم استفاده نمود:



• ثابت زمانی: $\tau_n = 1/\sqrt{LC}$

• فرکانس طبیعی: $\omega_n = 1/\tau_n$

• نسبت استهلاک $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{C/L}$



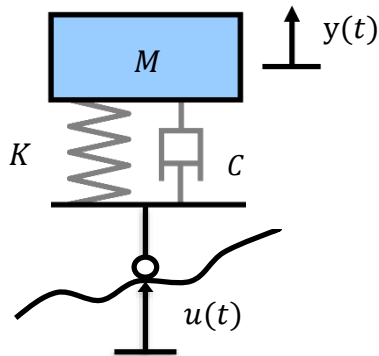
$$\ddot{e}_c(t) + 2\xi\omega_n\dot{e}_c(t) + \omega_n^2 e_c(t) = \omega_n^2 e(t)$$

این سیستم با یک معادله دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI نمایش داده شده است.

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• مشخصات مدل

✓ مدل ساده سیستم تعلیق خودرو: (هدف تنظیم)

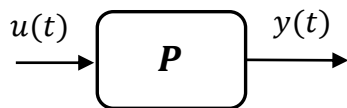


$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = C\dot{u}(t) + Ku(t)$$

با استفاده از نمادهای زیر برای سیستم های مرتبه دوم :

• فرکانس طبیعی: $\omega_n = \sqrt{K/M}$

• نسبت استهلاک $\xi = \frac{C}{2} \sqrt{M/K}$



$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t)$$

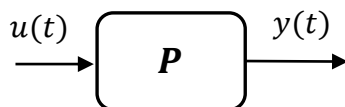
این سیستم هم با یک معادله دیفرانسیل LTI نمایش داده شده است.



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• نمایش سیستم با معادلات دیفرانسیل LTI

✓ بسیاری از سیستم های واقعی را می توان با یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت زیر مدل نمود، که در آن $y^{(n)}$ نماد مشتق n ام y است :



$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

✓ با استفاده از تبدیل لاپلاس می توان این سیستم را با تابع تبدیل زیر نیز نمایش داد.

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• مروری بر تبدیل لاپلاس

✓ یکی از روش هایی است که توسط آن پاسخ معادلات دیفرانسیل خطی به دست می آید.

□ در این روش پاسخ همگن و خصوصی معادلات دیفرانسیل به صورت همزمان به دست می آید.

□ توسط این روش معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری در فضای S تبدیل و به راحتی حل می شود.

✓ تعریف تبدیل لاپلاس

□ در توابع علی با فرض اینکه به ازای مقدار حقیقی σ این انتگرال $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$ کران دار باقی بماند،

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که با $f(s)$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

که در آن متغیر S که به آن اپراتور لاپلاس نیز گفته می شود یک متغیر مختلط و برابر $S = \sigma + j\omega$ است.

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• مروری بر تبدیل لاپلاس

✓ مثال ۱: تبدیل لاپلاس تابع پله واحد را بیابید:

$$f(t) = u_s(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

در این صورت

$$u_s(s) = \mathcal{L}(u_s(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

این پاسخ زمانی درست است که $\int_0^{\infty} |u_s(t) e^{-\sigma t}| dt = \int_0^{\infty} |e^{-\sigma t}| dt < \infty$

که تنها زمانی که قسمت حقیقی متغیر s که آنرا با σ نمایش می دهیم بزرگتر از صفر باشد: $\sigma > 0$.



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• مروری بر تبدیل لاپلاس

✓ مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$ را بیابید:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{1}{s + \alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha}$$

این پاسخ زمانی درست است که $\sigma + \alpha > 0$ باشد.



حل دستی

✓ مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t^5 + 2t^3$, $t \geq 0$ را بیابید:

```
% Defining symbolic variables:
```

```
syms t
```

```
f=t^5 + 2*t^3;
```

```
% Laplace transform operation
```

```
F=laplace(f)
```

```
F =
```

```
12/s^4 + 120/s^6
```



حل کامپیوتری

نمایش مدل در سیستم های کنترل

جدول تبدیل لاپلاس

Laplace Transform $F(s)$	Time Function $f(t)$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$	$\sin \omega_n t$
$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos \omega_n t$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}$	$1 - \cos \omega_n t$
$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+\omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\alpha^2 + \omega_n^2} \sin(\omega_n t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$
$\frac{\omega_n}{(s+\alpha)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n}{\alpha^2 + \omega_n^2} e^{-\alpha t} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_n^2}} \sin(\omega_n t - \theta)$ where $\theta = \tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t (\zeta < 1)$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$ where $\theta = \cos^{-1} \zeta (\zeta < 1)$
$\frac{s\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \theta)$ where $\theta = \cos^{-1} \zeta (\zeta < 1)$
$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\zeta\omega_n + \omega_n^2}{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha - \zeta\omega_n} (\zeta < 1)$
$\frac{\omega_n^2}{s^3(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$ where $\theta = \cos^{-1}(2\zeta^2 - 1) (\zeta < 1)$

Laplace Transform $F(s)$	Time Function $f(t)$
1	Unit-impulse function $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Unit-step function $u_s(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Unit-ramp function t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (n = positive integer)
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$ (n = positive integer)
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) (\alpha \neq \beta)$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t}) (\alpha \neq \beta)$
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^3} \left[t - \frac{2}{\alpha} + \left(t + \frac{2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} \right]$

برگرفته از ضمیمه کتاب KOU

نمایش مدل در سیستم های کنترل

جدول تبدیل لاپلاس

Laplace Transform $F(s)$	Time Function $f(t)$
1	Unit-impulse function $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Unit-step function $u_s(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Unit-ramp function t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ($n = \text{positive integer}$)
$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$ ($n = \text{positive integer}$)
$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ ($\alpha \neq \beta$)
$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha}(\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$ ($\alpha \neq \beta$)
$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} \left[t - \frac{2}{\alpha} + \left(t + \frac{2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} \right]$

برگرفته از [ضمیمه کتاب Kou](#)

نمایش مدل در سیستم های کنترل

جدول تبدیل لاپلاس

Laplace Transform $F(s)$ Time Function $f(t)$

$$\frac{s}{(s+\alpha)^2} \quad (1-\alpha t)e^{-\alpha t}$$

$$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \quad \sin \omega_n t$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \quad \cos \omega_n t$$

$$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \quad 1 - \cos \omega_n t$$

$$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2 + \omega_n^2} \quad \omega_n \sqrt{\alpha^2 + \omega_n^2} \sin(\omega_n t + \theta)$$

where $\theta = \tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$

$$\frac{\omega_n}{(s+\alpha)(s^2 + \omega_n^2)} \quad \frac{\omega_n}{\alpha^2 + \omega_n^2} e^{-\alpha t} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_n^2}} \sin(\omega_n t - \theta)$$

where $\theta = \tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t (\zeta < 1)$$

$$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$$

where $\theta = \cos^{-1} \zeta (\zeta < 1)$

$$\frac{s\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \frac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \theta)$$

where $\theta = \cos^{-1} \zeta (\zeta < 1)$

$$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\zeta\omega_n + \omega_n^2}{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$$

where $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha - \zeta\omega_n} (\zeta < 1)$

$$\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$$

where $\theta = \cos^{-1}(2\zeta^2 - 1) (\zeta < 1)$

برگرفته از ضمیمه کتاب KOU



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• ویژگی های تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L} [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha f_1(s) + \beta f_2(s)$$

✓ خطی بودن

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s f(s) - f(0)$$

✓ مشتق گیری

□ متغیر S اپراتور مشتق گیری در حوزه S است

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n f(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad \square \text{ مشتق گیری مرتبه بالا تر:}$$

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} f(s)$$

✓ انتگرال گیری

□ $\frac{1}{s}$ اپراتور انتگرال گیری در حوزه S است

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n(\tau) \right] = \frac{1}{s^n} f(s) \quad \square \text{ انتگرال گیری مرتبه بالا تر:}$$

نمایش مدل در سیستم های کنترل

ویژگی های تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}[f(t-T)u_s(t-T)] = e^{-Ts}f(s)$$

✓ شیفتم زمانی T

$$u_s(t-T) = \begin{cases} 1, & t > T \\ 0, & t \leq T \end{cases}, \quad t > T$$

□ که در آن

$$f(s \pm a) = \mathcal{L}[e^{\mp at}f(t)]$$

✓ شیفتم در متغیر مختلط s

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\right] \quad \text{تبدیل انتگرال کانولوشن به ضرب} \\ &= \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(s) \cdot f_2(s) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$$

✓ قضیه مقدار اولیه

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$$

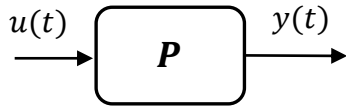
✓ قضیه مقدار نهایی: اگر $sf(s)$ بر روی محور $j\omega$ تحلیلی باشد، آنگاه

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های فطی

✓ تابع تبدیل: معادله دیفرانسیل عمومی یک سیستم را در نظر بگیرید.

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) \\ = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$



✓ تابع تبدیل سیستم با اعمال اپراتور لاپلاس به ازای شرایط اولیه صفر در سیستم به صورت زیر به دست می آید.

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

✓ معادله مشخصه سیستم با اتحاد مخرج تابع تبدیل سیستم با صفر به دست می آید.

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های فطی

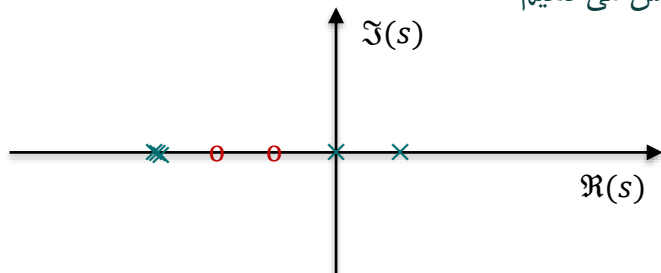
- ✓ قطب سیستم: قطب سیستم در صفحه مختلط در محل ریشه های معادله مشخصه سیستم قرار دارد.
- ✓ صفر سیستم: صفر های سیستم در محل ریشه های چند جمله ای صورت تابع تبدیل قرار دارند
- ✓ تابع تبدیل $P(s)$ در محدوده ای از صفحه مختلط S تحلیلی است اگر این تابع و تمام مشتقات آن در این محدوده کراندار باشند.

$$P(s) = \frac{10(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s+3)^3}$$

□ مثال: سیستمی با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

سیستم دارای دو قطب در $s = 0, s = 1$ و سه قطب تکراری در $s = -3$ ، و دو صفر در $s = -1, s = -2$

قطبها را با علامت $\times$ و صفرها را با علامت o در صفحه مختلط S به صورت زیر نمایش می دهیم



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• وارون تبدیل لاپلاس



مل دستی

✓ روش دستی: تجزیه به کسر های جزئی و استفاده از جداول

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

□ سیستم با قطب های ساده:

$$P(s) = \frac{K_1}{s+s_1} + \frac{K_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+s_n}$$

□ تجزیه سیستم به جمع کسرهای جزئی ساده:

$$K_i = (s + s_i)P(s)|_{s=-s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

• که در آن

$$P(s) = \frac{5s+3}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

□ مثال سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$K_1 = \left. \frac{5s+3}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = -1$$

• که در آن

$$K_2 = \left. \frac{5s+3}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = +7, \quad K_3 = \left. \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-3} = -6$$

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• وارون تبدیل لاپلاس

✓ روش دستی: تجزیه به کسر های جزیی و استفاده از جداول

□ بدین ترتیب:

$$P(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} + \frac{-6}{s+3}$$

□ وارون این تابع تبدیل با استفاده از جدول به صورت زیر به دست می آید:

$$P(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}, \quad \forall t \geq 0$$

✓ روش کامپیوتری: وارون تبدیل لاپلاس سیستم زیر را به دست آورید:

$$P(s) = \frac{5s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

```
% Inverse Laplace transform
clear all
% Defining symbolic variables:
syms s
P=(5*s+3)/(s^3+6*s^2+11*s+6);
p=ilaplace(P)

p = 7*exp(-2*t) - exp(-t) - 6*exp(-3*t)
```



مل دستی



مل کامپیوتری



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• وارون تبدیل لاپلاس

✓ روش دستی: تجزیه به کسر های جزئی و استفاده از جداول

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_{n-r})(s+s_j)^r}$$

□ سیستم با قطب های ساده و تکراری:

$$P(s) = \frac{K_1}{s+s_1} + \frac{K_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_{n-r}}{s+s_{n-r}}$$

□ تجزیه سیستم به جمع کسرهای جزئی ساده:

$$\frac{A_1}{s+s_j} + \frac{A_2}{(s+s_j)^2} + \cdots + \frac{A_{r-1}}{(s+s_j)^{r-1}} + \frac{A_r}{(s+s_j)^r}$$

$$K_i = (s + s_i)P(s)|_{s=-s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-r$$

• که در آن

$$A_r = (s + s_i)^r P(s)|_{s=-s_j}, \quad A_{r-1} = \frac{d}{ds} [(s + s_i)^r P(s)]|_{s=-s_j}$$

• و

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s + s_i)^r P(s)]|_{s=-s_j}, \dots, A_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s + s_i)^r P(s)]|_{s=-s_j}$$

• و



مل دستی



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• وارون تبدیل لاپلاس

✓ وارون تبدیل لاپلاس سیستم زیر را به دست آورید:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3}$$

□ تجزیه به کسرهای جزئی:

$$P(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

$$K_1 = sP(s)|_{s=0} = \frac{1}{2}, \quad K_2 = (s+2)P(s)|_{s=-2} = \frac{1}{2}, \quad A_3 = (s+1)^3 P(s)|_{s=-1} = -1,$$

$$A_2 = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+2)} \right]_{s=-1} = \frac{-2s-2}{s^2(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} \frac{d}{ds} \left[\frac{-2s-2}{s^4+4s^3+4s^2} \right]_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{-2(s^4+4s^3+4s^2) + 2(s+1)(4s^3+12s^2+8s)}{(s^4+4s^3+4s^2)^2} \Big|_{s=-1} = -1$$

□ وارون تبدیل لاپلاس:

$$P(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$



مل دستی



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• وارون تبدیل لاپلاس

✓ روش کامپیوتری: وارون تبدیل لاپلاس سیستم زیر را به دست آورید:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

```
%% Inverse Laplace transform
clear all
% Defining symbolic variables:
syms s
P=1/(s*(s+1)^3*(s+2));
p=ilaplace(P)
```



مل کامپیوتری

$$p = \exp(-2*t)/2 - \exp(-t) - (t^2*\exp(-t))/2 + 1/2$$

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• استفاده از تبدیل لاپلاس در تعیین پاسخ کامل سیستم خطی

✓ مثال پاسخ سیستم زیر را به ورودی پله واحد $u(t) = u_s(t)$ با شرایط اولیه $x(0)$

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 5u(t) \quad \dot{x}(0) = 2, \quad x(0) = -1 \text{ به دست آورید.}$$

$$s^2 x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3sx(s) - 3x(0) + 2x(s) = \frac{5}{s} \quad \square \text{ لاپلاس بگیرید:}$$

$$x(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{5}{s} - s - 1 \rightarrow x(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

$$x(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2} \quad \square \text{ تجزیه به کسرهای جزیی:}$$

$$K_1 = \frac{5}{2}, \quad K_2 = -5, \quad K_3 = \frac{3}{2}$$

$$x(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \quad \forall t \geq 0 \quad \square \text{ وارون تبدیل لاپلاس:}$$



مل دستی

نمایش مدل در سیستم های کنترل

- استفاده از تبدیل لاپلاس در تعیین پاسخ کامل سیستم فطی

$$x(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

✓ وارون لاپلاس سیستم:

f

Solution

Keep Practicing >

Show Steps

Laplace Inverse Transform of $\frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$:

$\frac{5}{2}H(t) - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$

N

Steps

$L^{-1}\left\{\frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}\right\}$

Take the partial fraction of $\frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$:

$\frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$

Show Steps



مل online

سایت Symbolab



Pierre-Simon Laplace

(23 March 1749 – 5 March 1827)

was a French **scholar** and **polymath** whose work was important to the development of **engineering**, **mathematics**, **statistics**, **physics**, **astronomy**, and **philosophy**. He summarized and extended the work of his **predecessors** in his five-volume **Mécanique Céleste** (**Celestial Mechanics**) (1799–1825). This work translated the geometric study of **classical mechanics** to one based on **calculus**, opening up a broader range of problems. In statistics, the **Bayesian interpretation** of probability was developed mainly by Laplace. Laplace formulated **Laplace's equation**, and pioneered the **Laplace transform** which appears in many branches of **mathematical physics**, a field that he took a leading role in forming. The **Laplacian differential operator**, widely used in mathematics, is also named after him. He restated and developed the **nebular hypothesis** of the **origin of the Solar System** and was one of the first scientists to postulate the existence of **black holes** and the notion of gravitational **collapse**.

Laplace is remembered as one of the greatest scientists of all time. Sometimes referred to as the *French Newton* or *Newton of France*, he has been described as possessing a phenomenal natural mathematical faculty superior to that of any of his contemporaries. He was Napoleon's examiner when **Napoleon** attended the **École Militaire** in Paris in 1784. Laplace became a count of the **Empire** in 1806 and was named a **marquis** in 1817, after the **Bourbon Restoration**.

برگرفته از [پیوند](#)

عناوین فصل

پیشگفتار

۱ سیستم کنترل چیست، اجزای سیستم کنترل، نمایش فیزیکی و نمودار بلوکی سیستم کنترل، اهداف سیستم کنترل

اعجاز فیدبک

۲ مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته، بررسی همزمان اهداف تنظیم یا ردیابی، رفع اثر اغتشاش و عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

سافتار های مختلف سیستم کنترل

۳ سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با کنترلگر پیش خور، سیستم حلقه بسته با دو کنترلگر آبخاری، سیستم حلقه بسته آبخاری با دو خروجی، سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت

نمایش مدل در سیستم های کنترل

۴ معادلات دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI، مروری بر تبدیل لاپلاس، ویژگی های تبدیل لاپلاس، استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های کنترل خطی، تعیین پاسخ کامل سیستم با تبدیل لاپلاس

نمایش دیگران بلوکی

۵ اجزای نمودار بلوکی، اتصالات نمودار بلوکی، ساده سازی نمودار بلوکی مثال های ساده سازی

نمودار گذر سیگنال SFG

۶ نماد ها و اجزای SFG، قانون بهره Mason در حالت کلی و در حالت خاص، مثال های ساده سازی، مدل سازی موتور DC مغناطیس دائم، نمایش فضای حالت

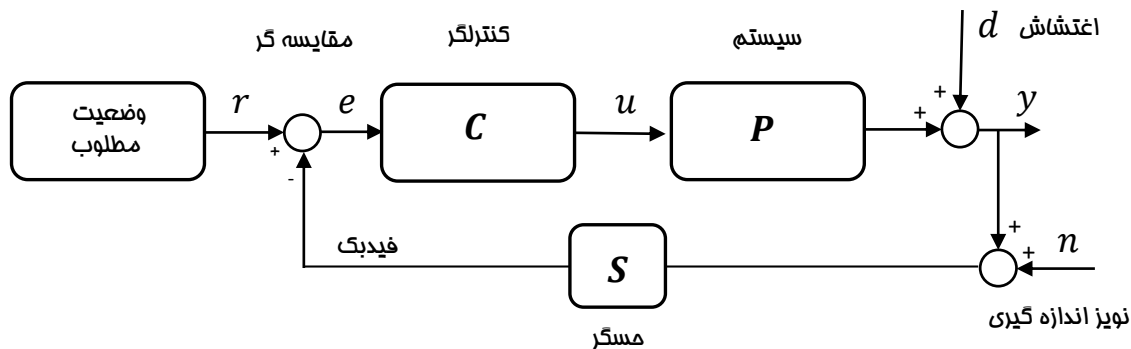
در این فصل با چندین مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، اجزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتار های مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.

نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی

✓ نمودار بلوکی روشی ساده برای نمایش سیستم ها در فضای لاپلاس است.

□ نمایش عمومی یک سیستم کنترل با نمودار بلوکی (خروجی y تحت تاثیر ورودی های ردیابی r ، اغتشاش d ، و نویز n)

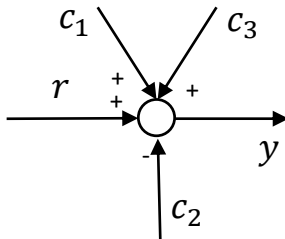


✓ با استفاده از جبر حاکم بر نمودار بلوکی تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را می توان یافت:

$$y(s) = M(s)r(s) + D(s)d(s) + N(s)n(s)$$

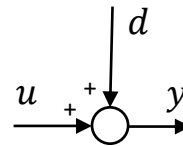
نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی



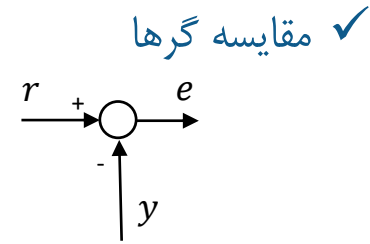
چندین جمع و تفریق

$$y(s) = r(s) + c_1(s) - c_2(s) + c_3(s),$$



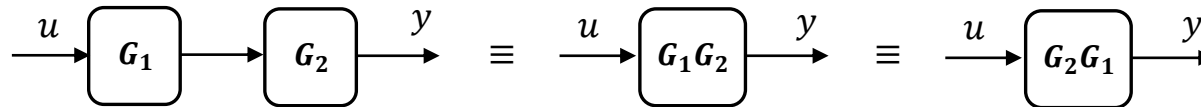
جمع کننده

$$y(s) = u(s) + d(s),$$



تفاضلی

$$e(s) = r(s) - y(s)$$



اتصال سری ✓

نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی

✓ اتصال موازی



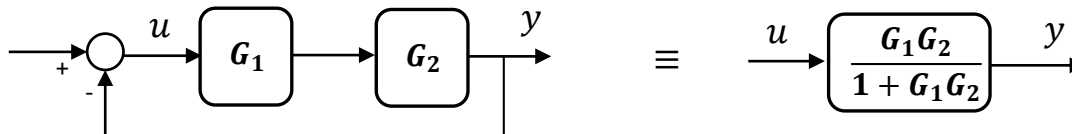
✓ اتصال فیدبک منفی

با کنترلر در مدار پسخور



✓ اتصال فیدبک منفی

با کنترلر در مدار پیش رو



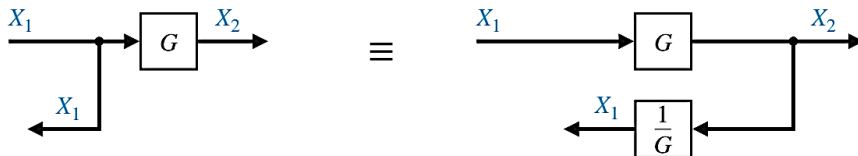
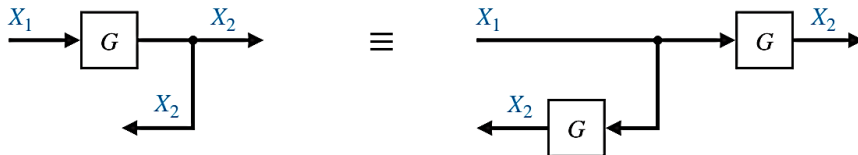
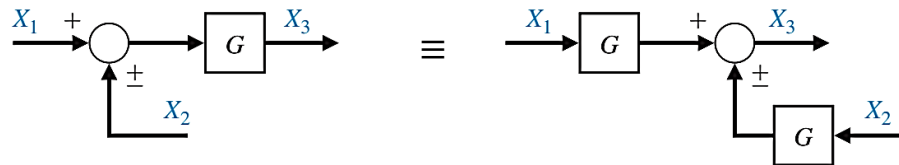
نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی

✓ جا به جایی مقایسه گر

✓ جا به جایی نقطه اتصال

✓ جا به جایی مقایسه گر و سیستم



برگرفته از کتاب Dorf

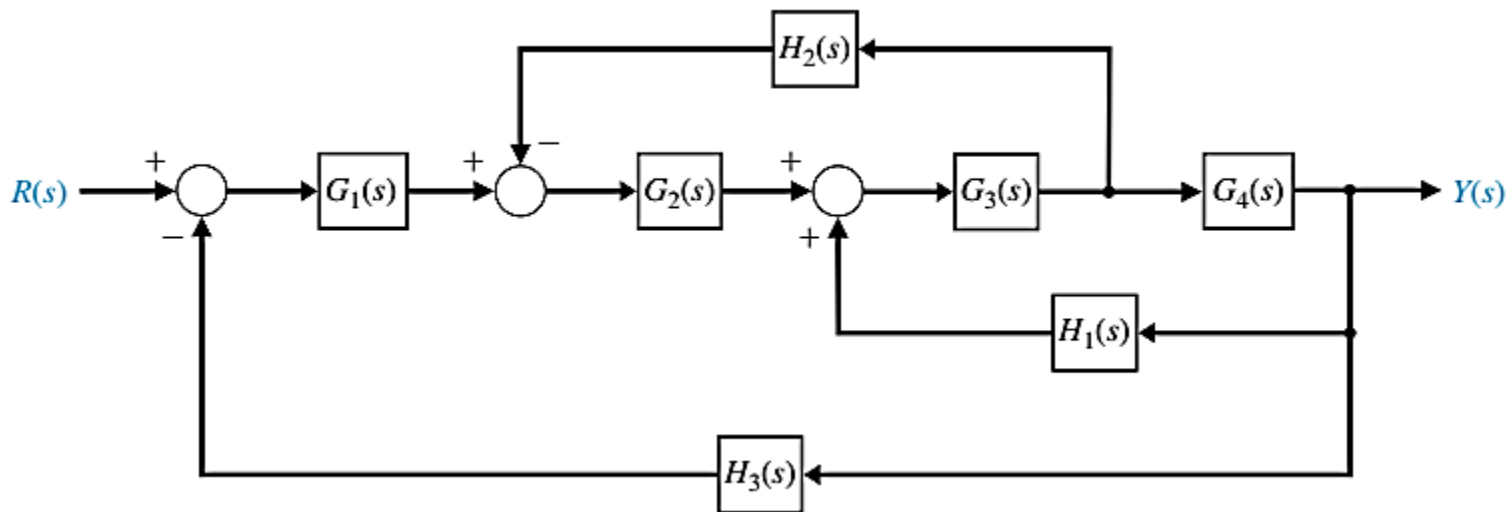
نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی



مل دستی

✓ مثال ۱: تابع تبدیل سیستم حلقه بسته زیر را به دست آورید.

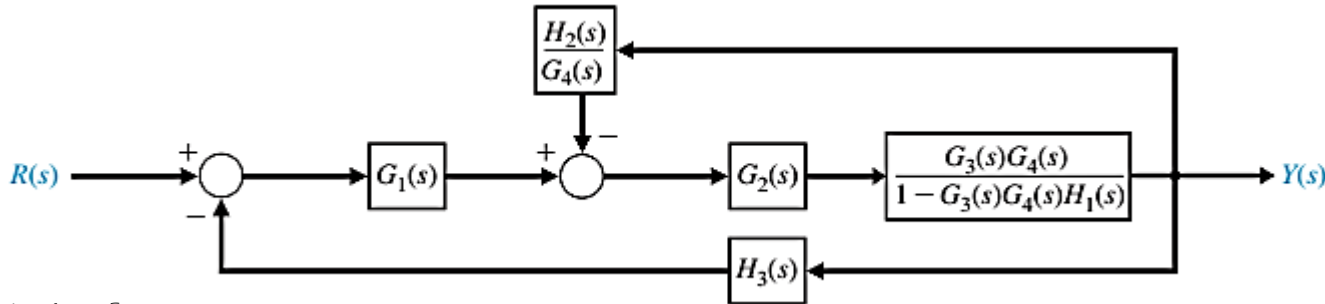
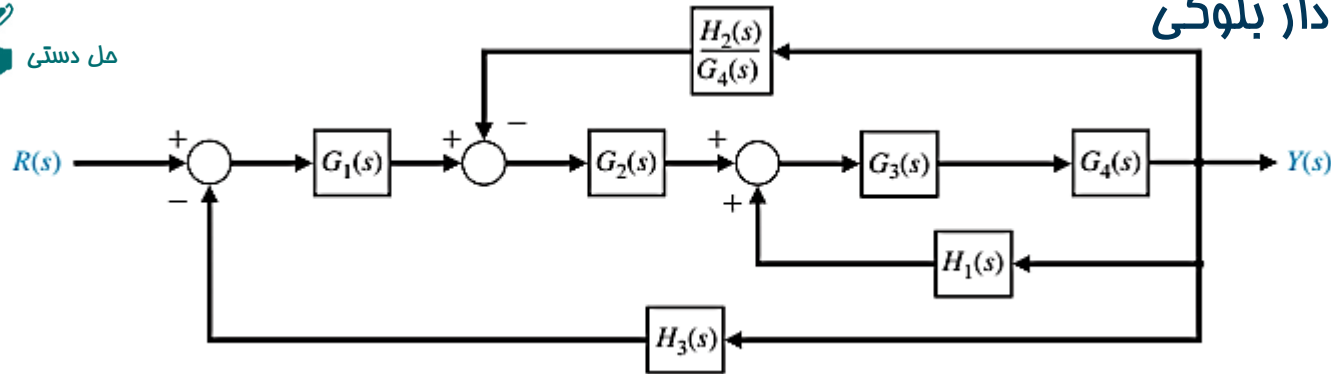


برگرفته از کتاب Dorf

نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی

✓ ادامه مثال ۱

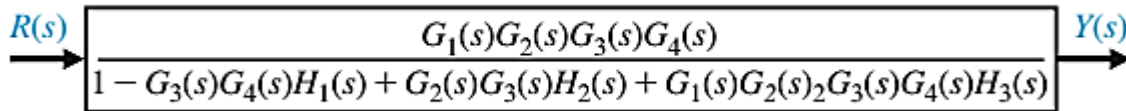
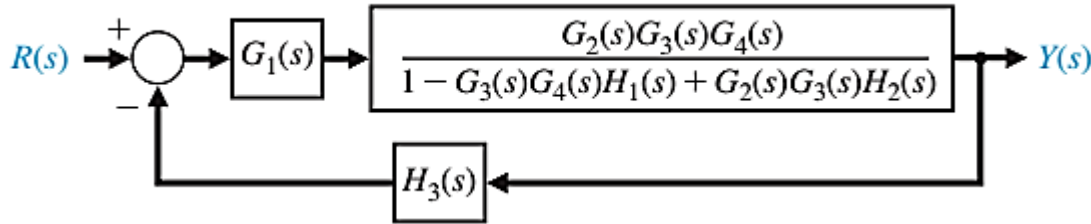


برگرفته از کتاب Dorf

نمایش نمودار بلوکی

• ساده سازی نمودار بلوکی

✓ ادامه مثال ۱



برگرفته از کتاب Dorf

عناوین فصل

پیشگفتار

۱ سیستم کنترل چیست، اجزای سیستم کنترل، نمایش فیزیکی و نمودار بلوکی سیستم کنترل، اهداف سیستم کنترل

اعجاز فیدبک

۲ مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته، بررسی همزمان اهداف تنظیم یا ردیابی، رفع اثر اغتشاش و عدم حساسیت به شناخت دقیق سیستم

سافتارهای مختلف سیستم کنترل

۳ سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با کنترلگر پیش خور، سیستم حلقه بسته با دو کنترلگر آبخاری، سیستم حلقه بسته آبخاری با دو خروجی، سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت

نمایش مدل در سیستم های کنترل

۴ معادلات دیفرانسیل خطی غیر متغیر با زمان LTI، مروری بر تبدیل لاپلاس، ویژگی های تبدیل لاپلاس، استفاده از تبدیل لاپلاس در نمایش سیستم های کنترل خطی، تعیین پاسخ کامل سیستم با تبدیل لاپلاس

نمایش دیگران بلوکی

۵ اجزای نمودار بلوکی، اتصالات نمودار بلوکی، ساده سازی نمودار بلوکی مثال های ساده سازی

نمودار گذر سیگنال SFG

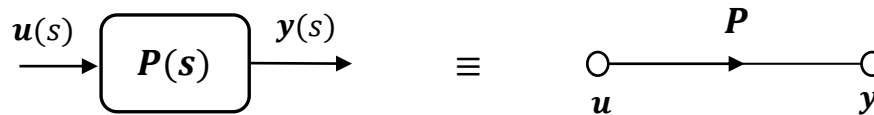
۶ نماد ها و اجزای SFG، قانون بهره Mason در حالت کلی و در حالت خاص، مثال های ساده سازی، مدل سازی موتور DC مغناطیس دائم، نمایش فضای حالت

در این فصل با چندین مثال بیولوژیکی، اجتماعی و صنعتی با سیستم کنترل، اجزای آن، نمایش های فیزیکی و نمودار بلوکی و اهداف سیستم کنترل آشنا می شویم. سپس اهمیت استفاده از فیدبک و اعجاز آن در رسیدن به اهداف سه گانه همزمان را مورد بررسی قرار داده و سپس سافتارهای مختلف سیستم های کنترل را مرور می کنیم. در بخش دوم این فصل نمایش های مختلف نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال SFG و نمایش فضای حالت را بررسی نموده با مثال های متنوع روش ساده سازی دستی و با استفاده از ابزارهای کامپیوتری را بررسی خواهیم نمود.

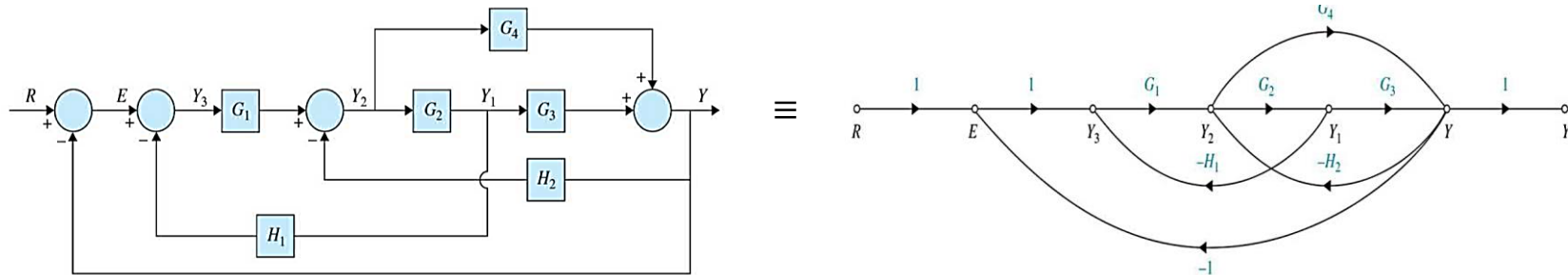
نمایش مدل در سیستم های کنترل

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph

- ✓ روش دیگری برای نمایش اتصال پیچیده سیستم ها SFG است
- ✓ در این نمایش به جای استفاده از نمودار بلوکی از نمودار گذر سیگنال به صورت زیر استفاده می شود.



- ✓ بدین ترتیب می توان نمودار های بلوکی را با SFG نمایش داد:



برگرفته از کتاب Kou

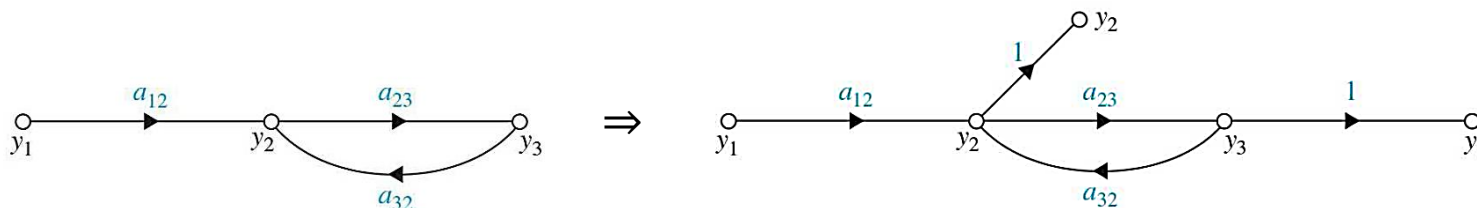
نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph

نمادهای نمودار گذر سیگنال SFG

✓ اجزای یک SFG

□ گره ورودی u ، گره خروجی y ، گره میانی:

• نحوه تمایز گره های ورودی و خروجی از گره های میانی: در این مثال y_1 گره ورودی و y_2, y_3 هر دو گره خروجی هستند



□ مسیر پیش رو: مسیری که از یک گره ورودی آغاز و به یک گره خروجی منتهی می شود، بدون اینکه هیچ یک از گره های مسیر بیش از یک بار نوردهیده شوند.

□ حلقه: مسیری که از یک گره آغاز و به همان گره بر می گردد بدون آنکه یک گره ای در مسیر را بیش از یک بار طی کند.

□ حلقه های بی تماس: حلقه هایی که دارای گره مشترکی نباشند.

برگرفته از کتاب Kou



نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph

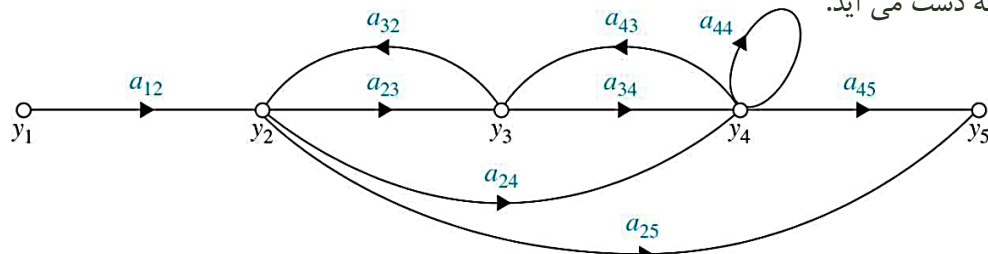
نماد های نمودار گذر سیگنال SFG

✓ اجزای یک SFG

□ بهره مسیر:

• بهره مسیر از حاصل ضرب بهره های اجزای مسیر به دست می آید.

✓ مثال: نمودار گذر سیگنال زیر را در نظر بگیرید:



□ در این مثال y_1 گره ورودی و سایر گره ها می توانند به صورت گره خروجی در نظر گرفته شوند.

□ دو مسیر مستقیم بین y_1 و y_4 وجود دارد که دارای بهره های زیرند: $a_{12}a_{24}$ و $a_{12}a_{23}a_{34}$

□ دو مسیر مستقیم بین y_1 و y_3 وجود دارد! که دارای بهره های زیرند: $a_{12}a_{23}$ و $a_{12}a_{24}a_{43}$

□ چهار حلقه با بهره های زیر وجود دارند: $a_{23}a_{32}$ و $a_{34}a_{43}$ و a_{44} و $a_{24}a_{43}a_{32}$

□ دو حلقه زیر بی تماس هستند: $a_{23}a_{32}$ و a_{44} .

برگرفته از کتاب Kou

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph

قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ حالت کلی:

$$M = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}$$

که در آن:

y_{in} نماد متغیر گره ورودی

y_{out} نماد متغیر گره خروجی

M بهره نهایی بین متغیر ورودی و خروجی

N مجموع تعداد مسیر های پیش روی بین متغیر گره ورودی و خروجی

M_k بهره مسیر پیش روی k ام بین ورودی و خروجی

Δ ۱ - (جمع بهره های تمامی حلقه های مستقل) + (جمع حاصل ضرب بهره های تمامی ترکیب های دو حلقه بی تماس) - (جمع حاصل

ضرب بهره های تمامی ترکیب های سه حلقه بی تماس) + (جمع حاصل ضرب بهره های تمامی ترکیب های چهار حلقه بی تماس) - ...

Δ_k Δ بخشی از نمودار SFG که با مسیر پیش روی k ام در تماس نیست.

برگرفته از کتاب Kou



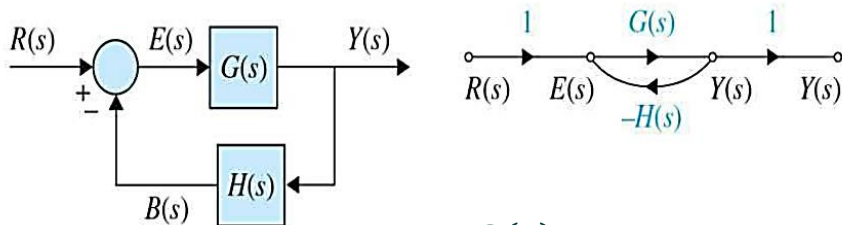
نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph



مل دستی

قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ مثال ۱: بهره سیستم زیر را به دست آورید.



$$M_1 = G(s)$$

پاسخ: در این مثال ساده تنها یک مسیر پیش رو وجود دارد:

$$L_{11} = -G(s)H(s)$$

تنها یک حلقه وجود دارد:

$$\Delta_1 = 1, \Delta = 1 - L_{11} = 1 + G(s)H(s)$$

هیچ حلقه بدون تماسی وجود ندارد:

بدین ترتیب بهره نهایی سیستم به صورت زیر به دست می آید:

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

برگرفته از کتاب Kou

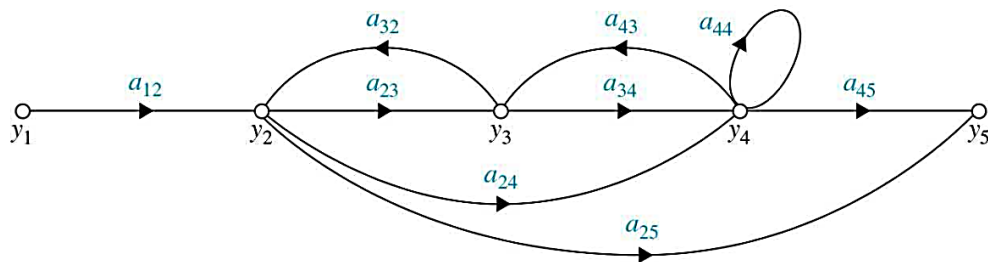


نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph



قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ مثال ۲: بهره سیستم زیر را به دست آورید.



پاسخ: در این مثال سه مسیر پیش رو وجود دارد:

$$M_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}, M_2 = a_{12}a_{25}, M_3 = a_{12}a_{24}a_{45}$$

چهار حلقه وجود دارد:

$$L_{11} = a_{23}a_{32}, L_{21} = a_{34}a_{43}, L_{31} = a_{24}a_{43}a_{32}, L_{41} = a_{44}$$

دو حلقه بی تماس وجود دارد (L_{11}, L_{41}) که حاصل ضرب بهره های ایشان برابر است با:

$$L_{12} = a_{23}a_{32}a_{44},$$

بدین ترتیب:

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{21} + L_{31} + L_{41}) + L_{12}$$

$$= 1 - a_{23}a_{32} - a_{34}a_{43} - a_{24}a_{32}a_{43} - a_{44} + a_{23}a_{32}a_{44}$$

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1$$

همگی حلقه ها با مسیر پیش رو اول و سوم در تماس هستند، لذا

$$\Delta_2 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44}$$

دو حلقه (L_{31}, L_{41}) با مسیر پیش رو دوم در تماس است. لذا:

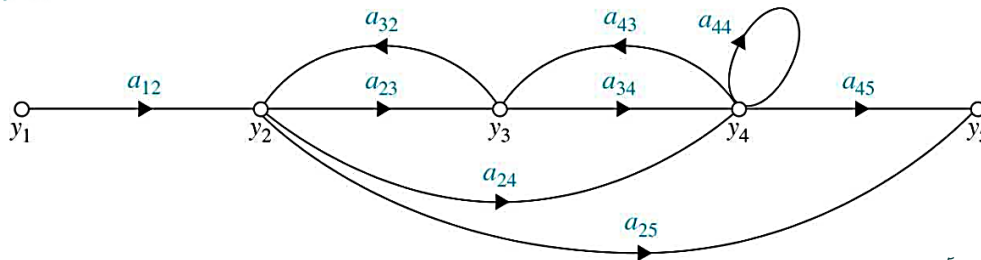
برگرفته از کتاب Kou

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph



قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ ادامه مثال ۲:



بدین ترتیب بهره نهایی سیستم به صورت زیر به دست می آید:

$$M = \frac{y_5(s)}{y_1(s)} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + M_3 \Delta_3}{\Delta}$$

$$= \frac{a_{12} a_{23} a_{34} a_{45} + a_{12} a_{25} (1 - a_{34} a_{43} - a_{44}) + a_{12} a_{24} a_{45}}{1 - a_{23} a_{32} - a_{34} a_{43} - a_{24} a_{32} a_{43} - a_{44} + a_{23} a_{32} a_{44}}$$

$$\frac{y_2(s)}{y_1(s)} = \frac{a_{12}(1 - a_{34} a_{43} - a_{44})}{\Delta}$$

شما می توانید به راحتی بررسی کنید که:

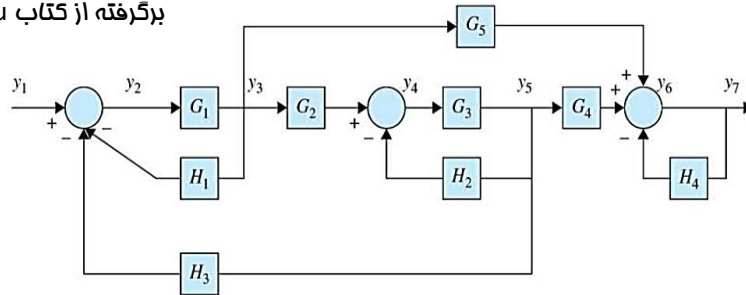
برگرفته از کتاب Kou

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph



مل دستی

برگرفته از کتاب Kou



$$M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4, \quad M_2 = G_1 G_5$$

$$L_{11} = -G_1 H_1, \quad L_{21} = -G_3 H_2, \quad L_{31} = -G_1 G_2 G_3 H_3, \quad L_{41} = -H_4$$

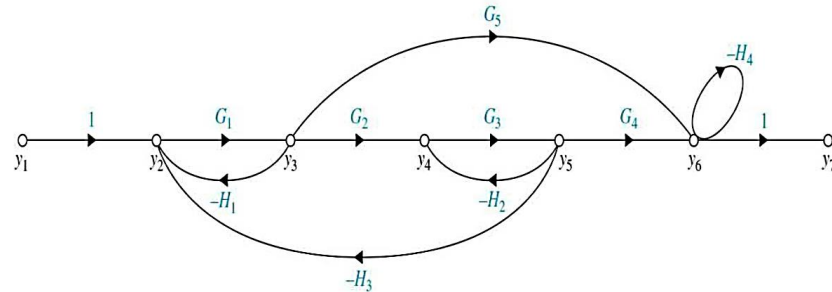
$$L_{12} = G_1 H_1 G_3 H_2, \quad L_{22} = G_1 H_1 H_4, \quad L_{32} = G_3 H_2 H_4$$

$$L_{42} = G_1 G_2 G_3 H_3 H_4$$

$$L_{13} = -G_1 G_3 H_1 H_2 H_4$$

قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ مثال ۳: بهره کلی سیستم زیر را به دست آورید.



پاسخ: در این مثال دو مسیر پیش رو وجود دارد:

چهار حلقه دیده می شود:

حاصل ضرب دو از سه حلقه بی تماس عبارت است از:

حاصل ضرب دو حلقه بی تماس دیگر عبارت است از:

حاصل ضرب سه حلقه بی تماس اول نیز عبارت است از:

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph



مل دستی

قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ ادامه مثال ۳:

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_3 + H_4 + G_1 G_3 H_1 H_2 + G_1 H_1 H_4 + G_3 H_2 H_4 + G_1 G_2 G_3 H_3 H_4 + G_1 G_3 H_1 H_2 H_4$$

$$\Delta_1 = 1$$

تمامی حلقه ها با مسیر پیش رو M_1 در تماس هستند:

$$\Delta_2 = 1 + G_3 H_2$$

حلقه L_{21} با مسیر پیش رو M_2 در تماس نیست:

بدین ترتیب:

$$M = \frac{y_7(s)}{y_1(s)} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 (1 + G_3 H_2)}{\Delta}$$

$$\frac{y_2(s)}{y_1(s)} = \frac{1 + G_3 H_2 + H_4 + G_3 H_2 H_4}{\Delta}$$

به همین ترتیب می توانید بهره های دیگر را پیدا کنید:

$$\frac{y_4(s)}{y_1(s)} = \frac{G_1 G_2 (1 + H_4)}{\Delta}$$

برگرفته از کتاب Kou

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph



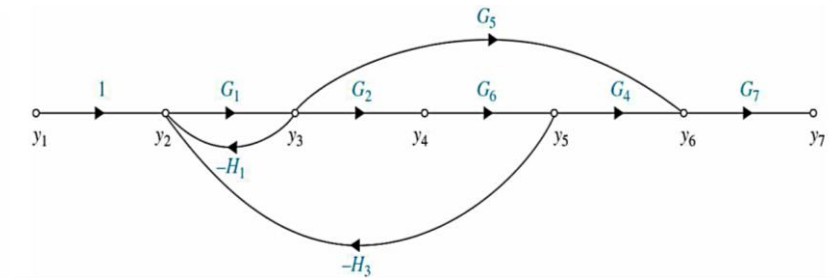
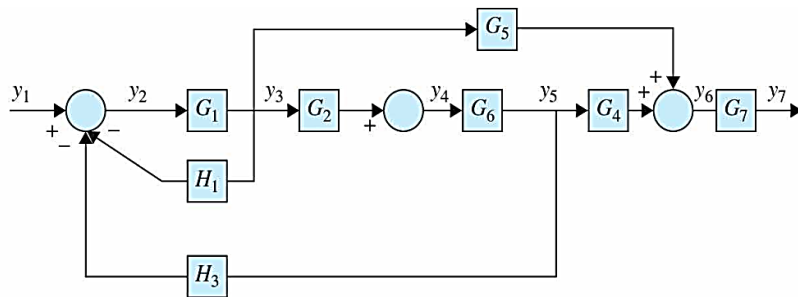
مل دستی

• قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ حالت خاص: اگر همگی حلقه ها و مسیر های پیش رو بدون تماس باشند رابطه بهره به صورت زیر ساده می شود:

$$M = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \sum \frac{\text{Forward Path Gains}}{1 - \text{Loop Gains}}$$

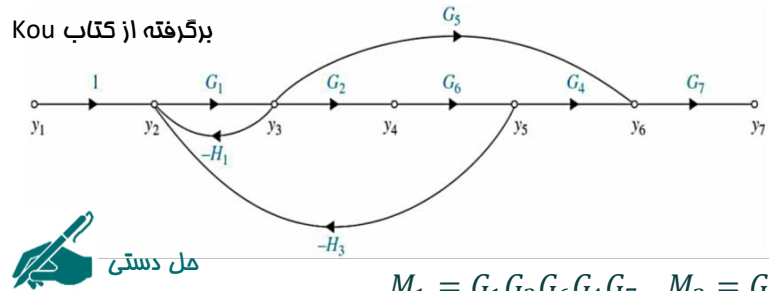
✓ سیستم مثال ۳ را با صورت زیر می توان ساده نمود که در آن حلقه ها و مسیر های پیش رو بدون تماس باشند:



برگرفته از کتاب Kou

نمودار گذر سیگنال Signal Flow Graph

برگرفته از کتاب Kou



مل دستی

• قانون بهره Mason در نمودار گذر سیگنال SFG

✓ ادامه مثال ۴: که در آن

$$G_6 = \frac{G_3}{1+G_3H_2}, \quad G_7 = \frac{1}{1+H_4}$$

در این حالت دو مسیر پیش رو وجود دارد:

دو حلقه در تماس دیده می شود:

بدین ترتیب:

$$M_1 = G_1G_2G_6G_4G_7, \quad M_2 = G_1G_5G_7$$

$$L_{11} = -G_1H_1, \quad L_{21} = -G_1G_2G_6H_3$$

$$M = \frac{y_7(s)}{y_1(s)} = \frac{M_1 + M_2}{1 - L_{11}L_{12}}$$

$$M_1 + M_2 = G_1G_2G_4 \frac{G_3}{1+G_3H_2} \cdot \frac{1}{1+H_4} + G_1G_5 \frac{1}{1+H_4} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1+G_3H_2)}{(1+G_3H_2)(1+H_4)}$$

$$1 - L_{11}L_{21} = 1 + G_1H_1 + G_1G_2H_3 \frac{G_3}{1+G_3H_2} = \frac{1 + G_3H_2 + G_1H_1(1+G_3H_2)}{1+G_3H_2}$$

که دقیقاً همان تابع تبدیل مثال ۳ است!

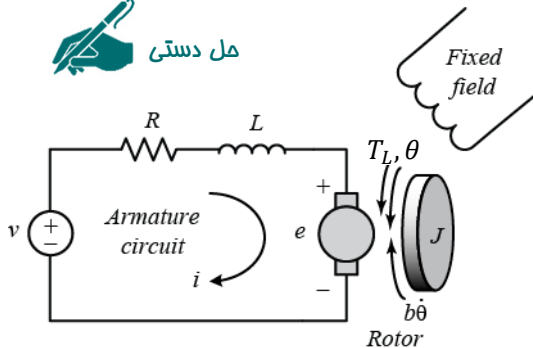
$$M = \frac{y_7(s)}{y_1(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1+G_3H_2)}{(1+G_1H_1+G_3H_2+G_1G_3H_1H_2)(1+H_4)}$$

در نتیجه:

نمایش مدل در سیستم های کنترل



مدل دستی



• مدل سازی و نمایش موتور DC مغناطیس دائم

✓ یک سیستم الکترو مکانیکی و پرکاربردترین عملگر در سیستم های کنترل

□ اصول حاکم در مدل موتور

• بر اساس اثر لنز، ولتاژ خود القایی متناسب با سرعت چرخش روتور ایجاد می شود

$$v_{emf} = K_v \omega$$

• گشتاور تولید شده توسط موتور متناسب با جریان موتور است: $\tau_m = K_m i$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_{emf} = v(t)$$

□ مدل سازی بخش الکتریکی

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_L = \tau_m$$

□ مدل سازی بخش مکانیکی

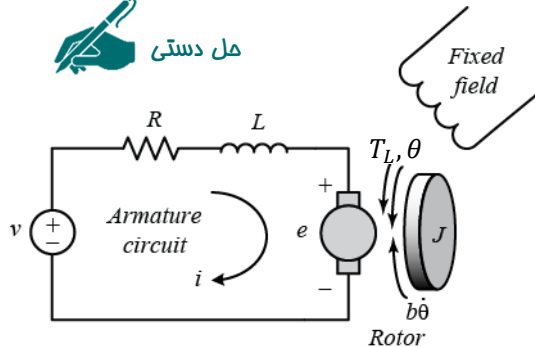
• که در آن L اندوکتانس موتور، R مقاومت آرمیچر، J ممان اینرسی بار، b ضریب استهلاک ویسکوز و T_L گشتاور اغتشاشی است

برگرفته از کتاب Dorf

نمایش مدل در سیستم های کنترل



مدل دستی

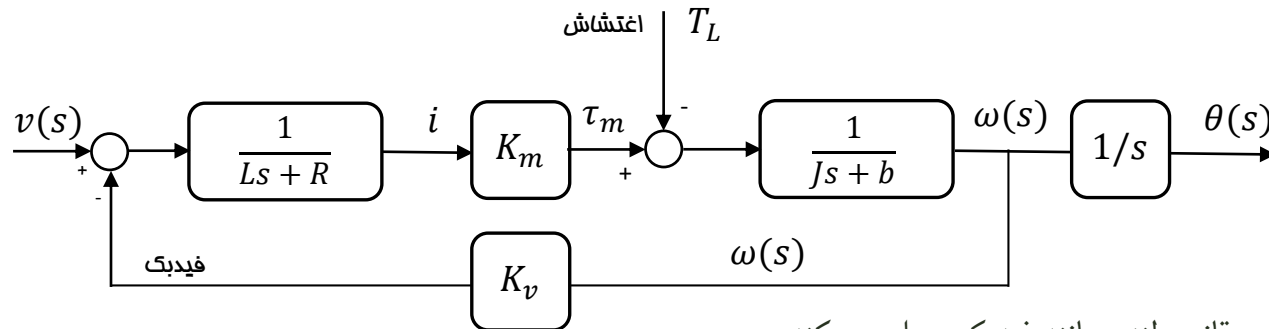


• مدل سازی و نمایش موتور DC مغناطیس دائم

✓ با جای گذاری و اعمال تبدیل لاپلاس

$$\begin{cases} (Ls + R)i(s) + K_v\omega(s) = v(s) \\ (Js + b)\omega(s) + T_L(s) = K_m i(s) \end{cases}$$

□ نمایش بلوک نمودار:



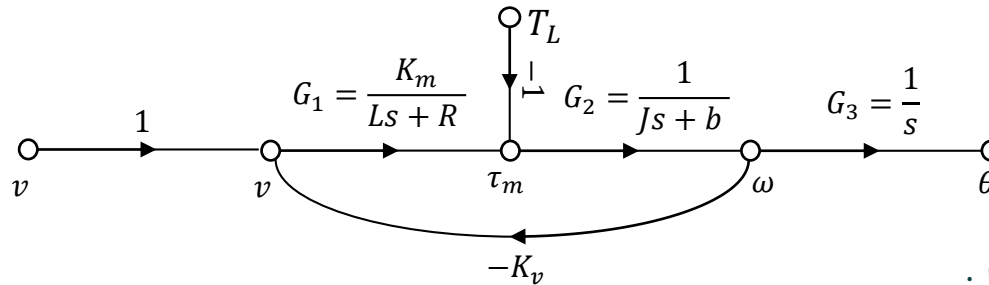
• قانون لنز همانند فیدبک عمل می کند

نمایش مدل در سیستم های کنترل



• مدل سازی و نمایش موتور DC مغناطیس دائم

✓ نمایش SFG



□ ساده سازی و تعیین توابع تبدیل:

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{\frac{K_m}{(Ls + R)(Js + b)}}{1 + \frac{K_v K_m}{(Ls + R)(Js + b)}} = \frac{K_m}{(Ls + R)(Js + b) + K_v K_m},$$

$$\frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{K_m / LJ}{s \left(s^2 + \left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L} \right) s + \frac{(Rb + K_v K_m)}{LJ} \right)}$$

$$\frac{\omega(s)}{T_L(s)} = \frac{\frac{-1}{(Js + b)}}{\Delta} = \frac{-(Ls + R)}{(Ls + R)(Js + b) + K_v K_m},$$

$$\frac{\theta(s)}{T_L(s)} = \frac{-(Ls + R)/LJ}{s \left(s^2 + \left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L} \right) s + \frac{(Rb + K_v K_m)}{LJ} \right)}$$



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• نمایش فضای حالت

✓ بسیاری از سیستم ها را می توان با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نمایش داد.

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

$$y = h(x(t), u(t), t)$$

□ که در آن x بردار متغیر های حالت سیستم، u بردار ورودی در سیستم و f تابعی است که معادلات دینامیکی سیستم را توصیف می کند.

□ از طرف دیگر y بردار متغیر های خروجی اندازه گیری شده در سیستم، h تابعی است که رابطه حسگر در اندازه گیری سیستم را توصیف می کند.

✓ اگر سیستم خطی متغیر با زمان باشد رابطه فوق به معادلات حالت خطی زیر ساده می شود

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

□ که در آن A, B, C, D ماتریس هایی با مقادیر عددی ثابت می باشند که دینامیک خطی سیستم را توصیف می کنند.

نمایش مدل در سیستم های کنترل

• نمایش فضای حالت



مل دستی

✓ مثال ۱: معادلات حاکم بر رفتار موتور DC مغناطیس دائم را در نظر بگیرید:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + K_v \omega = v(t)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_L = K_m i$$

□ با در نظر گرفتن متغیرهای حالت: $\mathbf{x} = [i \quad \omega]^T$ از معادله حالت به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ T_L \end{bmatrix}$$

□ با فرض اینکه هدف در این سیستم، کنترل سرعت موتور باشد آنگاه $y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}$

□ در این سیستم: $\mathbf{u} = [v \quad T_L]^T$ ، $\mathbf{x} = [i \quad \omega]^T$ و $y = \omega$ بوده و ماتریس های سیستم عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -K_v/L \\ K_m/J & -b/J \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$



نمایش مدل در سیستم های کنترل

• نمایش فضای حالت

✓ ماتریس تبدیل سیستم های LTI

- در نمایش فضای حالت می توان سیستم های دارای چند ورودی و چند خروجی MIMO را نمایش داد.
- اگر از چنین سیستمی تبدیل لاپلاس بگیریم، با شرط مقادیر اولیه صفر به نمایش ماتریس تبدیل سیستم خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \rightarrow sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \\ y &= Cx + Du \rightarrow y(s) = Cx(s) + Du(s) \rightarrow y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)\end{aligned}$$

□ بدین ترتیب ماتریس تبدیل سیستم از این رابطه به دست می آید:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

با توجه به ابعاد ورودی $1 \times r$ و خروجی $1 \times m$ ماتریس تبدیل یک ماتریس $m \times r$ خواهد بود: $y_{m \times 1} = H_{m \times r}(s)u_{r \times 1}$

نمایش مدل در سیستم های کنترل



مدل کامپیوتری

• نمایش سیستم و ساده سازی اتصال سیستم ها توسط کامپیوتر

✓ در نرم افزار Matlab برای نمایش سیستم به فرم های مختلف از دستورات زیر می توان استفاده نمود

```
% Different ways to represent a system:
```

```
%
%          4
%      P(s) = -----
%          (s - 1)(s - 2)
```

```
clc
```

```
% Tf format
```

```
num=4; den=[1 -3 2]; plant1=tf(num,den)
%
%          4
```

```
plant1 = -----
%          s^2 - 3 s + 2
```

```
% ZPK format
```

```
k=4; z=[]; p=[1 2]; plant2=zpk(z,p,k)
%
%          4
```

```
-----
%          (s-1) (s-2)
```

```
% converting to state space
```

```
[Ap,Bp,Cp,Dp]=tf2ss(num,den)
```

Ap =	Bp =	Cp =	Dp =
3 -2	1	0 4	0
1 0	0		

نمایش مدل در سیستم های کنترل

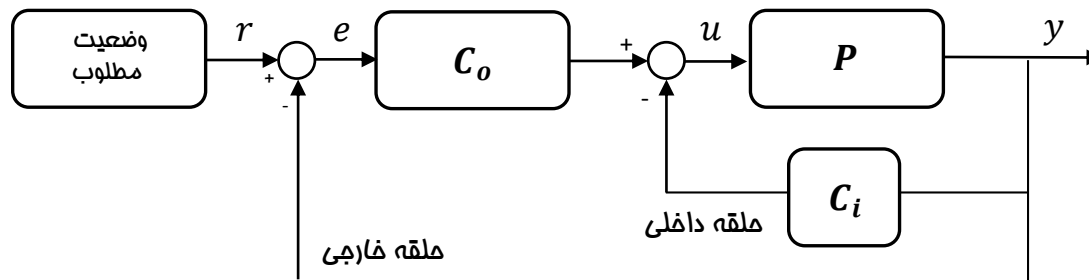


مل کامپیوتری

• نمایش سیستم و ساده سازی اتصال سیستم ها توسط کامپیوتر

✓ در نرم افزار Matlab برای ساده سازی سیستم می توان از دستور sysic استفاده کرد

□ سیستم آشنای زیر را در نظر بگیرید:



که در آن

$$P(s) = \frac{4}{(s-1)(s-2)}, \quad C_i(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}, \quad C_o(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

نمایش مدل در سیستم های کنترل



مل کامپیوتری

• نمایش سیستم و ساده سازی اتصال سیستم ها توسط کامپیوتر

✓ در نرم افزار Matlab برای ساده سازی سیستم می توان از دستور sysic استفاده کرد:

```
%%
% The smart way to define and simplify the block diagrams and SFG
%
clear all
s=zpk('s'); % zero-pole format
P=1/((s-1)*(s-2)) % plant
Co=(s+1)/(s+2)^2; % outer loop controller
Ci=1/s^2+s+1; % inner loop controller

% construct the interconnection structure, plant_ic;

systemnames = 'P Co Ci';
inputvar = '[r]';
outputvar = '[P]';
input_to_P = '[ Co - Ci ]';
input_to_Co = '[ r - P ]';
input_to_Ci = '[P]';
sysoutname = 'plant_ic';
cleanupsysic = 'yes';
sysic

% We can change the properties of the generated plant using
% get and set comands or as following.

plant_ic.InputName={'r'}; % Set the input names
plant_ic.OutputName={'y'}; % Set the output names

%% We can make sure that our augmented system has its minimal
% realization to avoid un-contrallability for some hidden modes
% Check zero-poles patterns and use minreal
plant_ic = minreal(plant_ic)
plant_ic =
    From input "r" to output "y":
                s^2 (s+1)
    -----
(s+1.727) (s+2.316) (s^2 + 0.1909s + 0.2948) (s^2 - 2.234s + 3.393)
Continuous-time zero/pole/gain model.
```



Samuel Jefferson Mason (1921–1974)

was an American **electronics engineer**. **Mason's invariant** and **Mason's rule** are named after him. He was born in New York City, but he grew up in a small town in New Jersey. He received a B.S. in electrical engineering from **Rutgers University** in 1942, and after graduation, he joined the Antenna Group of **MIT Radiation Laboratory** as a staff member. Mason went on to earn his S.M. and Ph.D. in electrical engineering from **MIT** in 1947 and 1952, respectively. After World War II, the Radiation Laboratory was renamed the MIT Research Laboratory of Electronics, where he became the associate director in 1967. Mason served on the faculty of MIT from 1949 until his death in 1974 – as an assistant professor in 1949, associate professor in 1954, and full professor in 1959. Mason unexpectedly died in 1974 due to a **cerebral hemorrhage**.

Mason's doctoral dissertation, supervised by **Ernst Guillemin**, was on **signal-flow graphs** and he is often credited with inventing them. Another one of his contributions to the field of control systems theory was a method to find the transfer function of a system, now known as **Mason's rule**. Mason was an expert in optical scanning systems for printed materials. He was the leader of the Cognitive Information Processing Group of the MIT Research Laboratory of Electronics, and he created systems that scanned printed materials and read them out loud for the blind. Similarly, he developed tactile devices powered by **photocells** that enabled the blind to sense light.

برگرفته از [پیوند](#)

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق - کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیستم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.



حمید رضا تقی راد
استاد



گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل فطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به [این سایت](#) مراجعه نمایید



متشکرم

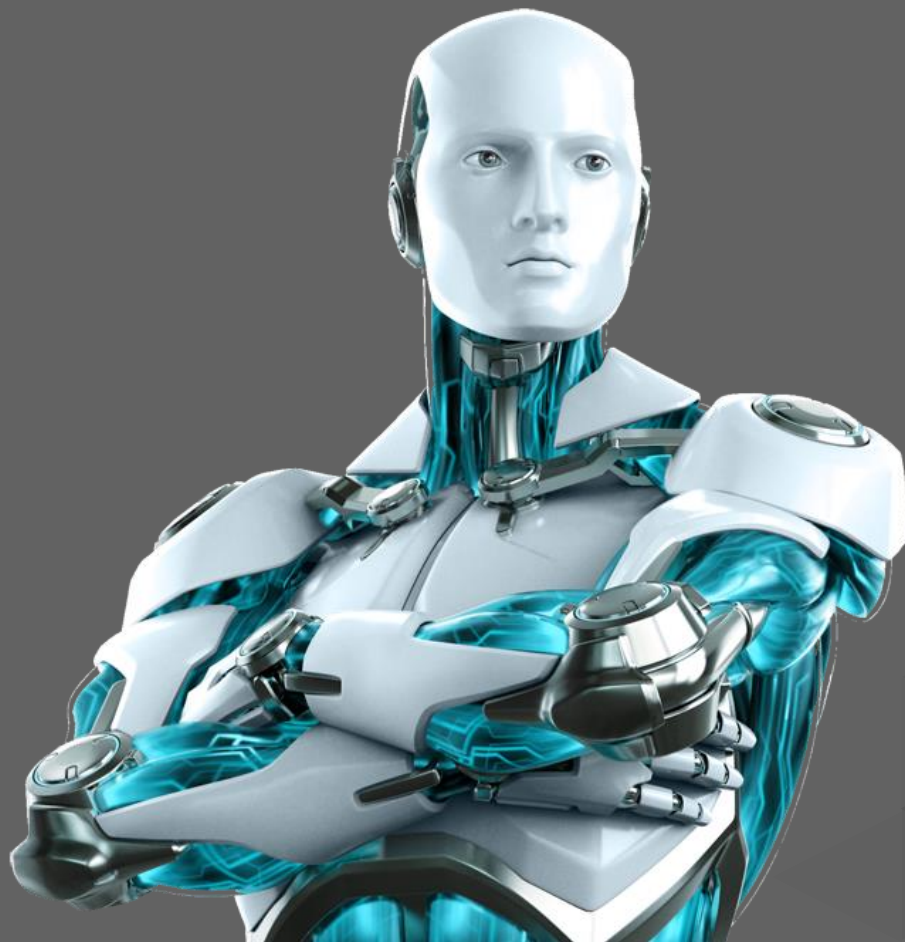


سیستم های کنترل فطی

فصل دوم: تحلیل زمانی سیستم های کنترل

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در موزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان فطای ماندگار سیستم ملقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره ملقه در سیستم ملقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی (روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.





به چشم انداز

کسب مهارت های لازم
در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی
خوش آمدید



در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. گروه رباتیک ارس به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

سیستم های کنترل فطی
دکتر ممید رضا تقی راد

دانشگاه صنعتی فواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق، دپارتمان کنترل و سیستم، گروه رباتیک ارس

عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

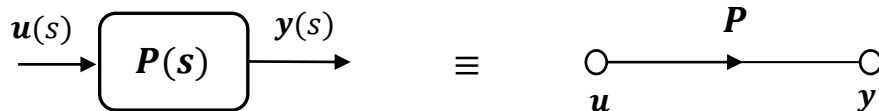
۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم ملقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره ملقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

رفتار زمانی سیستم کنترل

• شناخت رفتار سیستم از روی پاسخ زمانی

✓ سیستم های کنترل خطی به صورت زیر نمایش داده می شوند.



✓ رفتار اولیه سیستم را می توان بر اساس پاسخ (معادلات دیفرانسیل) سیستم در حوزه زمان $y(t)$ تعیین نمود.

✓ پاسخ سیستم دارای دو جزء گذرا $y_{tr}(t)$ و ماندگار $y_{ss}(t)$ به صورت زیر است

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

□ که در آن $y_{tr}(t)$ پاسخ همگن (بدون ورودی) معادلات دیفرانسیل، که گذرا است: $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$

□ و $y_{ss}(t)$ پاسخ خصوصی آن در حالی است که $t \rightarrow \infty$.

✓ بنابراین پاسخ سیستم هم تابع دینامیک سیستم $P(s)$ و هم تابع ورودی سیستم $u(t)$ است.

رفتار زمانی سیستم کنترل

• ورودی های متداول در تحلیل رفتار سیستم

✓ ورودی ضربه: $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(t)$ که در آن:

$$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

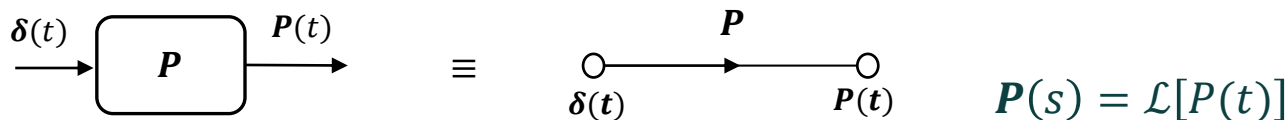
□ ورودی ضربه در حوزه زمان یک تابع تکین است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)$$

□ ورودی ضربه در حوزه S یک تابع غیر تکین است:

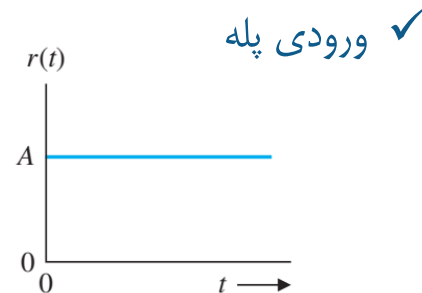
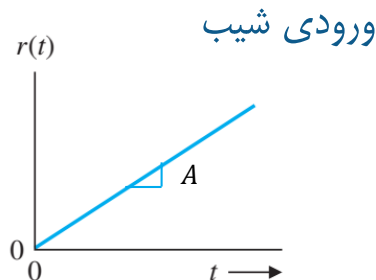
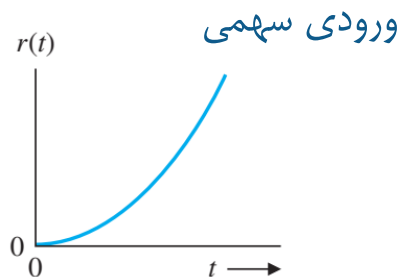
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{s \cdot 0} = 1$$

□ با اعمال ورودی ضربه به سیستم و اعمال تبدیل لاپلاس به خروجی تابع تبدیل سیستم به دست می آید.



رفتار زمانی سیستم کنترل

• ورودی های متداول در تحلیل رفتار سیستم



□ اگر ورودی پله واحد $u_s(t)$ را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

ورودی سهمی: $r_p(t) = \frac{1}{2} A t^2 u_s(t)$

ورودی شیب: $r_r(t) = A t u_s(t)$

ورودی پله: $r_s(t) = A u_s(t)$

ورودی سهمی: $r_p(s) = \frac{A}{s^3}$

ورودی شیب: $r_r(s) = \frac{A}{s^2}$

ورودی پله: $r_s(s) = \frac{A}{s}$

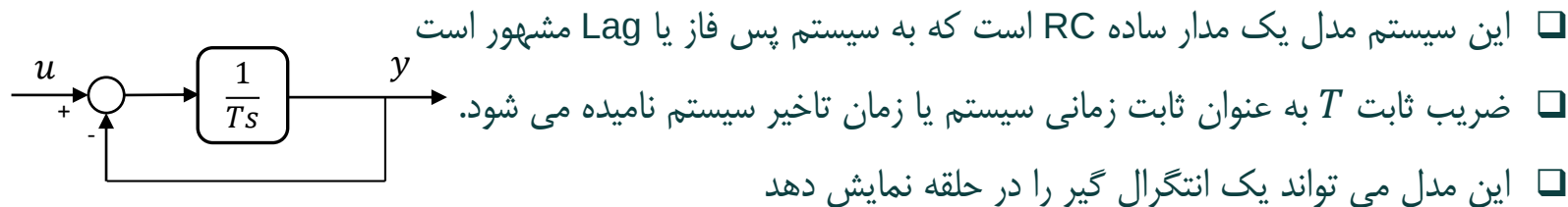
بدین ترتیب با توجه به اپراتور انتگرال گیری $\frac{1}{s}$ این ورودی ها انتگرال یکدیگرند: $r_r(s) = \frac{1}{s} r_s(s)$ و $r_p(s) = \frac{1}{s} r_r(s)$

رفتار زمانی سیستم کنترل

سیستم مرتبه اول



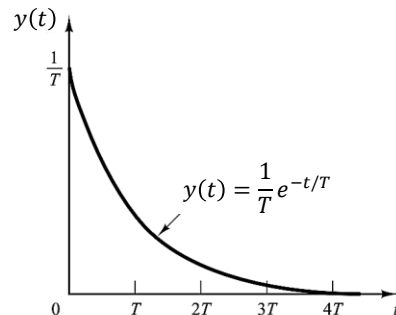
✓ سیستم مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید



✓ پاسخ ضربه واحد سیستم

□ پاسخ ضربه واحد سیستم از وارون تبدیل لاپلاس سیستم به دست می آید:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{Ts+1} \right] = \frac{1}{T} e^{-t/T} \text{ for } t > 0$$



برگرفته از کتاب Ogata

رفتار زمانی سیستم کنترل

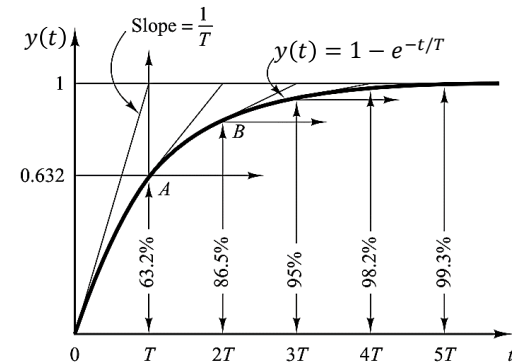
سیستم مرتبه اول

✓ پاسخ پله واحد سیستم

□ پاسخ پله سیستم نیز از وارون لاپلاس تابع زیر به دست می آید

$$y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \rightarrow y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \text{ for } t \geq 0$$

✓ مشخصات پاسخ پله واحد



□ مقادیر پاسخ در زمان های $T, 2T, 3T$ برابر است با $y(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$, $y(2T) = 0.865$, $y(3T) = 0.95$

- با کوچک شدن ثابت زمانی، همگرایی سریعتر می شود
- با گذشت زمان $3T$ به ۹۵٪ مقدار نهایی خواهیم رسید و با گذشت زمان $4T$ به ۹۸٪ مقدار نهایی خواهیم رسید

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

□ شیب پاسخ در زمان صفر برابر است با

□ شیب پاسخ به صورت پیوسته کاهشی است و در زمان $t \rightarrow \infty$ به صفر می رسد

□ پاسخ ضربه واحد مشتق پاسخ پله واحد سیستم است.

برگرفته از کتاب Ogata

رفتار زمانی سیستم کنترل

• سیستم مرتبه اول

✓ پاسخ شیب واحد سیستم

□ پاسخ شیب سیستم نیز از وارون لاپلاس تابع زیر به دست می آید

$$y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} - \frac{T^2}{Ts+1} \rightarrow y(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \text{ for } t \geq 0$$

✓ مشخصات پاسخ شیب واحد

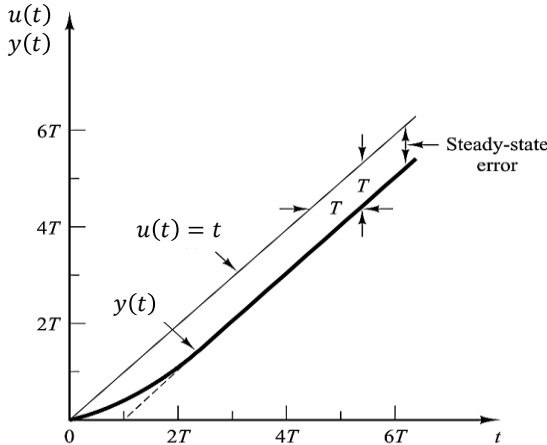
□ پاسخ سیستم دارای خطای ماندگار است:

$$e(t) = u(t) - y(t) = T(1 - e^{-t/T}) \rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$$

• با کوچک شدن ثابت زمانی، خطای ماندگار کوچکتر می شود

□ پاسخ پله واحد مشتق پاسخ شیب واحد سیستم است.

✓ به همین طریق می توان پاسخ سهمی و ورودی های مرتبه بالاتر را نیز به دست آورد.

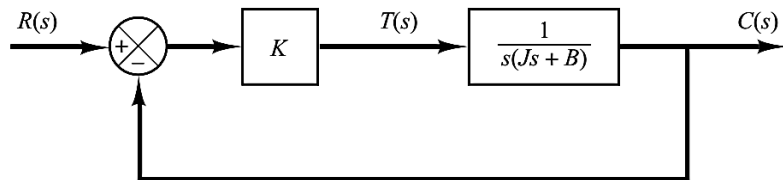


رفتار زمانی سیستم کنترل

سیستم مرتبه دوم

✓ مطابق مثال های بیان شده در فصل قبل حرکت یک بازوی ربات $C(t)$ را در نظر بگیرید که با ممان اینرسی J و ضریب استهلاک ویسکوز B توسط گشتاور یک موتور سرو T کنترل می شود.

$$J\ddot{C} + B\dot{C} = T$$



$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

✓ مدل حلقه باز سیستم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$$

✓ مدل حلقه بسته سیستم با کنترلگر بهره K

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$$

□ با در نظر گرفتن فرکانس طبیعی ω_n و نسبت استهلاک ζ :

✓ مدل نوعی سیستم مرتبه دوم به دست می آید:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



رفتار زمانی سیستم کنترل

سیستم مرتبه دوم

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

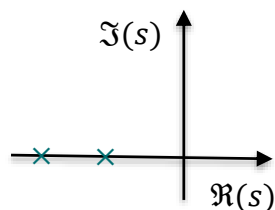
✓ معادله مشخصه سیستم:

✓ قطب های سیستم (ریشه های معادله مشخصه)، بسته به مقدار ζ می تواند حقیقی یا موهومی باشند

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

□ اگر $\zeta > 1$: دو قطب حقیقی متمایز (حالت فرا میرایی)

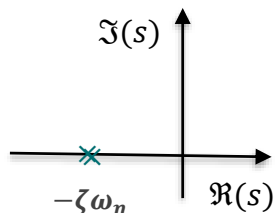
• این سیستم همانند یک سیستم با دو رفتار دینامیکی مرتبه اول تحلیل می شود



□ اگر $\zeta = 1$: دو قطب حقیقی تکراری (حالت میرایی مرزی)

• همانند حالت قبل رفتار دینامیکی سیستم میرایی است

• میرایی با بیشترین سرعت پاسخ و حالت مرزی بین میرایی کامل و نوسانی

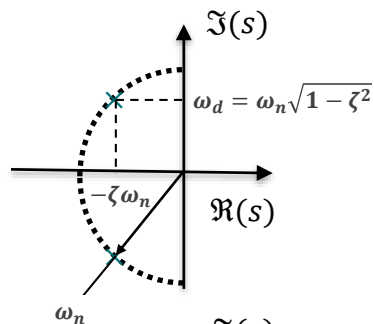


رفتار زمانی سیستم کنترل

سیستم مرتبه دوم

✓ قطب های سیستم

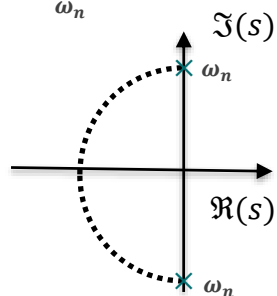
$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



□ اگر $0 < \zeta < 1$: دو قطب مزدوج مختلط (حالت فرو میرایی)

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

• رفتار سیستم نوسانی ولی با نوسانات میرا شونده است.



□ اگر $\zeta = 0$: دو قطب موهومی (حالت نوسانات دائمی)

$$s = \pm j\omega_n$$

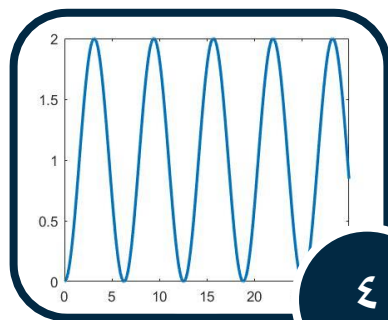
• سیستم دارای نوسانات دائمی است

• حالت مرزی با شرایطی $\zeta > 0$ که نوسانات واگرا می شوند.



رفتار زمانی سیستم کنترل

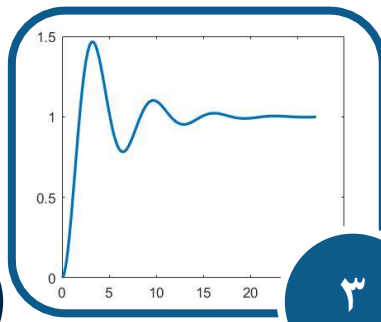
سیستم مرتبه دوم



$$\zeta = 0$$

نوسانات دائمی

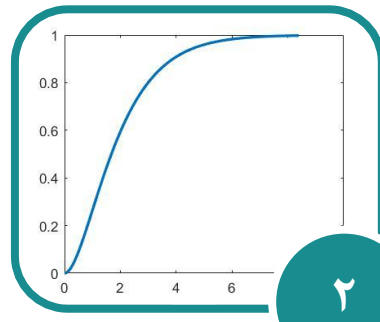
دو ریشه موهومی خواهیم داشت
پاسخ نوساناتی با دامنه ثابت
خواهد داشت



$$0 < \zeta < 1$$

فرو میرایی

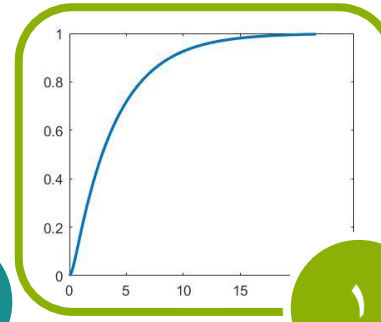
دو ریشه مختلط خواهیم داشت
پاسخ نوسانی شده و شدت
نوسانات به ζ مربوط می شود.



$$\zeta = 1$$

میرایی مرزی

دو ریشه حقیقی تکراری خواهیم
داشت هنوز پاسخ نوسانی نبوده و
از تکرار دو ریشه حقیقی به دست
می آید



$$\zeta > 1$$

فرا میرایی

دو ریشه حقیقی متمایز خواهیم
داشت و پاسخ نوسانی نبوده و از
ترکیب دو ریشه حقیقی به دست
می آید



رفتار زمانی سیستم کنترل

پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت فرامیر $\zeta > 1$

✓ به ازای ورودی پله واحد $R(s) = 1/s$ ؛ خروجی سیستم عبارت است از:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + s_1)(s + s_2)}, \quad s_{1,2} = \zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \in \mathbb{R}$$

✓ وارون لاپلاس این پاسخ با استفاده از کسرهای جزئی عبارت است از:

$$C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{1}{s_1} e^{-s_1 t} - \frac{1}{s_2} e^{-s_2 t} \right) \quad \text{for } t \geq 0$$

✓ پاسخ از ترکیب دو عبارت نمایی به دست می آید.

✓ اگر $\zeta \gg 1$ در اینصورت $s_1 \gg s_2$ و ترم نمایی مربوط به s_1 خیلی سریعتر از بین رفته و می تواند در مقایسه با ترم s_2 صرف نظر شود. پاسخ سیستم با سیستم مرتبه اول زیر می تواند تقریب زده شود.

$$C(s) = \frac{s_2}{s(s + s_2)} \rightarrow C(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{for } t \geq 0$$

برگرفته از کتاب Ogata



رفتار زمانی سیستم کنترل

پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم : حالت فرامیر $\zeta > 1$

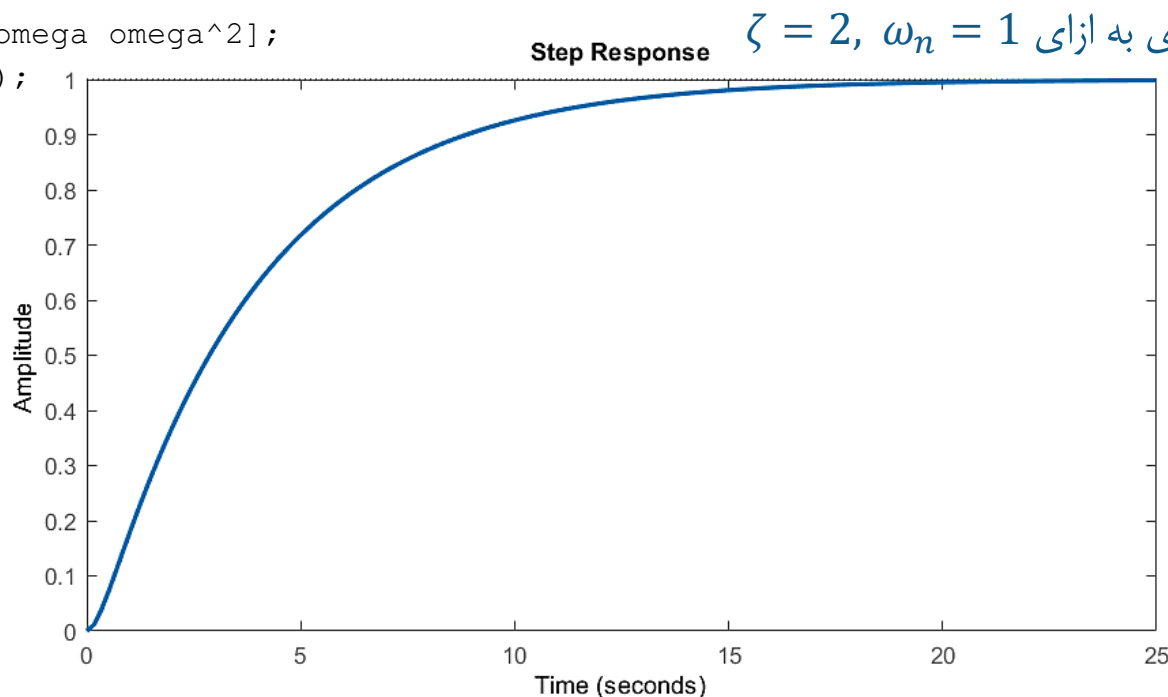
```
omega=1;zeta=2;
```

```
num=1;
```

```
den=[1 2*zeta*omega omega^2];
```

```
sys=tf(num,den);
```

```
Step(sys);
```



مل کامپیوتری



• پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت میرایی مرزی $\zeta = 1$

✓ به ازای ورودی پله واحد $R(s) = 1/s$ ؛ خروجی سیستم عبارت است از:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n)^2}$$

✓ وارون لاپلاس این پاسخ با استفاده از کسرهای جزئی عبارت است از:

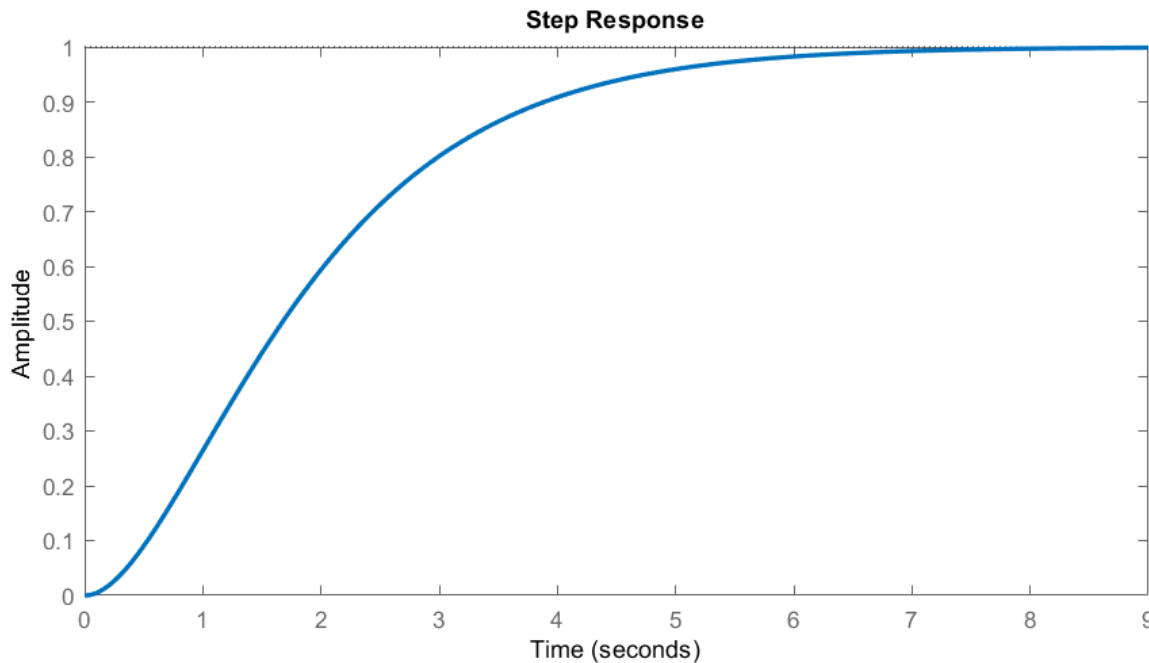
$$C(t) = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} \quad \text{for } t \geq 0$$

✓ پاسخ از ترکیب یک عبارت نمایی و حاصل ضرب آن در زمان به دست می آید.

رفتار زمانی سیستم کنترل

• پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت میرایی مرزی $\zeta = 1$

✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 1, \omega_n = 1$



مل کامپیوتری

رفتار زمانی سیستم کنترل

• پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت فرومیرایی $0 < \zeta < 1$

✓ به ازای ورودی پله واحد $R(s) = 1/s$ ؛ خروجی سیستم عبارت است از:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

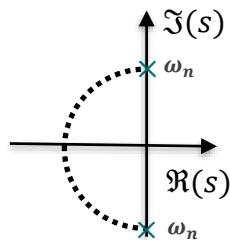
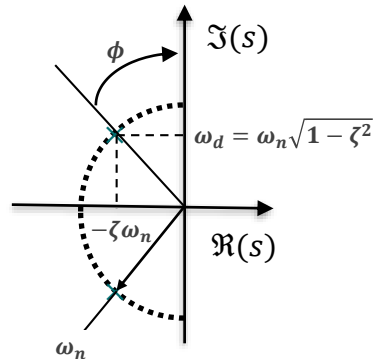
✓ وارون لاپلاس این پاسخ با استفاده از کسرهای جزئی عبارت است از:

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \phi) \text{ for } t \geq 0, \quad \tan \phi = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

✓ پاسخ نوسانی با یک پوش میرا شونده نمایشی است.

• پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت نوسانات دائمی $\zeta = 0$

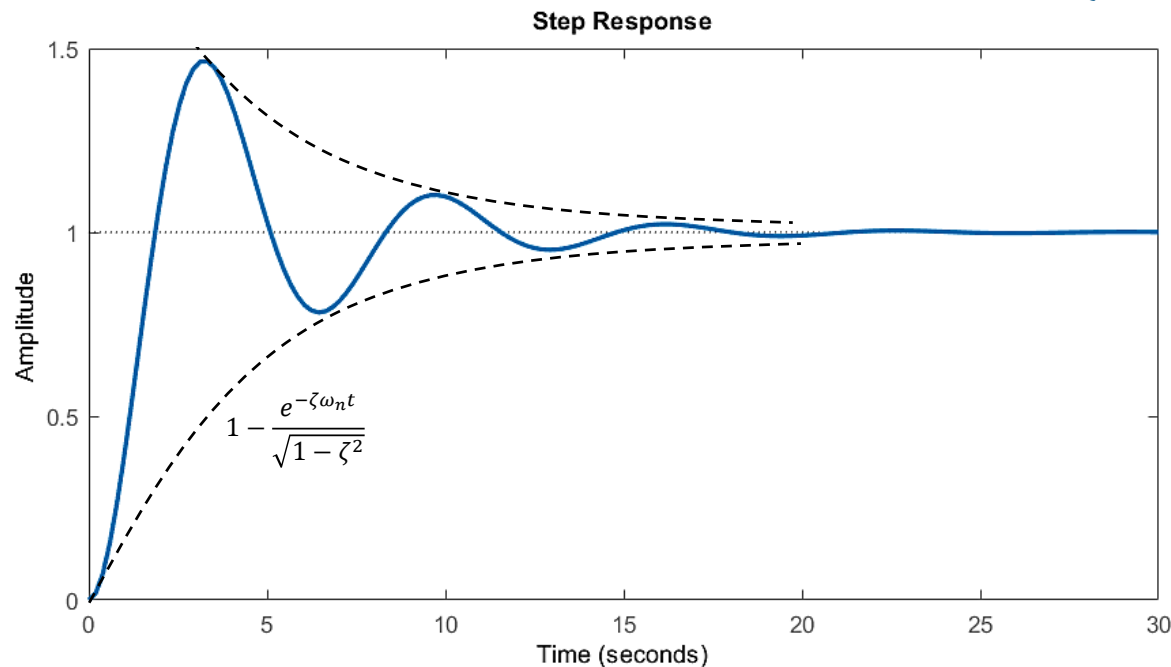
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \rightarrow C(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad \text{for } t \geq 0$$



رفتار زمانی سیستم کنترل

• پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت میرایی $0 < \zeta < 1$

✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 0.2357$, $\omega_n = 1$

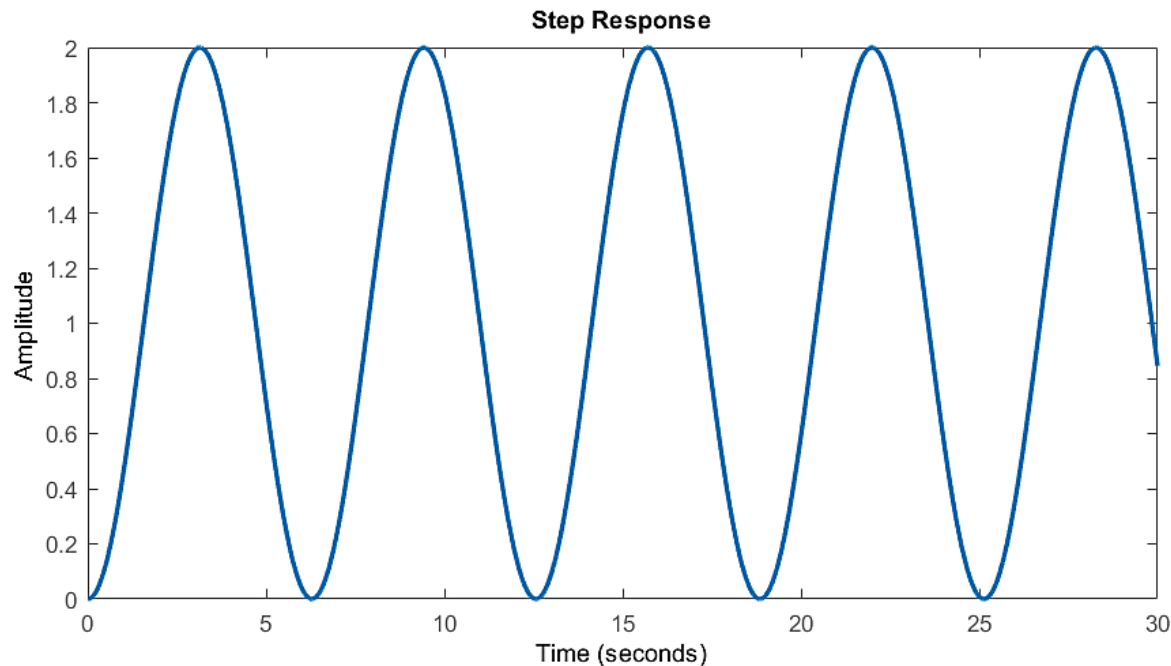


مل کامپیوتری

رفتار زمانی سیستم کنترل

• پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت نوسانات دائم $\zeta = 0$

✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 0, \omega_n = 1$



مل کامپیوتری



رفتار زمانی سیستم کنترل

پاسخ ضربه سیستم مرتبه دوم

✓ با مشتق گیری از پاسخ پله می توان در حالت های مختلف پاسخ ضربه سیستم را به دست آورد.

□ حالت فرامیرایی $\zeta > 1$

$$C(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) \quad \text{for } t \geq 0$$

□ حالت میرایی مرزی $\zeta = 1$

$$C(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad \text{for } t \geq 0$$

□ حالت فرو میرایی $0 < \zeta < 1$

$$C(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t \quad \text{for } t \geq 0,$$

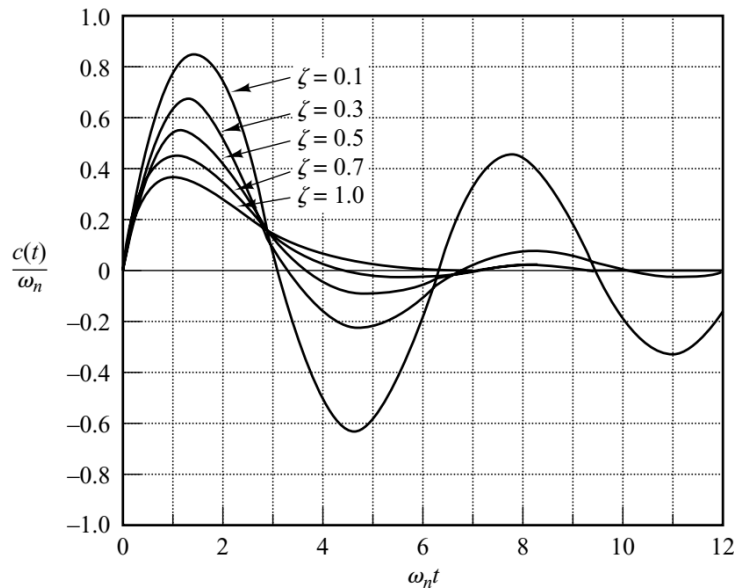
□ حالت نوسانات دائمی $\zeta = 0$

$$C(t) = \omega_n \sin \omega_n t \quad \text{for } t \geq 0,$$

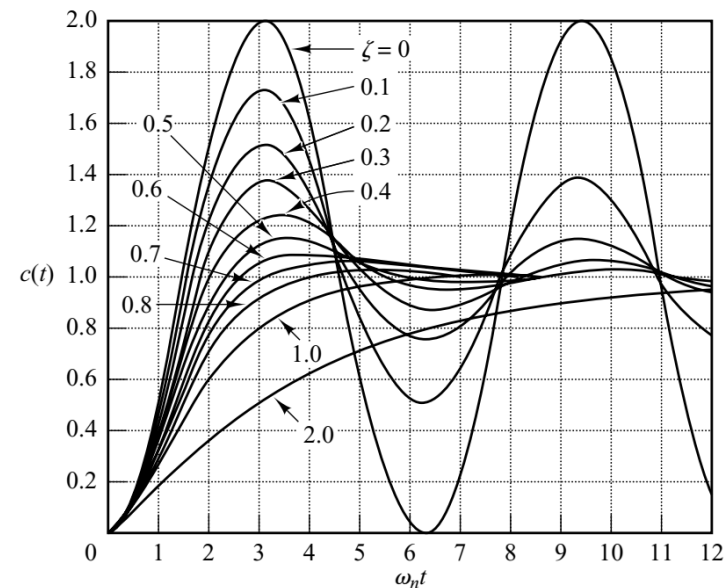


• مقایسه پاسخ سیستم مرتبه دوم فرو تحریک به ازای ζ مختلف

پاسخ ضربه



پاسخ پله



عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان فضای ماندگار سیستم ملقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره ملقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ بیشینه فراجهش M_p

□ قله صعود پاسخ در زمان t_p مطابق شکل برابر

$$\% M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100$$

□ تعیین زمان نقاط اکسترمم تابع در حالت فرومیرایی:

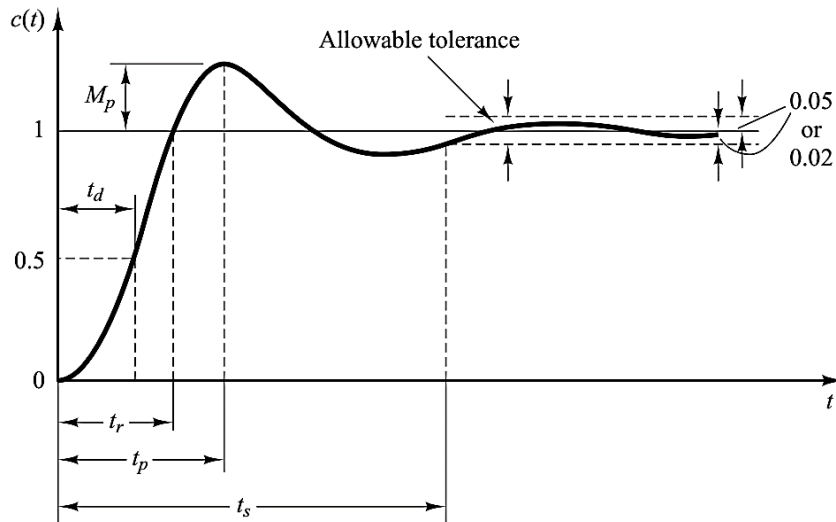
$$\frac{dC}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin \omega_d t_p = 0$$

$$\sin \omega_d t_p = 0 \rightarrow \omega_d t_p = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$t_{p_n} = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \square \text{ بدین ترتیب:}$$

□ در بیشینه فراجهش $n = 1$

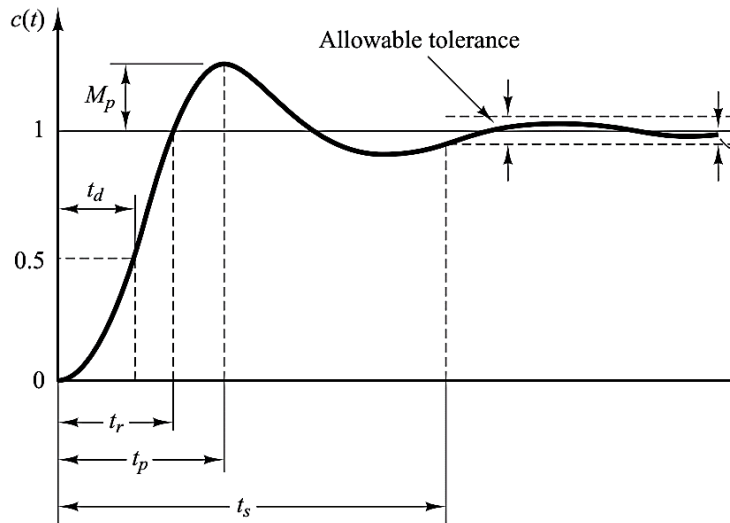
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ بیشینه فراجهش M_p



□ قله صعود پاسخ در زمان t_p مطابق شکل برابر

$$\% M_p = \frac{C(t_p) - 1}{1} \times 100$$

$$\% M_p = \frac{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\pi - \phi) \times 100$$

□ که در آن: $\cos(\pi - \phi) = \cos \phi = \sqrt{1 - \zeta^2}$

□ در نتیجه فراجهش در سیستم مرتبه دوم تنها تابع ζ است:

$$\% M_p = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

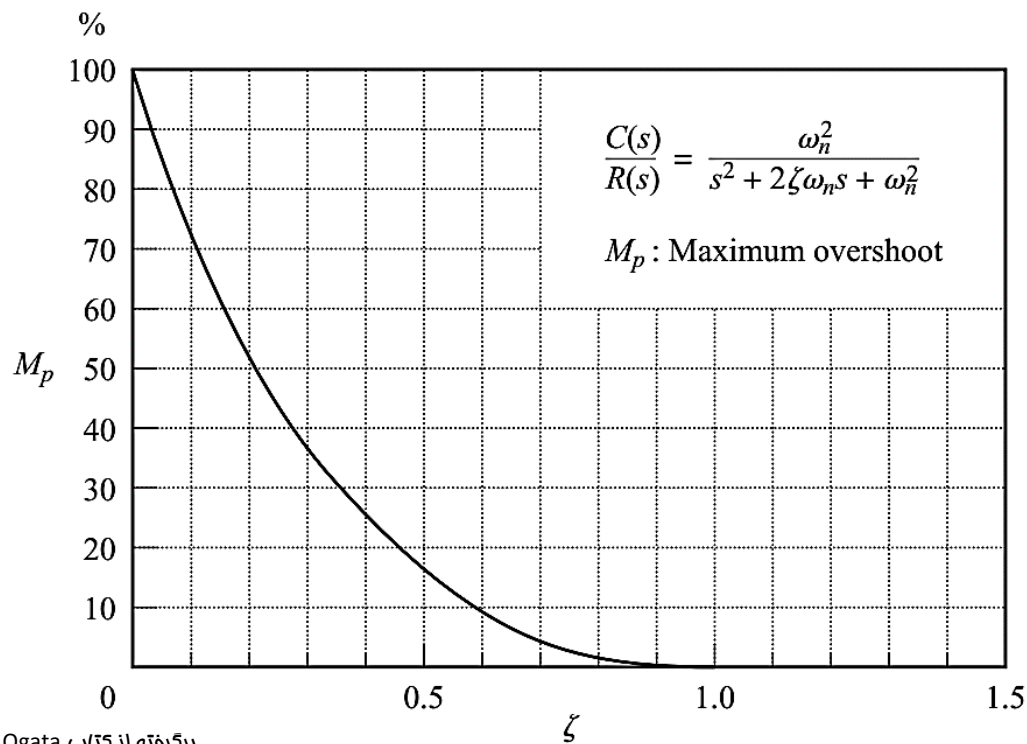
✓ میزان فراجهش M_p بر حسب ζ

□ فراجهش مناسب در سیستم های

کنترل صنعتی سریع حدود 5% است.

□ بدین ترتیب ζ_d نزدیک 0.707

انتخاب می شود.

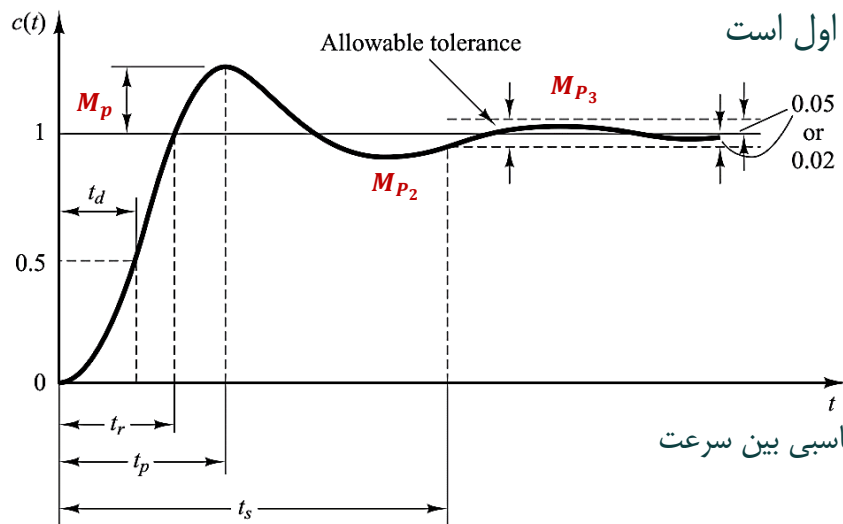


برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ نسبت استهلاک d



□ نسبت استهلاک d نسبت فراجهش نقطه اکسترمم سوم به اول است

$$d = \frac{M_{p3}}{M_p} = \frac{e^{-3\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_p = \sqrt{d}$$

بدین ترتیب:

□ در سیستم های کنترل نسبت استهلاک $d = \frac{1}{4}$ مصالحه بسیار مناسبی بین سرعت

پاسخ و میزان نوسانات در فرآیندهای صنعتی کند ایجاد می کند.

$$d = \frac{1}{4} \rightarrow \zeta_d = 0.2155$$

در این حالت

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

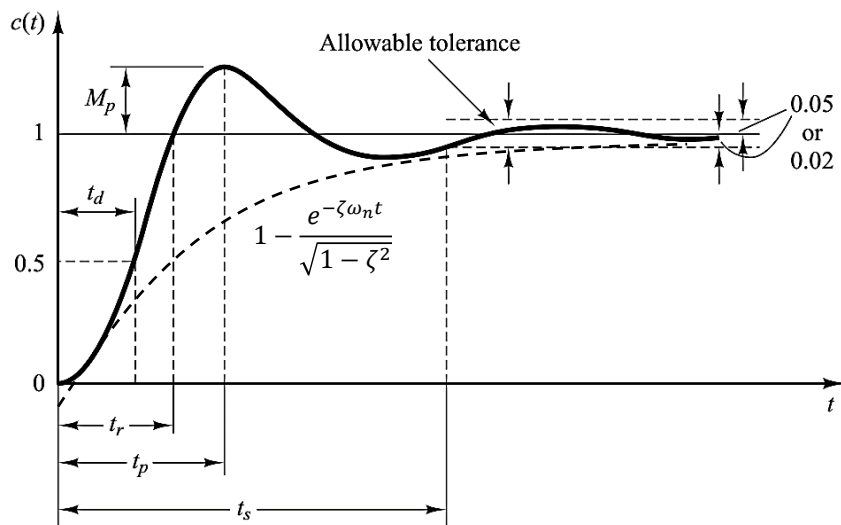
ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ زمان نشست t_s

□ زمانی که در آن پاسخ به محدوده ۵٪ (یا ۲٪) مقدار حالت ماندگار خود می رسد

□ تخمین t_s در سیستم مرتبه دوم فرومیرا:

می توان از پوش پاسخ استفاده نمود



$$C(t_s) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.95$$

$$\omega_n t_s = -\frac{1}{\zeta} \ln [0.05\sqrt{1 - \zeta^2}]$$

$$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n}, \quad \text{تقریب با فرض } 0 < \zeta < 0.69$$

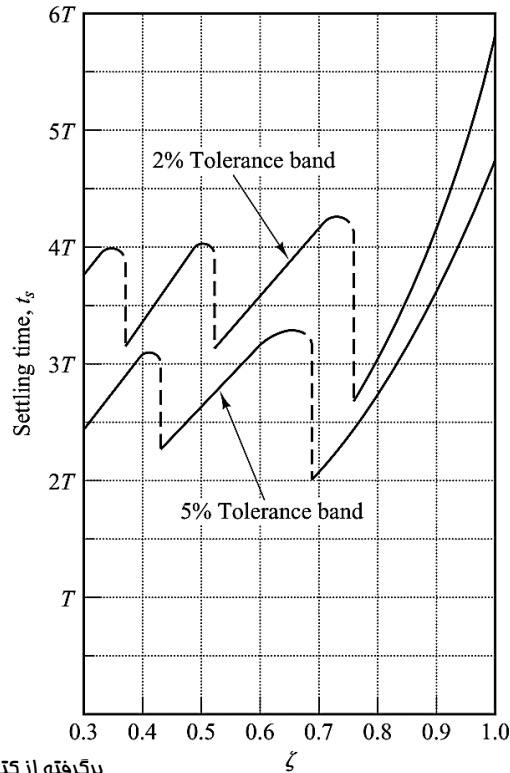
$$t_s = \frac{4.5\zeta}{\omega_n}, \quad \text{تقریب با فرض } \zeta > 0.69$$

برگرفته از کتاب Ogata

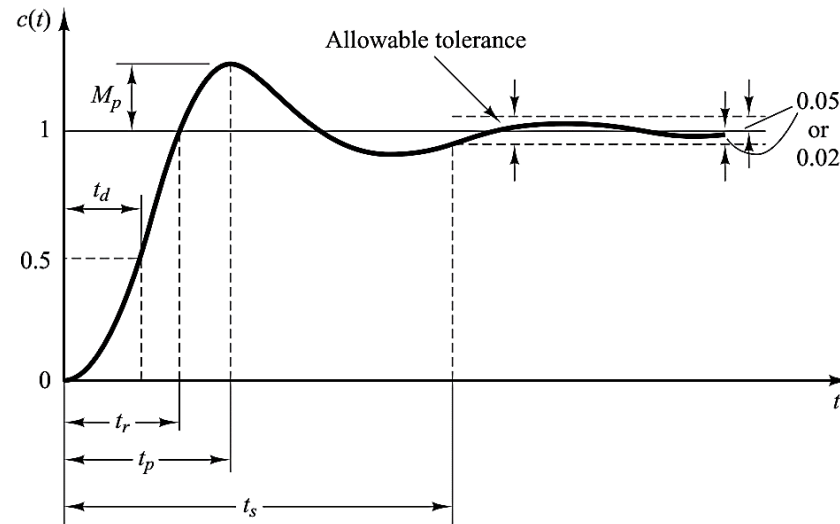
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ میزان زمان نشست t_s بر حسب $\zeta, T = 1/\zeta\omega_n$



برگرفته از کتاب Ogata



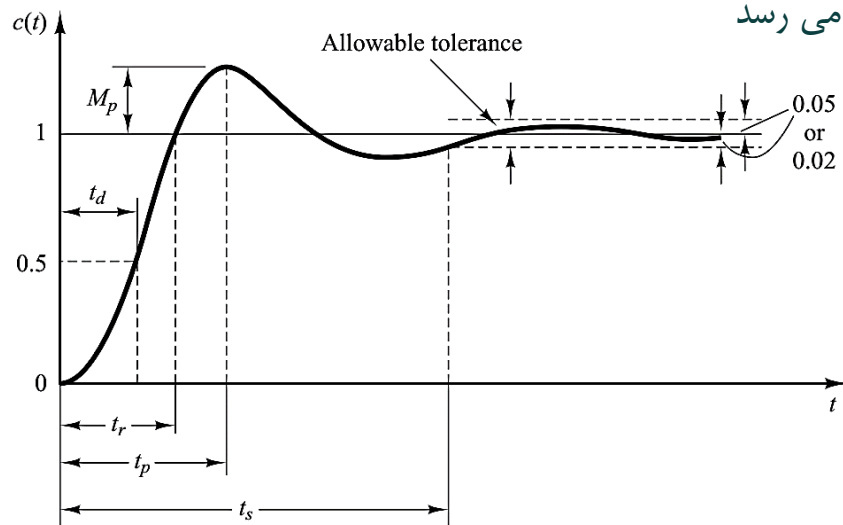
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ زمان تاخیر t_d

□ زمانی که در آن پاسخ به نیمی از مقدار حالت ماندگار خود می رسد

□ تخمین t_d در سیستم مرتبه دوم فرومیرا:



$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}, \quad \text{تقریب مرتبه اول:}$$

$$t_d = \frac{1.1+0.125\zeta+0.469\zeta^2}{\omega_n}, \quad \text{تقریب مرتبه دوم:}$$

برگرفته از کتاب Ogata

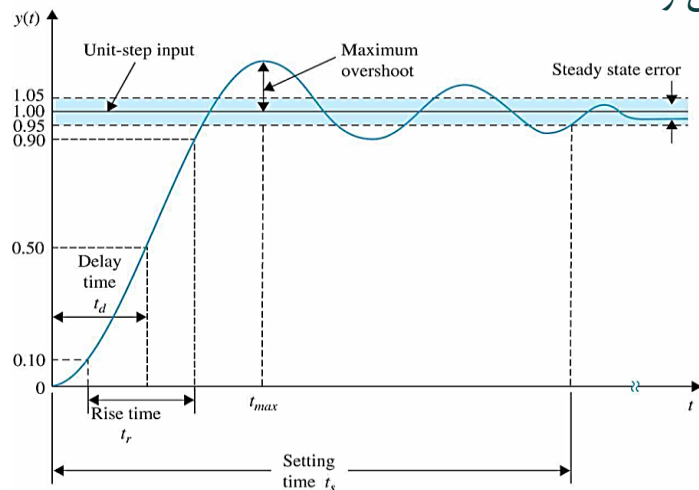
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ زمان خیز t_r

□ زمانی که در آن پاسخ از ۱۰٪ مقدار حالت ماندگار خود به ۹۰٪ آن می رسد

□ تخمین t_r در سیستم مرتبه دوم فرومیرا:



$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n}, \quad \text{تقریب مرتبه اول:}$$

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n}, \quad \text{تقریب مرتبه دوم:}$$

برگرفته از کتاب Kuo

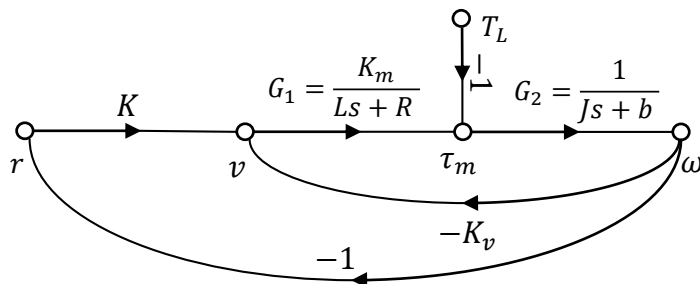


ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ مثال ۱: سیستم حلقه بسته با فیدبک بهره K را

برای کنترل سرعت موتور DC مغناطیس دائم در نظر بگیرید.



□ تابع تبدیل حلقه بسته سیستم:

$$L(s) = \frac{KK_m}{(Ls+R)(Js+b) + K_vK_m} \rightarrow \frac{\omega(s)}{r(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LJ}(Rb + K_vK_m + KK_m) = P_1 + P_2K, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{J} + \frac{R}{L}, = P_3 \quad A\omega_n^2 = KK_m/LJ \quad \text{که در آن}$$

• همچنین مقادیر نوعی پارامترهای یک موتور DC را در نظر بگیرید:

$$L = 0.05 \text{ H}, \quad R = 1 \Omega, \quad K_m = K_v = 0.05 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}, \quad J = 10^{-5} \text{ Kg m}^2, \quad b = 10^{-2}$$

$$P_1 = 2.5 \times 10^4, \quad P_2 = 10^5, \quad P_3 = 1020 \quad \text{که در آن } \omega_n = \sqrt{P_1 + P_2K}, \quad \zeta = \frac{P_3}{2\sqrt{P_1 + P_2K}} \quad \text{در نتیجه}$$

• بدین ترتیب ω_n با مجذور K نسبت مستقیم و ζ با مجذور K نسبت وارون دارد.

• برای مقدار مطلوب ζ می توان بهره کنترلگر را از رابطه زیر به دست آورد: $K = ((P_3/2\zeta)^2 - P_1)/P_2$

برگرفته از کتاب کنترل مدرن

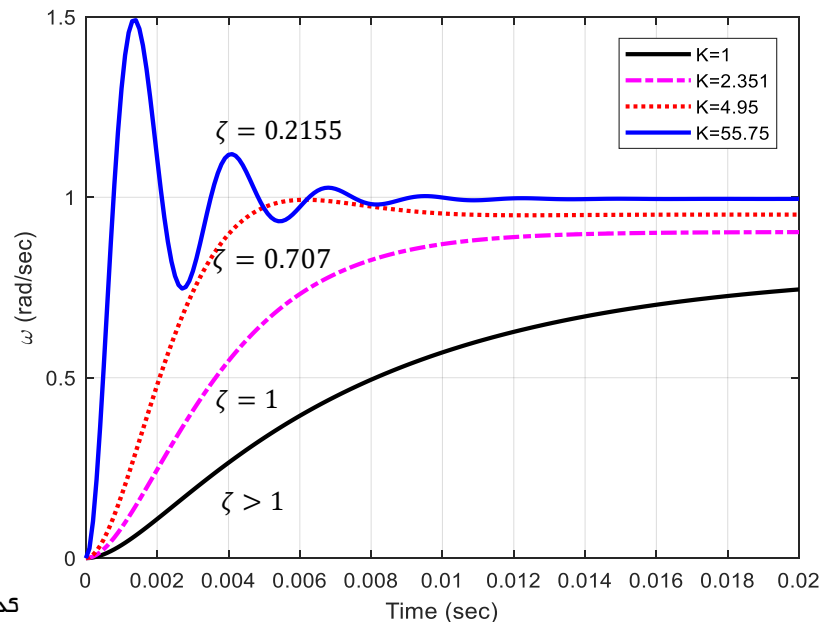
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ ادامه مثال ۱: بدین ترتیب تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را با استفاده از کامپیوتر به دست می آوریم

```
% DC motor parameters
L=0.05; R=1; Km=0.05; Kv=0.05; J=1e-5; b=1e-2;
P1=(R*b+Kv*Km)/(L*J); P2=Km/L/J; P3=b/J+R/L;
zeta_d=[1; 0.707; 0.2155];
K_d=((P3/2./zeta_d).^2-P1)/P2;
t=0:10^-4:0.02;
K=[1; K_d]; % System gains
for i=1:4
    omega2=P1+P2*K(i);
    omega=sqrt(omega2)
    zeta=P3/(2*omega)
    num=K(i)*Km/(L*J);
    den=[1 2*zeta*omega omega2];
    sys=tf(num,den);
    x(:,i)=step(sys,t);
end
```

کد LCS2_Dcmotor_TR.m

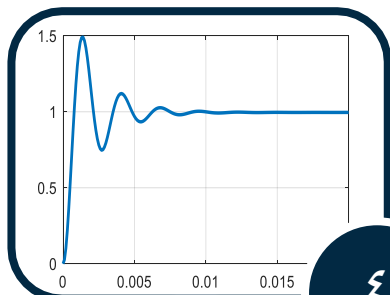




ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

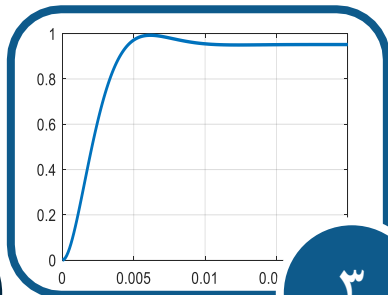
✓ ادامه مثال ۱: با طراحی مناسب بهره کنترل کننده K می توان رفتارهای مختلفی را در سیستم مشاهده کرد.



۴

$K = 55.7, \zeta = 0.2155$
 $d = 1/4$

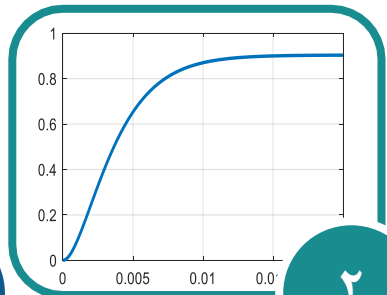
این طراحی برای فرآیند های کند
سرعت پاسخ را افزایش می دهد در
حالی که نوسانات بیشتری داریم.



۳

$K = 4.95, \zeta = 0.707$
فرو میرایی

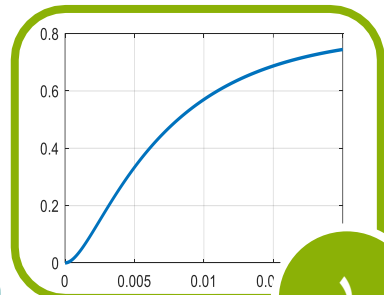
این طراحی برای سیستم های
کنترلی بسیار مناسب است.
فراجش حداقل و سرعت مناسب.



۲

$K = 2.35, \zeta = 1$
میرایی مرزی

این پاسخ سریعترین حالت بدون
نوسان را ایجاد می کند.



۱

$K = 1, \zeta > 1$
فرا میرایی

دو ریشه حقیقی متمایز خواهیم
داشت. پاسخ غیر نوسانی ولی کند
است.



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

سیستم های مرتبه بالاتر از دو

✓ سیستم های کنترل خطی معمولاً دارای مرتبه بالاتر از دو بوده ولی چون علی هستند، سره خواهند بود:

$$M(s) = \frac{c(s)}{r(s)} = \frac{K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, n \geq m$$

✓ که در حالت کلی سیستم می تواند شامل قطب های حقیقی و مختلط باشد:

$$M(s) = \frac{c(s)}{r(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_j)}$$

✓ با استفاده از روش دستی (یا دستور residue در Matlab) می توان آنها را به صورت کسرهای جزئی تفکیک نمود. خروجی سیستم به ازای ورودی پله واحد عبارت است از:

$$c(s) = \frac{A}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}, \quad q + 2r = n$$

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

سیستم های مرتبه بالاتر از دو

✓ بدین ترتیب پاسخ زمانی سیستم از مجموع کسرهای جزئی آن تشکیل می شود

$$c(t) = A + \sum_{j=1}^q A_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k), \quad \text{for } t \geq 0$$

✓ اگر تمامی قطب ها در نیم صفحه باز سمت چپ OLHP قرار داشته باشند $\Re(p_i) < 0$ آنگاه پاسخ ها همگی میرا بوده و خروجی کراندار مانده و $c(\infty) = A$. چنین سیستمی **پایدار** نامیده می شود.

✓ با توجه به وجود ترم های نمایی در کلیه اجزای پاسخ، قطب هایی که از محور $j\omega$ فاصله داشته باشند سریعتر میرا می شوند.

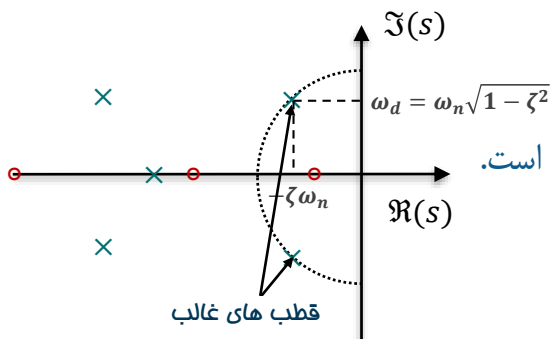
✓ صفرهای تابع تبدیل سیستم، در رفتار نمایی یا نوسانی سیستم تاثیر مستقیم ندارند،

ولی اندازه مانده ها A_j, D_j و به تبع آن دامنه و علامت ترم ها را تعیین می کنند.

✓ قطب های غالب، ترم هایی هستند که به محور $j\omega$ نزدیکتر بوده و اندازه مانده ها در آنها بزرگتر است.

✓ رفتار اصلی سیستم را قطب های غالب تعیین می کنند.

✓ از این رو است که تحلیل سیستم های مرتبه دوم حائز اهمیت است.

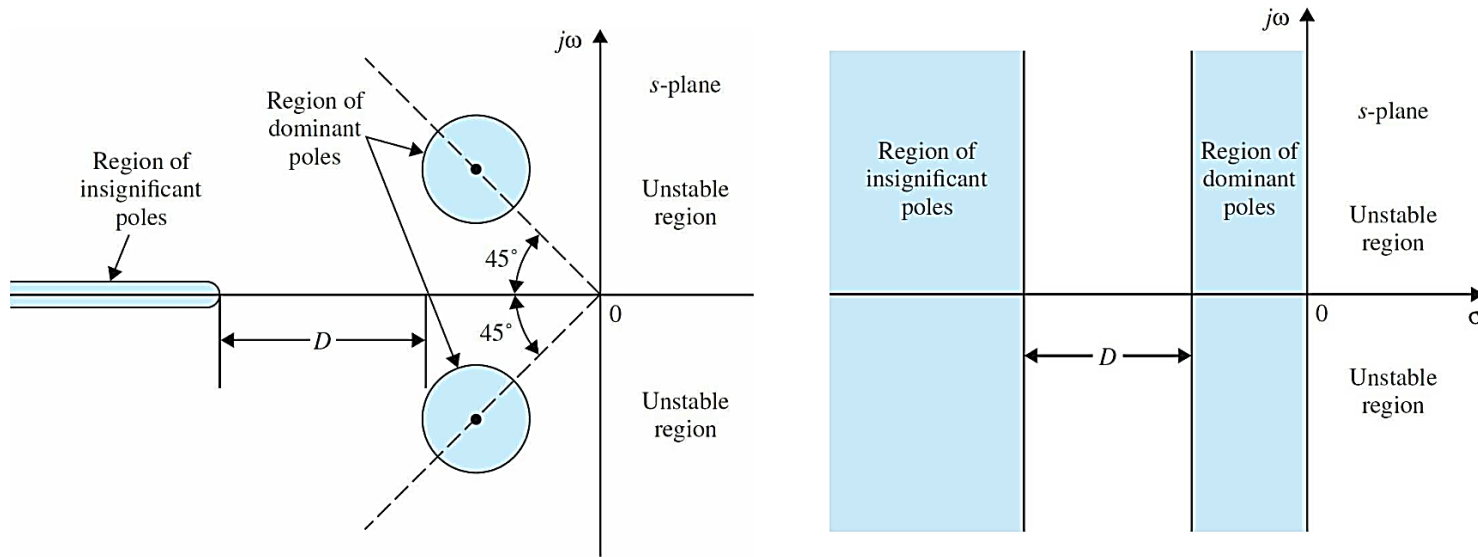


برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

سیستم های مرتبه بالاتر از دو

✓ قطب های غالب: اگر در سیستمی صفری در سمت راست محور $j\omega$ وجود نداشته باشد، آنگاه اگر یک قطب و یا یک زوج قطب در منطقه نشان داده شده در شکل در نزدیکی محور $j\omega$ قرار گیرند قطب غالب نامیده شده و رفتار سیستم را تعیین می کنند.



برگرفته از کتاب Kuo

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

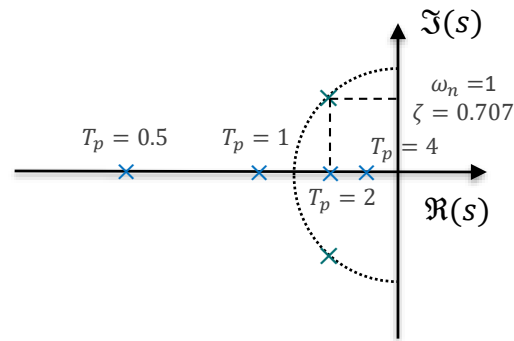
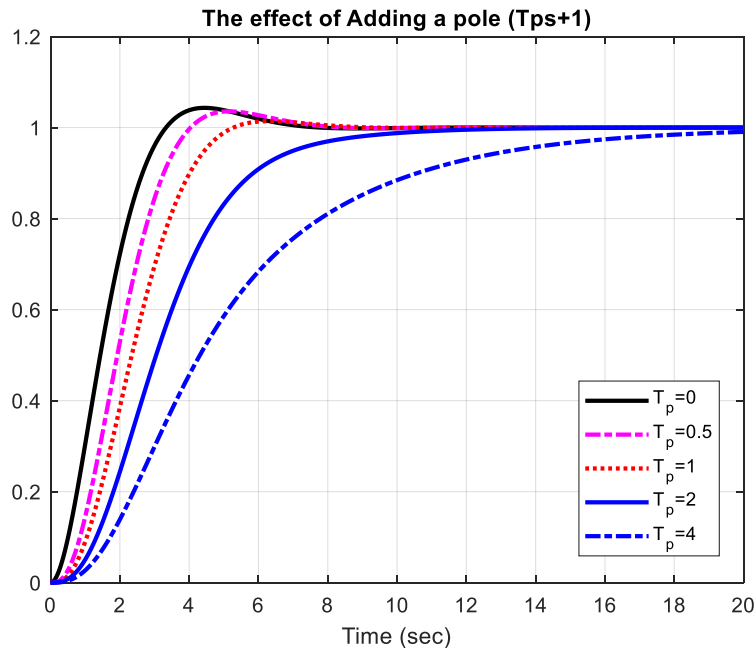
سیستم های مرتبه بالاتر از دو

✓ اضافه کردن قطب حقیقی غالب به سیستم مرتبه دو

□ یک قطب حقیقی نزدیک به محور $j\omega$ با ثابت زمانی T_p به سیستم مرتبه دو اضافه کنید:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + T_p s)}$$

□ با بزرگ شدن T_p قطب حقیقی به محور $j\omega$ نزدیک تر شده و اثر آن افزایش می یابد.



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

سیستم های مرتبه بالاتر از دو

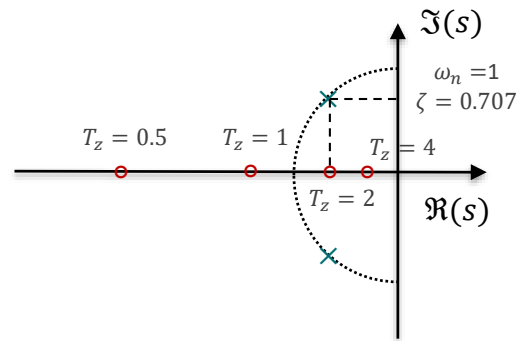
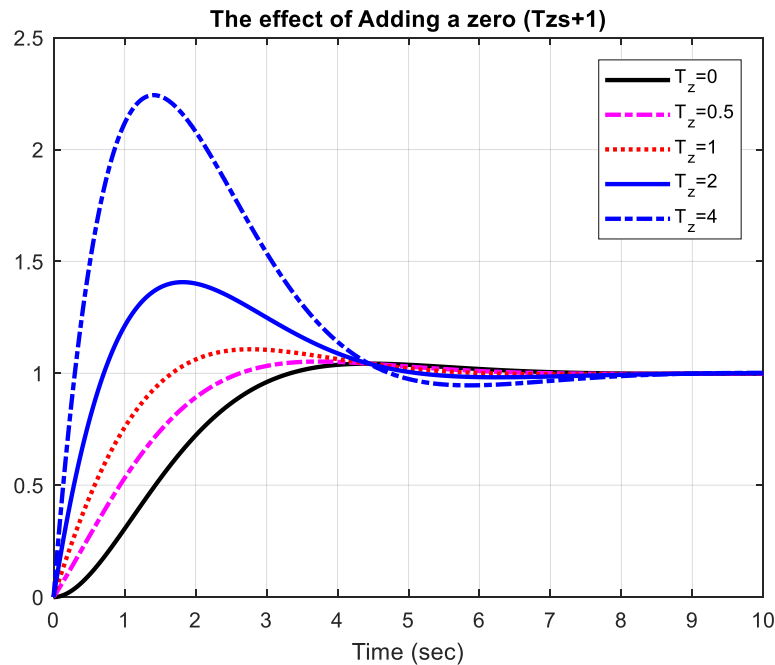
✓ اضافه کردن صفر حقیقی غالب به سیستم مرتبه دو

□ یک صفر حقیقی نزدیک به محور $j\omega$ با ثابت زمانی T_z به سیستم مرتبه دو اضافه کنید:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1 + T_z s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = M_1(s) + T_z(sM_1(s))$$

□ تعبیر آن اضافه شدن مشتق پاسخ زمانی سیستم بدون صفر با ضریب T_z به آن است.

□ با بزرگ شدن T_z صفر حقیقی به محور $j\omega$ نزدیک تر شده و اثر آن افزایش شدید فرافش سیستم است.



مل کامپیوتری

برگرفته از کتاب Kuo

کد LCS2_pz_effect.m

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

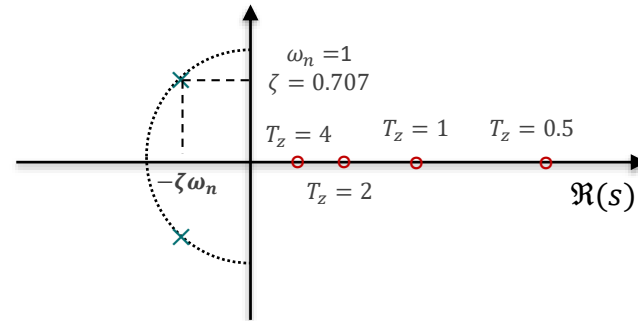
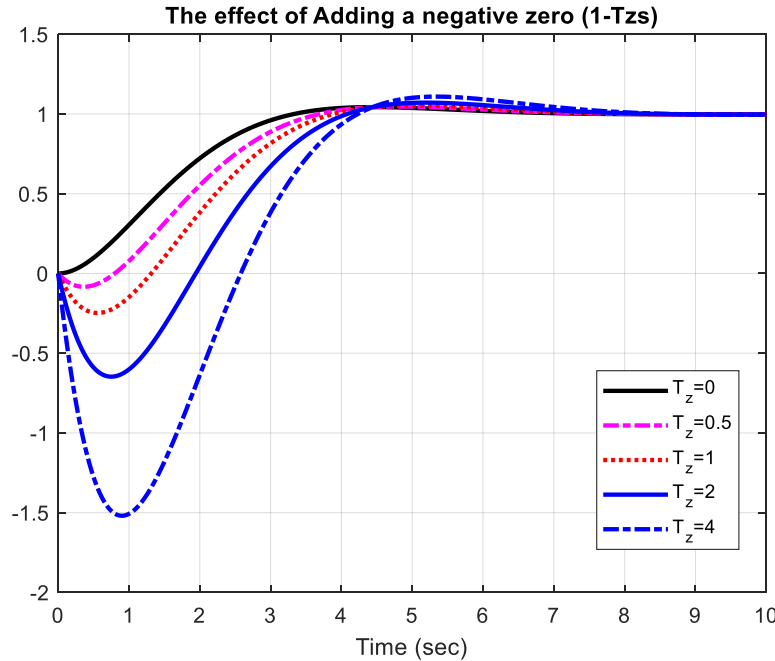
سیستم های مرتبه بالاتر از دو

✓ اضافه کردن صفر حقیقی مثبت به سیستم مرتبه دو (سیستم غیر کمینه فاز)

□ یک صفر حقیقی مثبت نزدیک به محور $j\omega$ با ثابت زمانی T_z به سیستم مرتبه دو اضافه کنید:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1 - T_z s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

□ پاسخ سیستم دارای فروجهش می شود و با بزرگ شدن T_z صفر حقیقی به محور $j\omega$ نزدیک تر شده و اثر آن افزایش می یابد.



برگرفته از کتاب Kuo

کد LCS2_pz_effect.m



عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

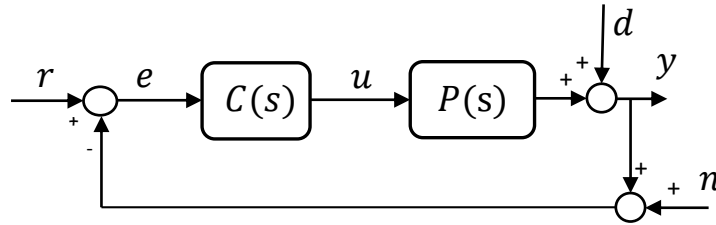
۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در موزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان فضای ماندگار سیستم ملقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره ملقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ سیستم حلقه بسته مقابل را در نظر بگیرید



□ تعریف: تابع تبدیل بهره حلقه $L(s) = C(s)P(s)$

□ تبدیل لاپلاس خروجی حلقه بسته سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} r(s) + \frac{1}{1 + L(s)} d(s) - \frac{L(s)}{1 + L(s)} n(s),$$

□ تابع تبدیل حلقه بسته خطای سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s) - \frac{1}{1 + L(s)} d(s) - \frac{1}{1 + L(s)} n(s),$$

□ این همان اعجاز فیدبک است که رابطه ورودی های مختلف سیستم حلقه بسته به خطای ردیابی یکسان است:

$$\frac{1}{1 + L(s)}$$

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ حال خطای ماندگار به ورودی مرجع پله واحد $r(s) = \frac{1}{s}$ را تحلیل کنید.

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

□ در نتیجه نه تنها برای ورودی مرجع پله واحد که برای ورودی اغتشاش یا نویز پله واحد نیز خطای ماندگار عبارت است از:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = L(0)$$

✓ ثابت خطای موقعیت K_p را به صورت زیر تعریف می کنیم:

✓ در این صورت خطای ماندگار به ورودی پله واحد برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ به همین ترتیب خطای ماندگار به ورودی مرجع شیب واحد $r(s) = \frac{1}{s^2}$ را تحلیل کنید.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

□ در نتیجه نه تنها برای ورودی مرجع شیب که برای ورودی اغتشاش یا نویز شیب واحد نیز خطای ماندگار عبارت است از:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)}$$

✓ ثابت خطای سرعت K_v را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s)$$

✓ در این صورت خطای ماندگار به ورودی شیب واحد برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ به طریق مشابه خطای ماندگار به ورودی مرجع سهمی واحد $r(s) = \frac{1}{s^3}$ را تحلیل کنید.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^3}$$

□ در نتیجه نه تنها برای ورودی مرجع سهمی واحد که برای ورودی اغتشاش یا نویز سهمی واحد نیز خطای ماندگار عبارت است از:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)$$

✓ ثابت خطای سرعت K_v را به صورت زیر تعریف می کنیم:

✓ در این صورت خطای ماندگار به ورودی سهمی واحد برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ تعریف تیپ سیستم

□ سیستمی تیپ صفر نامیده می شود اگر ثابت موقعیت آن کراندار و ثابت سرعت آن صفر شود

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_{z1}s+1)(T_{z2}s+1)\cdots(T_{zm}s+1)}{(T_{p1}s+1)(T_{p2}s+1)\cdots(T_{pn}s+1)} = K$$

• سیستمی که هیچ قطبی بر روی مبدا نداشته باشد:

□ سیستمی تیپ یک نامیده می شود اگر ثابت سرعت آن کراندار و ثابت شتاب آن صفر شود

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_v (T_{z1}s+1)(T_{z2}s+1)\cdots(T_{zm}s+1)}{s(T_{p1}s+1)(T_{p2}s+1)\cdots(T_{pn}s+1)} = K_v$$

• سیستمی که تنها یک قطب بر روی مبدا داشته باشد:

□ سیستمی تیپ دو نامیده می شود اگر ثابت شتاب آن کراندار و ثابت های مرتبه بالاتر صفر شود

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_a (T_{z1}s+1)(T_{z2}s+1)\cdots(T_{zm}s+1)}{s^2 (T_{p1}s+1)(T_{p2}s+1)\cdots(T_{pn}s+1)} = K_a$$

• سیستمی که تنها دو قطب بر روی مبدا داشته باشد:



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ خطای ماندگار سیستم حلقه بسته به ورودی های مختلف بر حسب تیپ سیستم

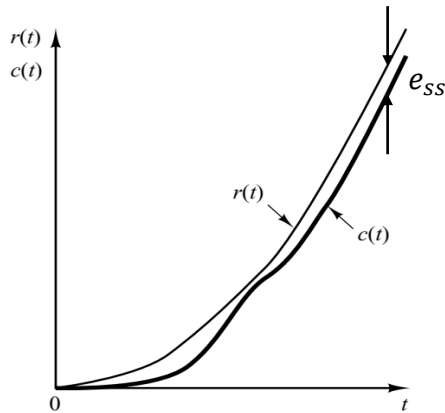
نوع سیستم	خطای ماندگار به ورودی پله واحد	خطای ماندگار به ورودی شیب واحد	خطای ماندگار به ورودی سهمی واحد
تیپ صفر	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
تیپ یک	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
تیپ دو	0	0	$\frac{1}{K_a}$

✓ اگر بخواهید خطای ماندگار به ورودی پله حتما صفر باشد لازم است حداقل یک انتگرال گیر در بهره حلقه $L(s)$ وجود داشته باشد

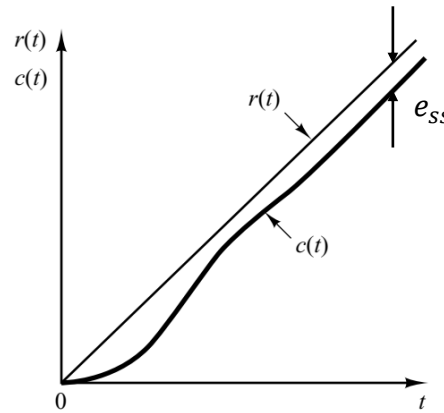
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

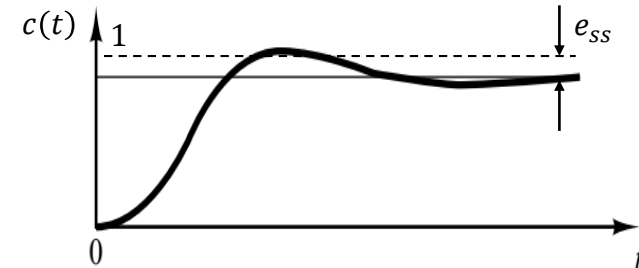
✓ پاسخ سیستم های تیپ صفر، یک و دو به ورودی های پله، شیب و سهمی واحد



پاسخ ورودی سهمی واحد
به سیستم تیپ دو



پاسخ ورودی شیب واحد
به سیستم تیپ یک



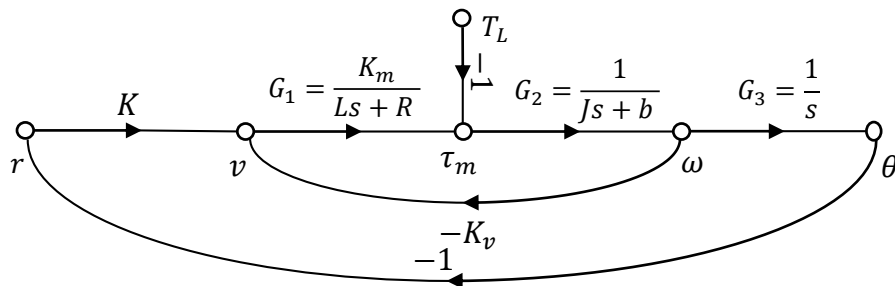
پاسخ ورودی پله واحد
به سیستم تیپ صفر

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ مثال ۲: کنترل موقعیت موتور DC

را با کنترلر بهره K در نظر بگیرید:



□ تابع تبدیل حلقه باز سرعت موتور در فصل قبل به دست آمده است

بهره حلقه به ازای ورودی مرجع r عبارت است از

$$L(s) = K \frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{KK_m}{s((Ls+R)(Js+b)+K_vK_m)},$$

□ با ساده سازی، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم به ورودی های مرجع r و اغتشاش T_L عبارت است از:

$$M_1(s) = \frac{\theta(s)}{r(s)} = \frac{K_m}{s(Ls+R)(Js+b)+K_vK_ms+KK_m}, \quad M_2(s) = \frac{\theta(s)}{T_L(s)} = \frac{-(Ls+R)}{s(Ls+R)(Js+b)+K_vK_ms+KK_m}$$



حل دستی

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ ادامه مثال ۲: ثابت موقعیت، سرعت و شتاب سیستم را نسبت به ورودی مرجع به دست می آوریم:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = L(0) = \infty, \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \frac{KK_m}{Rb + K_v K_m}, \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s) = 0$$

□ در نتیجه خطای ماندگار به ورودی مرجع پله واحد برابر صفر است $e_{ss} = 0$

□ خطای ماندگار به ورودی مرجع شیب واحد برابر است با: $e_{ss} = \frac{Rb + K_v K_m}{KK_m} = \frac{1}{4K}$

□ و خطای ماندگار به ورودی مرجع سهمی واحد بی نهایت است $e_{ss} = \infty$

✓ حال موقعیت ماندگار موتور به ورودی اغتشاش پله واحد $T_L = 1/s$ را بررسی می کنیم.

$$\theta_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sM_2(s) \cdot \frac{1}{s} = M_2(0) = \frac{-R}{KK_m} = \frac{-20}{K}$$

□ علیرغم اینکه سیستم تیپ یک است، برای ورودی اغتشاشی که میرا نشود، خطای ماندگار در موقعیت خروجی ایجاد می شود.

□ برای رفع این مشکل از کنترلر PI دارای انتگرال گیر استفاده کنید: $K \rightarrow K + \frac{K_i}{s} \Rightarrow \theta_{ss} = 0$

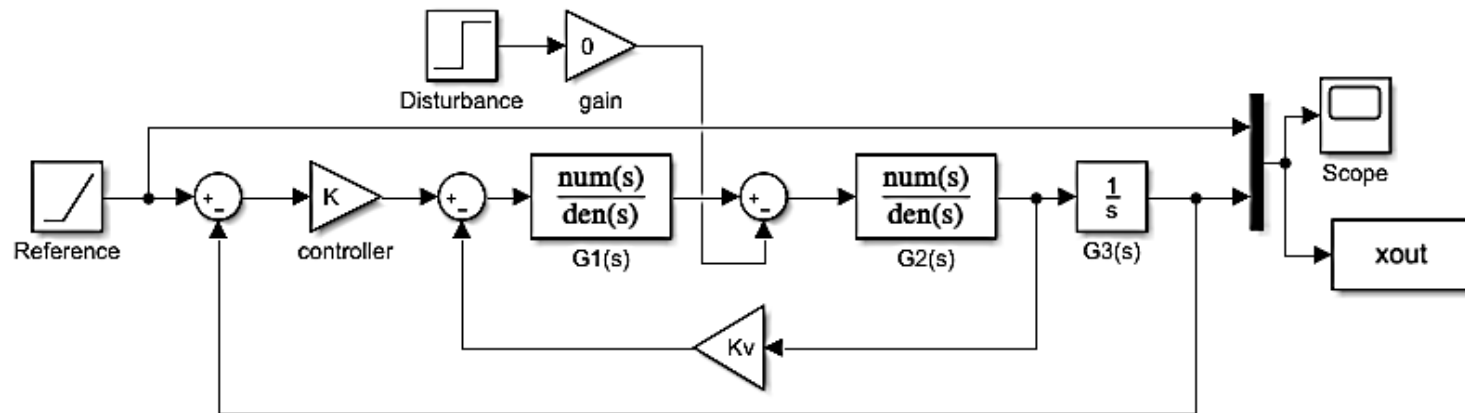


ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ ادامه مثال ۲: مدل سیستم را در Simulink ایجاد کنید:

LCS2_DCmotor_sim



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

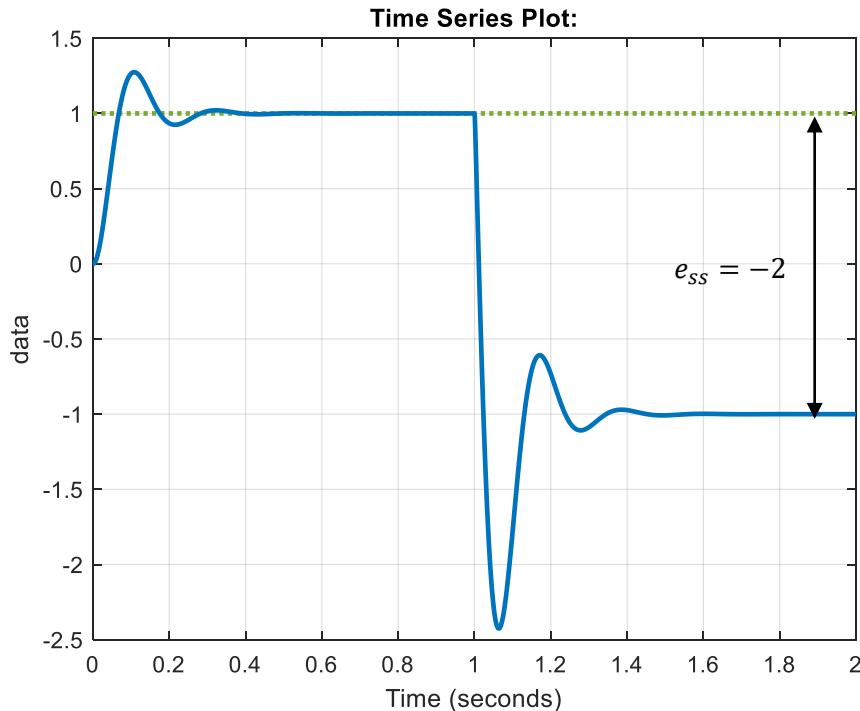
✓ ادامه مثال ۲:

□ به ازای پارامتر های سیستم و $K = 10$ ، پاسخ سیستم به ورودی پله واحد، با اعمال اغتشاش پله واحد در زمان یک ثانیه را شبیه سازی کنید.

□ خطای ماندگار به ورودی پله برابر صفر است

□ خطای ماندگار به ورودی اغتشاش پله واحد برابر -2

$$\theta_{ss} = \frac{-20}{K} = -2 \text{ است.}$$



مل کامپیوتری

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

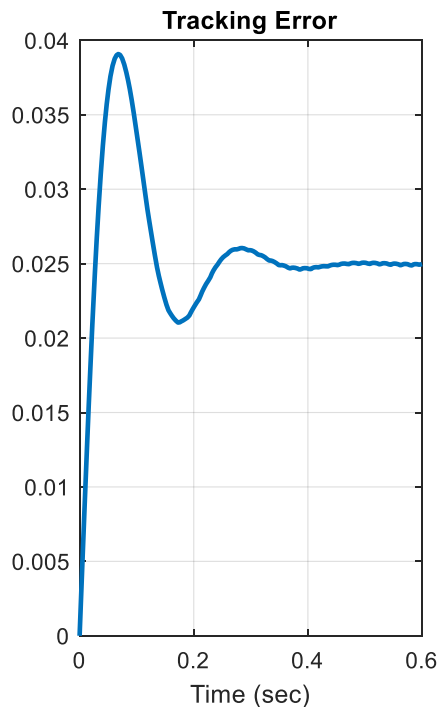
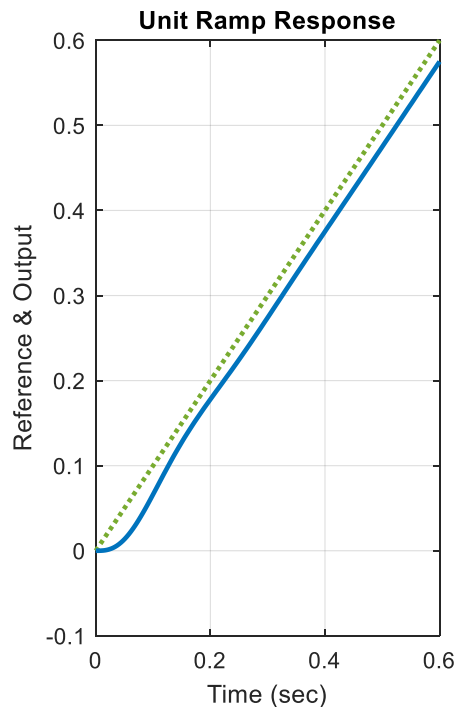
• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ ادامه مثال ۲:

□ به ازای پارامتر های سیستم و $K = 10$ ، پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد، بدون حضور اغتشاش را شبیه سازی کنید.

□ خطای ماندگار به ورودی شیب واحد برابر 0.025 است

$$e_{ss} = \frac{1}{4K} = 0.025$$



مل کامپیوتری



ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ ادامه مثال ۲:

□ به منظور حذف اغتشاش از کنترلر PI استفاده کنید،

که در آن و $K(s) = 10(1 + 5/s)$ پاسخ

سیستم به ورودی شیب واحد، با حضور اغتشاش را شبیه سازی کنید.

□ خطای ماندگار به ورودی شیب واحد و اغتشاش پله

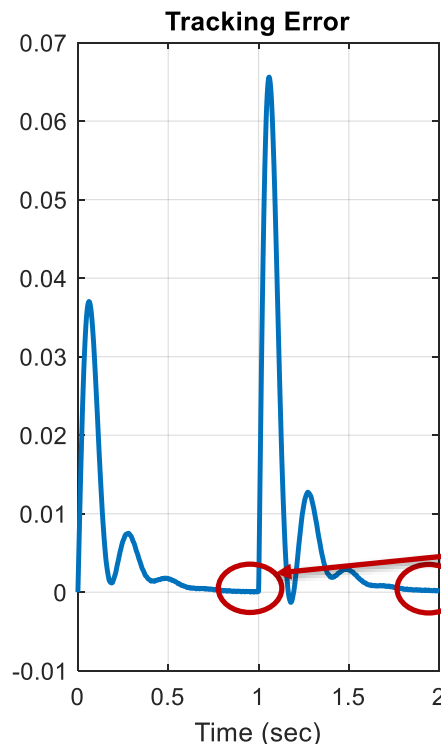
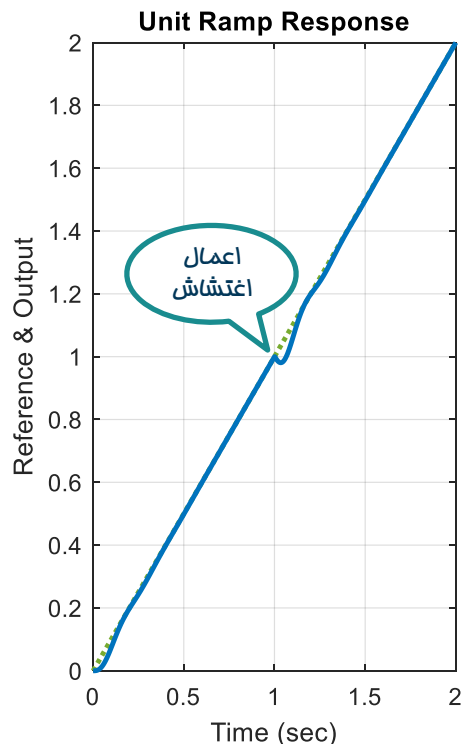
در زمان یک ثانیه هر دو صفر می شود.

□ چگونگی طراحی بهره کنترلر در فصول دیگر بیان

می شود



مل کامپیوتری





عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان فضای ماندگار سیستم ملقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره ملقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• (فشار ناپایدار در سیستم های کنترل فطی

✓ حالت کلی تابع تبدیل یک سیستم کنترل خطی:

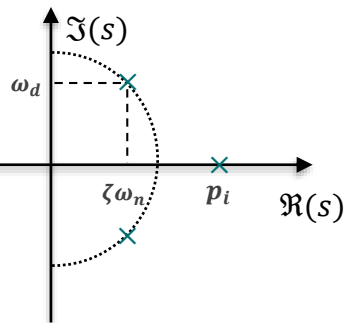
$$M(s) = \frac{c(s)}{r(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

□ و پاسخ آن به ورودی پله واحد:

$$c(t) = A + \sum_{j=1}^q A_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k), \quad \text{for } t \geq 0$$

□ اگر قطب های سیستم همگی در نیم صفحه سمت چپ LHP نباشند

بخش نمایی مرتبط با آن قطب ها نسبت به زمان واگرا خواهد شد.



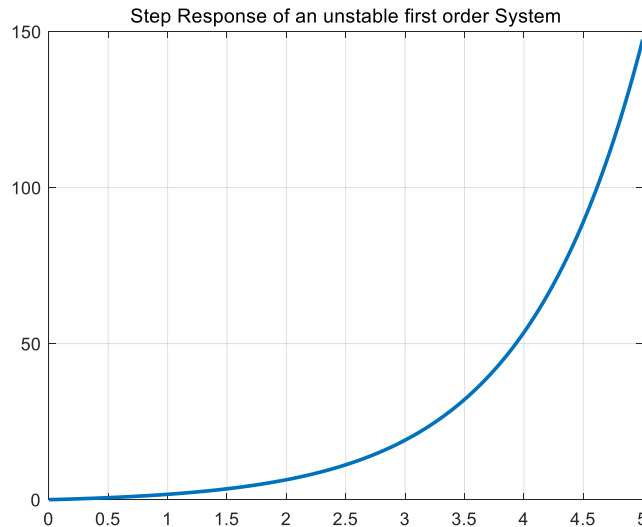
□ اگر پاسخ یک سیستم به ورودی کراندار، واگرا شود، آن سیستم ناپایدار نامیده می شود.



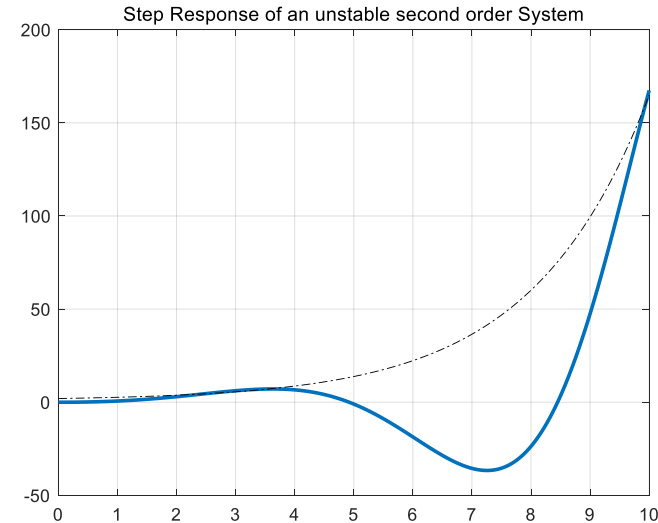
تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• رفتار ناپایدار در سیستم های کنترل خطی

پاسخ واگرا شونده یک سیستم مرتبه اول



پاسخ واگرا شونده یک سیستم مرتبه دوم



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• تعریف و شرایط پایداری در سیستم های کنترل خطی

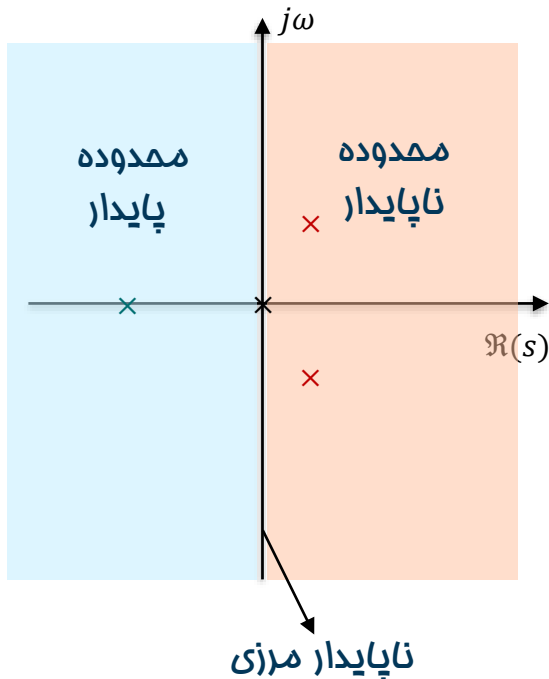
✓ پایداری : سیستمی پایدار BIBO است اگر به ازای ورودی کراندار BI پاسخ خروجی سیستم کراندار BO باقی بماند.

□ در سیستم های کنترل خطی، پایداری BIBO در حالتی که همه قطب های سیستم در نیم صفحه باز سمت چپ OLHP قرار گیرند محقق می شود. در این حالت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

□ اگر یک یا چند قطب بر روی محور $j\omega$ قرار گیرند، سیستم ناپایدار مرزی است. در این حالت سیستم یا دارای نوسانات دائمی است و یا پاسخ گذرای آن به مقدار کراندار ثابت میل می کند.

□ اگر یک یا چند قطب سیستم در نیم صفحه باز سمت راست ORHP قرار گیرند، یا یک جفت قطب تکراری بر روی محور $j\omega$ داشته باشیم، سیستم ناپایدار است. در این حالت سیستم یا دارای نوسانات واگرا شونده است و یا پاسخ گذرای آن واگرا می شود.



ناپایدار مرزی



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• تعریف و شرایط پایداری در سیستم های کنترل خطی

مثال ۱: شرایط و وضعیت پایداری سیستم های زیر را بررسی کنید.

شرایط و وضعیت پایداری سیستم	تابع تبدیل سیستم ملقه بسته
سیستم پایدار BIBO یا پایدار مجانبی است چون همه قطب های سیستم در نیم صفحه باز سمت چپ OLHP قرار دارند.	$M(s) = \frac{20(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$
سیستم ناپایدار است چون یک قطب حقیقی مثبت در $s = 1$ دارد	$M(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+4s+1)}$
سیستم ناپایدار مرزی است چرا که یک زوج قطب مزدوج موهومی در $s = \pm j2$ دارد.	$M(s) = \frac{20(s-1)}{(s+1)(s^2+4)}$
سیستم ناپایدار است چون یک زوج قطب تکراری موهومی در $s = \pm j2$ دارد.	$M(s) = \frac{20(s-1)}{(s+1)(s^2+4)^2}$



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

روش های تعیین شرایط پایداری در سیستم های کنترل خطی

- ✓ روش های عددی برای سیستم های با پارامترهای معین:
 - تعیین ریشه های معادله مشخصه با استفاده از دستور `roots(den)` یا `pole(sys)` در نرم افزار Matlab
 - رسم محل قطب ها و صفر های سیستم با دستور `pzplot(sys)`
- ✓ روش های تحلیلی برای سیستم های با پارامترهای نامعین:
 - معیار پایداری راث-هرویتز:
 - تعیین تعداد قطب های ناپایدار یا ناپایدار مرزی **سیستم حلقه بسته** بدون حل عددی معادله مشخصه (در ادامه)
 - رسم مکان هندسی ریشه ها:
 - تعیین هندسی محل قطب های سیستم حلقه بسته با کنترلگر بهره ثابت به ازای $-\infty < K < \infty$ با استفاده از محل قطب ها و صفر های **سیستم حلقه باز** (فصل سوم)
 - معیار پایداری نایکویست:
 - تعیین تعداد قطب های ناپایدار سیستم حلقه بسته با رسم پاسخ فرکانسی **سیستم حلقه باز** (فصل چهارم)

عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم ملقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره ملقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز (Routh-Hurwitz)

✓ در این روش محل قرار گیری قطب های سیستم در یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی تعیین می شود.

✓ فرض کنید معادله مشخصه سیستم **حلقه بسته** با چند جمله ای زیر داده شده باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$.

$$\Delta(s) = F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

✓ شرط لازم (و نه کافی) برای اینکه همه ریشه های این چند جمله متعلق به OLHP باشند:

□ تمامی ضرایب چند جمله ای هم علامت باشند.

□ هیچ یک از ضرایب چند جمله ای صفر نباشد.

• این شرایط را به راحتی می توانید قبل از تعیین شرایط کافی بررسی کنید.

• این شرایط از جبر چند جمله ای ها به دست آمده است که در آن

حاصل ضرب همه قطب ها $\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \Sigma$, ..., حاصل ضرب دو به دو قطب ها $\frac{a_{n-2}}{a_n} = +\Sigma$, همه قطب ها $\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\Sigma$.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ شرایط کافی: تشکیل جدول راث: مطابق جدول زیر برای حالت $n = 6$ برای سیستم جدول راث را تشکیل دهید.

$$\Delta(s) = F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$A = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & a_3 \\ a_6 & a_4 \end{vmatrix}}{a_5}$	$B = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & a_1 \\ a_6 & a_2 \end{vmatrix}}{a_5}$	$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 0 \\ a_6 & a_0 \end{vmatrix}}{a_5}$	0
s^3	$C = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix}}{A}$	$D = \frac{\begin{vmatrix} A & a_0 \\ a_5 & a_1 \end{vmatrix}}{A}$	0	0
s^2	$E = \frac{\begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}}{C}$	a_0	0	0
s^1	$F = \frac{\begin{vmatrix} E & a_0 \\ C & D \end{vmatrix}}{E}$	0	0	0
s^0	a_0	0	0	0



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ معیار پایداری: ستون اول جدول راث را در نظر بگیرید

□ اگر علامت همگی عناصر ستون اول یکسان باشند، آنگاه کلیه قطب های سیستم پایدارند.

□ به تعداد تغییر علامت عناصر ستون اول جدول راث، قطب های ناپایدار خواهیم داشت.

✓ مثال ۱: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = (s - 2)(s + 1)(s - 3) \\ = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$$

□ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

□ دو تغییر علامت داریم، پس دو قطب ناپایدار.

$F(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$		
s^3	1	1
s^2	-4	6
s^1	$\frac{\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 2.5$	0
s^0	6	0



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ مثال ۲: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

□ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

□ دو تغییر علامت داریم، پس دو قطب ناپایدار.

$\Delta(s) = F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$				
s^4	2	3	10	
s^3	1	5	0	
s^2	$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -7$	10	0	
s^1	$\frac{\begin{vmatrix} -7 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{-7} = 6.43$	0	0	
s^0	10	0	0	

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ جدول راث: حالت های ویژه

□ اگر یکی از عناصر ستون اول جدول راث صفر شود، ادامه محاسبات موجب اختلال می شود.

□ دو حالت در این مورد وجود دارد

- حالت اول: تنها عنصر اول صفر شده و سایر عناصر سطر مربوطه غیر صفر باشد
- حالت دوم: همه عناصر یک سطر صفر شوند

□ در حالت اول

- عنصر صفر را با $\epsilon > 0$ جایگزین نموده و سپس $\epsilon \rightarrow 0$ میل می دهیم.

✓ مثال ۳: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

□ دو تغییر علامت داریم، پس دو قطب ناپایدار.

$F(s) = s^3 + 0s^2 - 3s + 2 = 0$		
s^3	1	-3
s^2	$0 \rightarrow \epsilon$	2
s^1	$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-3\epsilon - 2}{\epsilon} = -\infty$	0
s^0	2	0

برگرفته از کتاب Kuo

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ جدول راث: حالت های ویژه

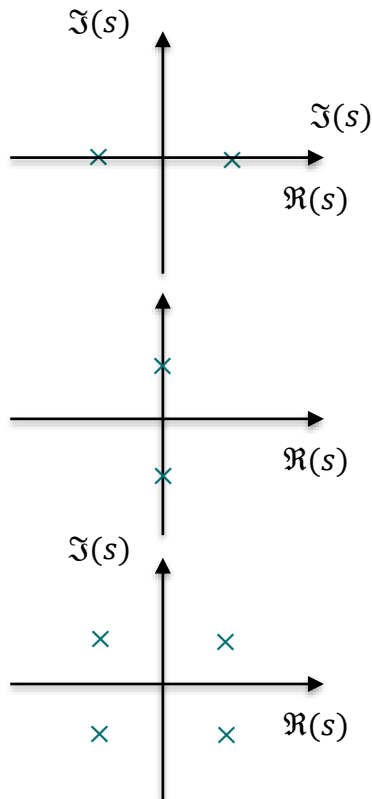
□ حالت دوم: همه عناصر یک سطر صفر شوند. در این حالت

- یا دو قطب حقیقی مختلط متقارن نسبت به مبدا خواهیم داشت
- یا دو قطب مزدوج موهومی بر روی محور $j\omega$ خواهیم داشت.
- یا چهار قطب مزدوج مختلط متقارن نسبت به مبدا خواهیم داشت.

□ در همه حالت ها یک معادله کمکی با استفاده از سطر بالایی می سازیم.

□ سپس از این معادله کمکی مشتق گرفته و جایگزین عناصر صفر می کنیم.

□ با حل معادله کمکی می توان کلیه قطب های مرتبط را تعیین نمود.





تحلیل پایداری سیستم های کنترل

معیار پایداری راث-هرویتز

✓ جدول راث: حالت های ویژه

✓ مثال ۴: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = (s - 1)^2(s + 2)(s + 1) \\ = s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

□ جدول راث را تا سطر s^1 تشکیل می دهیم. عناصر این سطر همگی صفر می شود!

□ معادله کمکی را با استفاده از سطر s^2 تشکیل می دهیم.

$$A(s) = -2s^2 + 2 = 0 \rightarrow s = \pm 1$$

قطب های سیستم اند

$$\frac{dA(s)}{ds} = -4s + 0$$

□ سطر جایگزین:

□ ستون اول دو تغییر علامت دارد، پس دو قطب ناپایدار داریم.

$$\Delta(s) = F(s) = s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

s^4	1	-3	2
-------	---	----	---

s^3	1	-1	0
-------	---	----	---

s^2	$\frac{-3+1}{1} = -2$	2	0
-------	-----------------------	---	---

s^1	$\frac{2-2}{-2} = 0$	0	0
-------	----------------------	---	---

$$\Delta(s) = F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

s^4	1	-3	2
-------	---	----	---

s^3	1	-1	0
-------	---	----	---

s^2	-2	2	0
-------	----	---	---

s^1	-4	0	0
-------	----	---	---

s^0	2	0	0
-------	---	---	---

برگرفته از کتاب Kuo



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

معیار پایداری راث-هرویتز

✓ مثال ۵: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = (s \pm 2)^2(s \pm j)(s^2 + s + 1) \\ = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

□ جدول راث را تا سطر s^3 تشکیل می دهیم.

عناصر این سطر همگی صفر می شود!

□ معادله کمکی را با استفاده از سطر s^4 تشکیل می دهیم.

$$A(s) = s^4 - 3s^2 - 4 = (s^2 - 4)(s^2 + 1) = 0$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 - 6s$$

□ سطر جایگزین:

□ ستون اول یک تغییر علامت دارد، پس یک قطب ناپایدار داریم.

□ با استفاده از حل معادله کمکی: دو قطب نیز بر روی محور $j\omega$ داریم

$F(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$				
s^6	1	-2	-7	-4
s^5	1	-3	-4	0
s^4	$\frac{-2+3}{1} = 1$	$\frac{-7+4}{1} = -3$	-4	0
s^3	$0 \rightarrow 4$	$0 \rightarrow -6$	0	0
s^2	$\frac{-12+6}{4} = -1.5$	-4	0	0
s^1	$\frac{9+16}{-1.5} = -16.6$	0	0	0
s^0	-4	0	0	0

برگرفته از کتاب Kuo

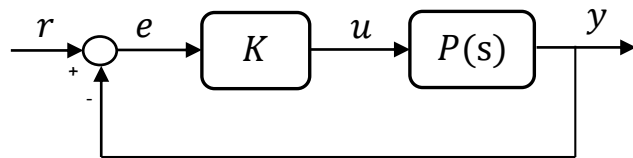
تحلیل پایداری سیستم های کنترل

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ تعیین محدوده پایداری به ازای بهره کنترلر K

□ اگر معادله مشخصه سیستم دارای ضرایب معین باشد می توان از روش های عددی استفاده نمود

✓ سیستم حلقه بسته با بهره کنترلر نامشخص K را در نظر بگیرید



✓ مثال ۶: موتور DC مثال قبل را در این حالت در نظر بگیرید:

$$L(s) = KP(s) = \frac{KK_m}{s((Ls + R)(Js + b) + K_v K_m)}$$

□ به ازای پارامترهای موتور

$$L(s) = \frac{10^5 K}{s^3 + 1020s^2 + 1.25 \times 10^5 s}$$

□ بدین ترتیب معادله مشخصه سیستم **حلقه بسته** برابر است با

$$\Delta(s) = F(s) = s^3 + 1020s^2 + 1.25 \times 10^5 s + 10^5 K$$

برگرفته از کتاب Kuo



تحلیل پایداری سیستم های کنترل

معیار پایداری راث-هرویتز

$$F(s) = s^3 + 1020s^2 + 1.25 \times 10^5 s + 10^5 K$$

s^3	1	1.25×10^5
s^2	1020	$10^5 K$
s^1	$\frac{1.275 \times 10^8 - 10^5 K}{1020}$ $= \frac{1020}{1275 - K}$	0
s^0	$10^5 K$	0

✓ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

□ برای اینکه سیستم پایدار باشد بایستی علامت همگی عناصر ستون اول یکسان باشد:

$$\begin{cases} 1275 - K > 0 \\ 10^5 K > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < K < 1275$$

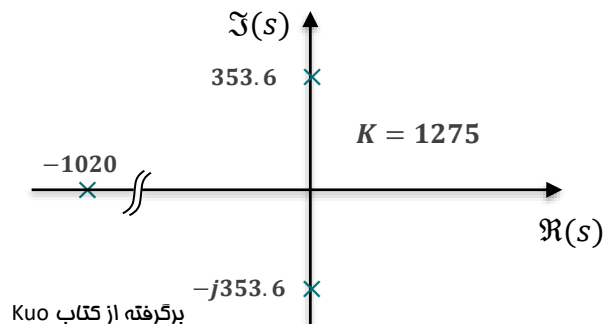
□ حالت مرزی را در نظر بگیرید: $K = 1275$

□ در این حالت سطر سوم همگی صفر خواهد شد و معادله کمکی

$$A(s) = 1020(s^2 + 1.25 \times 10^5) = 0$$

برابر است با

در این حالت دو قطب موهومی و نوسانات دائمی با فرکانس زیر خواهیم داشت
 $s = \pm j353.6$ قطب دیگر سیستم حلقه بسته در فاصله ای دور از مبدا و در
 $s = -1020$ قرار دارد





تحلیل پایداری سیستم های کنترل

معیار پایداری راث-هرویتز

✓ مثال ۷: سیستم حلقه بسته با سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$L(s) = KP(s) = \frac{Ks(3s+1)}{s^3+2s+4}$$

□ بدین ترتیب معادله مشخصه سیستم برابر است با

$$\Delta(s) = F(s) = s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4$$

✓ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

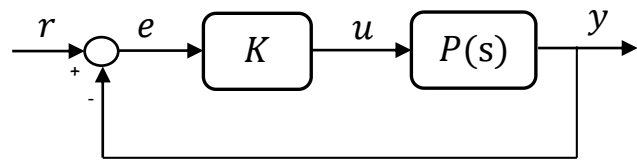
□ برای اینکه سیستم پایدار باشد بایستی علامت همگی عناصر ستون اول

$$3K > 0 \rightarrow K > 0 \quad \text{AND} \quad \text{یکسان باشد:}$$

$$3K^2 + 6K - 4 = 3(K + 2.528)(K - 0.528) > 0$$

$$\rightarrow K < -2.528 \quad \text{OR} \quad K > 0.528$$

□ در نتیجه سیستم حلقه بسته به ازای $K > 0.528$ پایدار است



$$F(s) = s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4$$

s^3	1	$K+2$
s^2	$3K$	4
s^1	$\frac{3K(K+2)-4}{3K}$	0
s^0	4	0

برگرفته از کتاب Kuo



Edward John Routh

(20 January 1831 – 7 June 1907)

was an English mathematician, noted as the outstanding coach of students preparing for the **Mathematical Tripos** examination of the **University of Cambridge** in its heyday in the middle of the nineteenth century. He also did much to systematise the mathematical theory of **mechanics** and created several ideas critical to the development of modern control **systems theory**.

In addition to his intensive work in teaching and writing, which had a persistent effect on the presentation of **mathematical physics**, he also contributed original research such as the **Routh–Hurwitz theorem**.

Central tenets of modern **control systems theory** relied upon the **Routh stability criterion** (though nowadays due to modern computers it is not as important), an application of **Sturm's theorem** to evaluate **Cauchy indices** through the use of the **Euclidean algorithm**.

برگرفته از [پیوند](#)



Adolf Hurwitz

(26 March 1859 – 18 November 1919)

was a German mathematician who worked on algebra, analysis, geometry and number theory. He was one of the early students of the Riemann surface theory, and used it to prove many of the foundational results on algebraic curves; for instance Hurwitz's automorphisms theorem. This work anticipates a number of later theories, such as the general theory of algebraic correspondences, Hecke operators, and Lefschetz fixed-point theorem. He also had deep interests in number theory. He studied the maximal order theory (as it now would be) for the quaternions, defining the Hurwitz quaternions that are now named for him. In the field of control systems and dynamical systems theory he derived the [Routh–Hurwitz stability criterion](#) for determining whether a linear system is stable in 1895, independently of Edward John Routh who had derived it earlier by a different method.

برگرفته از [پیوند](#)

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق - کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیستم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.



حمید رضا تقی راد
استاد



گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل فطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به [این سایت](#) مراجعه نمایید



متشکرم

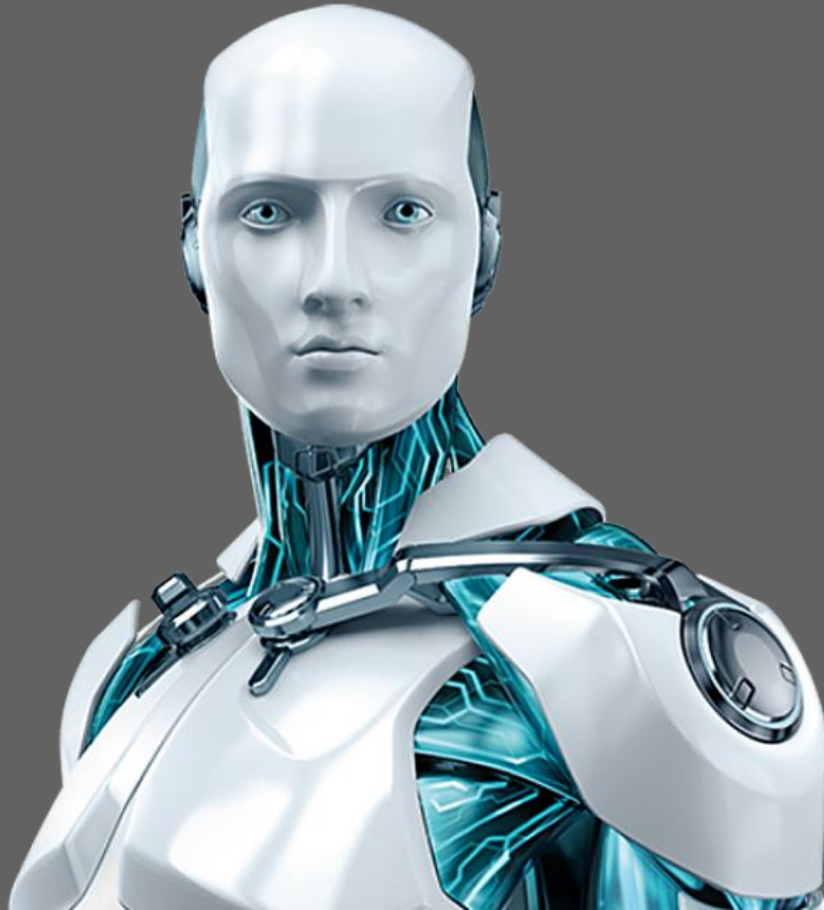


سیستم های کنترل فطی

فصل سوم: تحلیل و طراحی با مکان هندسی ریشه ها

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربری متنوع روش ترسیم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلرهای کاربردی، P ، PD ، $Lead$ ، Lag ، و $Lead-Lag$ خواهیم پرداخت.





به چشم انداز

کسب مهارت های لازم
در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی
خوش آمدید



در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. گروه رباتیک ارس به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

سیستم های کنترل فطی
دکتر ممید رضا تقی راد

دانشگاه صنعتی فواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق، دپارتمان کنترل و سیستم، گروه رباتیک ارس

عناوین فصل

مقدمه

چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

۱

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

۴

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

نقاط ابتدا و انتهای، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

۲

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

کنترلر بهره ثابت، جبران سازهای دینامیکی، معرفی چند کنترلر کاربردی، طراحی کنترلر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

۵

مثال های کاربردی

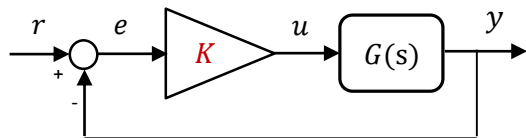
روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دور کردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

۳

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازه و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربردی متنوع روش ترسیم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلرهای کاربردی، PD، Lead، Lag، و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

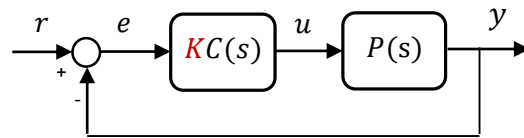
چرا مکان هندسی ریشه ها

✓ در یک سیستم کنترل تحلیل پایداری و رفتار زمانی سیستم بر حسب بهره کنترلر K مورد توجه است.



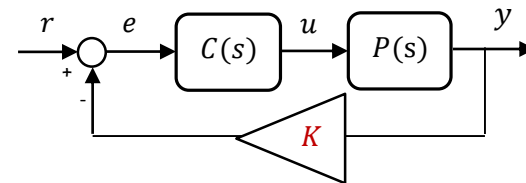
$$L(s) = KG(s)$$

$$\Delta(s) = 1 + KG(s)$$



$$L(s) = KC(s)P(s) = KG(s)$$

$$\Delta(s) = 1 + KG(s)$$



$$L(s) = C(s)P(s) = G(s)$$

$$\Delta(s) = 1 + KG(s)$$

□ در سه حالت فوق و حالت های دیگر معادله مشخصه سیستم یکسان است

□ پایداری سیستم حلقه بسته به محل ریشه های $\Delta(s)$ مرتبط است

□ رفتار گذرا و ماندگار سیستم حلقه بسته نیز به محل ریشه های $\Delta(s)$ مرتبط است

✓ با ترسیم مکان هندسی ریشه ها در صفحه s می توان به ازای مقادیر مختلف K پایداری و رفتار زمانی سیستم را تحلیل و با انتخاب مناسب K آنرا طراحی نمود.

• شرایط اندازه و زاویه

✓ فرض کنید می خواهیم به ازای مقادیر مختلف $-\infty < K < \infty$ ریشه های معادله مشخصه یک سیستم حلقه بسته را تعیین کنیم:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 0$$

✓ با فرض معین بودن تابع تبدیل $G(s)$:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow D(s) + KN(s) = 0$$

□ معادله مشخصه سیستم تبدیل به چند جمله ای (معمولا بالاتر از مرتبه دو) تابعی از K می شود.

$$D(s) + KN(s) = 0$$

□ از معیار پایداری راث می توان برای تعیین محدوده پایداری استفاده نمود ولی محل قطب ها را نمی توان تعیین نمود.

□ با استفاده از روش های عددی نیز می توان به ازای هر مقدار K محل ریشه ها را در صفحه مختلط S تعیین نمود.

□ مکان هندسی ریشه ها روشی ترسیمی است که با قواعد مشخص محل تقریبی ریشه ها را در صفحه مختلط S معلوم می کند.

✓ هر ریشه (حقیقی یا مختلط) که در معادله فوق صدق کند بایستی دو شرط زاویه و اندازه را ارضا نماید.

• شرایط اندازه و زاویه

$$1 + KG(s) = 0$$

✓ معادله مشخصه سیستم را در نظر بگیرید:

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

□ در این صورت:

✓ شرط اندازه:

□ هر مقدار s که ریشه این معادله باشد بایستی در شرط زیر صدق کند:

$$|G(s)| = \frac{1}{|K|}$$

✓ شرط زاویه:

□ هر مقدار s که ریشه این معادله باشد بایستی در شرط زیر صدق کند:

$$\angle G(s) = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \square \text{ به ازای } K > 0 \text{ بایستی}$$

$$\angle G(s) = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \square \text{ به ازای } K < 0 \text{ بایستی}$$

✓ مکان هندسی ریشه ها روشی ترسیمی است که نقاطی در صفحه s که این شرایط را ارضا می کنند را تعیین می کند.



• شرایط اندازه و زاویه

✓ حال فرض کنید تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت زیر داده شده باشد:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

□ که در آن صفرها و p_i قطب های (حقیقی یا مختلط) تابع تبدیل سیستم حلقه باز می باشند. در این صورت:

✓ شرط اندازه:

$$|G(s)| = \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{i=1}^n |s + p_i|} = \frac{1}{|K|}$$

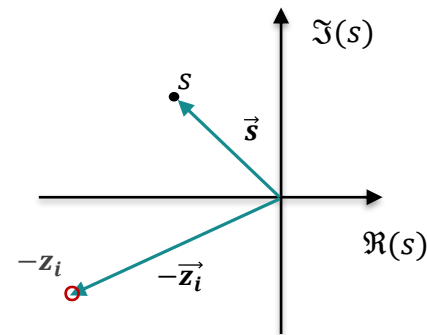
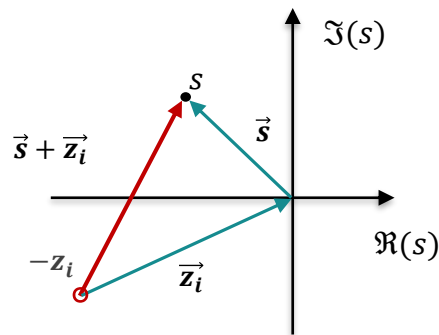
✓ شرط زاویه:

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \begin{cases} (2k+1)\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 2k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{FOR } K > 0 \\ \text{FOR } K < 0 \end{matrix}$$

• شرایط اندازه و زاویه

✓ نمایش برداری $s + z_i$ و $s + p_i$

$$\overrightarrow{s + z_i} = \vec{s} + \vec{z_i} = \vec{s} - (-\vec{z_i})$$



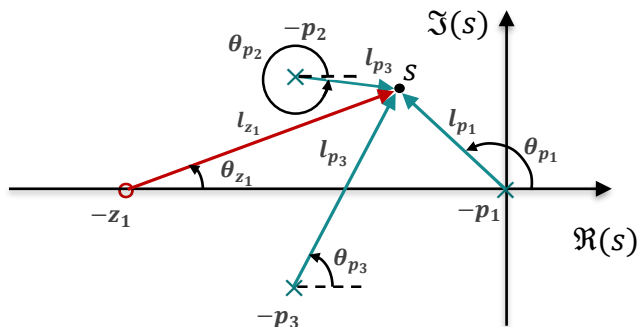
✓ نمایش برداری $s + z_i$ برداری است که از نقطه $-z_i$ (صفر سیستم) شروع و به نقطه S ختم می شود.

• شرایط اندازه و زاویه

$$G(s) = \frac{s+z_1}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

✓ به منظور نمایش ترسیمی فرض کنید:

□ بردار مرتبط با صفر را با رنگ قرمز و بردارهای مربوط به قطب ها را با رنگ سبز ترسیم کنید:



✓ در این صورت اگر s یک ریشه معادله مشخصه باشد، آنگاه:

$$\frac{l_{z1}}{l_{p1} \cdot l_{p2} \cdot l_{p3}} = \frac{1}{|K|}$$

□ شرط اندازه:

$$\theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = \begin{cases} (2k+1)\pi, & \text{FOR } K > 0 \\ 2k\pi, & \text{FOR } K < 0 \end{cases}$$

□ شرط زاویه:

برگرفته از کتاب Kuo



• شرایط اندازه و زاویه

- ✓ بدین ترتیب یافتن نقاط S که بر روی مکان هندسی ریشه ها قرار دارند در دو مرحله جستجو می شوند
 - جستجو در تمامی نقاط صفحه S و یافتن نقاطی که یکی از شرایط زاویه را ارضا کنند.
 - یافتن بهره حلقه K (مثبت و یا منفی) که شرط اندازه را ارضا کند.
- ✓ این جستجو از محل قرار گیری صفرها و قطب های سیستم حلقه باز $G(S)$ و با قوانینی که در ادامه ارائه می شود انجام خواهد شد.
- ✓ نماد و نمایش: فرض کنید محل قرار گیری ریشه های معادله مشخصه به ازای بهره مثبت $K > 0$ را به **RL** می نامیم و با خطوط توپر نمایش دهیم
- و آنرا به ازای بهره منفی $K < 0$ با **CRL** نامیده و با خط چین نمایش دهیم.

عناوین فصل

مقدمه

چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

۱

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

نقاط ابتدا و انتهای، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

۲

مثال های کاربردی

روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دور کردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

۳

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

۴

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

کنترلر بهره ثابت، جبران سازهای دینامیکی، معرفی چند کنترلر کاربردی، طراحی کنترلر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

۵

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازه و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربردی متنوع روش ترسیم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلرهای کاربردی، P، PD، Lead، Lag، و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

• قانون ۱: نقاط ابتدا و انتها

- ✓ نقطه ابتدایی مکان هندسی ریشه ها، به ازای $K = 0$ در محل قطب های $G(s)$ قرار دارند.
- ✓ نقاط انتهایی به ازای $K = \pm\infty$ در محل صفر های $G(s)$ و یا به صورت مجانبی در بینهایت قرار دارند.

• قانون ۲: تعداد شاخه ها

- ✓ تعداد شاخه ها در مکان هندسی ریشه ها برابر مرتبه چندجمله ای مشخصه سیستم است.
- مرتبه چند جمله ای مشخصه سیستم های کنترل علی، برابر تعداد قطب های سیستم است،
- چرا که سیستم های علی سره یا اکیدا سره بوده و تعداد صفرهای سیستم حداکثر برابر تعداد قطب های سیستم خواهد بود.

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

• قانون ۳: تقارن

- ✓ مکان هندسی ریشه ها، نسبت به محور حقیقی متقارن است.
- ✓ اگر در سیستمی محل قرار گیری صفر ها و قطب ها نسبت به محور دیگری نیز متقارن باشند، آنگاه مکان هندسی ریشه ها نسبت به آن محور نیز متقارن است.

• قانون ۴: مجانب ها

- ✓ به ازای $K \rightarrow \pm\infty$ شاخه های مکان هندسی ریشه ها به سمت محورهای مجانب خواهند شد:
- زاویه محورهای مجانب در RL برابر $\theta_k = (2k + 1)\pi/(n - m)$,
- زاویه محورهای مجانب در CRL برابر $\theta_k = 2k\pi/(n - m)$,
- محل تلاقی مجانب ها بر روی محور حقیقی برابر است با: $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$
- که در آن n تعداد قطب ها و m تعداد صفرهای $G(s)$ است



قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

• قانون ۵: نقاط روی محور حقیقی

- ✓ RL: بخشی از محور حقیقی که مجموع تعداد صفر ها و قطب های حقیقی در سمت راست آن عددی فرد باشند بر روی مکان هندسی ریشه ها با بهره مثبت قرار دارند.
- ✓ CRL: بخشی از محور حقیقی که مجموع تعداد صفر ها و قطب های حقیقی در سمت راست آن عددی زوج باشند بر روی مکان هندسی ریشه ها با بهره منفی قرار دارند.
- بدین ترتیب محور حقیقی همواره بخشی از مکان هندسی ریشه های کامل سیستم است.

• قانون ۶: نقاط جدایی شاخه ها

- ✓ نقاط جدایی شاخه ها در صورت وجود در شرط $\frac{dG(s)}{ds} = 0$ صدق می کند.
- اگر معادله فوق دارای ریشه حقیقی باشد، آن نقطه جدایی حتما محل تقاطع شاخه های RL یا CRL با محور حقیقی است.
- اگر معادله فوق ریشه حقیقی نداشته باشد، شاخه ها از محور حقیقی جدایش ندارند، ولی اگر این نقطه شرایط زاویه و اندازه را ارضا کند نقطه جدایش شاخه ها نه بر روی محور حقیقی بلکه در صفحه S خواهد بود.



قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

• قانون ۷: زاویه ورود یا خروج

✓ زاویه خروج: زاویه ایست که تحت آن زاویه، شاخه مکان هندسی از قطب مربوطه جدا می شود.

✓ زاویه ورود: زاویه ایست که با آن زاویه، شاخه مکان هندسی به صفر مربوطه وارد می شود.

□ برای تعیین این زاویه، از شرط زاویه استفاده کرده، نقطه ای فرضی در نزدیکی قطب (یا صفر) مورد نظر در نظر گرفته و شرط زاویه را برای این نقطه می نویسیم.

□ سپس حد زوایا را وقتی نقطه مورد نظر به سمت قطب

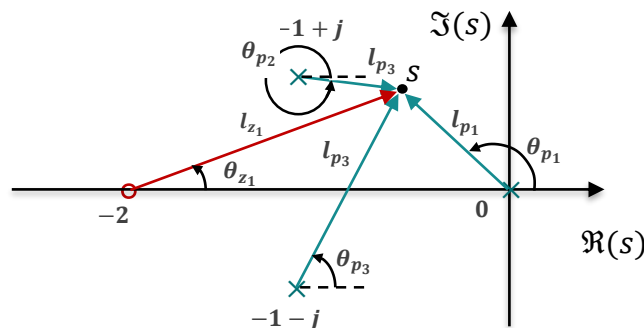
(یا صفر) مورد نظر میل می کند به دست می آوریم:

زاویه خروج از قطب دوم را بدین صورت پیدا می کنیم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k + 1)\pi$$

بدین ترتیب در حد و به ازای قطب ها و صفرهای داده شده در شکل داریم:

$$\frac{\pi}{4} - \left(\frac{3\pi}{4} + \theta_{p_2} + \frac{\pi}{2} \right) = 3\pi \rightarrow \theta_{p_2} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$



عناوین فصل

مقدمه

چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

۱

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

۲

مثال های کاربردی

روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دور کردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

۳

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

۴

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

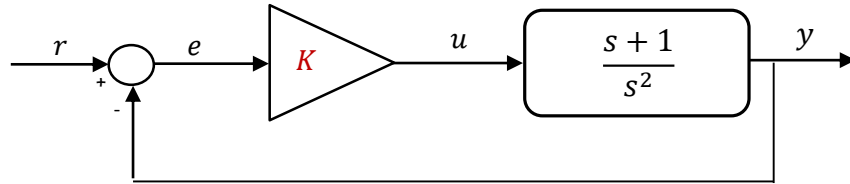
کنترلر بهره ثابت، جبران سازهای دینامیکی، معرفی چند کنترلر کاربردی، طراحی کنترلر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

۵

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازه و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربردی متنوع روش ترسیم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلرهای کاربردی، P، PD، Lead، Lag، و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

مثال های کاربردی

• مثال ۱: سیستم زیر را در نظر بگیرید:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

□ دو شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0, s = 0, \quad K = \pm\infty, s = -1, \quad 1 \text{ branch} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

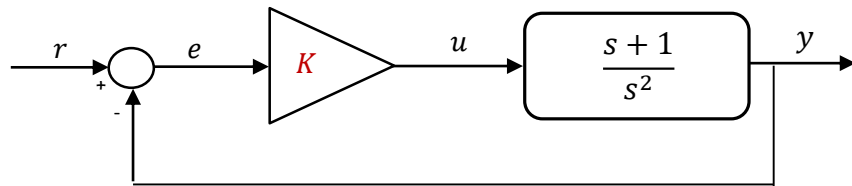
تعداد و مشخصات مجانب ها

□ با توجه به اینکه $n - m = 1$ یک مجانب در RL و یک مجانب در CRL وجود دارد که منطبق با محور حقیقی است

$$\text{For } k > 0 \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{1} \rightarrow \theta_0 = \pi = 180^\circ \quad \text{For } k < 0 \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{1} \rightarrow \theta_0 = 2\pi = 360^\circ$$

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۱:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

□ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

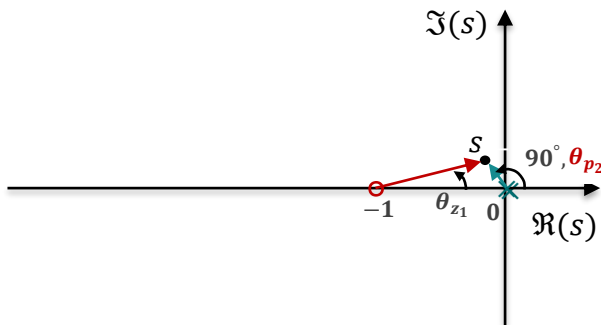
$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{s+2}{s^3} = 0 \rightarrow s = -2,$$

زاویه خروج از قطب $s = 0$ را به دست می آوریم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) = (2k + 1)\pi$$

$$0^\circ - (90^\circ + \theta_{p_2}) = 180^\circ$$

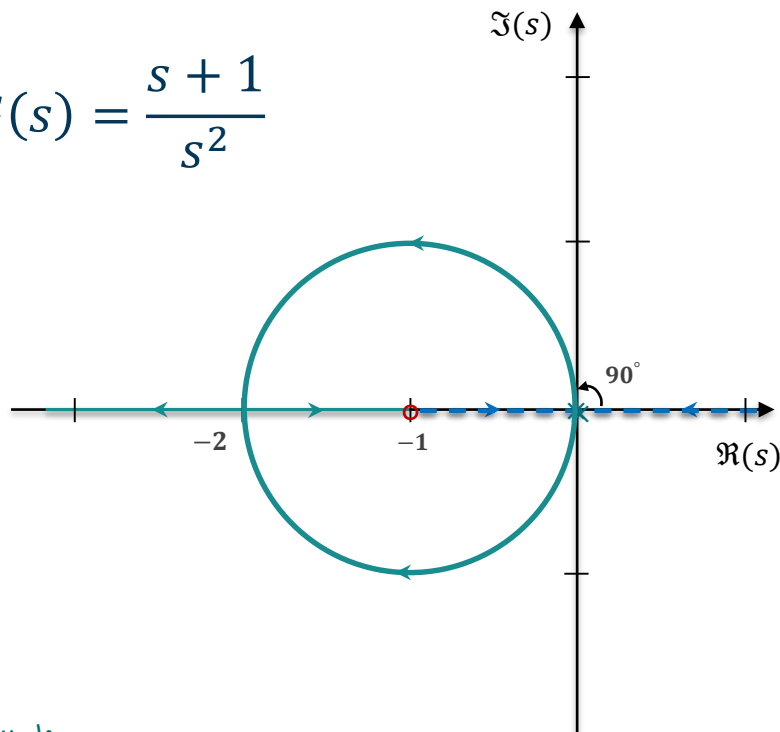
$$\rightarrow \theta_{p_2} = 90^\circ$$



ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

• ادامه مثال ۱:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$



محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطبهای موهومی

رسم RL

رسم CRL



ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

• ادامه مثال ۱:

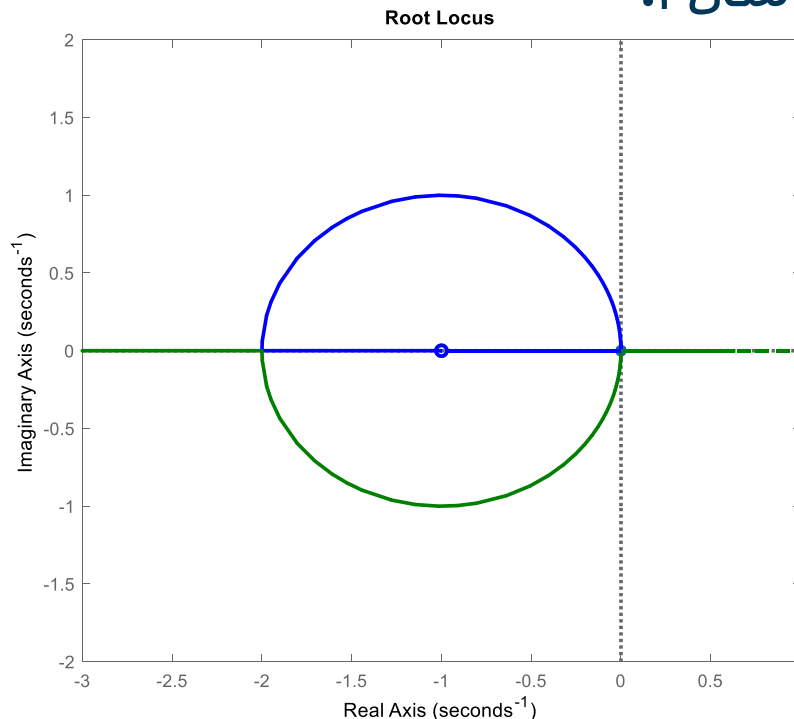


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2}$$

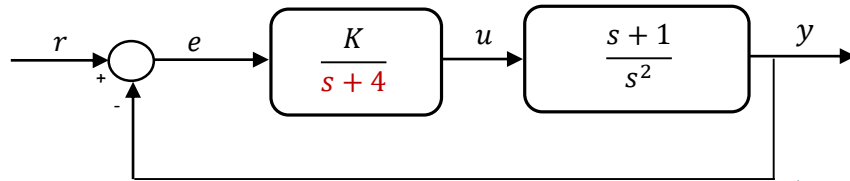
```
% Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type',
'line'),'linewidth',2)
hold off
```

کد: rlocus_examples.m



مثال های کاربردی

• مثال ۲: اضافه کردن یک قطب نزدیک مبدا:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

□ سه شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0, s = 0, s = -4 \quad K = \pm\infty, s = -1, 2 \text{ branch} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

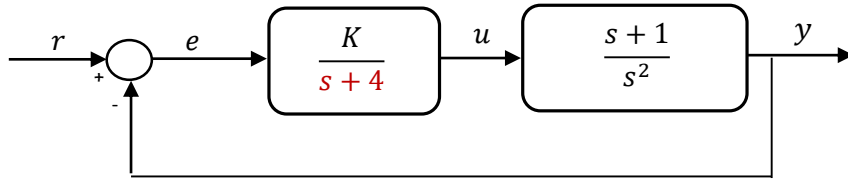
□ با توجه به اینکه $n - m = 2$ دو مجانب در RL و دو مجانب در CRL وجود دارد که در امتداد محور حقیقی است

$$\text{For } k > 0 \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \theta_1 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \end{cases} \quad \text{For } k < 0 \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{2} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{0}{2} = 0^\circ \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} = 180^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{(0 + 0 + (-4)) - (-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۲:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

□ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{2s^2+7s+8}{s^3(s+4)^2} = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1.75 \pm j0.97,$$

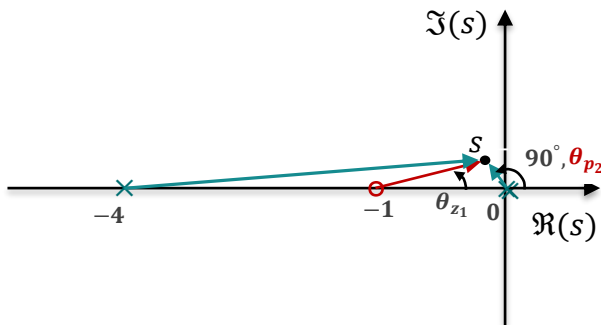
□ با توجه به موهومی بودن پاسخ غیر قابل قبول است.

□ زاویه خروج از قطب $s = 0$ را به دست می آوریم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k+1)\pi$$

$$0^\circ - (90^\circ + \theta_{p_2} + 0) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = 90^\circ$$



ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

• ادامه مثال ۲:

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجاانب ها

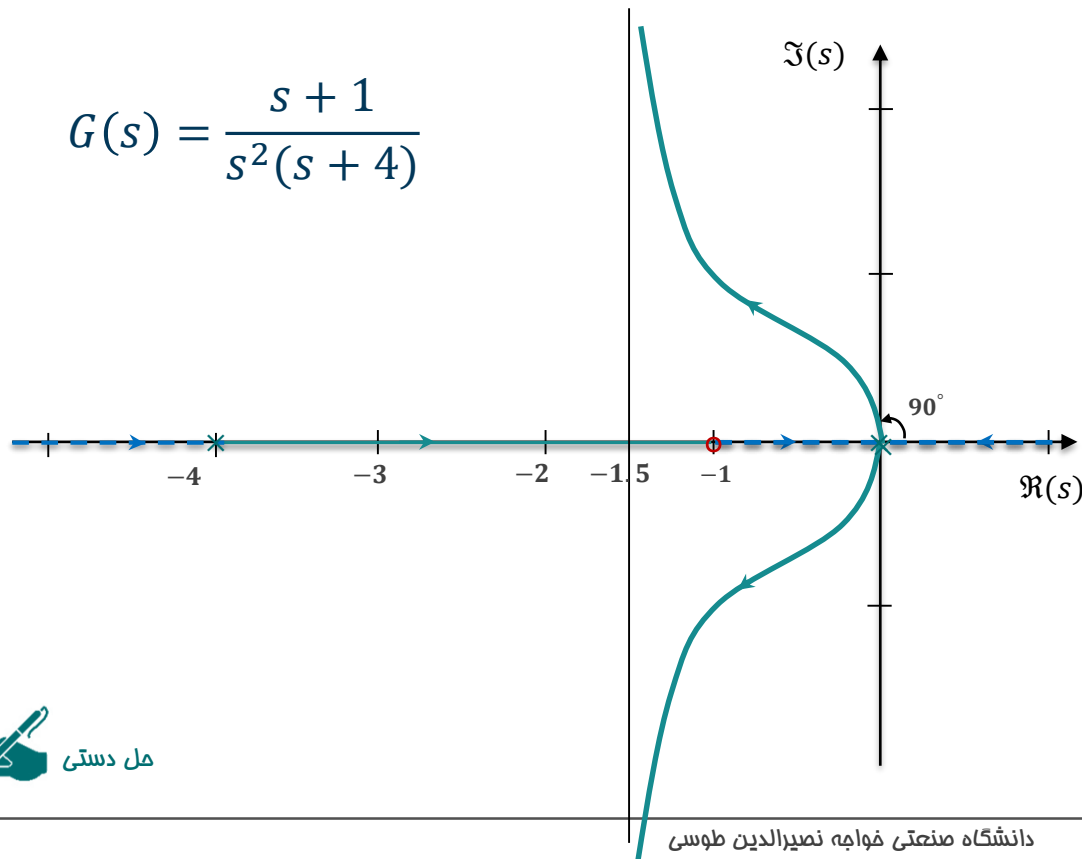
زاویه خروج از قطب های بر روی

مبدأ

رسم RL

رسم CRL

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$



ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

• ادامه مثال ۲:

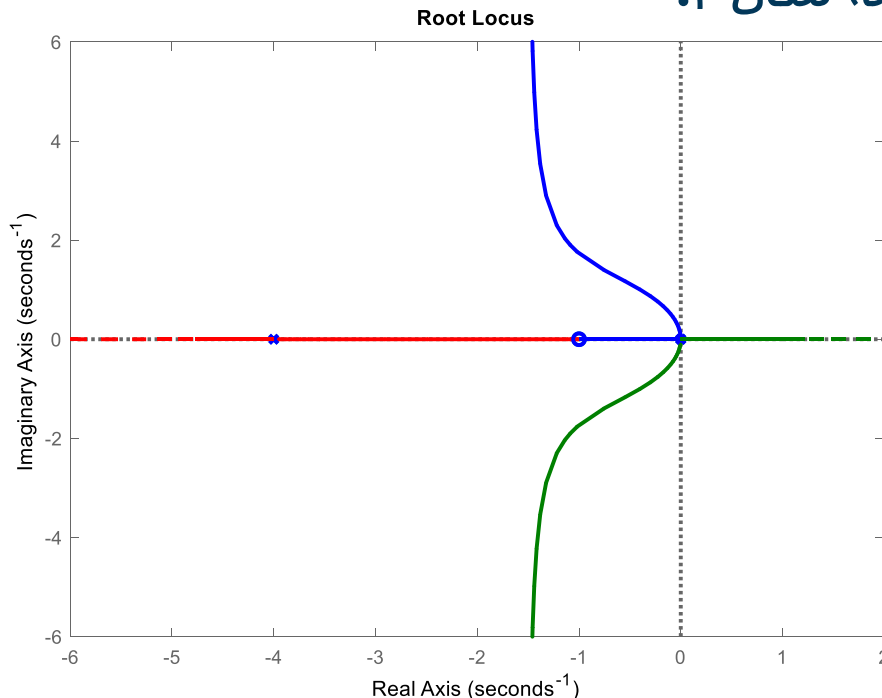


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2(s + 4)}$$

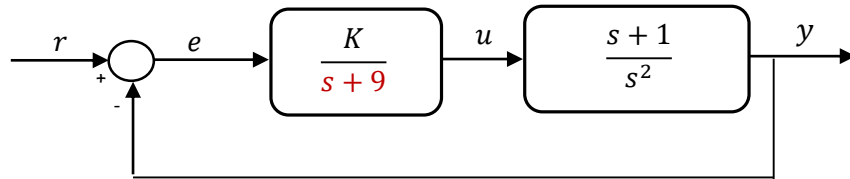
```
% Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 4 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```

کد: rlocus_examples.m



مثال های کاربردی

• مثال ۳: دور کردن قطب از مبدا:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

□ سه شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0, s = 0, s = -9 \quad K = \pm\infty, s = -1, 2 \text{ branch} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

□ مثل قبل

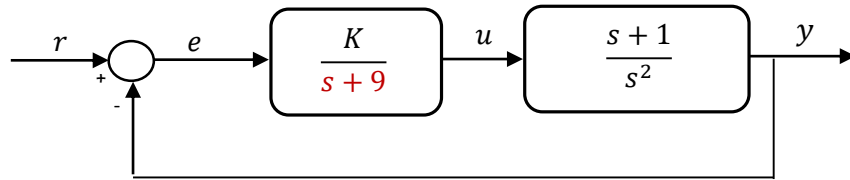
$$\text{For } k > 0 \rightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \theta_1 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \end{cases} \quad \text{For } k < 0 \rightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{0}{2} = 0^\circ \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} = 180^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{(0+0+(-9))-(-1)}{2} = -4$$

با این تفاوت که

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۲:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

□ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{2(s+3)^2}{s^3(s+4)^2} = 0 \rightarrow s_{1,2} = -3,$$

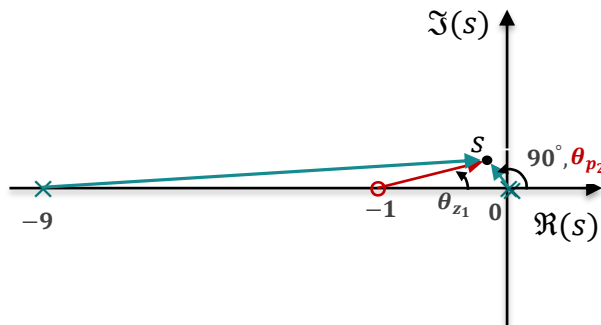
□ با توجه به حقیقی شدن پاسخ قابل قبول است.

□ زاویه خروج از قطب $s = 0$ نیز تغییری نکرده است.

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k+1)\pi$$

$$0^\circ - (90^\circ + \theta_{p_2} + 0) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = 90^\circ$$



ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

• ادامه مثال ۳:

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجاانب ها

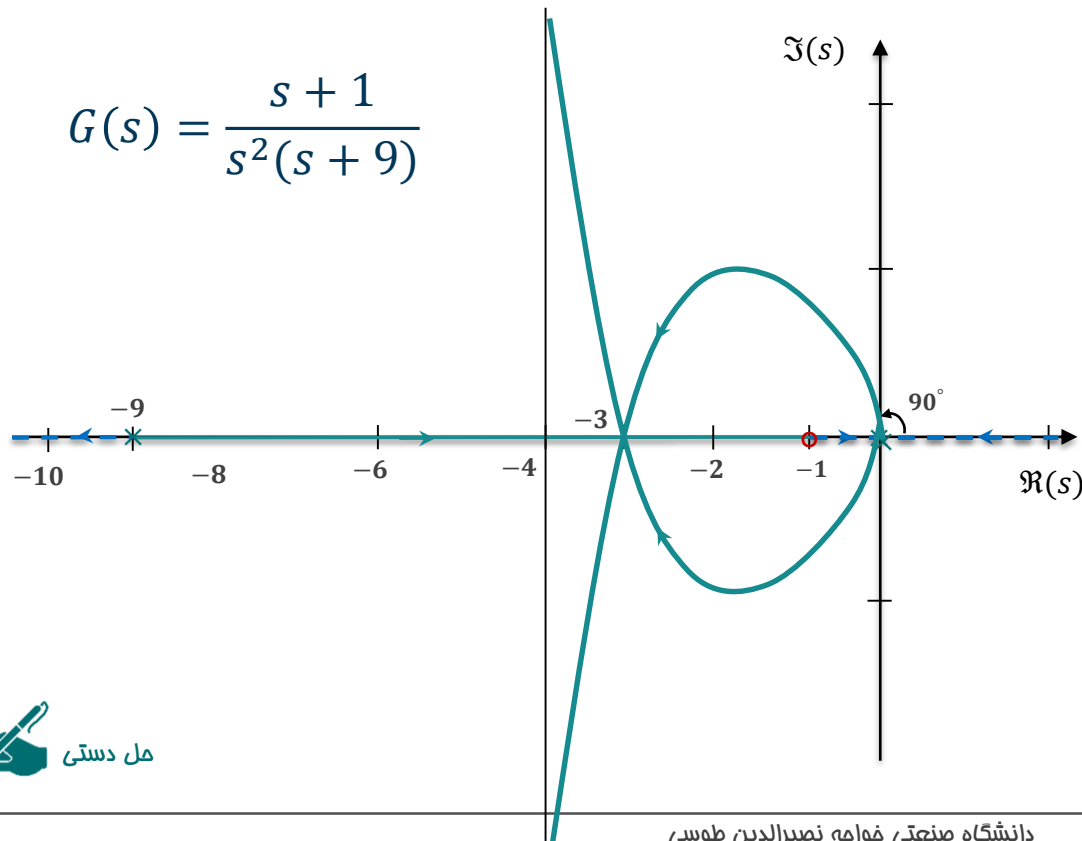
محل برخورد با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های بر روی
مبدأ

رسم RL

رسم CRL

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2(s + 9)}$$



ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

• ادامه مثال ۳:

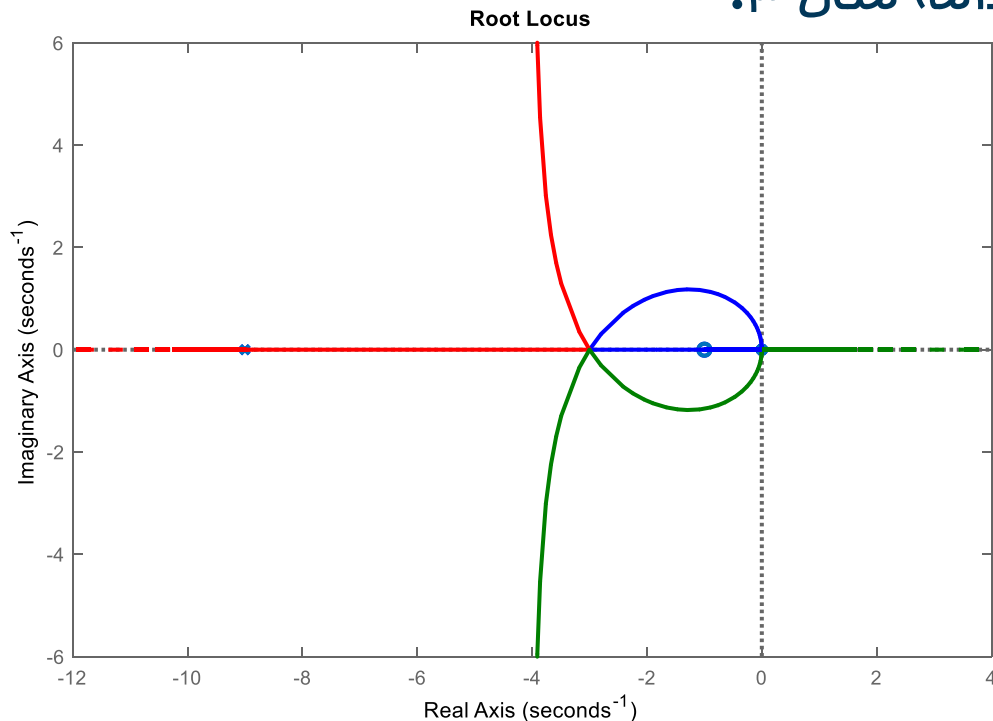


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2(s + 9)}$$

```
% Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 9 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```

کد: rlocus_examples.m





ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

• ادامه مثال ۳: بیشتر دور کردن قطب از مبدا

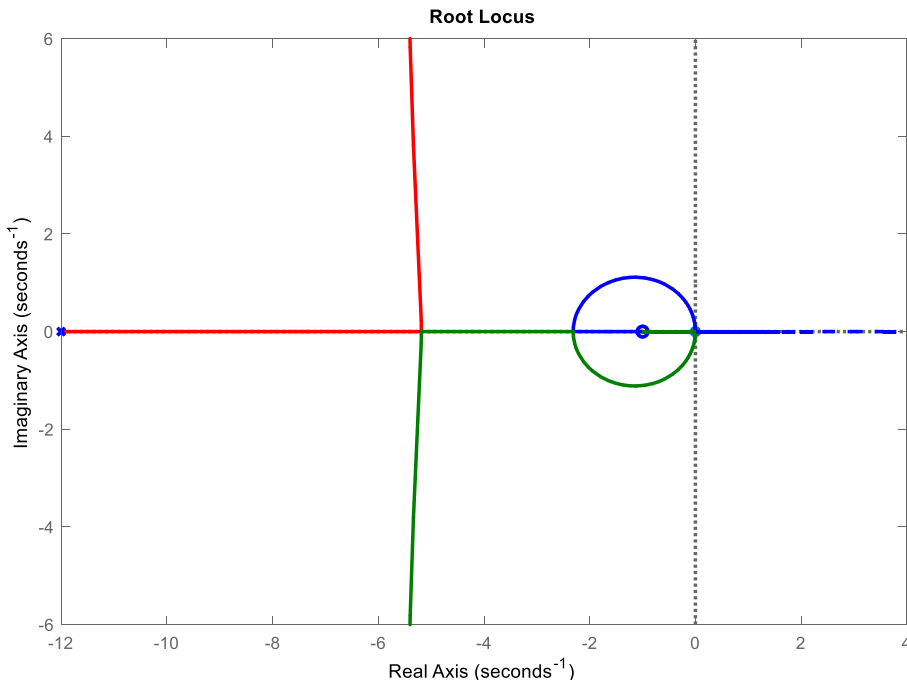


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2(s + 12)}$$

```
% Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 12 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',2)
hold off
```

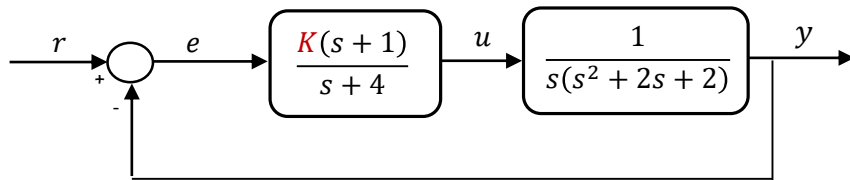
کد: rlocus_examples.m





مثال های کاربردی

• مثال ۴: سیستم مرتبه چهار زیر را در نظر بگیرید:



$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

نقاط ابتدا و انتهای و تعداد شاخه ها:

□ چهار شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0, s = -4, s = -1 \pm j1 \quad K = \pm\infty, s = -1, 3 \text{ branches} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

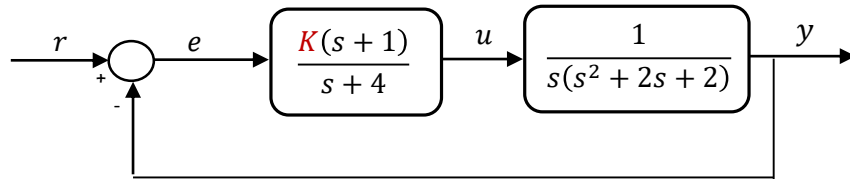
□ با توجه به اینکه $n - m = 3$ سه مجانب در RL و سه مجانب در CRL وجود دارد

$$\text{For } k > 0 \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \\ \theta_1 = \frac{3\pi}{3} = 180^\circ \\ \theta_2 = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ \end{cases} \quad \text{For } k < 0 \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{3} = 0^\circ \\ \theta_1 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \\ \theta_2 = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{(0 + (-4) + (-1 + j) + (-1 - j)) - (-1)}{3} = -\frac{5}{3}$$

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۴:



$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

□ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{3s^4 + 16s^3 + 28s^2 + 20s + 8}{s^2(s^3 + 6s^2 + 10s + 8)^2} = 0 \rightarrow s_1 = -2, s_2 = -2.47, s_{3,4} = -0.43 \pm j0.6$$

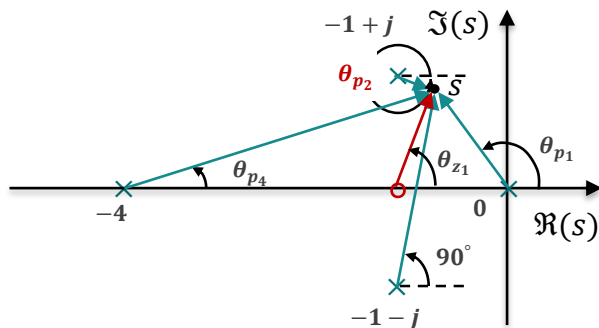
□ هر دو جواب حقیقی قابل قبول است.

زاویه خروج از قطب $s = -1 + j$ را به دست می آوریم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k + 1)\pi$$

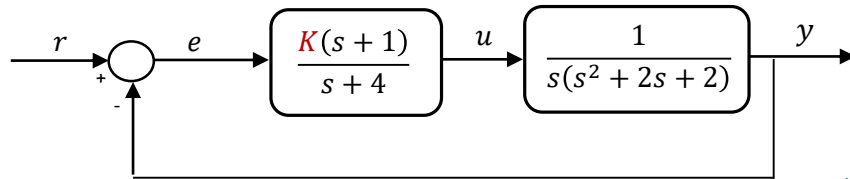
$$90^\circ - (135^\circ + \theta_{p_2} + 90^\circ + 18.43^\circ) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = 26.6^\circ$$



مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۴:



✓ محل تلاقی با محور موهومی

□ با استفاده از معیار راث می توان حالت نوسانات دائمی

و محل برخورد با محور $j\omega$ را تعیین نمود

معادله مشخصه سیستم: $\Delta(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (1+K)s + (1+K)$

جدول راث را به دست بیاورید:

شرایط پایداری:

$$1 + K > 0 \rightarrow K > -1$$

$$9.83 - 0.167K > 0 \rightarrow K < 58.63$$

$$3.83 - 0.167K > 0 \rightarrow K < 22.93$$

□ محدوده پایداری: $-1 < K < 22.93$

□ به ازای $K = 22.93$ معادله کمکی:

$$A(s) = 6s^2 + 23.93 = 0$$

$$s = \pm j 1.99$$

$$\Delta(s) = F(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (1+K)s + (1+K) = 0$$

s^4	1	10	$1+K$
s^3	6	$1+K$	0
s^2	$\frac{60-1-K}{6} = 9.83 - 0.167K$	$1+K$	0
s^1	$(1+K)(3.83 - 0.167K)/A$	0	0
s^0	$1+K$	0	0

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

• ادامه مثال ۴:

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجاانب ها

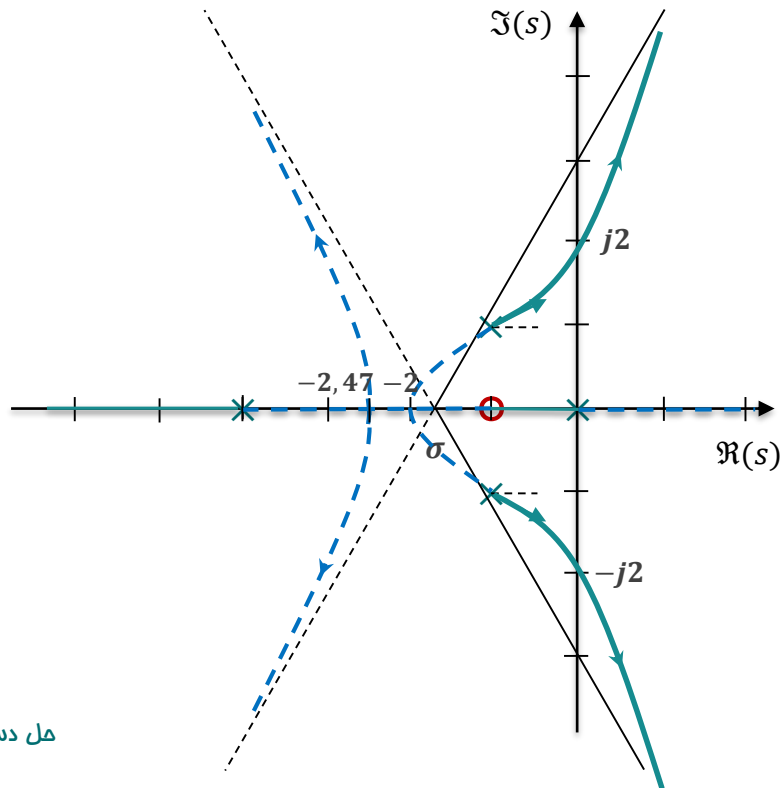
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های موهومی

تقاطع با محور موهومی

رسم RL

رسم CRL



ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

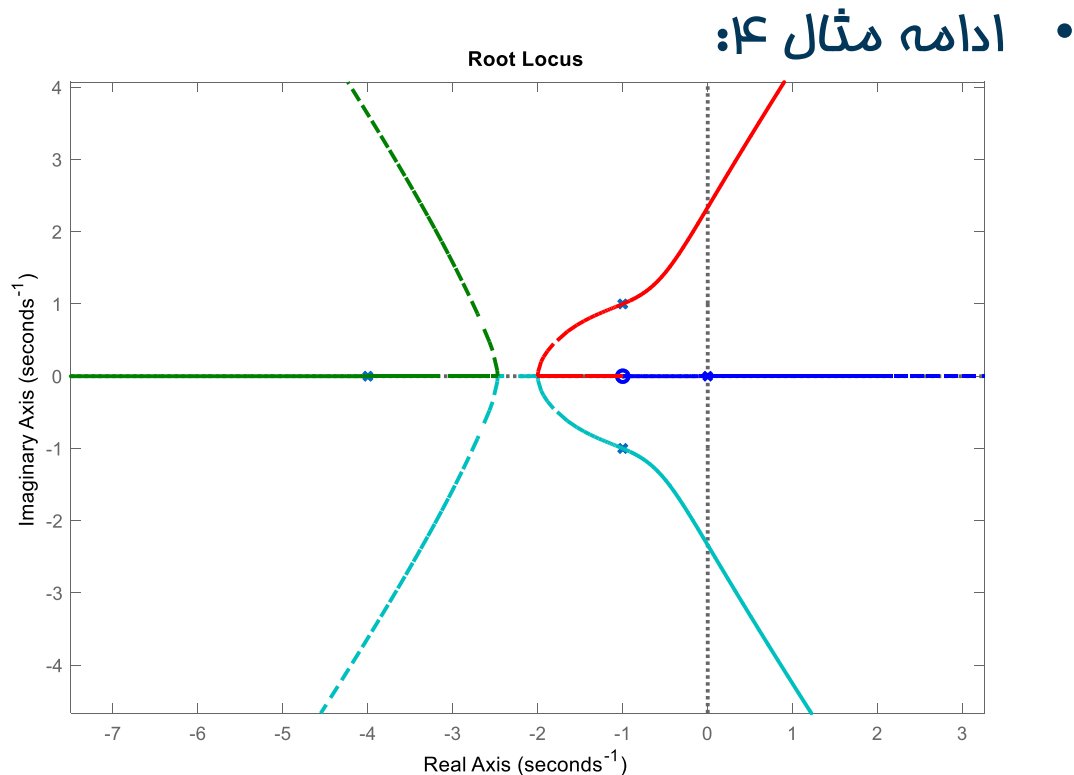


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

```
% Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=conv([1 4 0],[1 2 2]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```

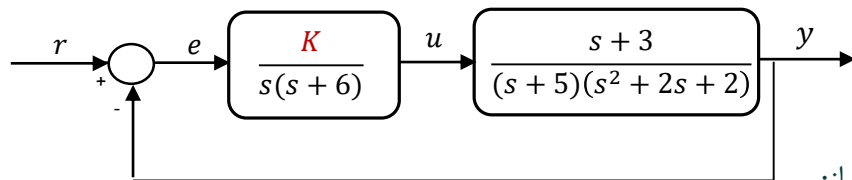
کد: rlocus_examples.m





مثال های کاربردی

• مثال ۵: سیستم مرتبه پنج زیر را در نظر بگیرید:



$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

□ پنج شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0, s = -5, s = -6, s = -1 \pm j1 \quad K = \pm\infty, s = -3, 4 \text{ branches} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

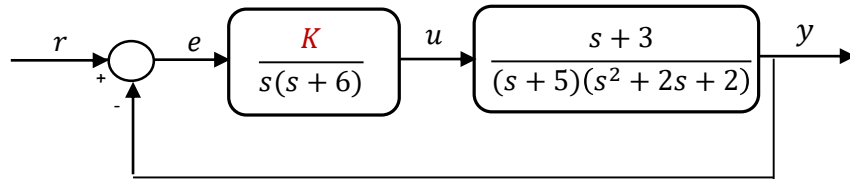
□ با توجه به اینکه $n - m = 4$ چهار مجانب در RL و چهار مجانب در CRL وجود دارد

$$\text{For } k > 0 \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \begin{cases} \theta_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4} = \pm 45^\circ \\ \theta_{3,4} = \pm \frac{3\pi}{4} = \pm 135^\circ \end{cases} \quad \text{For } k < 0 \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{4} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{0\pi}{4} = 0^\circ, \theta_1 = \frac{2\pi}{4} = 90^\circ \\ \theta_2 = \frac{4\pi}{4} = 180^\circ, \theta_3 = \frac{6\pi}{4} = 270^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{(0 - 5 - 6 + (-1 + j) + (-1 - j)) - (3)}{4} = -\frac{5}{2}$$

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۵:



$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

□ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -2 \frac{2s^5 + 27s^4 + 132s^3 + 284s^2 + 246s + 90}{s^2(s^4 + 13s^3 + 54s^2 + 82s + 60)^2} = 0$$

$$\rightarrow s_1 = -5.526, s_{2,3} = -3.33 \pm j1.2, s_{4,5} = -0.66 \pm j0.47$$

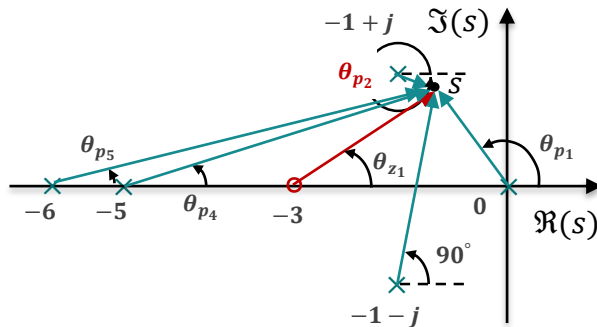
□ جواب حقیقی قابل قبول است.

زاویه خروج از قطب $s = -1 + j$ را به دست می آوریم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} + \theta_{p_4} + \theta_{p_5}) = (2k+1)\pi$$

$$90^\circ - (135^\circ + \theta_{p_2} + 90^\circ + 14^\circ + 11.4^\circ) = 180^\circ$$

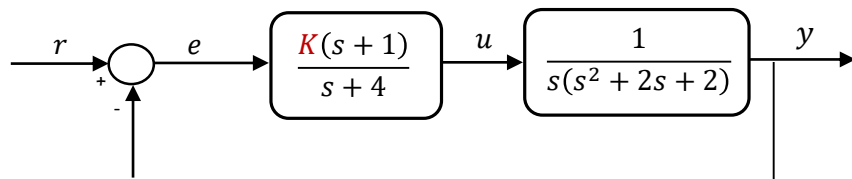
$$\rightarrow \theta_{p_2} = -43.8^\circ$$





مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۵:



✓ محل تلاقی با محور موهومی

□ با استفاده از معیار راث می توان حالت نوسانات دائمی

و محل برخورد با محور $j\omega$ را تعیین نمود

$$\Delta(s) = s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + K)s + 3K = 0 \quad \text{معادله مشخصه سیستم:}$$

جدول راث را به دست بیاورید:

شرایط پایداری:

$$3K > 0 \rightarrow K > 0$$

$$65.6 - 0.212K > 0 \rightarrow K < 309$$

$$3940 - 105K - 0.1363K^2 > 0 \rightarrow K < 35$$

محدوده پایداری: $0 < K < 35$

□ به ازای $K = 35$ معادله کمکی:

$$A(s) = 58.2s^2 + 105 = 0$$

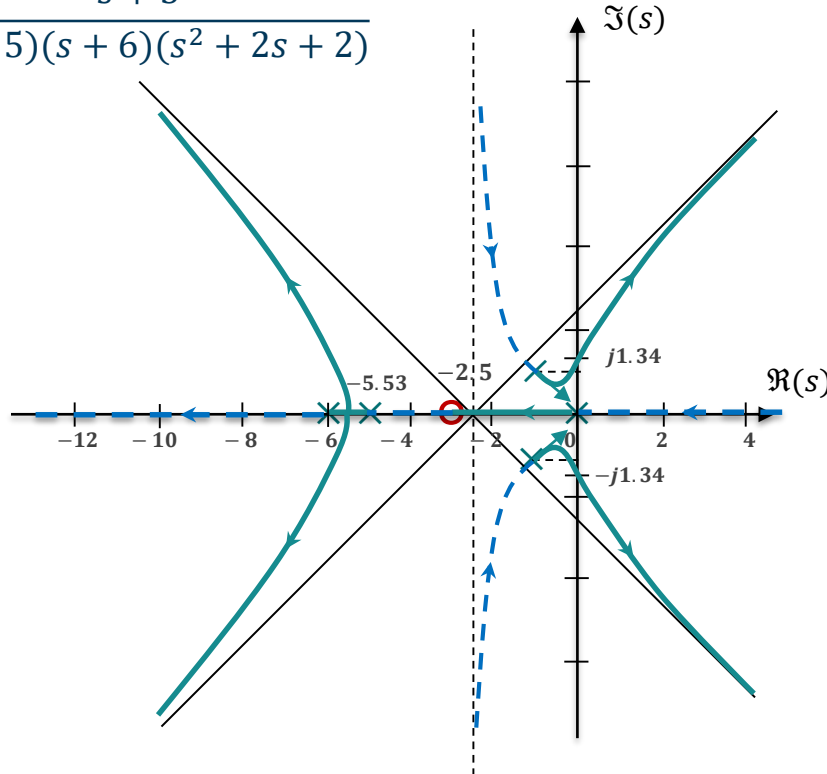
$$s = \pm j 1.34$$

$$\Delta(s) = s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + K)s + 3K = 0$$

s^5	1	54	$60 + K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	47.7	$0.796K$	0
s^2	$A = 65.6 - 0.212 K$	$3K$	0
s^1	$3940 - 105K - 0.1363K^2/A$	0	0
s^0	$3K$	0	0

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$



• ادامه مثال ۵:

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجاذب ها

تقاطع شافه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های موهومی

تقاطع با محور موهومی

رسم RL

رسم CRL



ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

• ادامه مثال ۵:

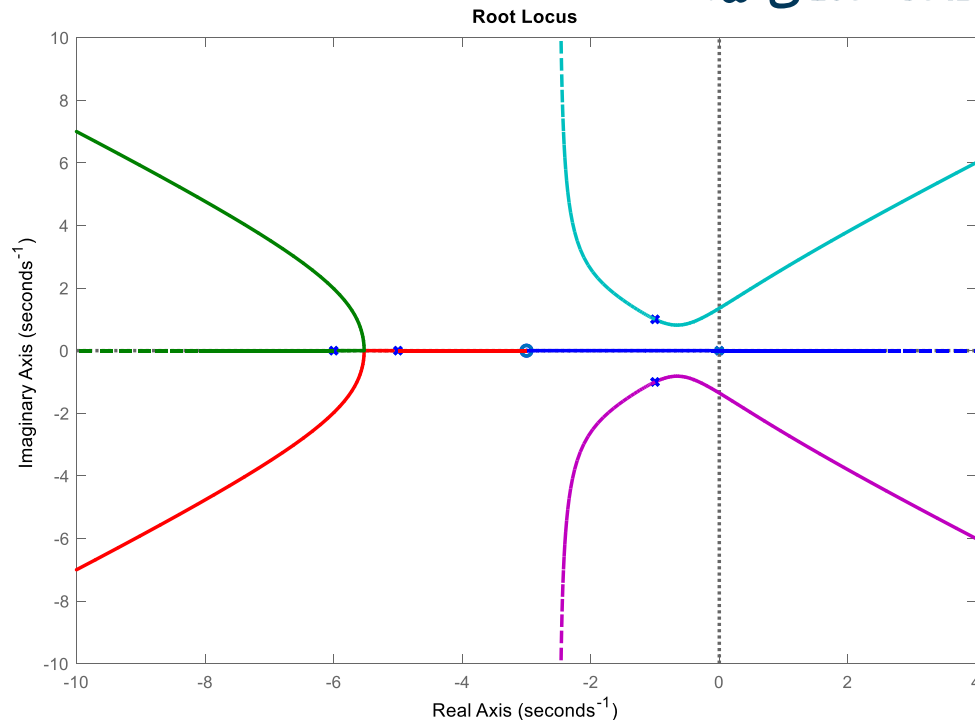


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2)}$$

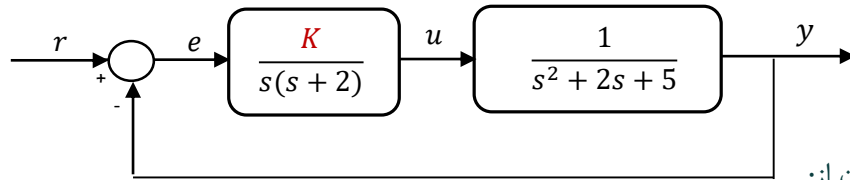
```
% Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 3];
den=conv([1 11 30 0],[1 2 2]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
hold off
```

کد: rlocus_examples.m



مثال های کاربردی

• مثال ۴: سیستم مرتبه چهار زیر را در نظر بگیرید:



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

□ چهار شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 2, s = -1 \pm j2 \quad K = \pm\infty, 4 \text{ branches} \rightarrow \infty$$

نسبت به محور حقیقی و محور $s = -1$ تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

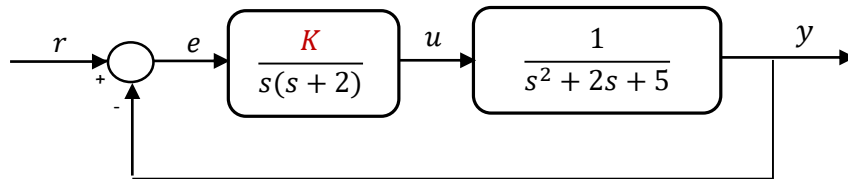
□ با توجه به اینکه $n - m = 4$ چهار مجانب در RL و چهار مجانب در CRL وجود دارد

$$\text{For } k > 0 \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \begin{cases} \theta_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4} = \pm 45^\circ \\ \theta_{3,4} = \pm \frac{3\pi}{4} = \pm 135^\circ \end{cases} \quad \text{For } k < 0 \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{4} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{0\pi}{4} = 0^\circ, \theta_1 = \frac{2\pi}{4} = 90^\circ \\ \theta_2 = \frac{4\pi}{4} = 180^\circ, \theta_3 = \frac{6\pi}{4} = 270^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{(0 - 2 + (-1 + 2j) + (-1 - 2j)) - (0)}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۴:



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

□ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -2 \frac{2s^3 + 6s^2 + 9s + 5}{s^2(s^4 + 13s^3 + 54s^2 + 82s + 60)^2} = 0$$

$$\rightarrow s_1 = -1, s_{2,3} = -1 \pm j1.22,$$

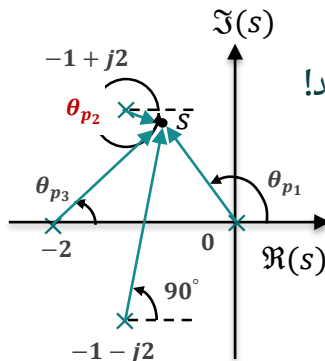
□ هر سه جواب در معادله $1 + KG(s) = 0$ صدق کرده و قابل قبول هستند!

زاویه خروج از قطب $s = -1 + j2$ را به دست می آوریم:

$$-(\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k + 1)\pi$$

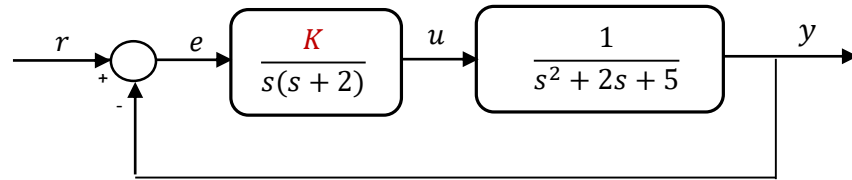
$$-(116.6^\circ + \theta_{p_2} + 90^\circ + 63.4^\circ) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = -90^\circ$$



مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۶:



✓ محل تلاقی با محور موهومی

□ با استفاده از معیار راث می توان حالت نوسانات دائمی

و محل برخورد با محور $j\omega$ را تعیین نمود

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 105 + K = 0 \quad \text{معادله مشخصه سیستم:}$$

جدول راث را به دست بیاورید:

شرایط پایداری:

$$K > 0$$

$$65 - 4K > 0 \rightarrow K < 16.25$$

محدوده پایداری: $0 < K < 16.25$

□ به ازای $K = 16.25$ معادله کمکی:

$$A(s) = 6.5s^2 + 16.25 = 0$$

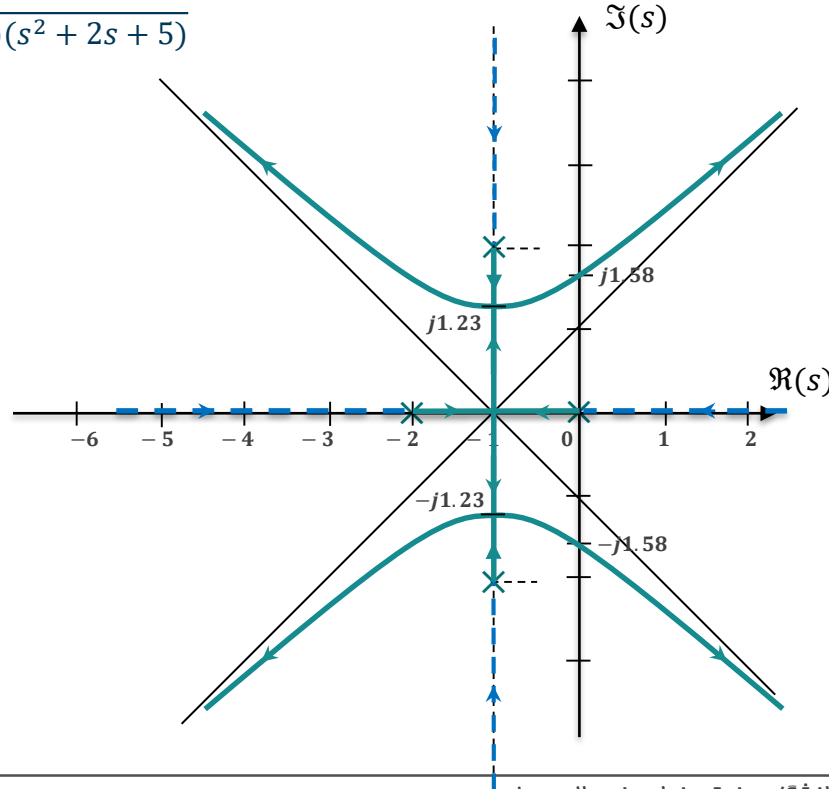
$$s = \pm j 1.58$$

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 105 + K = 0$$

s^4	1	9	K
s^3	4	105	0
s^2	6.5	K	0
s^1	$65 - 4K/6.5$	0	0
s^0	K	0	0

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$



• ادامه مثال ۴:

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجاذب ها

تقاطع شافه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های موهومی

تقاطع با محور موهومی

رسم RL

رسم CRL



ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

• ادامه مثال ۶:

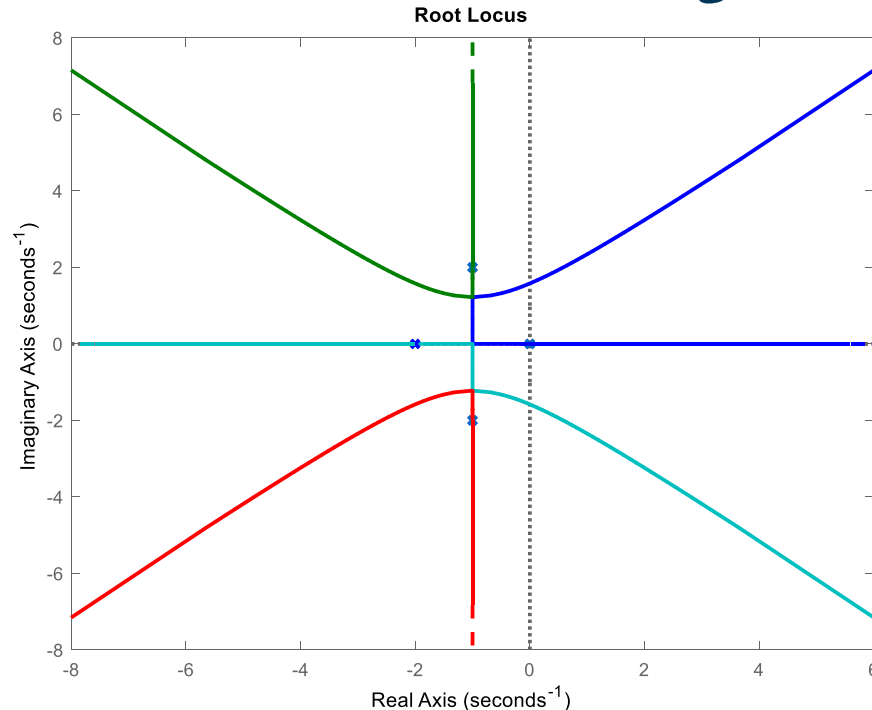


مل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

```
% Example 6
clear all, clc, clf
num=1;
den=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(gcf(),'type','line'),'linewidth',2)
hold off
```

کد: rlocus_examples.m



عناوین فصل

مقدمه

چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

۱

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

۲

مثال های کاربردی

روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دور کردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

۳

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

۴

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

کنترلر بهره ثابت، جبران سازهای دینامیکی، معرفی چند کنترلر کاربردی، طراحی کنترلر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

۵

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازه و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربردی متنوع روش ترسیم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلرهای کاربردی، P، PD، Lead، Lag، و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

• تعیین بهره K بر روی مکان هندسی ریشه ها

✓ شرط اندازه برای کلیه نقاط مکان هندسی بر قرار است:

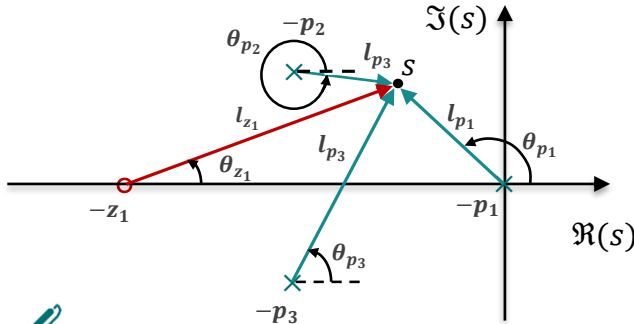
$$\square \quad \text{شرط اندازه: } \frac{\prod_{i=1}^n l_{p_i}}{\prod_{i=1}^m l_{z_i}} = |K|$$

□ در نتیجه با اندازه گیری حاصل ضرب طول بردار های آبی به حاصل ضرب طول بردار های قرمز رنگ می توان اندازه بهره K را تعیین نمود.

✓ تعیین مشخصات نقاط مکان هندسی ریشه ها به صورت کامپیوتری

□ از دستور `[K, poles]=rlocfind(sys)` در نرم افزار Matlab استفاده کنید.

□ از راست کلیک بر روی نقاط مکان ترسیم شده استفاده کنید.



حل دستی

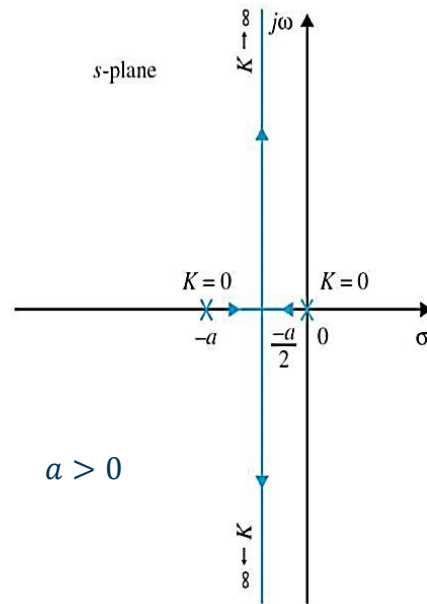


حل کامپیوتری

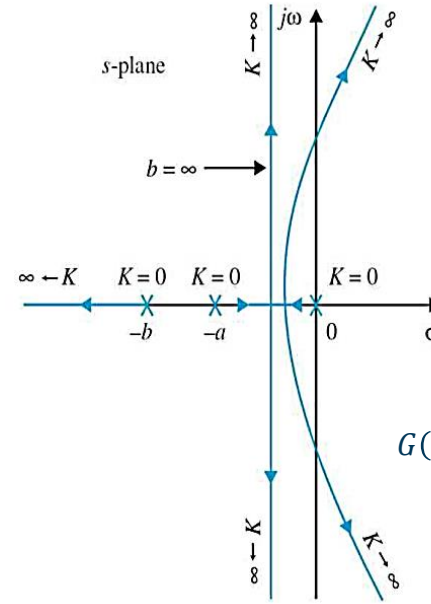
ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

• اضافه کردن قطب یا صفر به سیستم

✓ تاثیر اضافه کردن یک قطب پایدار: مکان را به سمت نیم صفحه سمت راست دفع می کند.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)}, \quad a > 0$$



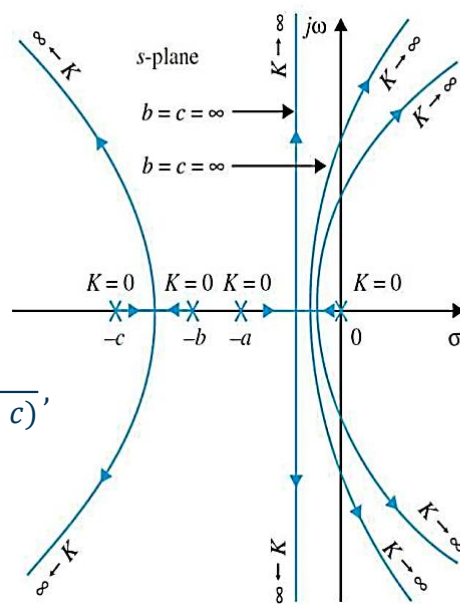
$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}, \quad b > a > 0$$

برگرفته از کتاب Kou

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

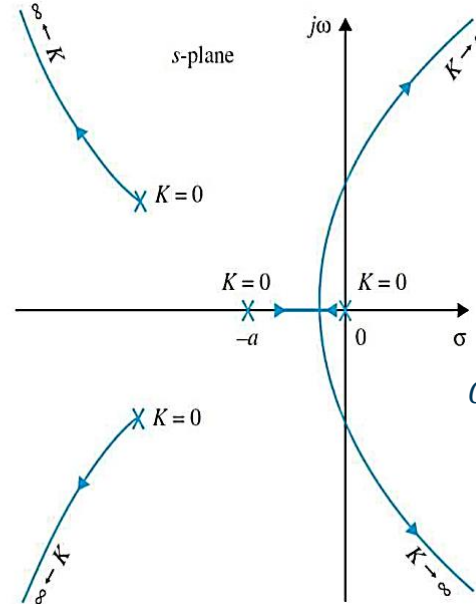
• اضافه کردن قطب یا صفر به سیستم

✓ تاثیر اضافه کردن دو قطب پایدار: مکان را بیشتر به سمت نیم صفحه سمت راست دفع می کند.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)},$$

$$c > b > a > 0$$



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+\sigma \pm j\omega)},$$

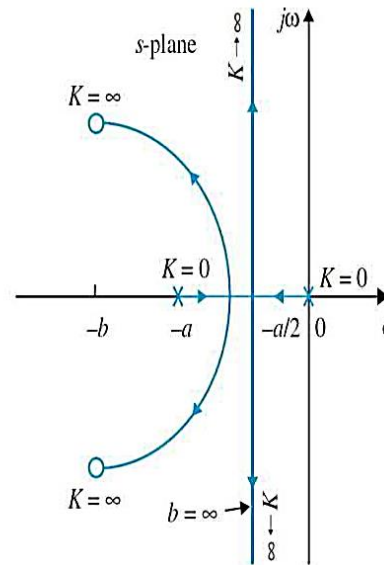
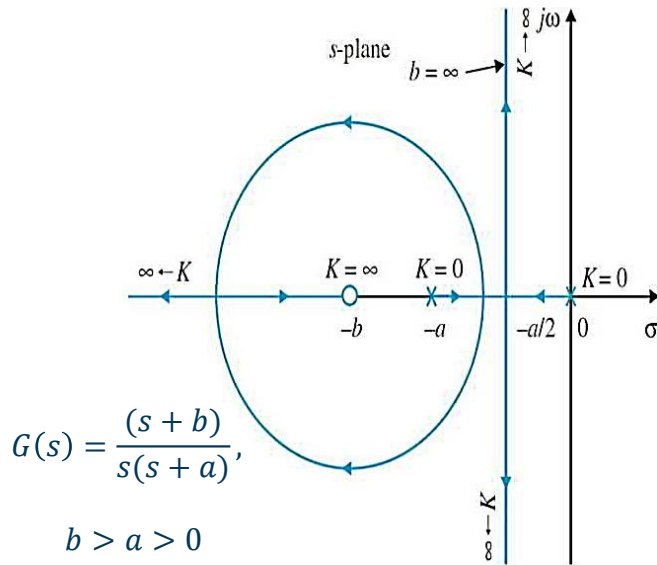
$$\sigma > a > 0$$

برگرفته از کتاب Kou

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

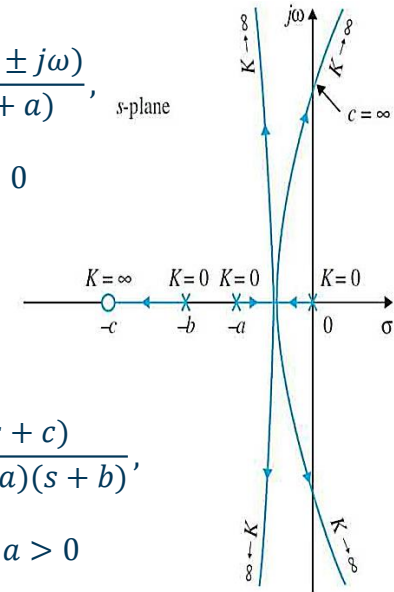
• اضافه کردن قطب یا صفر به سیستم

✓ تاثیر اضافه کردن یک صفر در OLHP: مکان را به سمت نیم سمت چپ جذب می کند.



$$G(s) = \frac{(s+b \pm j\omega)}{s(s+a)}, \quad s\text{-plane}$$

$$b > a > 0$$



$$G(s) = \frac{(s+c)}{s(s+a)(s+b)}, \quad c > b > a > 0$$

برگرفته از کتاب Kou

عناوین فصل

مقدمه

چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

۱

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

۲

مثال های کاربردی

روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دور کردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

۳

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

۴

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

کنترلر بهره ثابت، جبران سازهای دینامیکی، معرفی چند کنترلر کاربردی، طراحی کنترلر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

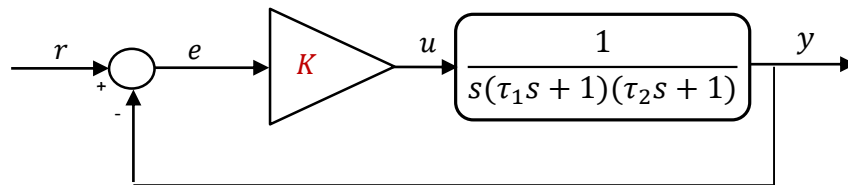
۵

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازه و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربردی متنوع روش ترسیم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلرهای کاربردی، P، PD، Lead، Lag، و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر بهره ثابت

✓ ربات جراح لیزری را که با یک سیستم مرتبه سوم و کنترلگر بهره ثابت K مدل شده است را در نظر بگیرید:



✓ مطلوب است خطای ماندگار به ورودی شیب محدود بماند: $e_{ss} \geq 0.1 \text{ mm}$

✓ سیستم پایدار باشد: کلیه قطب های سیستم حلقه بسته در OLHP بماند

✓ نوسانات حرکتی زیادی نداشته باشد: $\zeta \geq \zeta_d = 0.707$

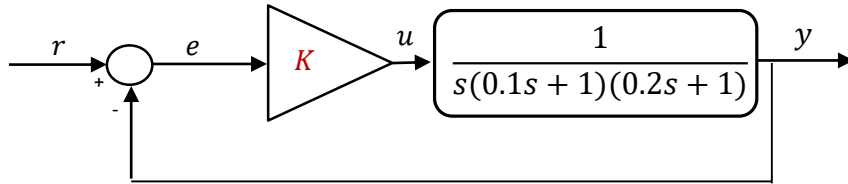
□ ممکن است میزان معینی فراجاهش یا زمان خیز و یا غیره مطلوب باشد که در این صورت $\zeta = \zeta_d$ تعیین می شود.

✓ ثابت های زمانی ربات را $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.2$ در نظر بگیرید

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر بهره ثابت

✓ ربات جراح لیزری:



$$L(s) = KG(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

✓ تحلیل خطای ماندگار به ورودی شیب واحد:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(0.1s+1)(0.2s+1)} = K$$

□ ثابت سرعت:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} \leq 0.1 \rightarrow K \geq 10$$

□ شرط خطای ماندگار به ورودی شیب واحد:

✓ تحلیل پایداری و ضریب استهلاک

□ پایداری و میزان استهلاک را با استفاده از مکان هندسی ریشه ها تحلیل می کنیم.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر بهره ثابت

✓ تحلیل پایداری با استفاده از معیار راث-هرویتز

$$\Delta(s) = s(0.1s + 1)(0.2s + 1) + K = 0 \quad \square \text{ معادله مشخصه سیستم:}$$

$$\Delta(s) = 0.02s^3 + 0.3s^2 + s + K = s^3 + 15s^2 + 50s + 50K = 0$$

□ شرایط پایداری

$$750 - 50K > 0 \rightarrow K < 15 \text{ و } K > 0$$

□ محدوده پایداری

$$0 < K < 15$$

□ با شرایط مطلوب خطای ماندگار همخوانی دارد

$\Delta(s) = s^3 + 15s^2 + 50s + 50K = 0$		
s^3	1	50
s^2	15	50K
s^1	$(750 - 50K)/15$	0
s^0	50K	0



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر بهره ثابت

✓ تحلیل پایداری و ضریب استهلاک

□ مکان هندسی را ترسیم می کنیم.

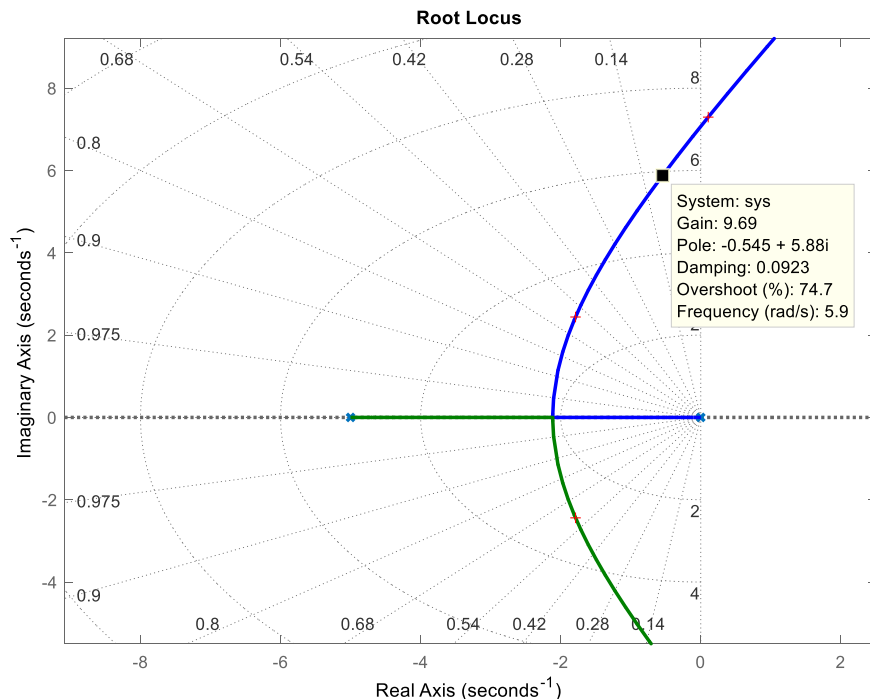
□ اگر بخواهیم $\zeta \approx 0.7$ باشد:

$$K = 1.69$$

□ با در نظر گرفتن $K \approx 10$:

$$\zeta \approx 0.1$$

✓ تناقض در مقادیر مطلوب دیده می شود





طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی جبران سازهای دینامیکی

✓ در کنترلگر بهره ثابت تنها یک پارامتر طراحی $C(s) = K$ وجود دارد.

□ پس نمی توان چند هدف کنترلی را به صورت همزمان ارضا نمود.

• معرفی چند کنترلگر یا جبران ساز کاربردی

$$C(s) = K$$

✓ کنترلگر تناسبی : P

$$C(s) = K(T_d s + 1)$$

✓ کنترلگر تناسبی-مشتقی: PD

$$C(s) = K \left(\frac{1}{T_i s} + 1 \right)$$

✓ کنترلگر تناسبی-انتگرالی: PI

$$C(s) = K \left(T_d s + \frac{1}{T_i s} + 1 \right)$$

✓ کنترلگر تناسبی-مشتقی-انتگرالی: PID

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• معرفی پند کنترلگر کاربردی

✓ در کنترلگر PD یک **صفر** در نقطه $Z_d = -\frac{1}{T_d}$ به کنترل تناسبی اضافه شده است.

✓ در کنترلگر PI یک **قطب در مبدا** و یک **صفر** در نقطه $Z_i = -\frac{1}{T_i}$ به کنترل تناسبی اضافه شده

$$C(s) = K \left(\frac{1}{T_i s} + 1 \right) = K \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right) \quad \text{است.}$$

✓ در کنترلگر PID یک **قطب در مبدا** و دو **صفر** به کنترل تناسبی اضافه شده است.

$$C(s) = K \left(\frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right)$$

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

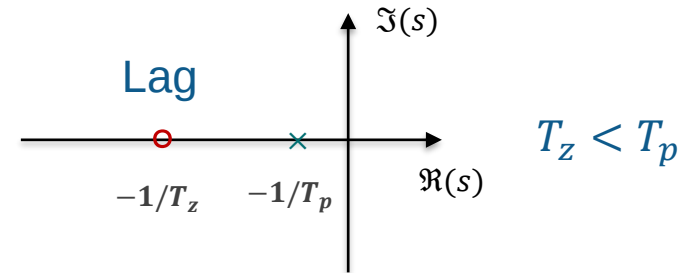
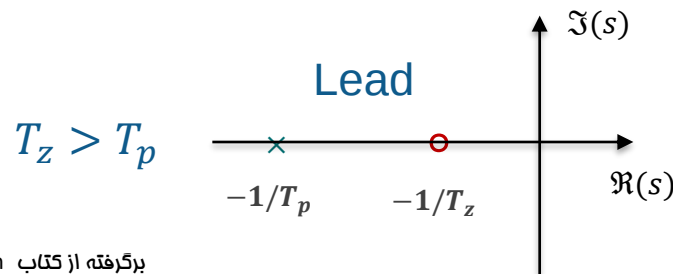
• معرفی چند کنترلگر کاربردی

✓ کنترلگر پیش فاز Lead یا پس فاز Lag : $C(s) = K \left(\frac{T_z s + 1}{T_p s + 1} \right)$

□ که در آن یک **قطب** $p = -\frac{1}{T_p}$ و یک **صفر** در نقطه $z = -\frac{1}{T_z}$ به کنترل تناسبی اضافه شده است.

✓ کنترلگر پیش فاز حالت جامع کنترلگر PD است که در آن صفر اضافه شده به مبدا نزدیکتر است.

✓ کنترلگر پس فاز حالت جامع کنترلگر PI است که در آن قطب اضافه شده به مبدا **خیلی** نزدیکتر است $T_p \gg 1$.



برگرفته از کتاب Franklin



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر دینامیکی

✓ چرا و چگونه به کنترلر تناسبی قطب یا صفر اضافه کنیم؟

□ ابتدا با طراحی کنترلر تناسبی آغاز کنید. اگر اهداف کنترلی ارضا نشد، از کنترلر دینامیکی استفاده کنید.

□ برای کاهش خطای ماندگار کنترلر PI یا Lag استفاده کنید.

- کنترلر PI تیپ سیستم را افزایش داده و خطای ماندگار را صفر می کند

- کنترلر Lag تیپ سیستم را افزایش نداده ولی خطای ماندگار را کم می کند.

□ برای افزایش سرعت پاسخ و کاهش نوسانات از کنترلر PD یا Lead استفاده کنید.

□ می توان در دو مرحله متوالی کنترلر PID یا Lead-Lag را طراحی نمود

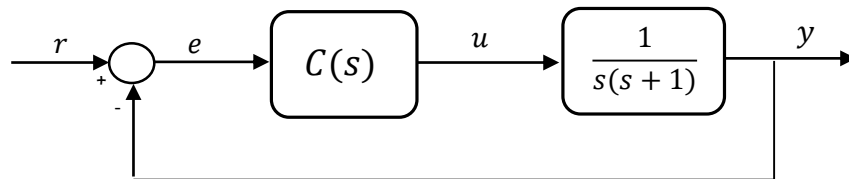
- این کنترلرها هم خطای ماندگار را کم می کنند و هم سرعت پاسخ را تندتر نموده و نوسانات را کنترل می کنند

و در صنعت بسیار کاربرد دارند.

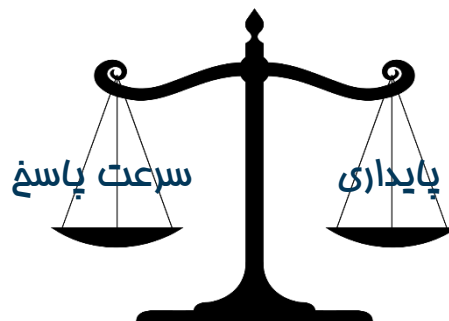
طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر PD یا پیش فاز

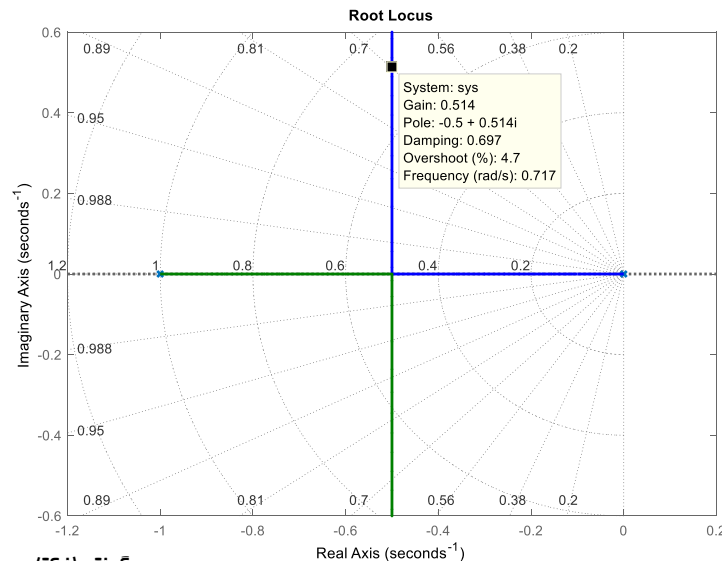
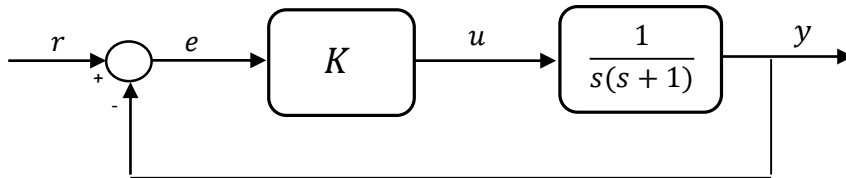
✓ مدل ساده شده سیستم نوعی موتور DC را در نظر بگیرید:



✓ محدودیت کنترلر تناسبی $C(s) = K$ را در پاسخ به مصالحه زیر را بررسی می کنیم.



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها



فرگرفته از کتاب Franklin

طراحی کنترلر PD یا پیش فاز

✓ مکان هندسی ریشه ها را رسم می کنیم

✓ به ازای $K > 0$ سیستم پایدار است.

✓ با بزرگ شدن بهره کنترلی $K \gg 1$

□ قطب های مزدوج از محور حقیقی دور می شوند

$$s = \sigma \pm j\omega_n$$

✓ سرعت پاسخ زیاد می شود $\omega_n \gg 1$

✓ اما نسبت استهلاک کم می شود $\zeta \ll 1$

□ پس نوسانات پاسخ زیاد است.

✓ به عنوان مثال نقطه مطلوب از نظر نوسانات را بررسی کنید.

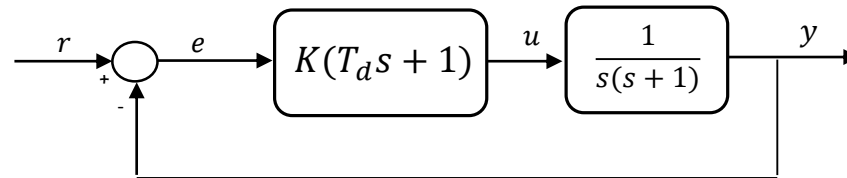
$$\zeta \approx 0.7, \quad K \approx 0.5, \quad \omega_n \approx 0.7$$

این سرعت اصلا برای سیستم کافی نیست!

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر PD

✓ با اضافه کردن یک صفر سمت چپ PD مکان هندسی به سمت چپ جذب می شود:



✓ در کنترلر PD دو پارامتر طراحی داریم

□ امکان رسیدن به سرعت بیشتر و نگهداشتن شرایط مطلوب نوسانات فراهم است

□ مکان هندسی ریشه ها تنها برای یک پارامتر متغیر قابل ترسیم است

□ دسته ای از مکان های ریشه ها را به ازای صفرهای اضافه شده در $-10, -5, -2$ $z_d = -\frac{1}{T_d}$ رسم می کنیم.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر PD

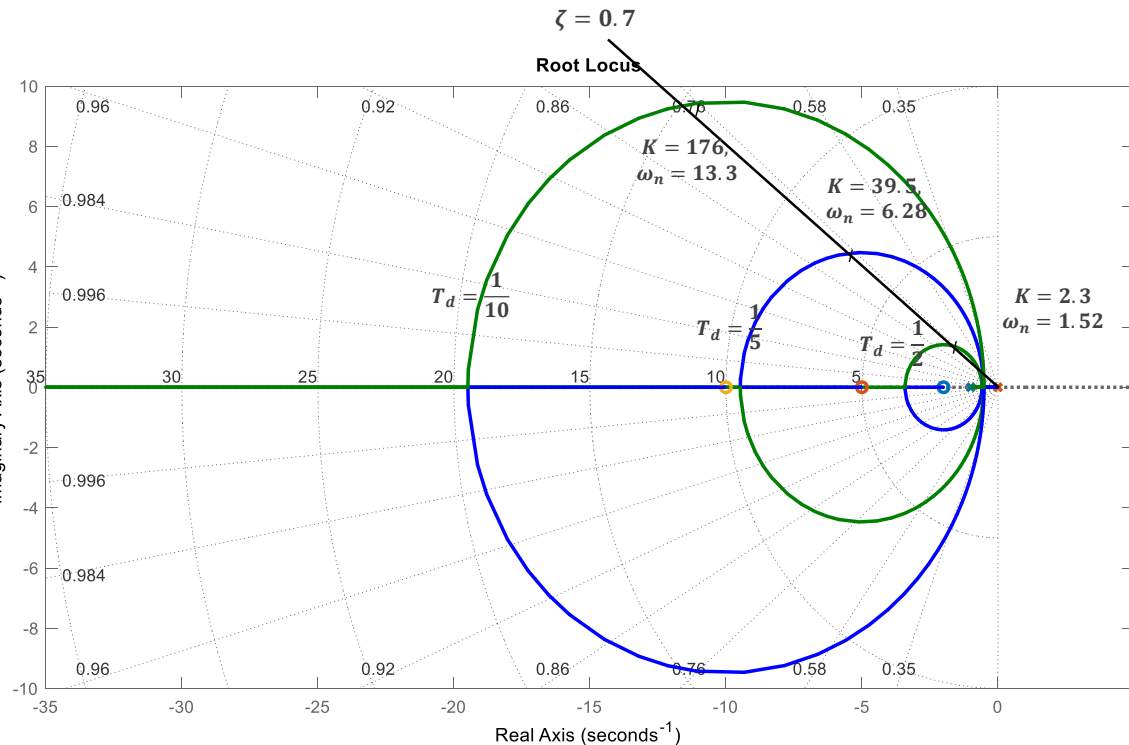
با کوچک کردن T_d صفر اضافه شده از مبدا دور می شود و دایره ایجاد شده به سمت صفر جذب می شود.

به منظور حفظ $\zeta = 0.7$ مطلوب:

For $T_d = \frac{1}{2} \rightarrow K = 2.3, \omega_n = 1.52$

For $T_d = \frac{1}{5} \rightarrow K = 39.5, \omega_n = 6.28$

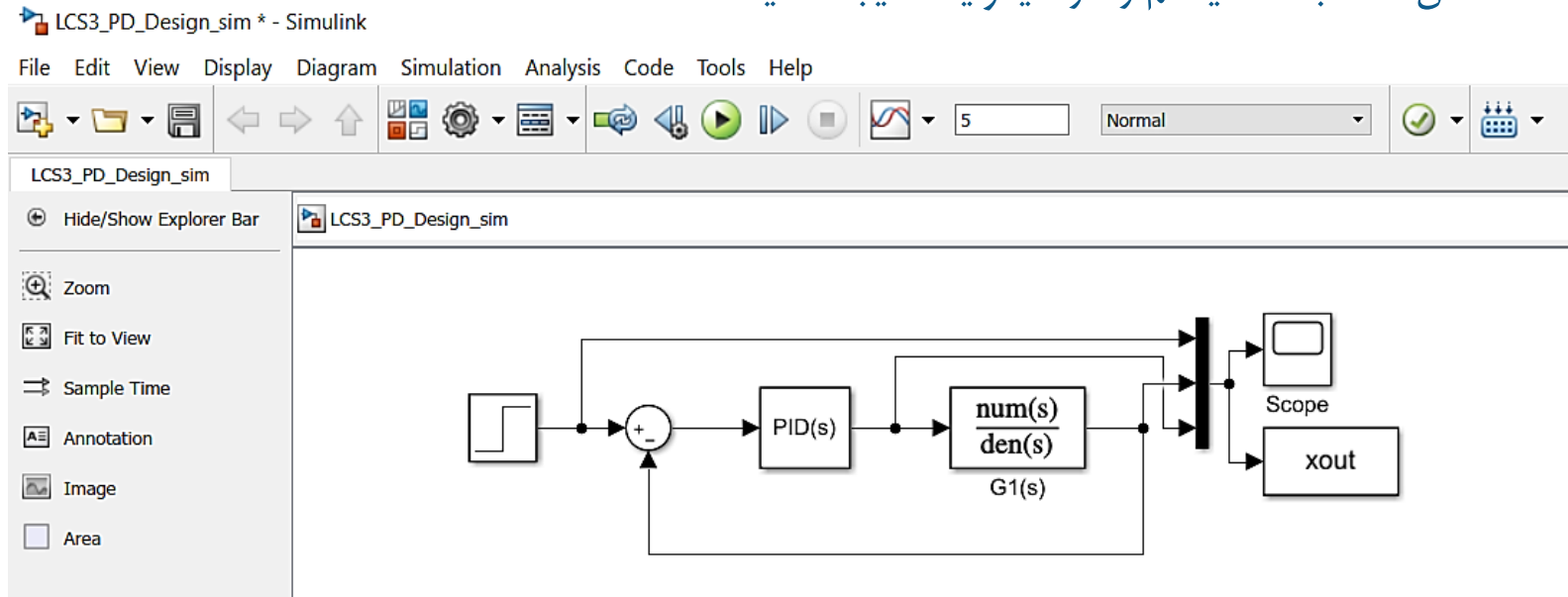
For $T_d = \frac{1}{10} \rightarrow K = 176, \omega_n = 13.3$



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

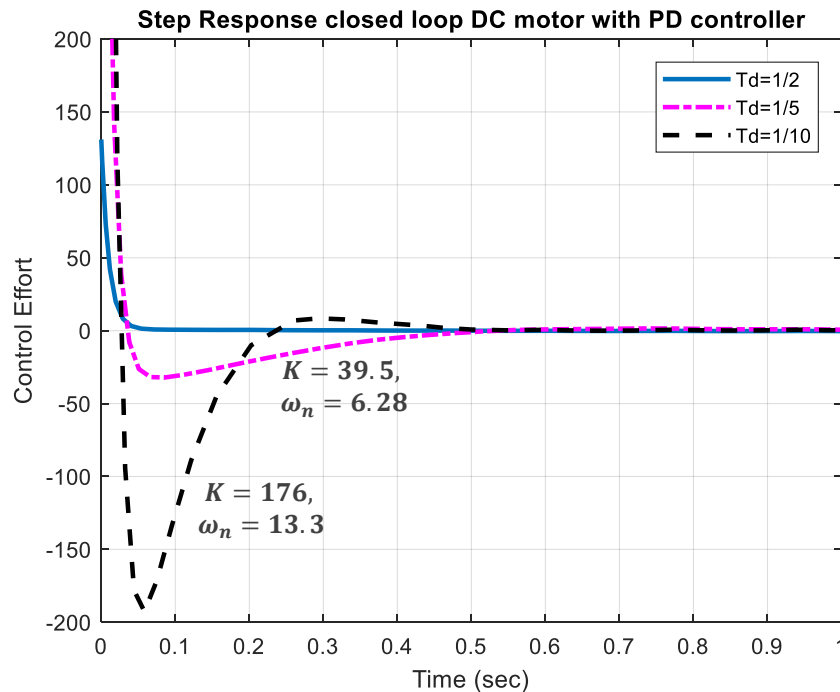
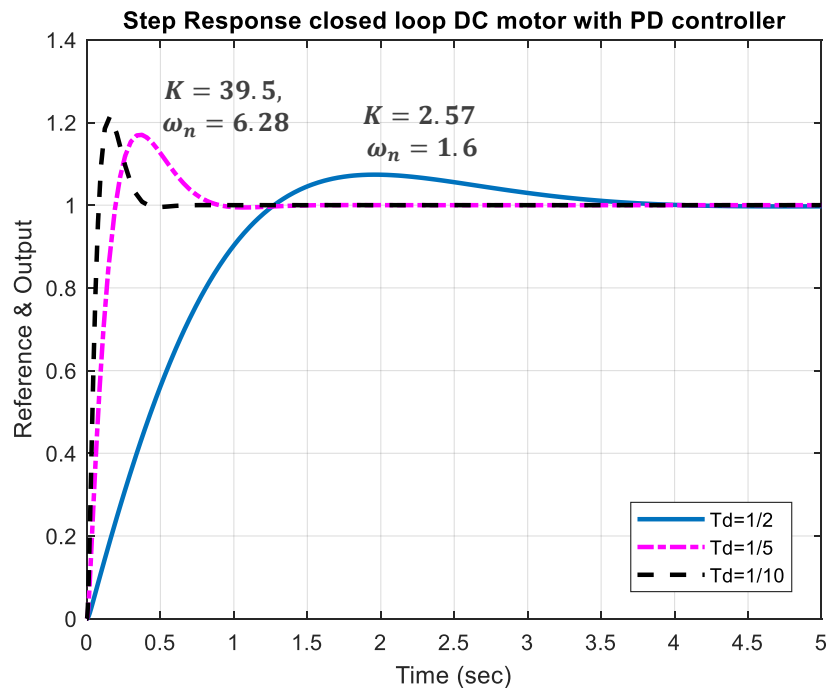
• طراحی کنترلر PD

✓ مدل حلقه بسته سیستم را در سیمولینک ایجاد کنید



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

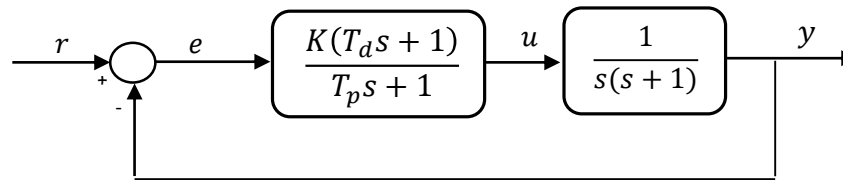
• طراحی کنترلر PD : پاسخ پله سه کنترلر طراحی شده



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر پیش فاز

✓ کنترلر PD علی نیست و در عمل با اضافه کردن یک قطب قابل پیاده سازی است.



✓ در کنترلر پیش فاز سه پارامتر طراحی داریم

□ پس از نهایی کردن محل صفر در مرحله قبل محل مناسب قطب را تعیین می کنیم.

□ به ازای $z_{lead} = -\frac{1}{T_d} = -5$ انتخاب هایی برای قطب به صورت زیر انجام می دهیم.

□ دسته ای از مکان های ریشه ها را به ازای صفرهای اضافه شده در $p_{lead} = -\frac{1}{T_p} = -25, -50$ رسم می کنیم.

برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر پیش فاز

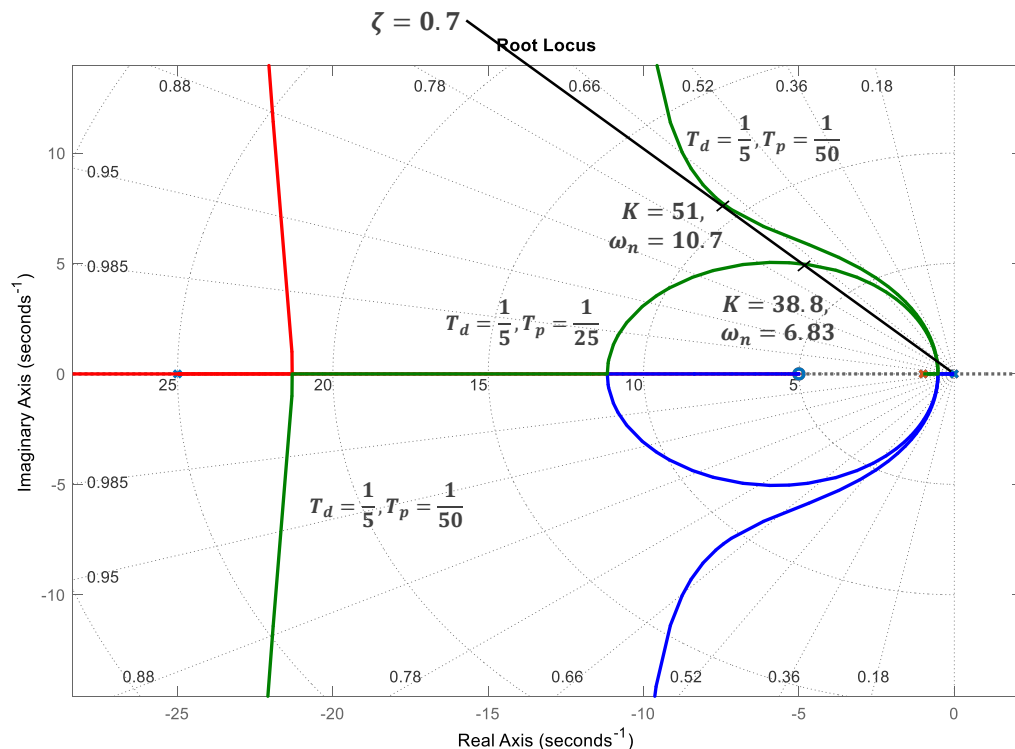
با دور کردن صفر اضافه شده از مبدا شکل مکان هندسی ریشه ها بزرگتر شده و بهره و سرعت بیشتری را می توان به دست آورد.

به منظور داشتن نوسانات مناسب $\zeta = 0.7$ و $T_d = 1/5$ را در نظر بگیرید:

For $T_p = \frac{1}{50}$ and $K = 51 \rightarrow \omega_n = 10.7$

For $T_d = \frac{1}{25}$ and $K = 38.8 \rightarrow \omega_n = 6.83$

با در نظر گرفتن $T_d = \frac{1}{5}$, $T_p = \frac{1}{25}$ رفتار پاسخ خیلی تغییر نمی کند

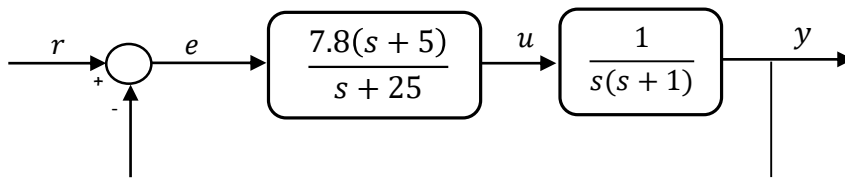


برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر پس فاز

✓ سیستم حلقه بسته نهایی مثال قبل را با کنترلر پیش فاز به صورت $C(s) = \frac{39(s/5+1)}{s/25+1}$ در نظر بگیرید.



✓ خطای ماندگار به ورودی شیب واحد در این سیستم برابر است با:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7.8}{(s+25)(s+1)} = 7.8 \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.128$$

□ اگر بخواهیم خطای ماندگار را ۱۰ برابر کاهش دهیم بایستی از یک کنترلر پس فاز بهره DC برابر ۱۰ و به عنوان

$$C(s) = \frac{s+0.1}{s+0.01}$$

محل قرار گیری قطب و صفر زیر استفاده کنیم.

$$L(s) = \frac{7.8(s+5)}{s+25} \frac{s+0.1}{s+0.01} \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow K_v = 78, e_{ss} = 0.0128$$

□ در این حالت

برگرفته از کتاب Franklin



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر پس فاز

✓ مکان هندسی را برای دو حالت رسم کنید.

□ کنترلر پیش فاز (خط توپر)

□ کنترلر Lead-Lag (خط چین)

✓ در این حالت شکل مکان تغییر محسوسی نکرده است.

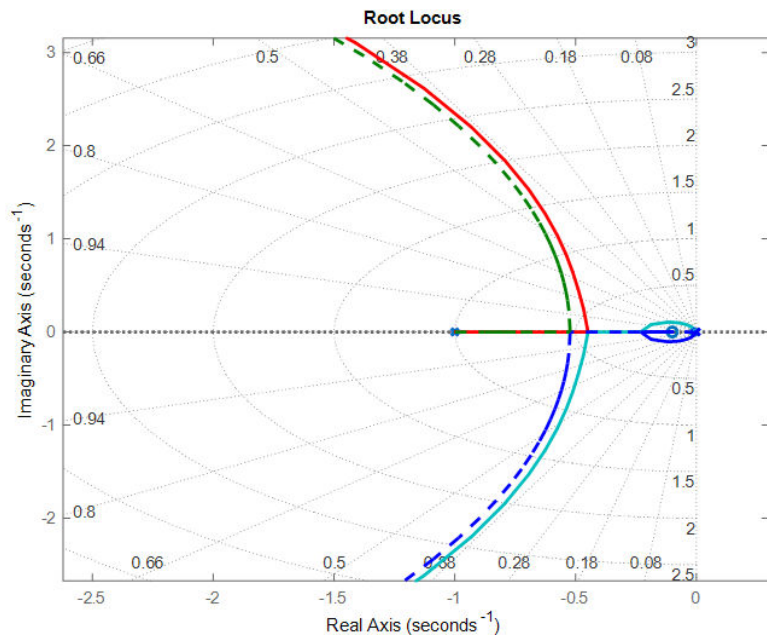
✓ نزدیک مبدا را بزرگ کنید.

□ یک قطب و صفر نزدیک به مبدا اضافه شده

□ حالت گذرای کندی به سیستم تحمیل شده است

□ پاسخ دارای خطای ماندگار صفر ولی کندتر از

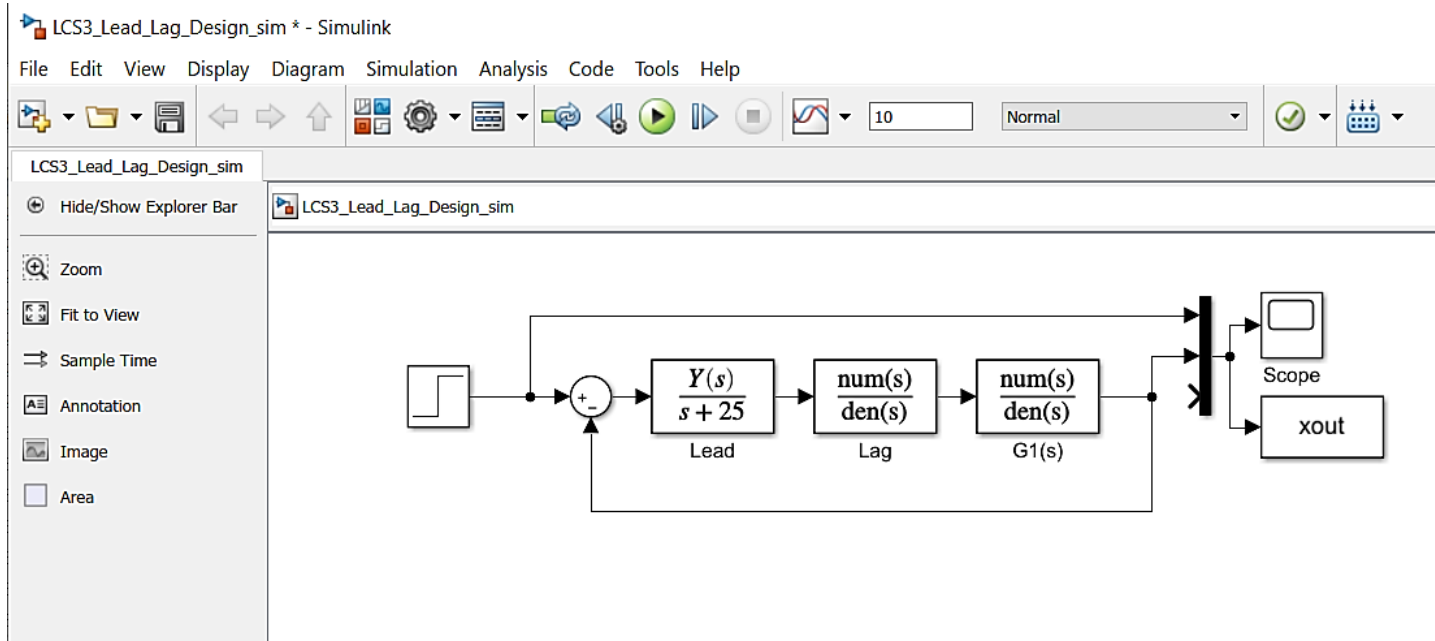
حالت قبل است.



برگرفته از کتاب Franklin

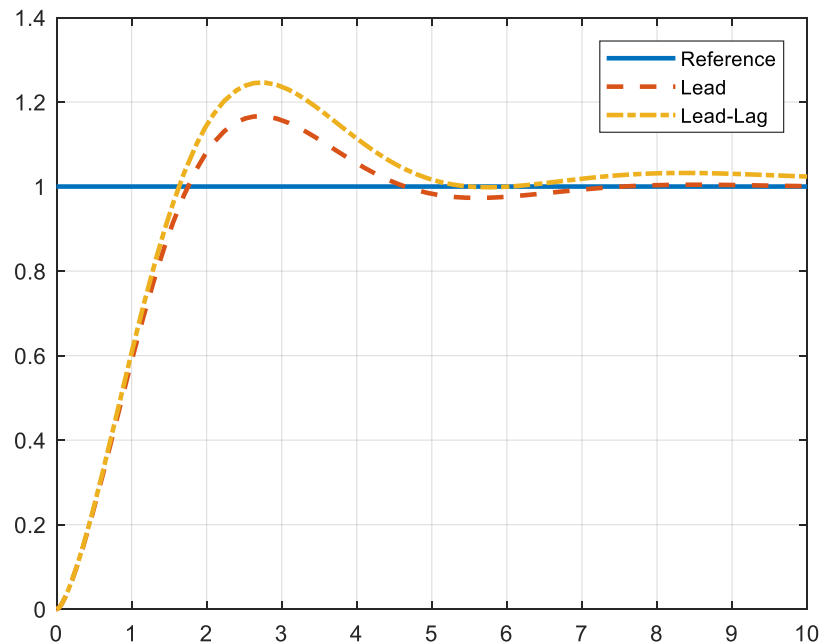
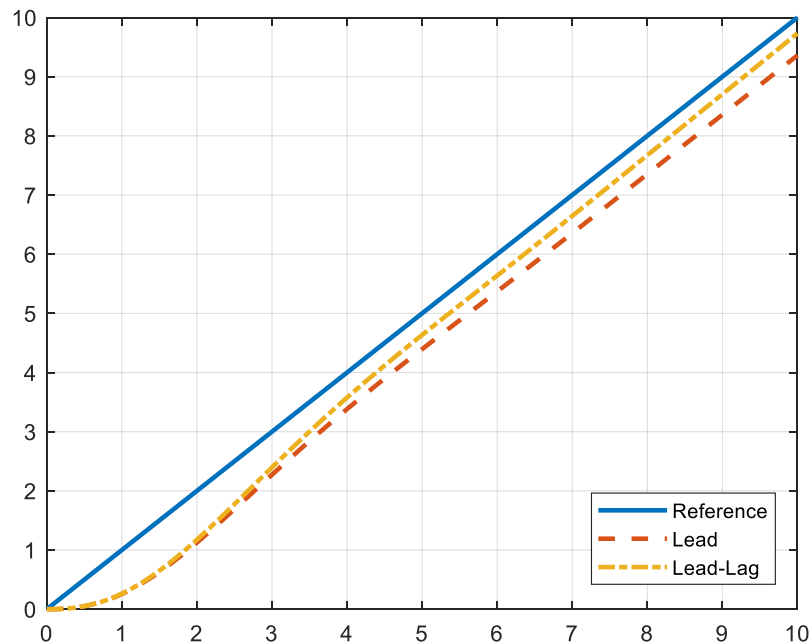
طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر Lead-Lag: مدلسازی در سیمولینک



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلر Lead-Lag: پاسخ پله و شیب





تحلیل مساله ابتکاری با مکان هندسی ریشه ها

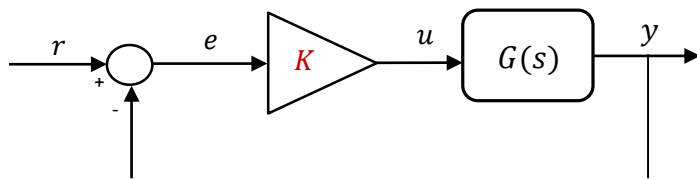
• مساله طراحی نمونه

✓ فیلتر زیر را در نظر بگیرید که از یک مدار فعال ساخته شده است که در آن K یک پارامتر طراحی است. K رابه گونه ای طراحی کنید که **میزان استهلاک** در فیلتر بیشینه شود.

$$M(s) = \frac{0.01Ks(s^2 + 100)}{(0.01K + 1)s^3 + s^2 + (K + 1)s + 1}$$

□ ظاهر این مساله به مکان هندسی ریشه ها هیچ ارتباطی ندارد، ولی تنها یک پارامتر طراحی داریم و با استفاده از ابزار مکان هندسی ریشه ها بیشینه میزان استهلاک (بیشینه میزان ζ) را می توان به صورت ترسیمی تعیین نمود.

✓ آیا می توان مساله را به فرم استاندارد مکان هندسی ریشه ها تبدیل کرد:



$$M(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \rightarrow KG(s) = \frac{M(s)}{1-M(s)}$$

$$\rightarrow KG(s) = \frac{0.01Ks(s^2 + 100)}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{0.01s(s^2 + 100)}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

تحلیل مساله ابتکاری با مکان هندسی ریشه ها

• مساله طراحی نمونه

✓ مکان هندسی ریشه ها را برای

$$G(s) = \frac{0.01s(s^2 + 100)}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

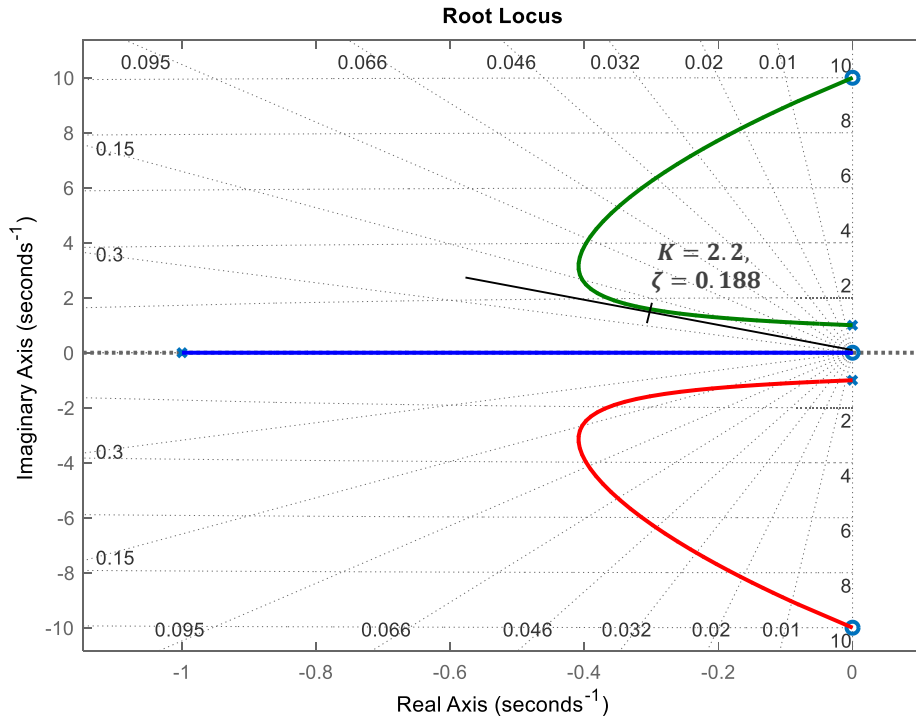
ترسیم کنید:

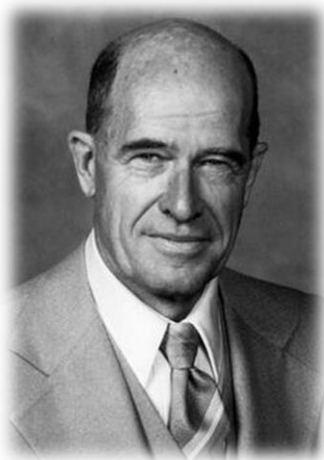
بیشینه استهلاک به ازای بیشینه ζ به دست می آید.

□ خط مماس با منحنی را ترسیم کنید.

□ اطلاعات نقطه مماس را به دست آورید.

✓ بیشینه استهلاک با $K = 2.2$ به دست می آید.





Walter R. Evans

(January 15, 1920 – July 10, 1999)

was a noted American control theorist and the inventor of the [root locus](#) method in 1948. He was the recipient of the 1987 American Society of Mechanical Engineers Rufus Oldenburger Medal and the 1988 AACC's Richard E. Bellman Control Heritage Award. He received his B.E. in Electrical Engineering from Washington University in St. Louis in 1941 and his M.E. in Electrical Engineering from the University of California, Los Angeles in 1951. Evans worked as an engineer at several companies, including General Electric, Rockwell International, and Ford Aeronautic Company. He published a book named "Control System Dynamics" with McGraw-Hill in 1954. He had four children. One of his children, Gregory Walter Evans, wrote an article about his father in the December 2004 issue of the IEEE Control Magazine. Evans was taught to play chess by his grandmother, Eveline Allen Burgess, the American Women's Chess Champion from 1907 to 1920.

برگرفته از [پیوند](#)

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق - کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیستم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.



حمید رضا تقی راد
استاد



گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل فطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به [این سایت](#) مراجعه نمایید



متشکرم



سیستم های کنترل فطی



فصل چهارم: تحلیل فرکانسی سیستم های فطی

در این فصل تحلیل پایداری سیستم های فطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می کنیم. بدین منظور با تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های فطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های فطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تحلیل پایداری سیستم های فطی با استفاده از آنالیز توابع مختلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های فطی در این چهارچوب، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکوست سیستم ملقه بسته با بهره وامد و کنترلر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در مضمون صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.



به چشم انداز

کسب مهارت های لازم
در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی
خوش آمدید





در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. گروه رباتیک ارس به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

عناوین فصل

مقدمه

چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تملیل فرکانسی با نمودار نایکویست

نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$ ، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N ، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

تملیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

در این فصل تملیل پایداری سیستم های فطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم های فطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های فطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تملیل پایداری سیستم های فطی با استفاده از آنالیز توابع مفتلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های فطی در این چهارپو، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکویست سیستم ملقه بسته با بهره وامد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در مضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار فواهد گرفت.

• چرا تحلیل فرکانسی؟

- ✓ تبدیل فوریه و لاپلاس تغییر نگاه از حوزه زمان به فرکانس.
- ✓ محل قطب ها در سیستم حلقه بسته، پایداری سیستم را مشخص می کند.
- ✓ محل قطب ها (و صفرهای سیستم) در حوزه فرکانس رفتار گذرا و دائمی سیستم را مشخص می کنند.
- ✓ تحلیل و طراحی در سیستم های کنترل خطی اساسا در حوزه فرکانس انجام می شود.
- انتخاب نوع کنترلر و بهره های آن با نگاه فرکانسی تعیین شود
- پایداری مطلق و نسبی در حوزه فرکانس تعریف می شود
- پاسخ زمانی سیستم با استفاده از تحلیل لاپلاس تعیین می شود
- رفتار سیستم در حوزه زمان بررسی و نتایج آن در حوزه فرکانس مورد استفاده قرار می گیرد.

• پاسخ فرکانسی

- ✓ تبدیل لاپلاس در سیستم های خطی رابطه مستقیمی با پاسخ فرکانسی سیستم دارد
- ✓ تعریف پاسخ فرکانسی:

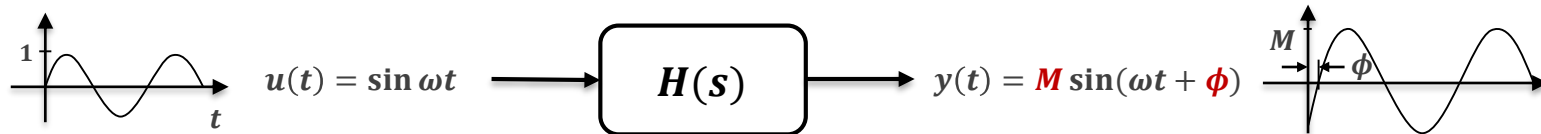
پاسخ دائمی یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان LTI به ورودی سینوسی



- ✓ پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی به ورودی سینوسی یا تابع سینوسی با همان فرکانس ورودی ولی با دامنه M و اختلاف فاز ϕ خواهد بود.

• پاسخ فرکانسی

✓ در نمایش تابع تبدیل:



✓ اگر $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم در حوزه زمان باشد، آنگاه

$$H(s) = \mathcal{L}(h(t))$$

✓ در هر فرکانس معین ω :

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}(h(t))$$

✓ $H(j\omega)$ دارای مقداری موهومی است که می تواند به صورت قطبی با اندازه و زاویه معرفی شود:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} = M e^{j\phi}$$

✓ که در آن M همان بهره دامنه و ϕ همان فاز خروجی سینوسی است.

• پاسخ فرکانسی

✓ مثال ۱: پاسخ فرکانسی سیستم زیر را برای فرکانس های $\omega = 0.1, 1, 10, 100$ به دست آورید:

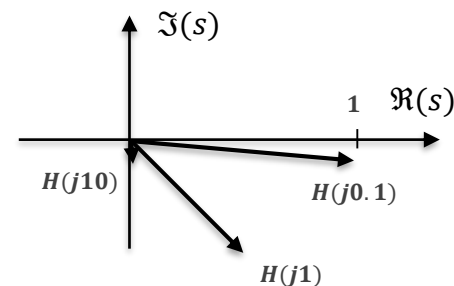
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$$

□ پاسخ:

□ در فرکانس های مختلف مقدار مختلط $H(j\omega)$ عبارت است از:

Frequency	$H(j\omega)$	$M = H(j\omega) $	$\phi = \angle H(j\omega)$
0.1	$0.9901 - j0.0990$	0.9950	-5.71°
1	$0.5000 - j0.5000$	0.7071	-45.00°
10	$0.0099 - j0.0990$	0.0995	-84.29°
100	$0.0001 - j0.0100$	0.0100	-89.43°



عناوین فصل

مقدمه

چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تملیل فرکانسی با نمودار نایکویست

نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$ ، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N ، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

تملیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

در این فصل تملیل پایداری سیستم های فطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم های فطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های فطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تملیل پایداری سیستم های فطی با استفاده از آنالیز توابع مفصل و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های فطی در این چهارپو، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکویست سیستم ملقه بسته با بهره وامد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار فواهد گرفت.



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ترسیم $H(j\omega)$ در دو نمودار مجزای اندازه (به صورت لگاریتمی) و زاویه بر حسب فرکانس (با مقیاس لگاریتمی) ✓ نمودار اندازه:

$$L = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (\text{dB}) \quad \text{بر حسب دسی بل}$$

✓ نمودار زاویه:

$$\phi = \angle H(j\omega) \quad \text{بر حسب درجه}$$

• قضیه بودی (۱۹۴۵)

✓ اگر چه هندریک بودی به خاطر نمودار بودی در بین دانشجویان مهندسی شناخته شده است، ولی دستاورد اصلی وی تعیین تقریبی نمودار زاویه بر حسب نرخ تغییرات نمودار اندازه است اگر در مقیاس لگاریتمی رسم شود.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ مقیاس دسی بل را مرور کنیم:

$$|H(j\omega)| = 1 \rightarrow L = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad \text{بدون تغییر در اندازه}$$

$$|H(j\omega)| = 10 \rightarrow L = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB} \quad \text{تقویت کننده}$$

$$|H(j\omega)| = 10^4 \rightarrow L = 20 \log_{10} 10^4 = 80 \text{ dB} \quad \text{تقویت کننده}$$

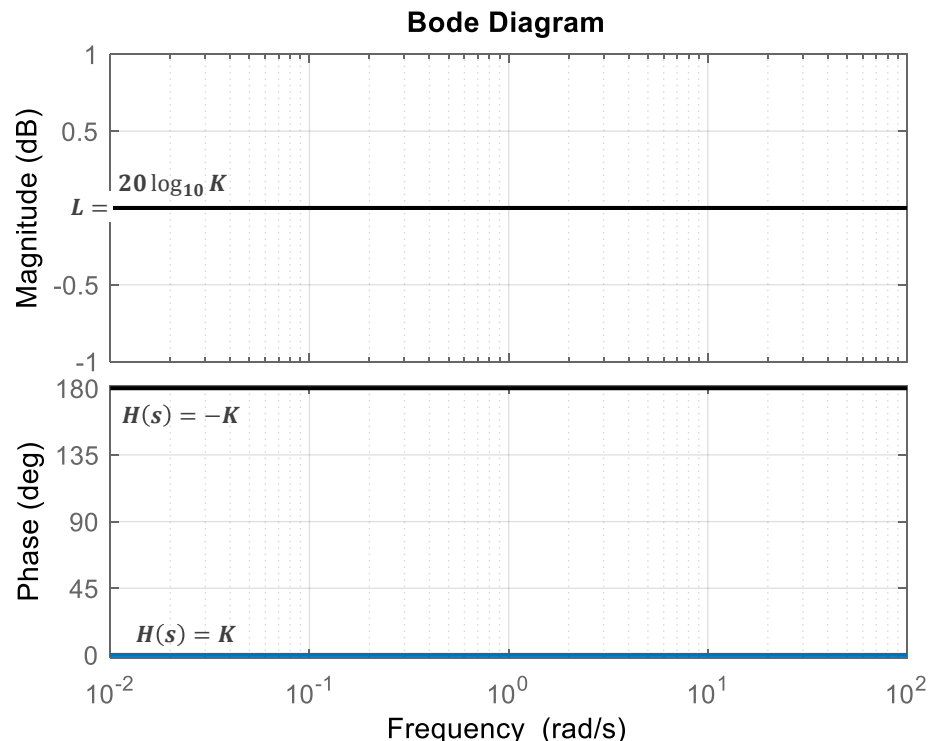
$$|H(j\omega)| = 0.1 \rightarrow L = 20 \log_{10} 0.1 = -20 \text{ dB} \quad \text{تضعیف کننده}$$

$$|H(j\omega)| = 10^{-3} \rightarrow L = 20 \log_{10} 10^{-3} = -60 \text{ dB} \quad \text{تضعیف کننده}$$



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)



✓ بهره ثابت مثبت

$$H(s) = K = Ke^{j0}$$

بهره در همه فرکانس ها مقداری ثابت و زاویه برابر صفر است

✓ بهره ثابت منفی

$$H(s) = -K = Ke^{j180^\circ}$$

بهره در همه فرکانس ها مقداری ثابت و زاویه برابر 180° درجه است

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

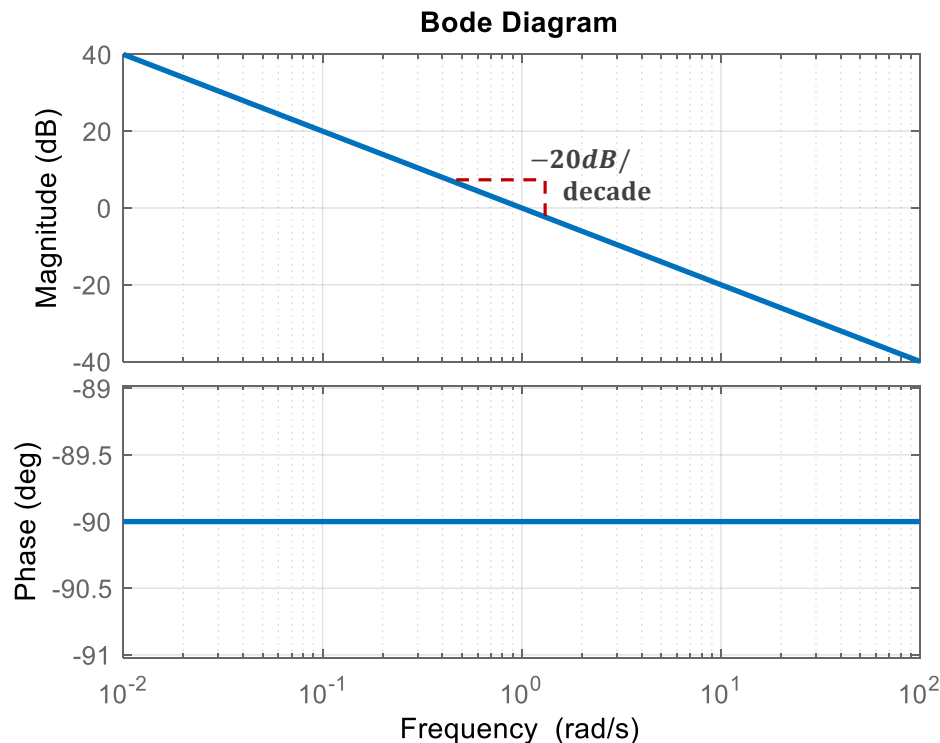
✓ سیستم انتگرالگیر:

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$L = -20 \log_{10}(\omega)$$

$$\angle H(j\omega) = -90^\circ$$

بهره در فرکانس صفر بی نهایت است و در فرکانس بالا نزدیک صفر
نمودار بهره یک خط با شیب -20dB/decade در نمودار لگاریتمی
است. فاز در همه فرکانس ها برابر -90° درجه است.





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

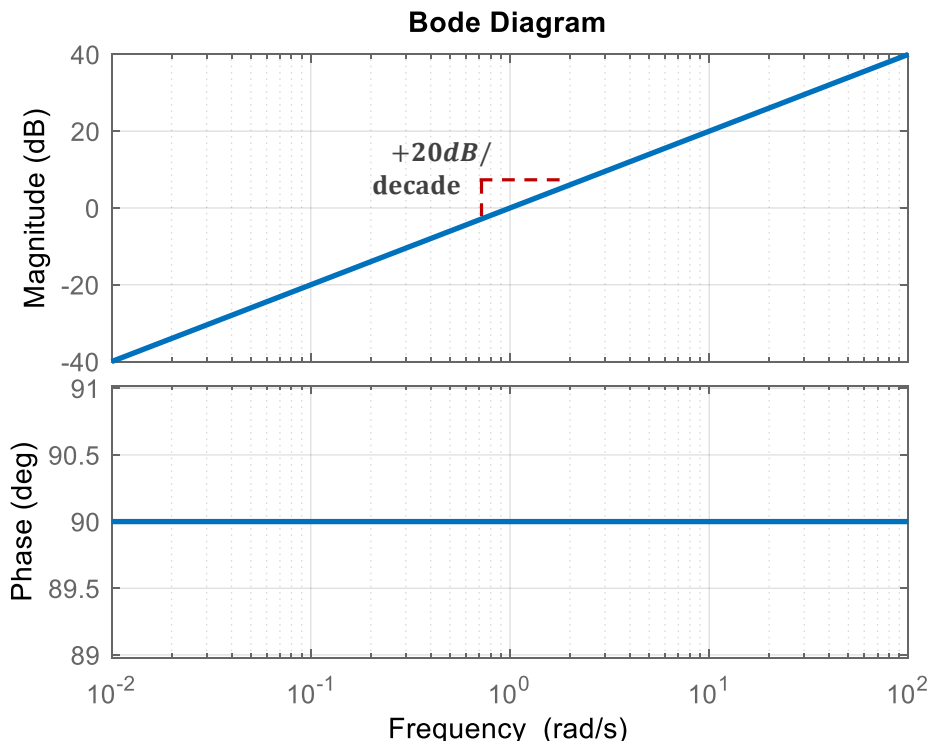
• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مشتق گیر:

$$H(s) = s$$

$$L = +20 \log_{10}(\omega)$$

$$\angle H(j\omega) = +90^\circ$$



مقدار بهره در فرکانس صفر، صفر است و در فرکانس بالا بی نهایت است. نمودار بهره یک خط با شیب +20dB/decade در نمودار لگاریتمی است. فاز در همه فرکانس ها برابر +۹۰ درجه است.



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه اول Lag :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\tau\omega)} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$L = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}, \quad L = -10 \log_{10} (1 + (\tau\omega)^2)$$

□ بدین ترتیب:

$$\text{For } \omega \ll 1/\tau \quad \text{or} \quad \omega\tau \ll 1 \quad \rightarrow \quad L \cong 0 \text{ dB}$$

$$\text{For } \omega = 1/\tau \quad \text{or} \quad \omega\tau = 1 \rightarrow L = -10 \log_{10}(2) = -3 \text{ dB (0.7)}$$

$$\text{For } \omega \gg 1/\tau \quad \text{or} \quad \omega\tau \gg 1 \rightarrow L \cong -10 \log(\omega\tau)^2 = -20 \log \omega\tau$$

این یک خط با شیب -20dB/decade در نمودار لگاریتمی است.



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه اول Lag :

$$L = -10 \log_{10}(1 + (\tau\omega)^2)$$

این یک خط با شیب -20dB/decade در فرکانس های بالا است.

$$\angle H(j\omega) = 0 - \tan^{-1}(\tau\omega)$$

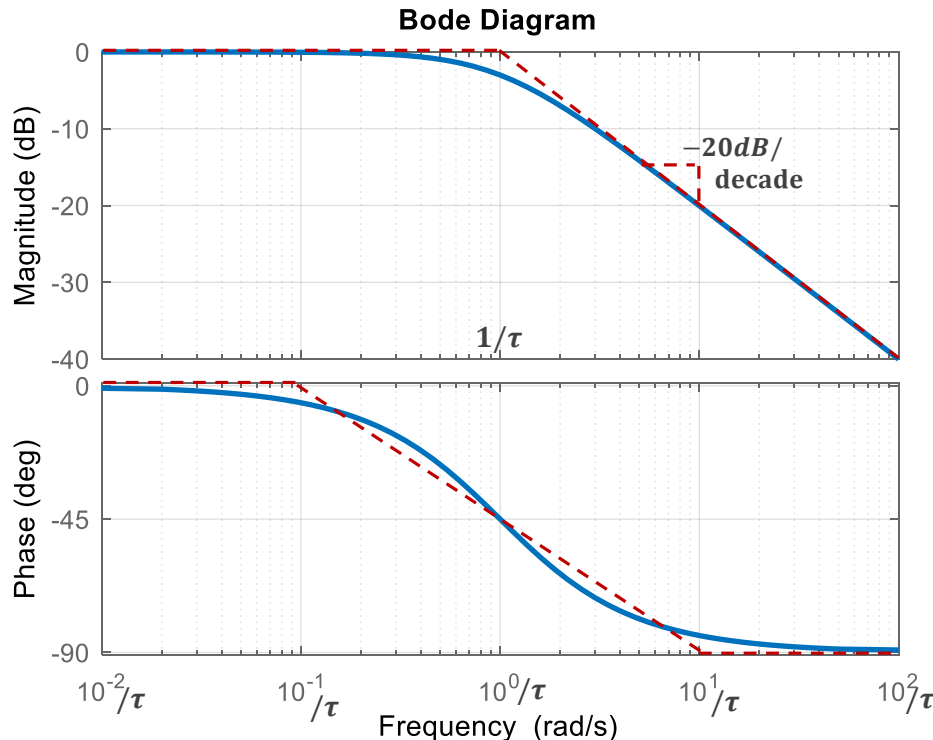
$$\text{For } \omega \ll 1/\tau \rightarrow \angle H(j\omega) = 0^\circ$$

$$\text{For } \omega = 1/\tau \rightarrow \angle H(j\omega) = -45^\circ$$

$$\text{For } \omega \gg 1/\tau \rightarrow \angle H(j\omega) = -90^\circ$$

سیستم مرتبه اول Lag ۹۰ درجه تاخیر فاز (پس فاز) ایجاد می کند.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه اول PD :

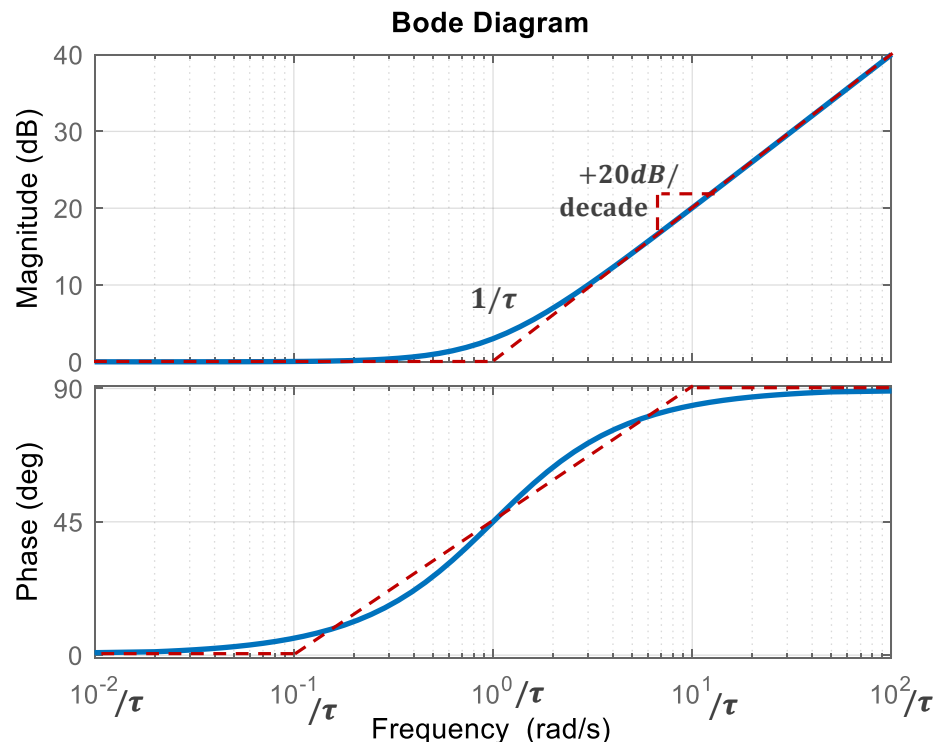
$$H(s) = 1 + \tau s$$

$$L = +10 \log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) = -\bar{L}$$

$$\angle H(j\omega) = +\tan^{-1}(\tau\omega) = -\angle \bar{H}(j\omega)$$

بهره و زاویه مشابه Lag است، اما با بهره و فاز مثبت (پیش فاز)

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم Lag ناپایدار :

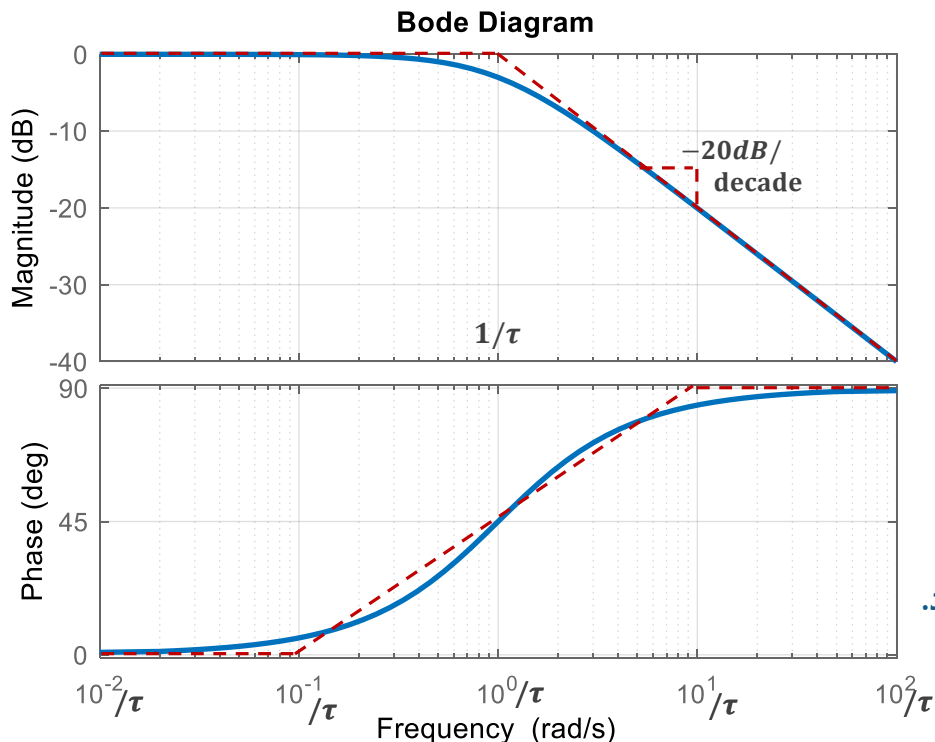
$$H(s) = \frac{1}{1 - \tau s}$$

$$L = \bar{L}$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه در مقایسه با Lag پایدار $\bar{L}$ تغییر نمی کند ولی فاز مثبت می شود.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

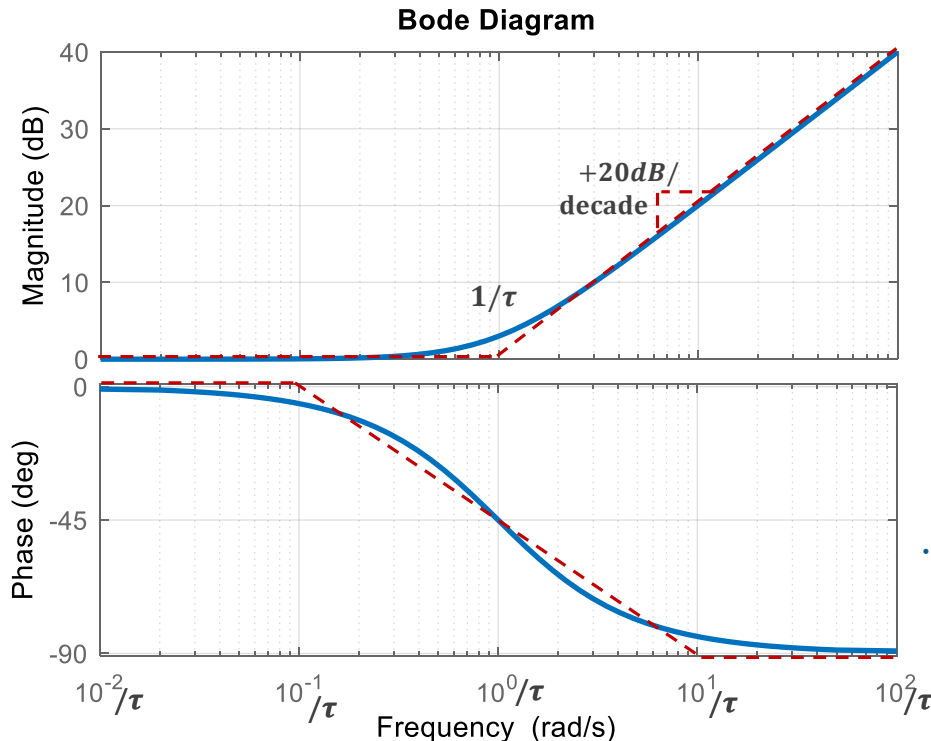
• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم PD با صفر غیر کمینه فاز:

$$H(s) = 1 - \tau s$$

$$L = \bar{L}$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle \bar{H}(j\omega)$$



اندازه نسبت به PD معمول $\bar{L}$ تغییر نمی کند ولی فاز منفی می شود.
 بدین علت است که با این صفر غیر کمینه فاز گفته می شود.
 شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه دوم پایدار:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau + 1}, \quad \tau = 1/\omega_n$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\tau\omega)^2] + j(2\zeta\tau\omega)} \quad \forall \omega$$

$$L = -10 \log_{10}[(2\zeta\tau\omega)^2 + (1 - (\tau\omega)^2)^2] \cong \begin{cases} 0 & \text{for } \tau\omega \ll 1 \\ -10 \log_{10}(\tau\omega)^4 = -40 \log(\tau\omega) & \text{for } \tau\omega \gg 1 \end{cases}$$

□ این یک خط با شیب -40 dB/decade در نمودار لگاریتمی است.

□ مقدار L در فرکانس $\omega = 1/\tau$ به ازای $\zeta = 1$ برابر $-6 \text{ dB} = (0.5)$ است.

$$\angle H(j\omega) = -10 \tan^{-1} \frac{2\zeta\tau\omega}{1 - (\tau\omega)^2} \cong \begin{cases} 0 & \text{for } \tau\omega < 0.1 \\ -180^\circ & \text{for } \tau\omega \gg 10 \end{cases}$$



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه دوم پایدار:

$$H(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

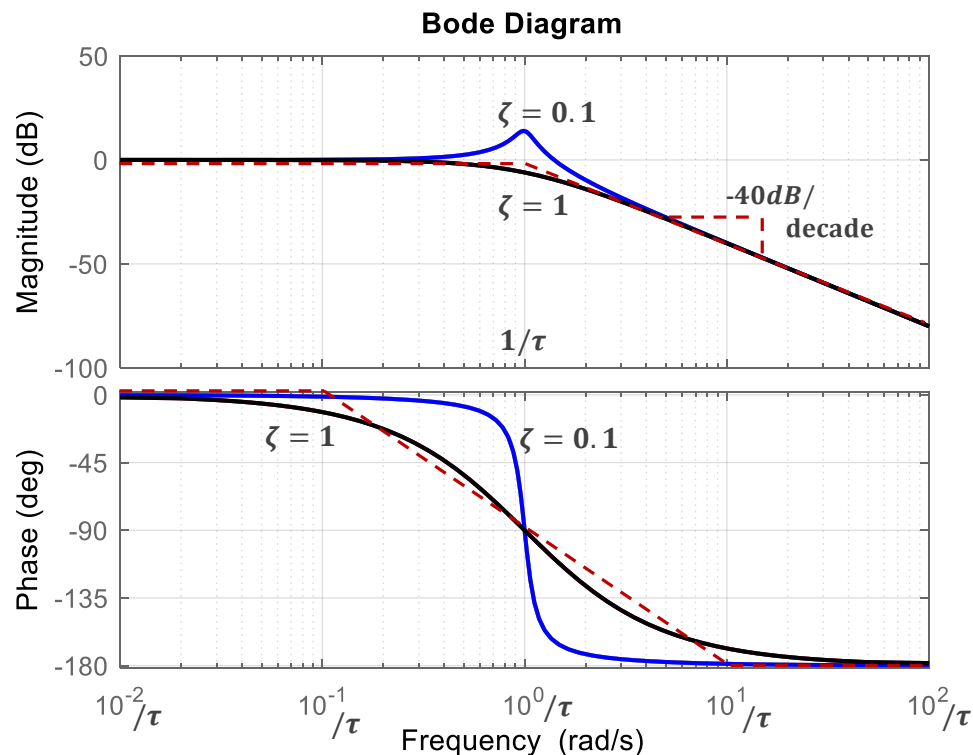
$$L = 2 \times \bar{L}$$

$$\angle H(j\omega) = 2\angle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه و فاز تقریبی دو برابر یک Lag مرتبه یک $\bar{L}$ است.

شیب نمودار اندازه در فرکانس های بالا -40dB/decade است و تاخیر فاز -۱۸۰ درجه است که به $\angle$ بستگی ندارد اما مقدار واقعی نمودار به ζ بستگی دارد.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه دوم ناپایدار:

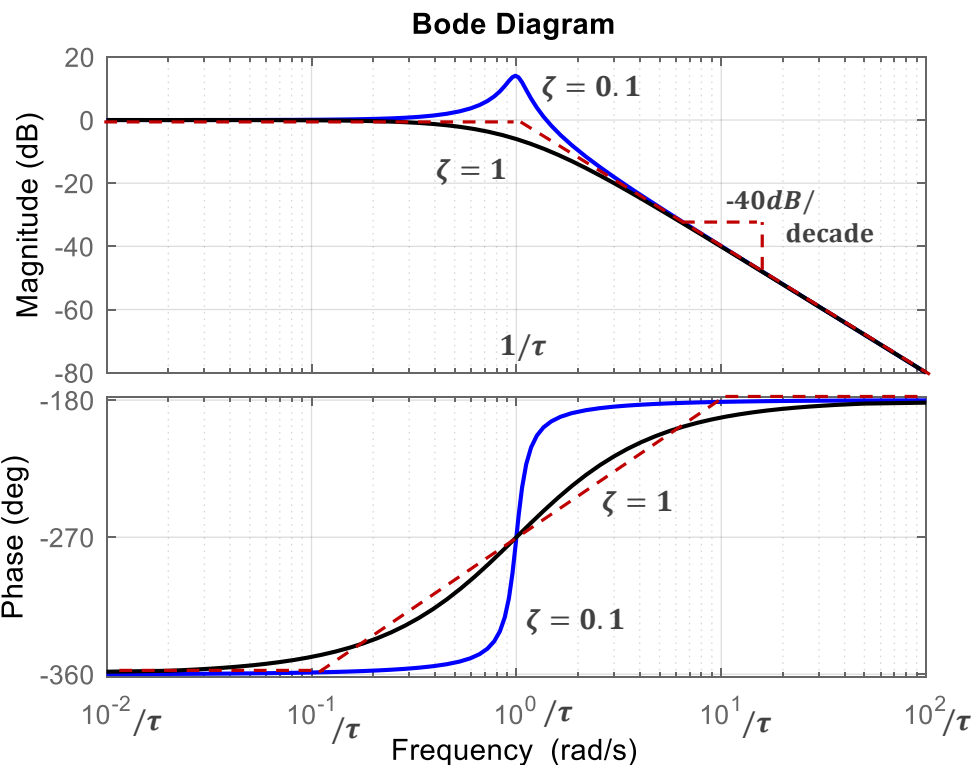
$$H(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 - 2\zeta\tau s + 1}$$

$$L = -\bar{L}$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه نسبت به سیستم مرتبه دوم پایدار $\bar{L}$ تغییری نمی کند و تنها فاز مثبت می شود

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم با دو صفر کمینه فاز:

$$H(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$$

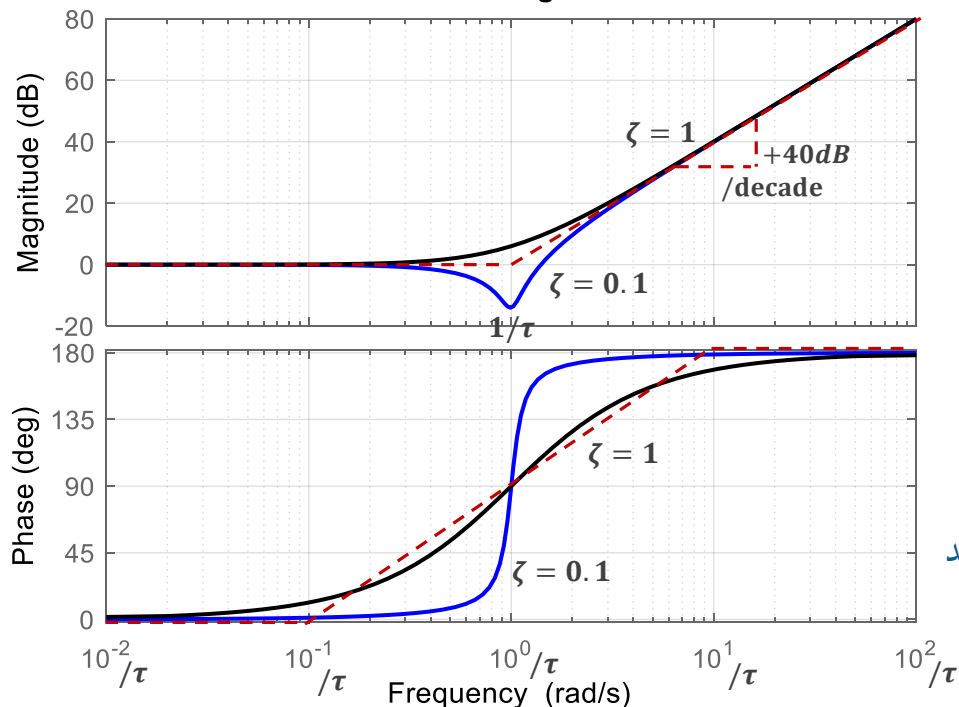
$$L = -\bar{L}$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه و فاز نسبت به سیستم مرتبه دوم پایدار $\bar{L}$ تغییر علامت می دهند

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

Bode Diagram





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم با دو صفر غیر کمینه فاز:

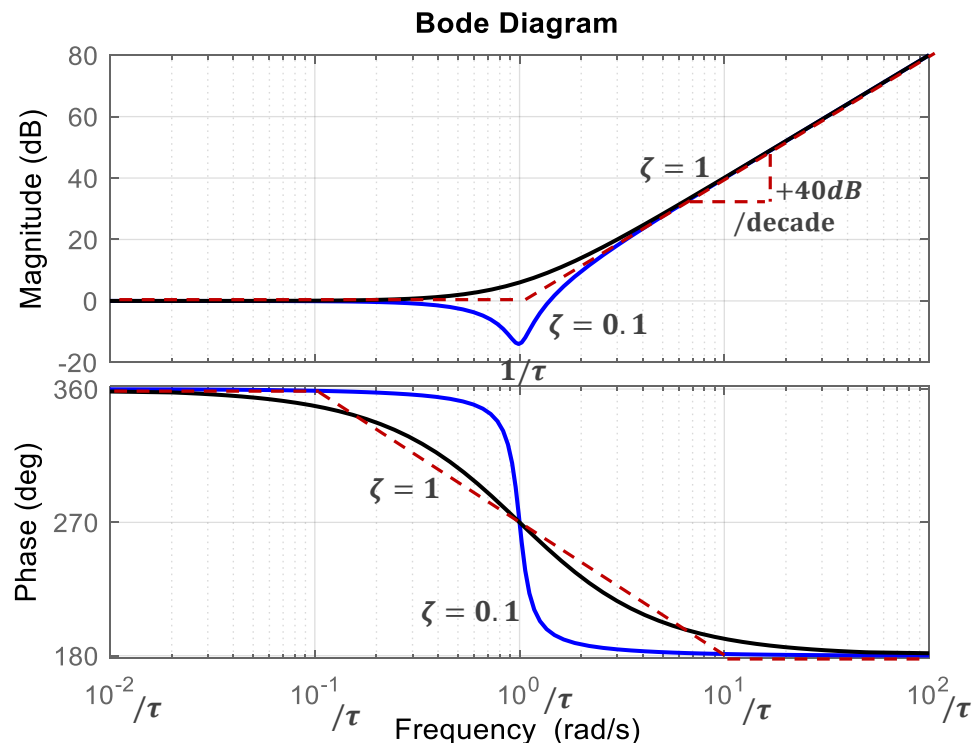
$$H(s) = \tau^2 s^2 - 2\zeta\tau s + 1$$

$$L = L$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه در مقایسه با سیستم با دو صفر کمینه فاز $\bar{L}$ تغییری نمی کند و تنها فاز آن منفی (غیر کمینه فاز) می شود.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم های مرتبه بالاتر

- ویژگی لگاریتمی نمودار بودی سبب می شود نمودار سیستم های مرتبه بالاتر را بتوان از نمودار های پایه ارائه شده به دست آورد.
- تابع تبدیل جامع یک سیستم را بر حسب قطب و صفر های مرتبه اول و دوم و انتگرالگیرهای تکرار شونده در نظر بگیرید

$$H(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)^r \cdots (1 + 2\zeta\tau_2 s + \tau_2^2 s^2)^\ell}{s^m \cdot (1 + \tau_3 s)^k \cdots (1 + 2\zeta\tau_4 s + \tau_4^2 s^2)^p}$$

- با استفاده از ویژگی لگاریتمی بهره سیستم از مجموع ترم های صورت منهای مجموع ترم های مخرج به دست می آید.

$$L = 20 \log_{10} K + r(20 \log_{10} |1 + j\tau_1 \omega|) + \cdots + \ell(20 \log_{10} |[1 + (\tau_2 \omega)^2] + j2\zeta\tau_2 \omega|) \\ - m(20 \log_{10} |j\omega|) - k(20 \log_{10} |1 + \tau_3 \omega|) - \cdots - p(20 \log_{10} |[1 + (\tau_4 \omega)^2] + j2\zeta\tau_4 \omega|)$$

- به صورت مشابه زاویه را از مجموع زاویه ترم های صورت منهای مجموع زاویه ترم های مخرج به دست آورید.

$$\angle H(j\omega) = r \tan^{-1}(\tau_1 \omega) + \cdots + \ell \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\tau_2 \omega}{1 - (\tau_2 \omega)^2} \right) - m \frac{\pi}{2} - k \tan^{-1}(\tau_3 \omega) - \cdots - p \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\tau_4 \omega}{1 - (\tau_4 \omega)^2} \right)$$



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم های مرتبه بالاتر

□ ابتدا نمودار تقریبی اجزا را در اندازه و فاز رسم نموده و سپس آنها را با هم به راحتی جمع کنید.

✓ مثال ۱: نمودار بودی کنترلگر Lead و Lag

□ قبلا این دو کنترلگر معرفی شده اند:

$$C(s) = K \frac{\tau_z s + 1}{\tau_p s + 1}$$

□ که در کنترل کننده Lead صفر به مبدا نزدیکتر است $\tau_z > \tau_p$

□ و در کنترل کننده Lag قطب بسیار به مبدا نزدیکتر است $\tau_p > \tau_z \gg 1$

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

□ کنترلر Lead زیر را در نظر بگیرید

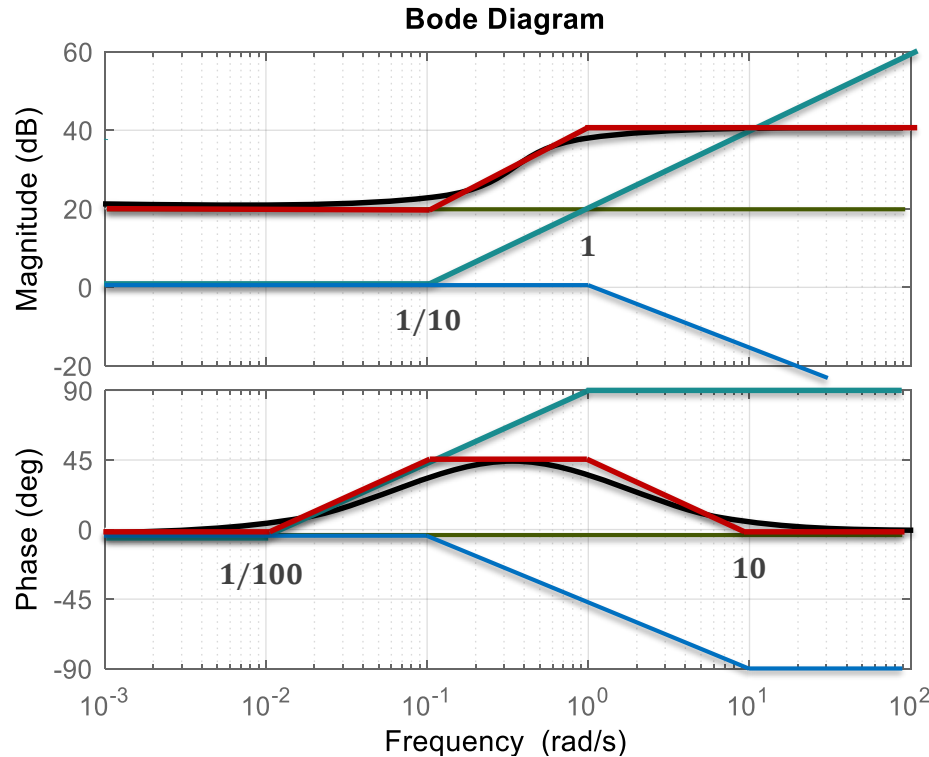
$$C(s) = 10 \frac{10s + 1}{s + 1}$$

$$C_1(s) = 10 \rightarrow L = 20dB, \angle = 0^\circ$$

$$C(s) = 10s + 1 \rightarrow \text{Lead with } \tau = 10$$

$$C(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \text{Lag with } \tau = 1$$

$$C(s) = 10 \frac{10s+1}{s+1}$$





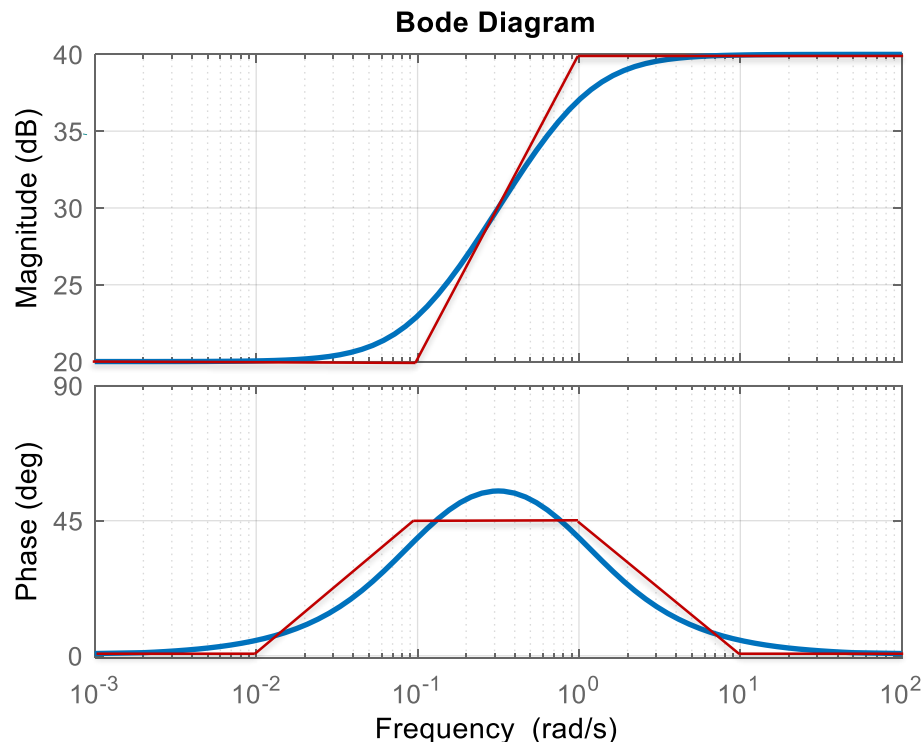
تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

□ کنترلر Lead زیر را در نظر بگیرید

$$C(s) = 10 \frac{10s + 1}{s + 1}$$



% Example 1

clear all, clc, clf

num=10*[10 1];

den=[1 1];

sys=tf(num,den);

bode(sys)

set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)



مل کامپیوتری

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

□ کنترلر Lag زیر را در نظر بگیرید

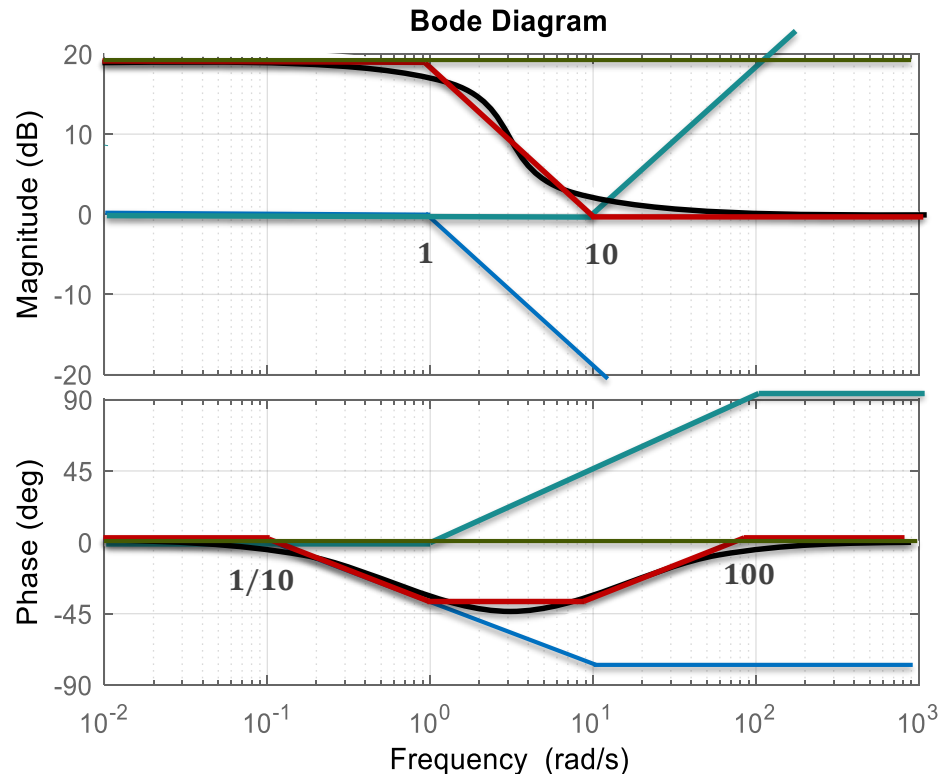
$$C(s) = 10 \frac{0.1s + 1}{s + 1}$$

$$C_1(s) = 10 \rightarrow L = 20dB, \angle = 0^\circ$$

$$C(s) = 0.1s + 1 \rightarrow \text{Lead with } \tau = 0.1$$

$$C(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \text{Lag with } \tau = 1$$

$$C(s) = 10 \frac{10s+1}{s+1}$$





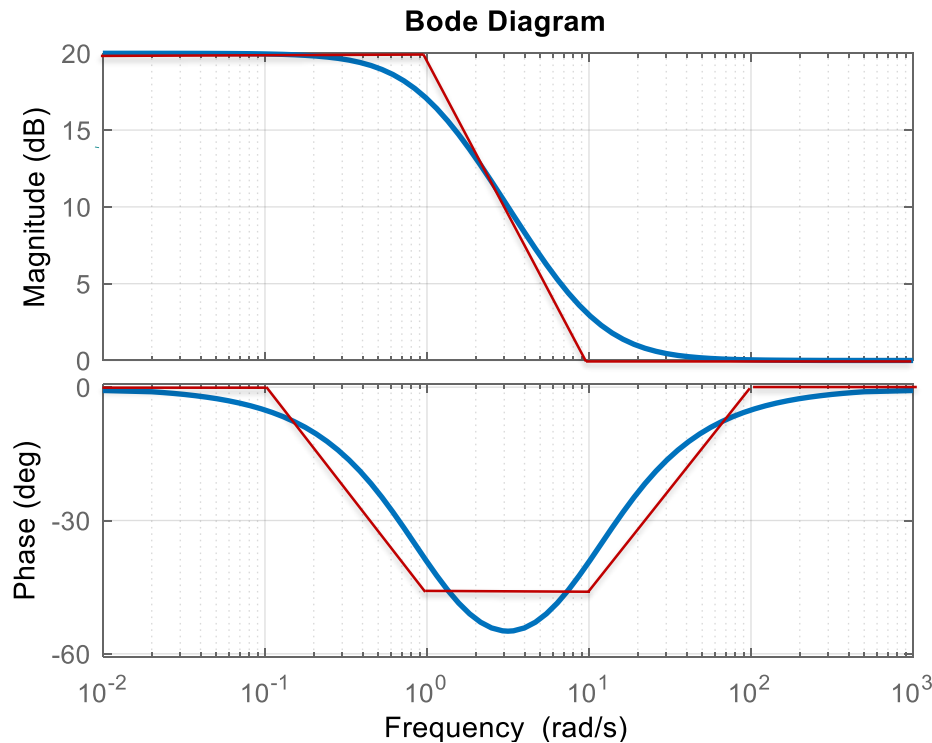
تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

□ کنترلر Lag زیر را در نظر بگیرید

$$C(s) = 10 \frac{0.1s + 1}{s + 1}$$



% Example 1

clear all, clc, clf

num=10*[0.1 1];

den=[1 1];

sys=tf(num,den);

bode(sys)

set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)



مل کامپیوتری

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ مثال ۲:

□ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s) = \frac{1 - 0.1s}{s^2 + s + 1}$$

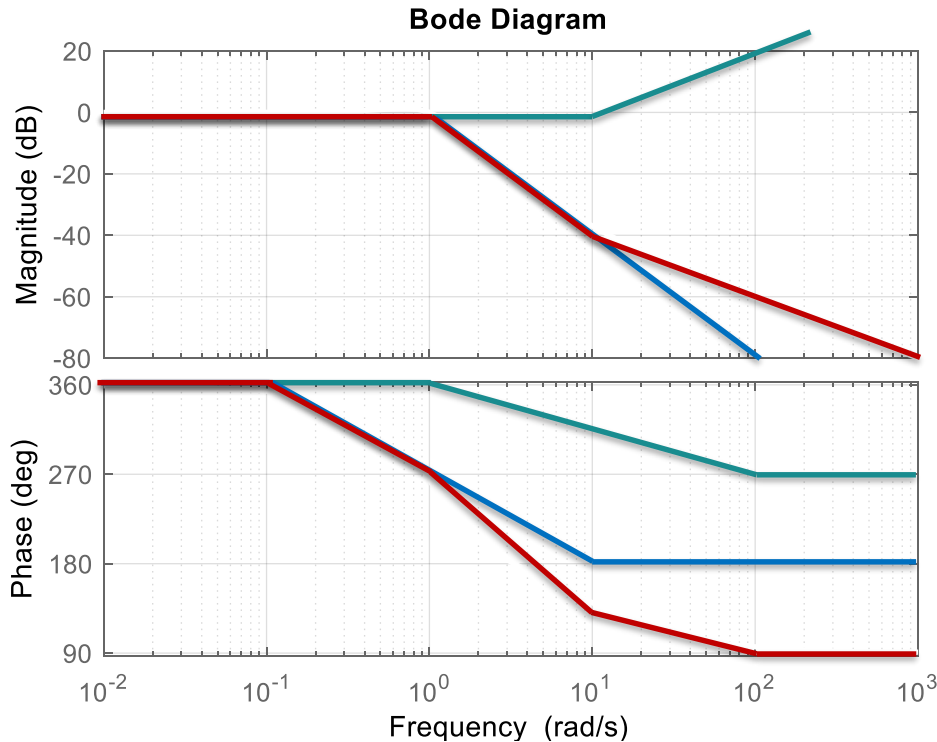
$$C_1(s) = 1 - 0.1s \rightarrow$$

NMP PD with $\tau = 0.1$

$$C_2(s) = s^2 + s + 1 \rightarrow$$

stable 2nd order with $\tau = 1$

$$C(s) = \frac{1-0.1s}{s^2+s+1}$$





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۲:

□ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s) = \frac{1 - 0.1s}{s^2 + s + 1}$$

% Example 1

clear all, clc, clf

num=[-0.1 1];

den=[1 1 1];

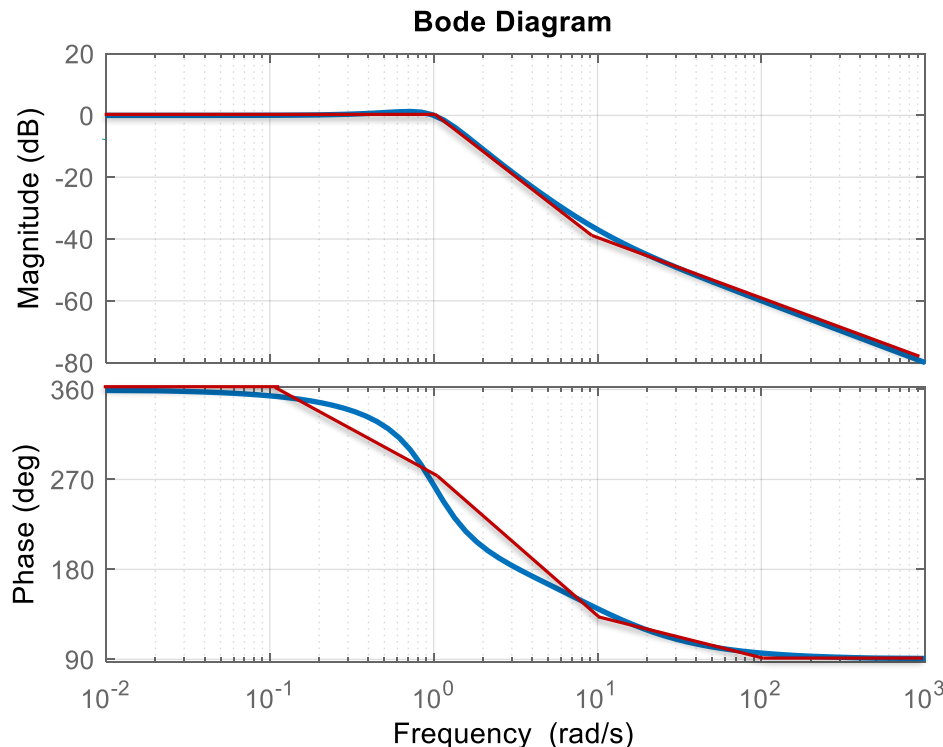
sys=tf(num,den);

bode(sys)

set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)



مل کامپیوتری





تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی (Bode)

✓ مثال ۳: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s) = \frac{100(s - 0.1)}{(s + 1)(s^2 - 10s + 100)}$$

$$= \frac{100(-0.1)}{100} \frac{(1 - 10s)}{(1 + s) \left(\left(\frac{s}{0.1} \right)^2 - \frac{1}{0.1}s + 1 \right)}$$

$$C_1(s) = -0.1 \rightarrow L = -20dB, \quad \angle = -180^\circ$$

$$C_2(s) = 1 - 10s \rightarrow \text{NMP PD with } \tau = 10$$

$$C_3(s) = (1 + s) \rightarrow \text{Lag with } \tau = 1$$

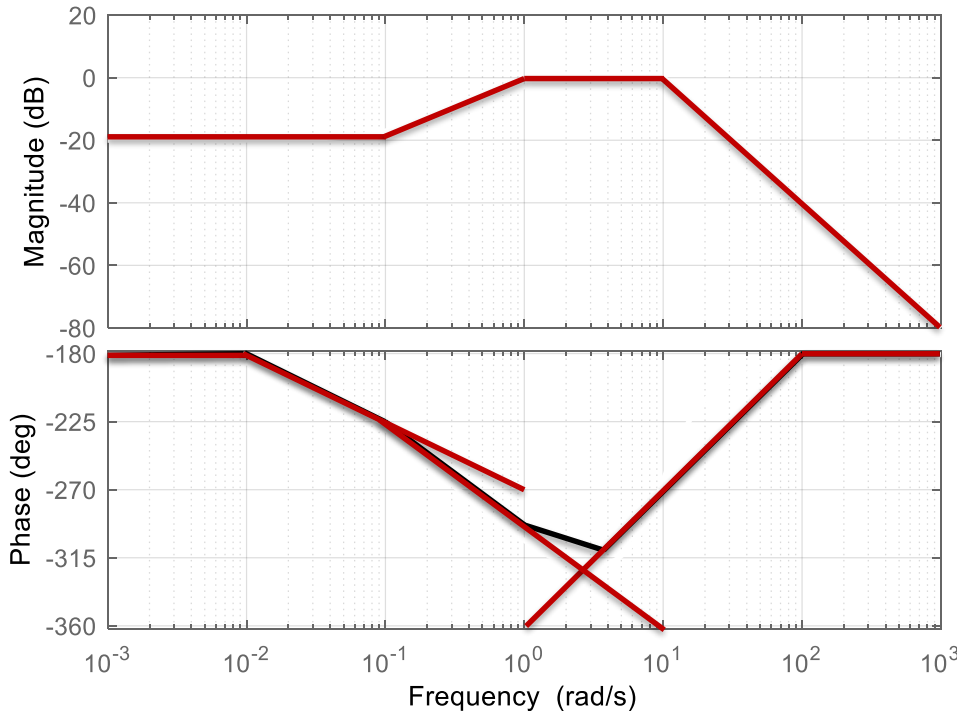
$$C_3(s) = \left(\frac{s}{0.1} \right)^2 - \frac{1}{0.1}s + 1 \rightarrow \text{Unstable 2nd order}$$

with $\tau = 0.1, \zeta = 1/2$



مل دستی

Bode Diagram



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۳:

□ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s) = \frac{100(s - 0.1)}{(s + 1)(s^2 - 10s + 100)}$$

% Example 3

```
clear all, clc, clf
```

```
num=100*[1 -0.1];
```

```
den=conv([1 1],[1 -10 100]);
```

```
sys=tf(num,den);
```

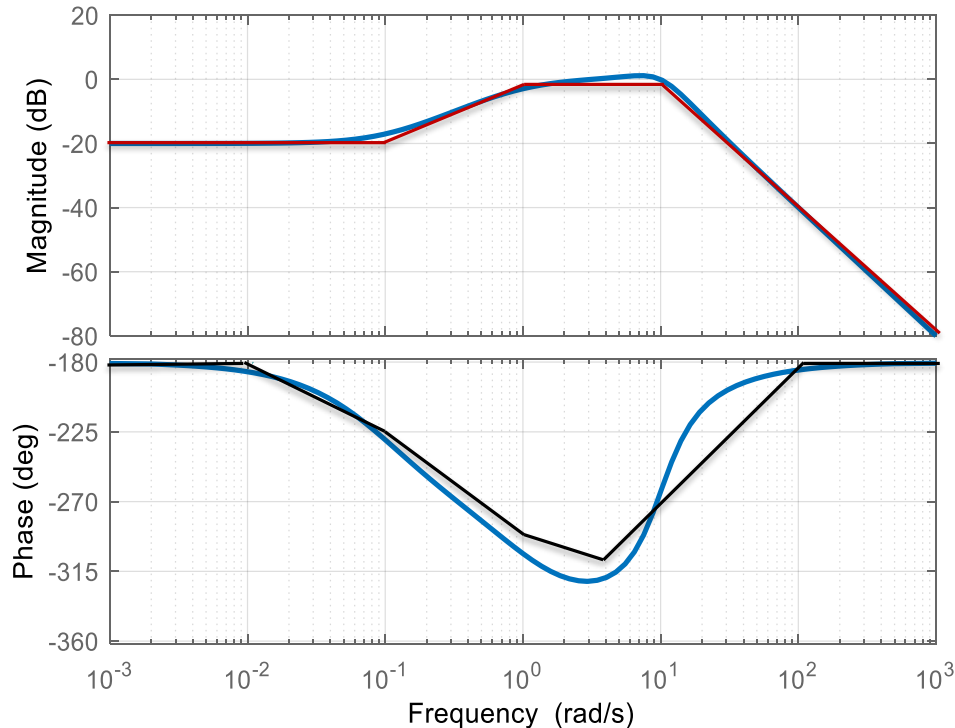
```
bode(sys)
```

```
set(findall(figure(1),'type','line'),'line  
width',2)
```



مل کامپیوتری

Bode Diagram



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

سیستم های غیر کمینه فاز

✓ در تعریف سیستم های غیر کمینه فاز اختلاف نظر جزئی وجود دارد

- بسیاری از مراجع وجود صفر در ORHP را برای غیر کمینه فاز بودن، کافی می دانند ... Dorf, Franklin, Nise,
- برخی دیگر سیستمی که صفر یا قطب در ORHP داشته باشد را غیر کمینه فاز می نامند ... Kuo, Ogata,
- تعریف جامع آن سیستمی است که خودش و وارون آن علی و پایدار باشد (Kailath).
- در این تعریف اکیدا سره بودن تابع تبدیل نیز مهم است.

اگر سیستمی دارای صفری در نیم صفحه باز سمت راست ORHP باشد به آن حتما غیر کمینه فاز اطلاق می شود.

- در این موضوع اتفاق نظر است و غیر کمینه فاز بودن آن در نمودار بودی آن مشهود است.
- در این نوع سیستم ها اگر تعداد صفرهای غیر کمینه فاز فرد باشد فروجهش در پاسخ دیده می شود.
- سیستم هایی که تاخیر دار باشند نیز هر دو خصوصیت فوق را دارند و به آنها نیز (در برخی مراجع) غیر کمینه فاز گفته می شود.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

سیستم های غیر کمینه فاز

- ✓ سیستمی غیر کمینه فاز است که نمودار بودی آن در مقایسه با سیستم های مشابه خود دارای کمینه فاز نباشد:
- ✓ تجزیه سیستم غیر کمینه فاز به سیستم های تمام گذر و سیستم کمینه فاز
- هر سیستم غیر کمینه فاز را می توان به دو جزء تمام گذر و کمینه فاز تجزیه نمود:
- سیستم های تمام گذر دارای بهره واحد و فاز غیر صفر می باشند.
- ✓ مثال های زیر را در نظر بگیرید

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s+2} = \underbrace{\frac{s-1}{s+1}}_{G_{ap}} \cdot \underbrace{\frac{s+1}{s+2}}_{G_{mp}}$$

$$G_2(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s(s+s+2)} = \underbrace{\frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 2s + 1}}_{G_{ap}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s+s+2)}}_{G_{mp}}$$

$$G_3(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s+3} = \underbrace{e^{-0.1s}}_{G_{ap}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{G_{mp}}$$

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

سیستم های غیر کمینه فاز

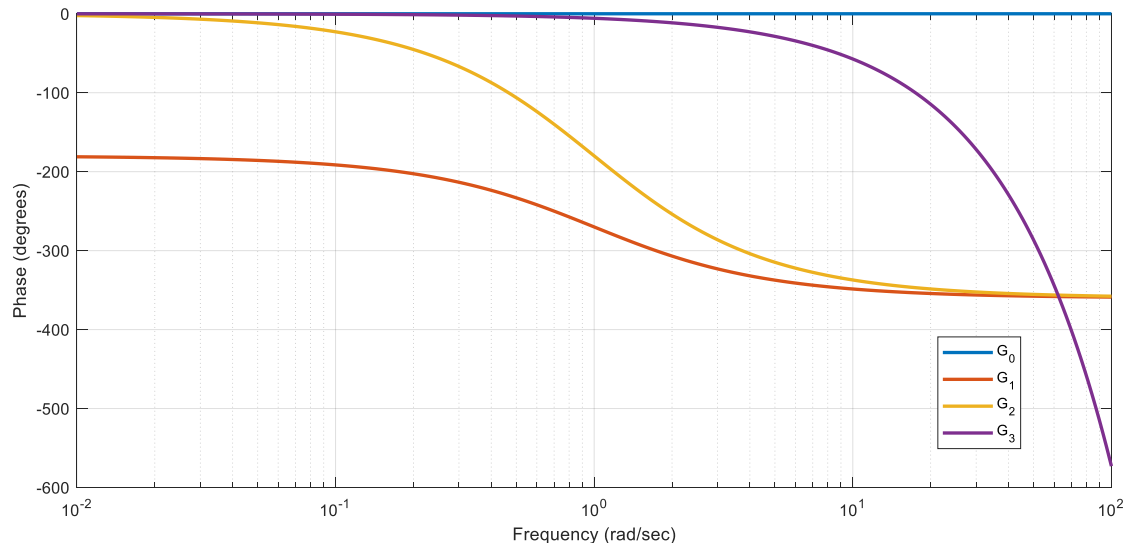
- ✓ نمودار اندازه همه توابع تمام گذر برابر یک یا 0db است
- ✓ نمودار فاز بخش های تمام گذر را با هم مقایسه کنید: بخش کمینه فاز دارای اندازه فاز کمتری است.

$$G_0(s) = 1$$

$$G_{ap1}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$G_{ap2}(s) = \frac{s^2-2s+1}{s^2+2s+1}$$

$$G_{ap3}(s) = e^{-0.1s}$$





Hendrik Wade Bode

(December 24, 1905 – June 21, 1982)

was an American engineer, researcher, inventor, author and scientist, of Dutch ancestry. As a pioneer of modern **control theory** and **electronic** telecommunications he revolutionized both the content and methodology of his chosen fields of research. His synergy with **Claude Shannon**, the father of **information theory**, laid the foundations for the **technological convergence** of the **information age**. He made important contributions to the design, guidance and control of anti-aircraft systems during World War II. He helped develop the automatic artillery weapons that defended London from the **V-1 flying bombs** during **WWII**. After the war, Bode along with his wartime rival Wernher von **Braun** developer of the V1, and, later, the father of the US space program, served as **members** of the **National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)**, the predecessor of **NASA**. During the **Cold War**, he contributed to the design and control of missiles and **anti-ballistic** missiles. He also made important contributions to **control systems theory** and mathematical tools for the analysis of stability of **linear systems**, inventing **Bode plots**, **gain margin** and **phase margin**. Bode was one of the great engineering philosophers of his era. Long respected in academic circles worldwide, he is also widely known to modern engineering students mainly for developing the **asymptotic** magnitude and **phase** plot that bears his name, the **Bode plot**. His research contributions in particular were not only multidimensional but also far reaching, extending as far as the **US space program**.

برگرفته از [پیوند](#)

عناوین فصل

مقدمه

چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

۱

تملیل فرکانسی با نمودار نایکویست

نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

۳

تملیل فرکانسی با نمودار بودی

نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

۲

معیار پایداری نایکویست

انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$ ، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N ، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

۴

در این فصل تملیل پایداری سیستم های فطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم های فطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های فطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تملیل پایداری سیستم های فطی با استفاده از آنالیز توابع مفتلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های فطی در این چهارپو، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکویست سیستم ملقه بسته با بهره وامد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در مضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار فواهد گرفت.

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

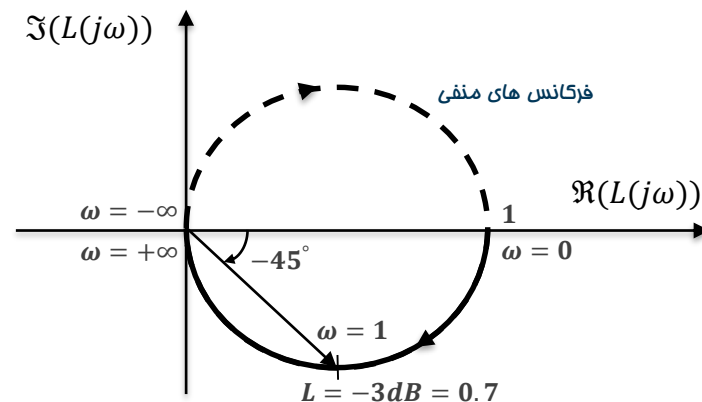
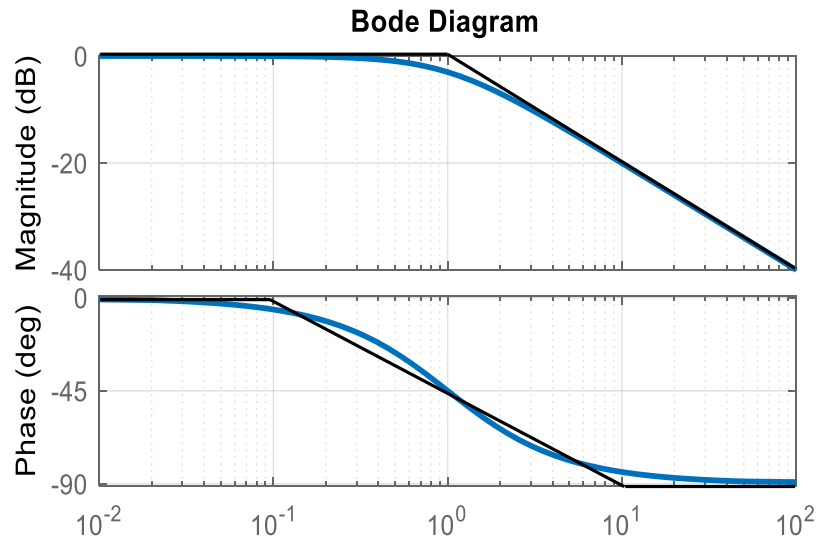
• نمودار نایکویست

- ✓ در نمودار بودی، نیاز به ترسیم دو نمودار برای نمایش مقادیر مختلط $H(j\omega)$ وجود دارد.
- ✓ نمودار نایکویست فرم قطبی نمایش $H(j\omega)$ است.
- ترسیم اندازه و فاز $H(j\omega)$ ، به ازای فرکانس های **مثبت و منفی** در صفحه S و به فرم قطبی
- ✓ ترسیم نمودار نایکویست
- ابتدا نمودار تقریبی بودی سیستم را به ازای فرکانس های مثبت رسم کنید.
- محل تلاقی نمودار را با محور حقیقی به دست آورید.
- با استفاده از نمودار بودی نمودار قطبی را برای فرکانس های مثبت ترسیم کنید.
- گزینه نمودار را نسبت به محور حقیقی را با خط چین رسم نموده (بخش فرکانس های منفی نمودار نایکویست)

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• ترسیم نمودار نایکویست

✓ مثال ۱: سیستم Lag مرتبه اول $L(s) = \frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید.



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

ترسیم نمودار نایکویست

✓ مثال ۲: $L(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم

تعیین پاسخ فرکانسی:

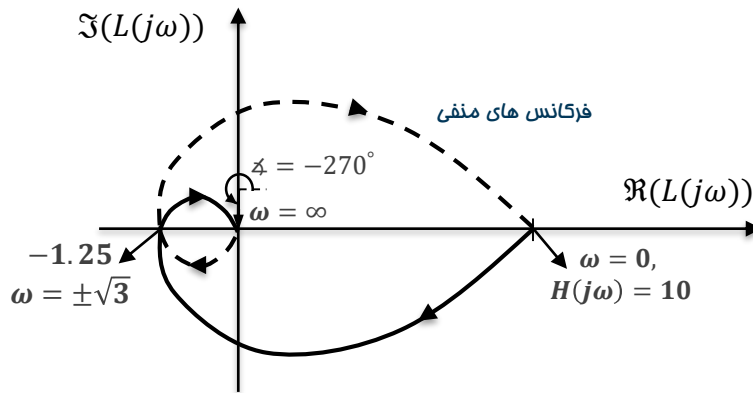
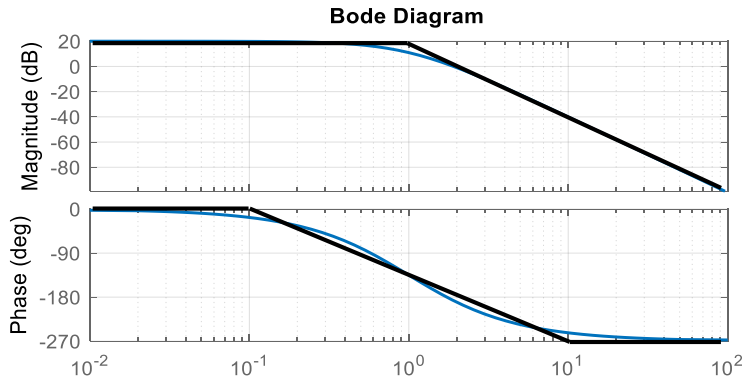
$$L(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10}{(1-3\omega^2) - j(\omega^3 - 3\omega)}$$

محل تلاقی با محور حقیقی:

$$\Im(L(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega^3 - 3\omega = 0 \rightarrow \omega = 0, \omega = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{For } \omega = 0 \rightarrow H(j\omega) = 10$$

$$\text{For } \omega = \pm\sqrt{3} \rightarrow H(j\omega) = -10/8 = -1.25$$



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکوئیست

• ترسیم نمودار نایکوئیست

✓ ادامه مثال ۲:

$$L(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$$

% Example 2

```
clear all, clc, clf
```

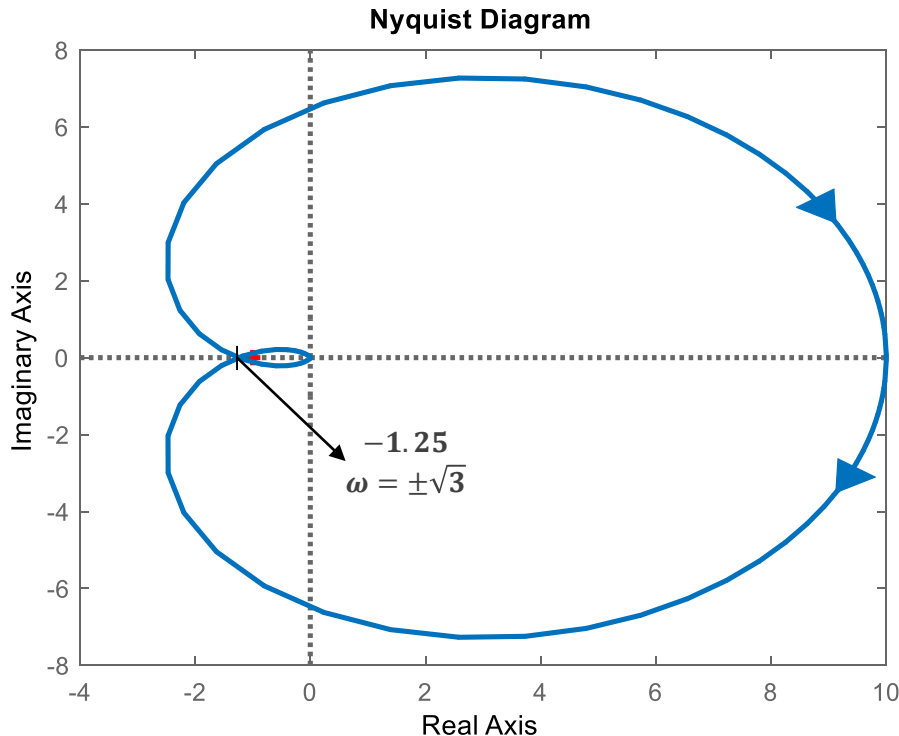
```
num=10;
```

```
den=[1 3 3 1];
```

```
sys=tf(num,den);
```

```
nyquist(sys)
```

```
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
```



مل کامپیوتری



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

ترسیم نمودار نایکویست

✓ مثال ۳:
$$L(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم

تعیین پاسخ فرکانسی:

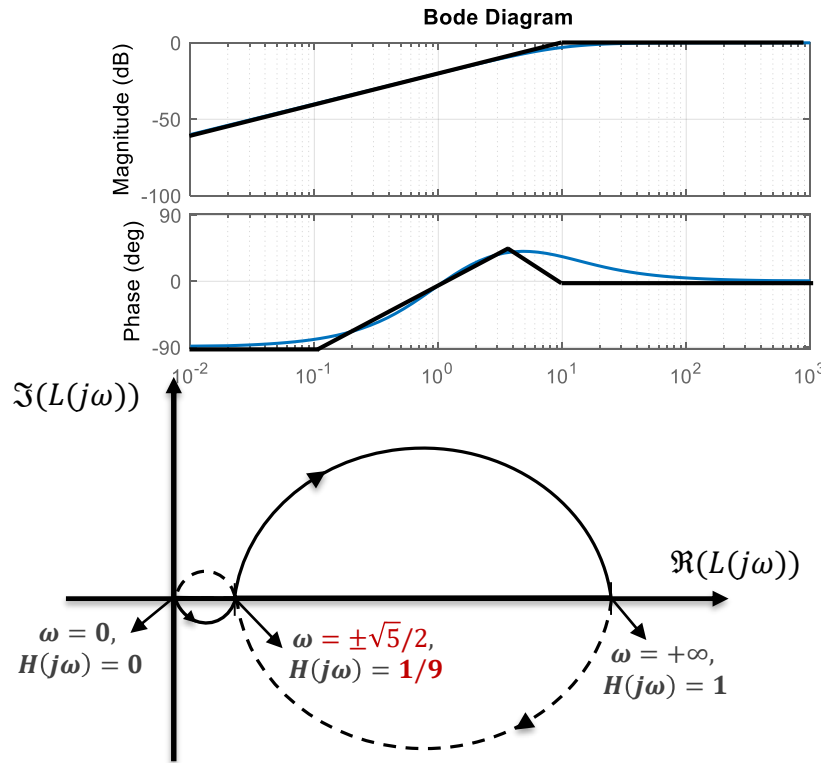
$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{-j\omega(j\omega+1)}{(-j\omega+1)(j\omega+10)} = \dots \\ &= \frac{-[(1-\omega^2)\omega^2 - 20\omega^2] - j[2\omega^3 + 10\omega(1-\omega^2)]}{(\omega^2+1)(\omega^2+100)} \end{aligned}$$

محل تلاقی با محور حقیقی:

$$\Im(L(j\omega)) = 0 \rightarrow 2\omega(\omega^2 + 5(1 - \omega^2)) = 0 \rightarrow \omega = 0, \omega = \pm\sqrt{5}/2$$

$$\text{For } \omega = 0 \rightarrow H(j\omega) = 0$$

$$\text{For } \omega = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow H(j\omega) = \dots = 1/9$$



مل دستی



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکوئیست

• ترسیم نمودار نایکوئیست

✓ ادامه مثال ۳:

$$L(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

% Example 3

```
clear all, clc, clf
```

```
num=[-1 1 0];
```

```
den=conv([-1 1],[1 10]);
```

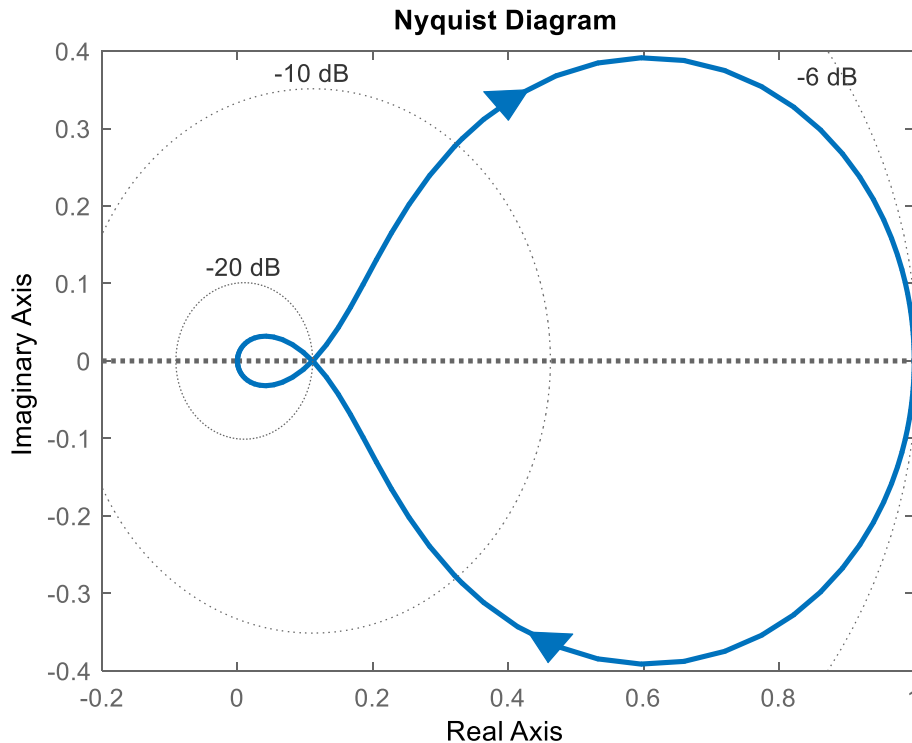
```
sys=tf(num,den);
```

```
nyquist(sys), grid
```

```
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
```



مل کامپیوتری





Harry Nyquist

(Feb. 7, 1889 – April 4, 1976)

was a Swedish physicist and **electronic engineer** who made important contributions to **communication theory**. As an engineer at Bell Laboratories, Nyquist did important work on thermal noise ("**Johnson–Nyquist noise**"), the stability of **feedback amplifiers**, telegraphy, **facsimile**, television, and other important communications problems. With Herbert E. Ives, he helped to develop AT&T's first facsimile machines that were made public in 1924. In 1932, he published a classic paper on stability of feedback amplifiers. The **Nyquist stability criterion** can now be found in all textbooks on feedback control theory.

His early theoretical work on determining the bandwidth requirements for transmitting information laid the foundations for later advances by **Claude Shannon**, which led to the development of **information theory**. In particular, Nyquist determined that the number of independent pulses that could be put through a telegraph channel per unit time is limited to twice the **bandwidth** of the channel, and published his results in the papers *Certain factors affecting telegraph speed* (1924) and *Certain topics in Telegraph Transmission Theory* (1928). This rule is essentially a **dual** of what is now known as the **Nyquist–Shannon sampling theorem**. Terms named for Harry Nyquist: **Nyquist rate**, **Nyquist frequency**, Nyquist filter, **Nyquist plot**, Nyquist ISI criterion, **Nyquist stability criterion**.

برگرفته از پیوند

عناوین فصل

مقدمه

چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تملیل فرکانسی با نمودار نایکویست

نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$ ، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N ، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

تملیل فرکانسی با نمودار بودی

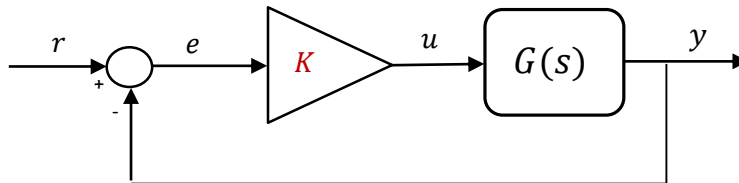
نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پادار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

در این فصل تملیل پایداری سیستم های فطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم های فطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های فطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تملیل پایداری سیستم های فطی با استفاده از آنالیز توابع مفصل و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های فطی در این چهارپو، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکویست سیستم ملقه بسته با بهره وامد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار فواهد گرفت.

معیار پایداری نایکویست

انگیزه

✓ در روش مکان هندسی ریشه ها مکان قطب های سیستم حلقه بسته (ریشه های $1 + KG(s)$) را با استفاده از ویژگی های سیستم حلقه باز $G(s)$ به دست آوردیم.



✓ آیا می توان پایداری سیستم حلقه بسته (ریشه های $1 + KG(s)$) را با مشخصات فرکانسی سیستم حلقه باز $G(j\omega)$ به دست آورد؟

□ این کار با استفاده از توابع مختلط و مطالعه پاسخ فرکانسی به عنوان نگاشت همردیس (Conformal Map) قابل انجام است.

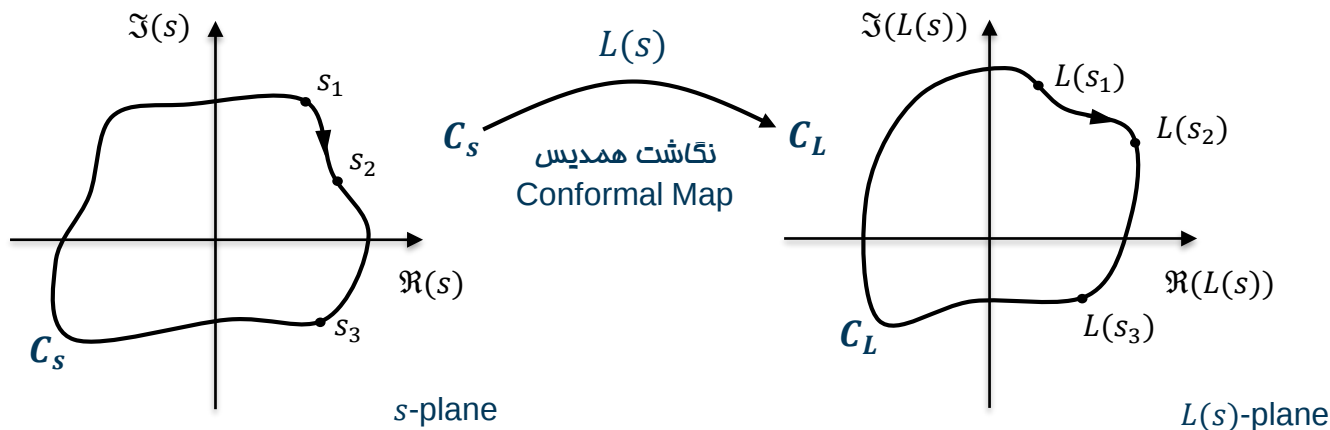
□ بدین منظور پیشینه ریاضی و اصل آرگومان Cauchy را بررسی می کنیم.

معیار پایداری نایکویست

نگاشت همدیس

✓ در توابع مختلط نگاشت همدیس تابعی است که زاویه ها را حفظ می کند.

□ نگاشت $L(s)$ را در نظر بگیرید که توسط آن یک کانتور بسته $C_s(s)$ در صفحه مختلط s را به کانتور بسته $C_L(s)$ در صفحه مختلط $L(s)$ به شکل زیر نگاشت می کند:

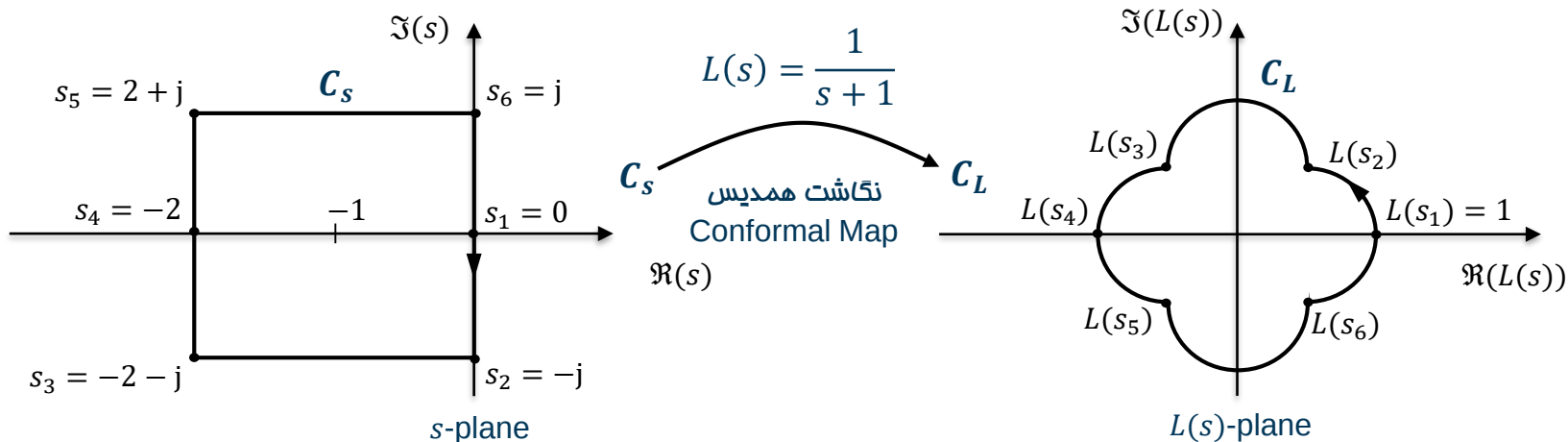




معيار پايداري نايكويست

نگاشت همدیس

✓ نگاشت $L(s) = \frac{1}{s+1}$ و کانتور C_s را یک مربع مطابق شکل در نظر بگیرید، که قطب $s = -1$ را در بر می گیرد. کانتور C_L را به دست آورید و زاویه های قائمه مربع را ببینید چگونه نگاشت می شوند.



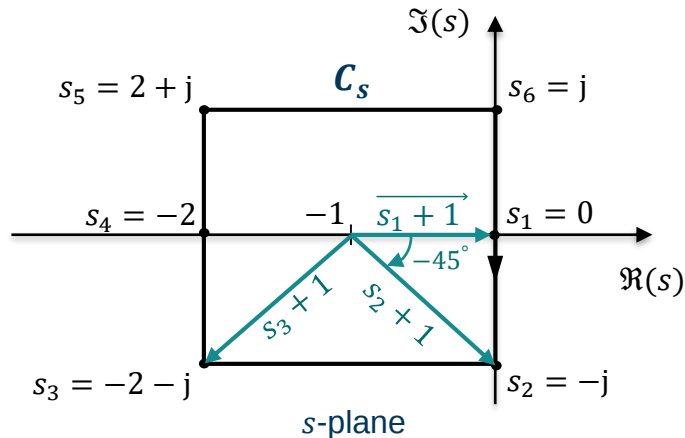
معیار پایداری نایکویست

نگاشت همدیس

✓ از ترسیم بردار $\overrightarrow{s+1}$ (برداری که از نقطه -۱ به نقطه s ترسیم می شود) و مقادیر اندازه و زاویه آن بهره ببرید:

$$|L(s)| = \left| \frac{1}{s+1} \right| = (\text{طول بردار } s+1)^{-1}$$

$$\angle L(s) = \angle \frac{1}{s+1} = -(\text{زاویه بردار } s+1)$$



$$\text{For } s_1 \rightarrow |L(s_1)| = \frac{1}{1} = 1, \quad \angle L(s_1) = 0^\circ$$

$$\text{For } s_2 \rightarrow |L(s_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \angle L(s_2) = 45^\circ$$

$$\text{For } s_3 \rightarrow |L(s_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \angle L(s_3) = 135^\circ$$

$$\text{For } s_4 \rightarrow |L(s_4)| = \frac{1}{1} = 1, \quad \angle L(s_4) = 180^\circ$$

$$\text{For } s_5 \rightarrow |L(s_5)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \angle L(s_5) = -135^\circ$$

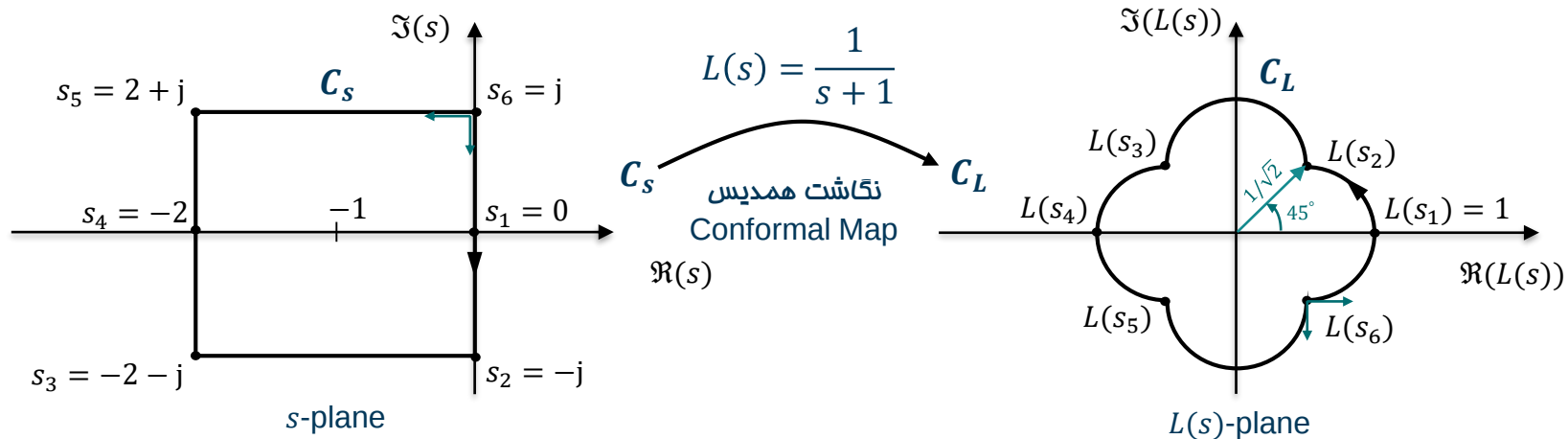
$$\text{For } s_6 \rightarrow |L(s_6)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \angle L(s_6) = -45^\circ$$

معیار پایداری نایکویست

• نگاهت همدیس

✓ نگاهت همدیس زوایای قائمه را حفظ می کند

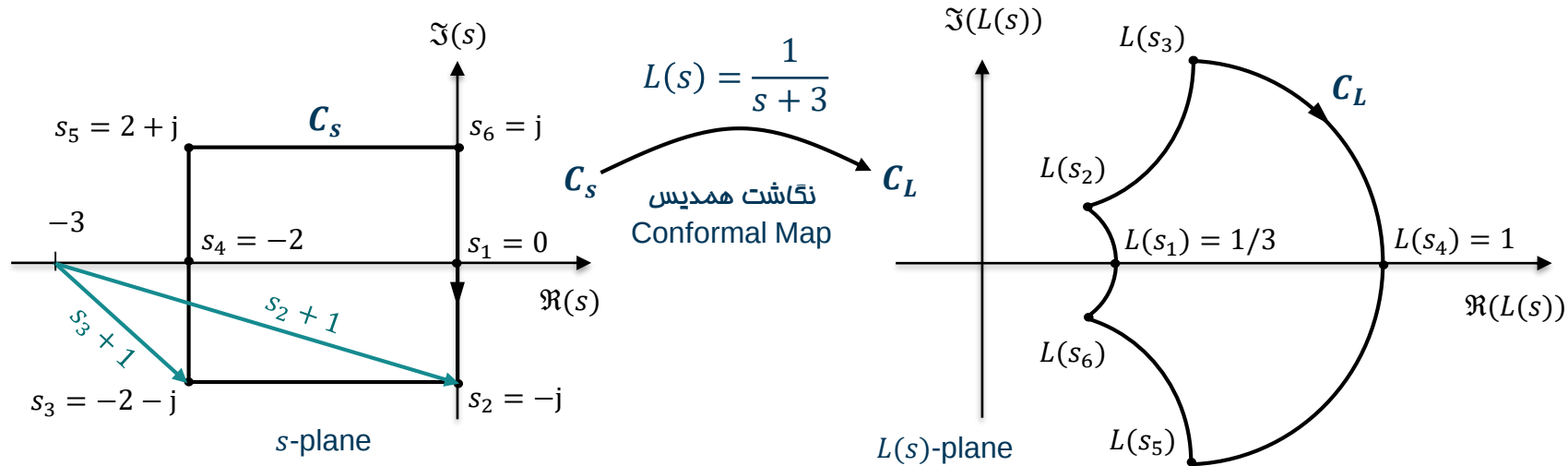
✓ چون C_s قطب $s = -1$ را در بر می گیرد C_L مبدا را یک بار به صورت پادساعتگرد دور می زند!





معيار پايداري نايكويست

• نگاهت همدیس

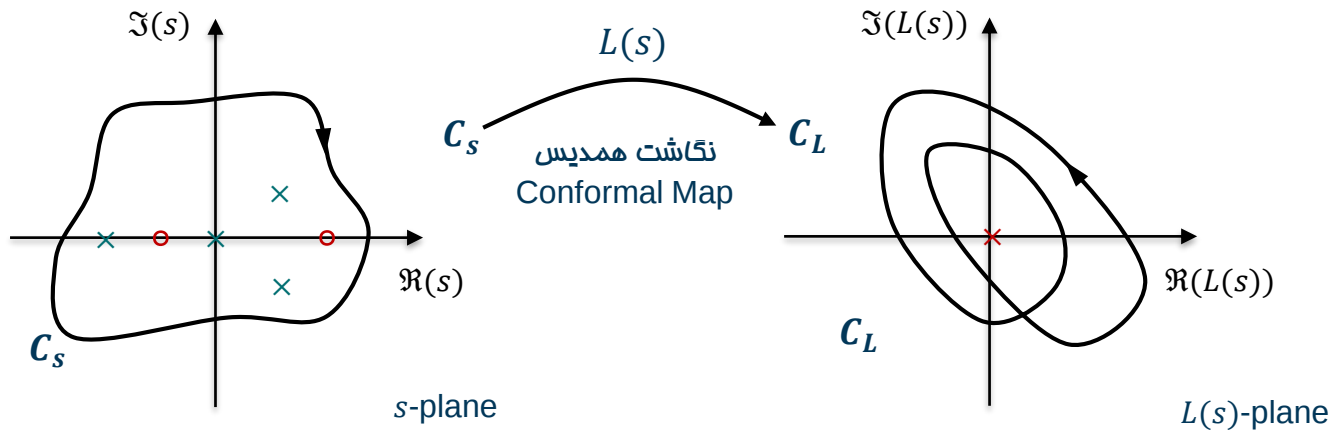


حال نگاهت $L(s) = \frac{1}{s+3}$ و کانتور C_s را در نظر بگیرید که قطب $s = -3$ را در بر نمی گیرد. نگاهت همدیس زوایای قائمه را حفظ می کند اما چون C_s قطب $s = -3$ را در بر نمی گیرد C_L مبدا را دور نمی زند!

معيار پایداری نایکویست

• اصل آرگومان Cauchy

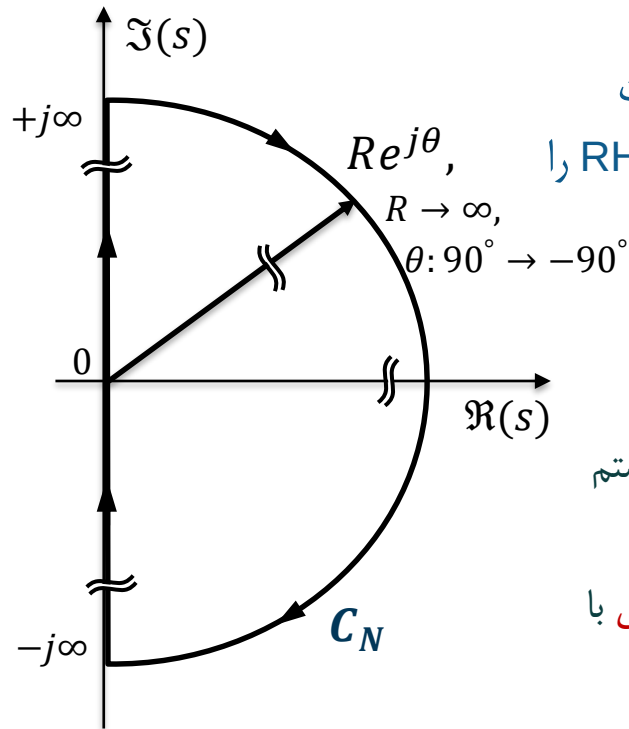
فرض کنید تابع $L(s)$ در صفحه مختلط s دارای تعداد محدودی قطب باشد. یک کانتور همبند بسته $C_s(s)$ دلخواه در صفحه مختلط s -plane را در نظر بگیرید که ساعتگرد بوده و از روی هیچ یک از قطب ها و صفرهای تابع $L(s)$ عبور نکند. آنگاه نگاشت این کانتور توسط تابع $L(s)$ که $C_L(s)$ نامیده می شود، مبدا صفحه مختلط $L(s)$ -plane را به تعداد $N = Z - P$ بار دور خواهد زد. که در آن Z تعداد صفرها و P تعداد قطب های محاط شده در کانتور $C_s(s)$ است. اگر $N > 0$ دور زدن های کانتور $C_L(s)$ ساعتگرد و اگر $N < 0$ دور زدن های کانتور $C_L(s)$ پادساعتگرد و اگر $N = 0$ کانتور $C_L(s)$ مبدا را دور نخواهد زد.



معیار پایداری نایکویست

• کانتور نایکویست C_N

✓ برای استفاده از اصل آرگومان در تحلیل پایداری، هری نایکویست کانتوری را معرفی کرده است که کل نیم صفحه سمت راست RHP را شامل شود.



✓ کانتور نایکویست: از محور $j\omega$ به علاوه نیم دایره $Re^{j\theta}$

□ هم کل نیم صفحه سمت راست RHP پوشش داده شده است.

□ بخش محور موهومی $j\omega: \omega \in (-\infty, +\infty)$ پاسخ فرکانسی سیستم

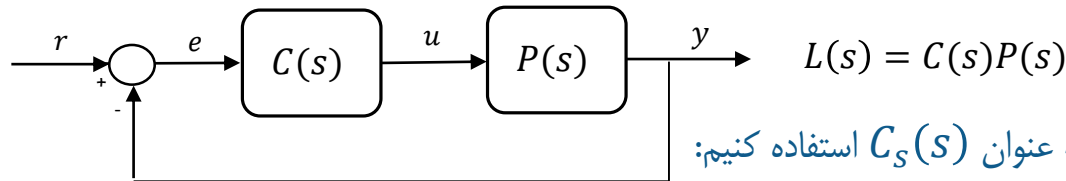
حلقه باز را تولید می کند: $L(j\omega)$.

□ بخش نیم دایره موهومی $Re^{j\theta}, R \rightarrow \infty$ در حد و سیستم های علی با بزرگ شدن شعاع نیم دایره به نقطه مبدا همگرا می شود.

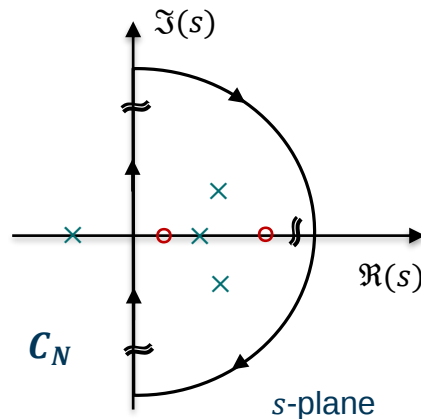
معیار پایداری نایکویست

• فرمول بندی تحلیل پایداری

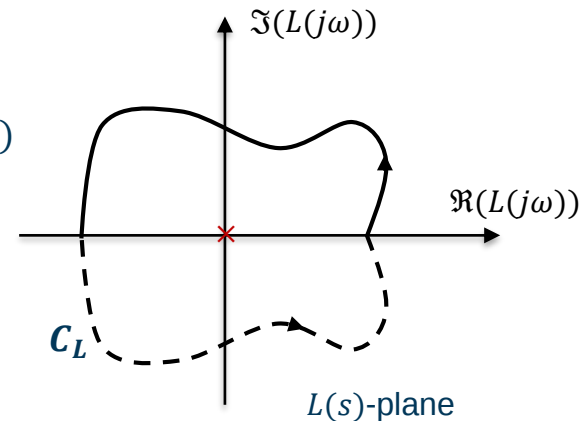
✓ "تعداد ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $1 + L(s)$ را در نیم صفحه سمت راست تعیین کنید"



✓ اگر از اصل آرگومان کوشی و کانتور نایکوسیت به عنوان $C_S(s)$ استفاده کنیم:



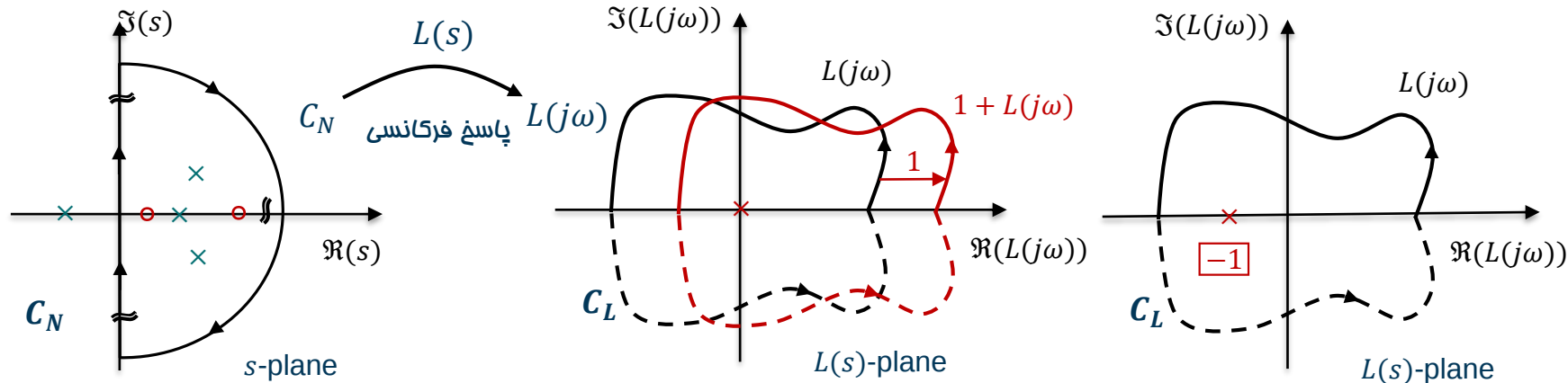
$L(s)$
پاسخ فرکانسی
 $C_N \rightarrow L(j\omega)$



معیار پایداری نایکویست

فرمول بندی تحلیل پایداری

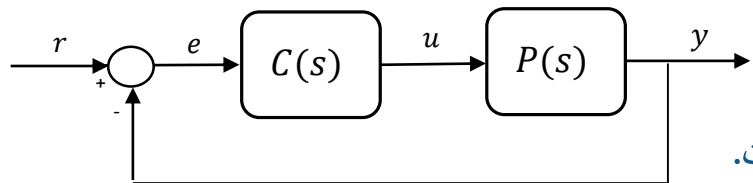
- ✓ "تعداد ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $1 + L(s)$ را در نیم صفحه سمت راست تعیین کنید"
- ✓ بر اساس اصل آرگومان ویژگی $L(j\omega)$ تحلیل می شود اما تحلیل سیستم حلقه بسته $1 + L(j\omega)$ مورد نظر است.
- ✓ اما ترسیم $1 + L(j\omega)$ تنها با شیفیت پاسخ فرکانسی به اندازه یک واحد به سمت راست به دست می آید. (نمودار قرمز رنگ)
- ✓ به جای رسم نمودار جدید دور زدن پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز $L(j\omega)$ را حول نقطه -1 شمارش و تحلیل می کنیم.





معیار پایداری نایکویست

جمع بندی معیار پایداری نایکویست در حالت ساده



✓ سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید که در آن

$P =$ تعداد قطب های ناپایدار بهره حلقه $L(s) = C(s)P(s)$ است.

□ در این حالت ساده فرض کنید که $L(s)$ هیچ قطبی بر روی محور $j\omega$ ندارد.

✓ نمودار نایکویست $L(j\omega)$ را به ازای فرکانس های مثبت و منفی ترسیم کنید.

$N =$ تعداد دور زدن ساعتگرد نقطه -1 توسط نمودار نایکویست $L(j\omega)$

□ N می تواند مثبت (ساعتگرد) یا منفی (پادساعتگرد) باشد.

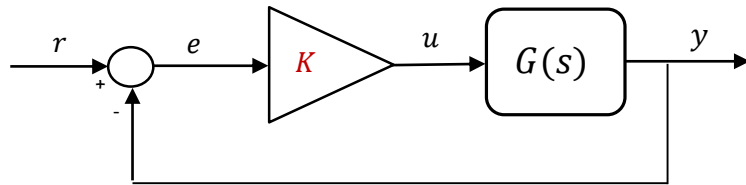
$Z =$ تعداد قطب های سیستم حلقه بسته $M(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ که برابر است با تعداد صفرهای $1 + L(s)$ از رابطه

زیر به دست می آید.

$$Z = N + P$$

معیار پایداری نایکویست

• فرمول بندی تحلیل پایداری



✓ اگر کنترلر دارای یک پارامتر طراحی K باشد.

□ ممکن است کنترلر تناسبی با بهره K داشته باشیم.

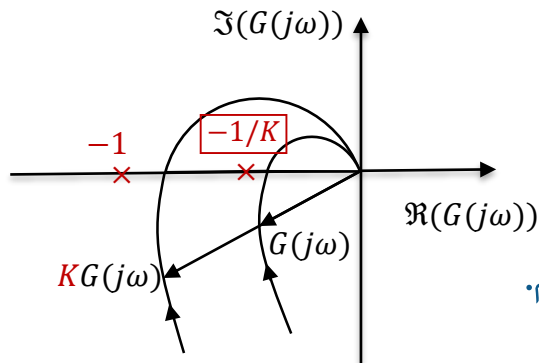
□ یا کنترلر پیچیده تری داریم که بهره K آن مورد طراحی می خواهد قرار گیرد: $L(s) = C(s)P(s) = KG(s)$

✓ تاثیر بهره مثبت K بر روی پاسخ فرکانسی

□ نمودار پاسخ فرکانسی به اندازه K در امتداد شعاع بزرگ (یا کوچک) می شود.

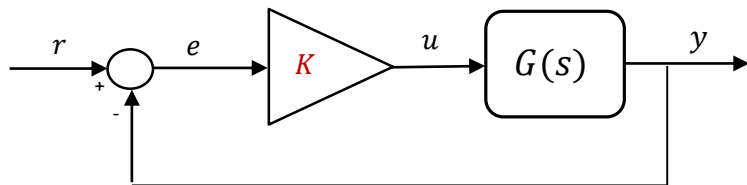
✓ پس به جای رسم نمودار جدید دور زدن پاسخ فرکانسی

$L(j\omega)$ را حول نقطه $-1/K$ شمارش و تحلیل می کنیم.





معیار پایداری نایکویست



تعمیم معیار پایداری نایکویست در حضور بهره K

✓ سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید که در آن

$P =$ تعداد قطب های ناپایدار $G(s)$ است.

□ (در این حالت نیز فرض کنید که $G(s)$ هیچ قطبی بر روی محور $j\omega$ ندارد.

✓ نمودار نایکویست $G(j\omega)$ را به ازای فرکانس های مثبت و منفی ترسیم کنید.

$N =$ تعداد دور زدن ساعتگرد نقطه $-1/K$ توسط نمودار نایکویست $G(j\omega)$

□ (N می تواند مثبت (ساعتگرد) یا منفی (پادساعتگرد) باشد.

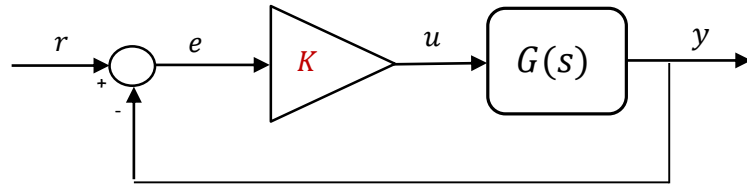
$Z =$ تعداد قطب های سیستم حلقه بسته $M(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ که برابر است با تعداد صفرهای $1 + KG(s)$ از

رابطه زیر به دست می آید.

$$Z = N + P$$

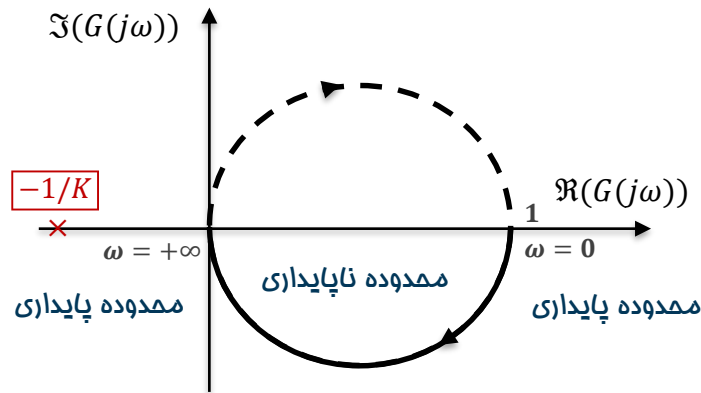
تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست



✓ مثال ۱: سیستم حلقه بسته مقابل را با $G(s) = \frac{1}{s+1}$ در نظر بگیرید.

نمودار نایکوسیت را ترسیم کنید.



تابع تبدیل سیستم دارای قطب ناپایدار نیست: $P = 0$

به ازای $-\frac{1}{K} < 0$ و همچنین $-\frac{1}{K} > 1$ نمودار نایکوست نقطه

$-1/K$ را دور نمی زند: $N = 0$

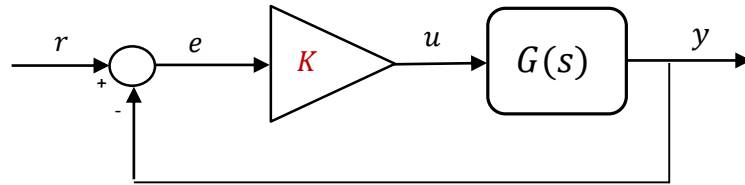
در بازه $K > -1$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

$$Z = N + P = 0$$



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

معیار پایداری نایکویست



✓ ادامه مثال ۱: $G(s) = \frac{1}{s+1}$

به ازای $0 < -1/K < 1$ نمودار نایکویست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت ساعت گرد دور می زند:

$$N = 1$$

در بازه $K < -1$ سیستم حلقه بسته دارای یک قطب ناپایدار خواهد بود.

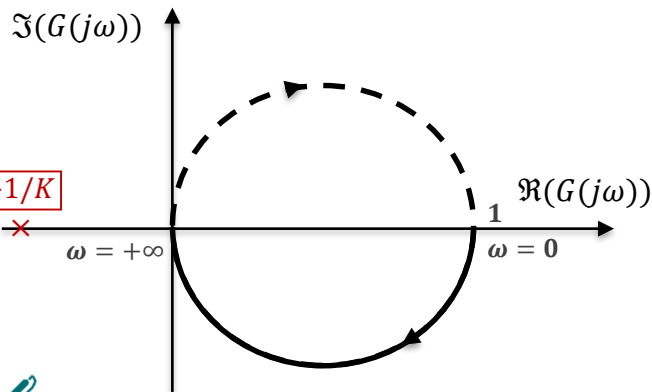
$$Z = N + P = 1$$

محدوده پایداری $K > -1$

✓ راستی آزمایی پاسخ با معیار پایداری راث:

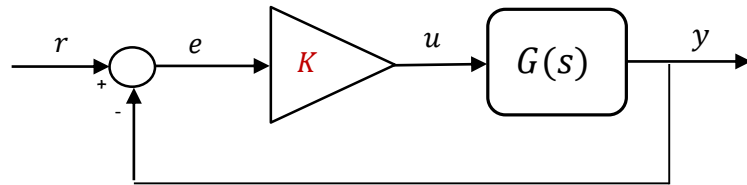
$$\Delta(s) = s + (K + 1) = 0 \rightarrow K + 1 > 0$$

محدوده پایداری $K > -1$



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست



✓ مثال ۲: سیستم حلقه بسته مقابل را با $G(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$

را در نظر بگیرید.

نمودار نایکویست را ترسیم کنید.

تابع تبدیل سیستم دارای قطب ناپایدار نیست:

$$P = 0$$

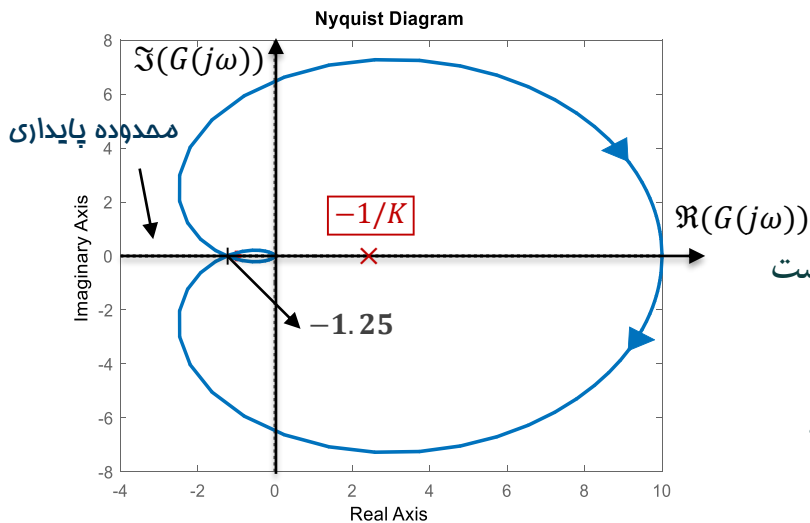
به ازای $-\frac{1}{K} < -1.25$ و همچنین $-\frac{1}{K} > 10$ نمودار نایکویست

$$N = 0$$

نقطه $-1/K$ را دور نمی زند:

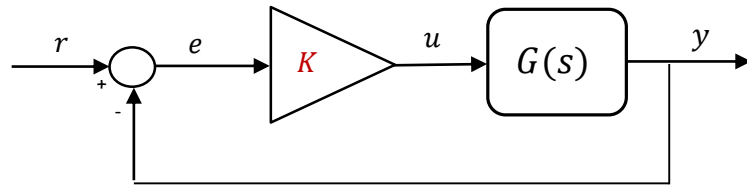
پس در بازه $-0.1 < K < 0.8$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

$$Z = N + P = 0$$



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست



✓ ادامه مثال ۲: $G(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$

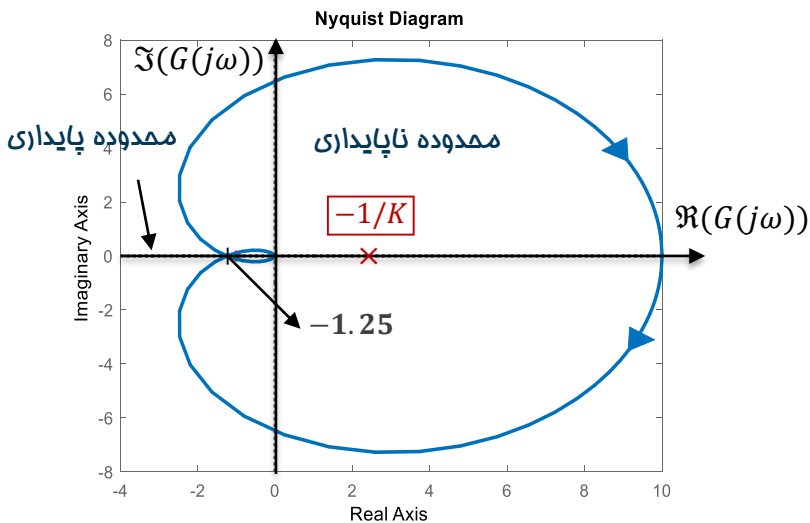
به ازای $-1.25 < -1/K < 0$ نمودار نایکویست نقطه $-1/K$ را دو بار به صورت ساعت گرد دور می زند:

در بازه $0.8 < K < \infty$ سیستم حلقه بسته دارای دو قطب ناپایدار خواهد بود.

به ازای $0 < -1/K < 10$ نمودار نایکویست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت ساعت گرد دور می زند:

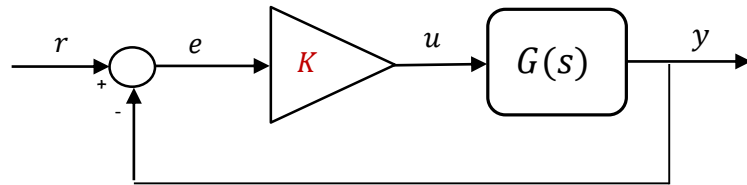
در بازه $-\infty < K < -0.1$ سیستم حلقه بسته دارای یک قطب ناپایدار خواهد بود.

محدوده پایداری $-0.1 < K < 0.8$



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست



$$G(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

✓ مثال ۳:

نمودار نایکویست را ترسیم کنید.

تابع تبدیل سیستم دارای یک قطب ناپایدار است: $P = 1$

به ازای $-\frac{1}{K} < 0$ و همچنین $-\frac{1}{K} > 1$ نمودار نایکویست نقطه

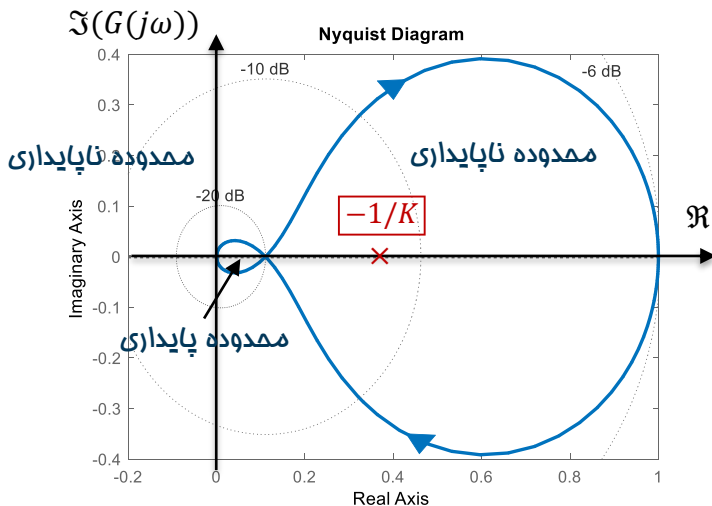
$$N = 0$$

$-1/K$ را دور نمی زند:

پس در بازه $-1 < K < 0$ سیستم حلقه بسته دارای یک قطب

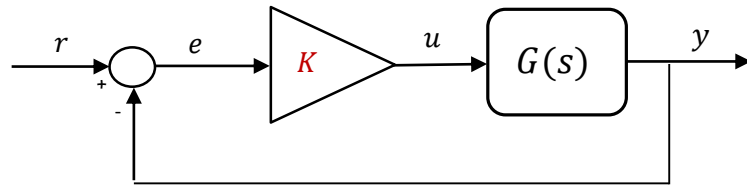
$$Z = N + P = 1$$

ناپایدار است.



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

معیار پایداری نایکویست



$$G(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

✓ ادامه مثال ۳:

به ازای $0 < -1/K < 1/9$ نمودار نایکویست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت پادساعتگرد دور می زند:

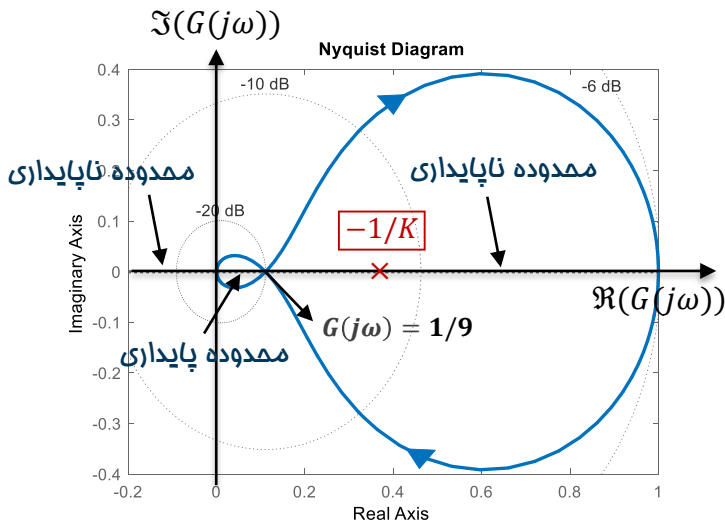
در بازه $-\infty < K < -9$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

$$Z = -1 + 1 = 0$$

به ازای $1 < -1/K < \infty$ نمودار نایکویست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت ساعتگرد دور می زند:

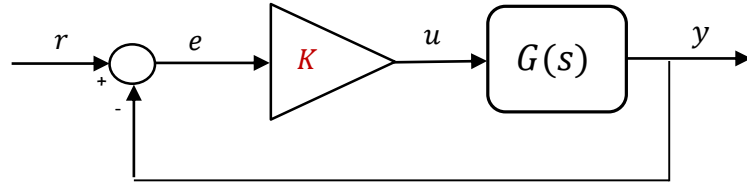
در بازه $-1 < K < 0$ سیستم حلقه بسته دارای دو قطب ناپایدار خواهد بود.

محدوده پایداری $-\infty < K < -9$



تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست



$$G(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

✓ ادامه مثال ۳:

راستی آزمایی با مکان هندسی ریشه ها

راستی آزمایی با معیار پایداری راث-هرویتز

□ معادله مشخصه را به دست آورید:

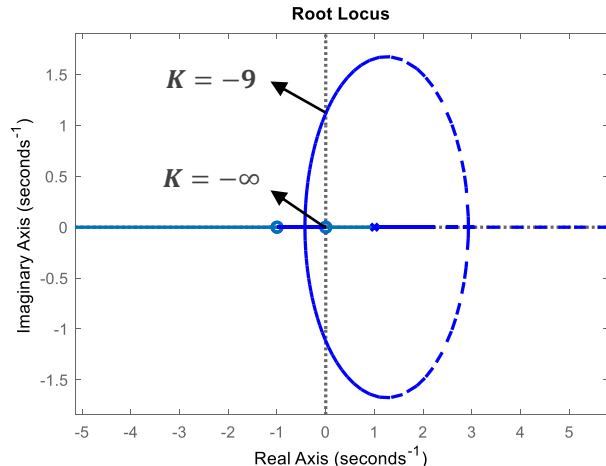
$$\Delta(s) = -K(s(s+1)) + (-s^2 - 9s + 10) = 0$$

$$\Delta(s) = (K+1)s^2 + (K+9)s - 10 = 0$$

□ شرایط پایداری:

$$K+1 < 0 \ \& \ K+9 < 0 \rightarrow K < -1 \ \& \ K < -9$$

محدوده پایداری $-\infty < K < -9$



معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$

✓ اگر صفر یا قطبی بر روی محور $j\omega$ داشته باشیم، کانتور نایکویست بایستی به صورتی تغییر کند که از روی آنها عبور نکند.

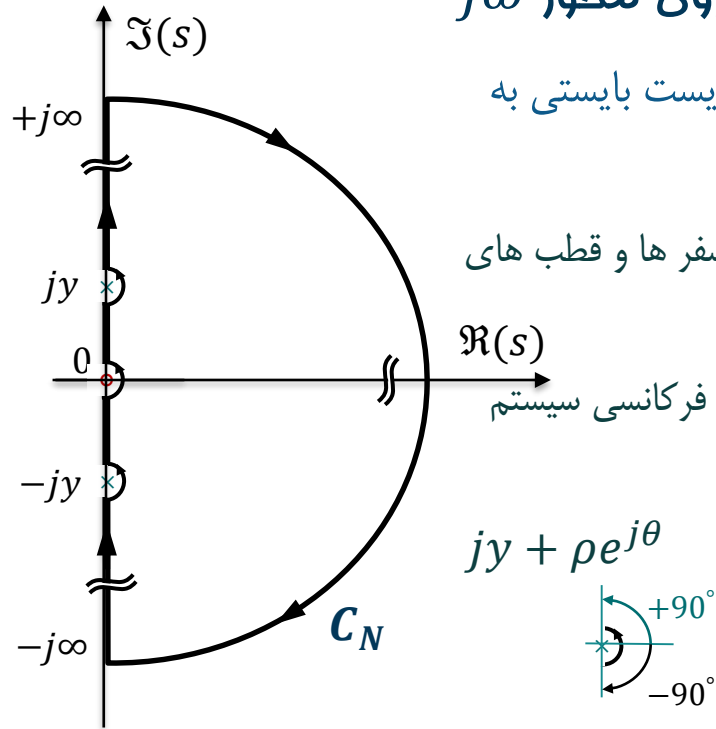
□ یک نیم دایره کوچک پادساعتگرد به شعاع $\rho \rightarrow 0$ در نزدیکی صفر ها و قطب های

روی محور $j\omega$ در نظر می گیریم

□ علیرغم کوچک بودن این نیم دایره تاثیر بسیار مهم بر روی پاسخ فرکانسی سیستم خواهد داشت.

□ معادله این نیم دایره را حول قطب $s = jy$ به دست آورید:

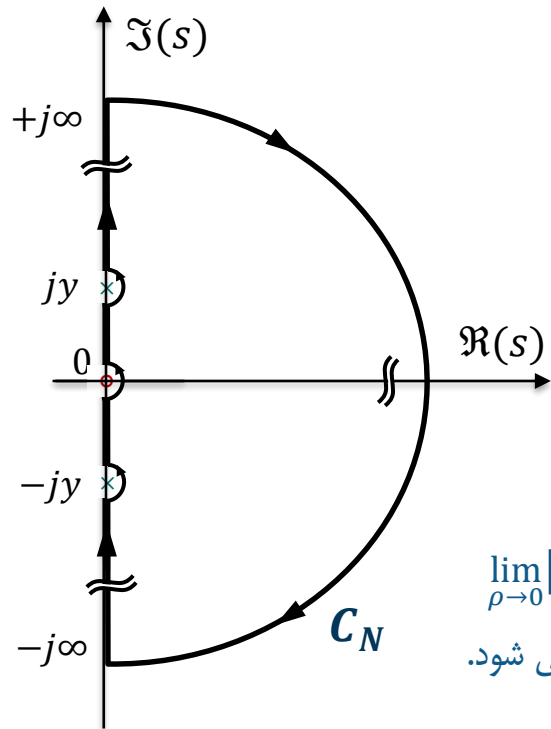
• که در آن θ از زاویه -90° تا زاویه $+90^\circ$ تغییر می کند.





معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$



✓ تاثیر نیم دایره کوچک $\rho e^{j\theta}$ در مجاورت قطب موهومی $s = jy$

✓ فرض کنید قطب موهومی $s = jy$ با تکرار m در سیستم حضور داشته باشد:

$$L(s) = \frac{1}{(s - jy)^m} L_1(s)$$

□ که در آن $L_1(s)$ دیگر قطبی در $s = jy$ ندارد.

✓ نگاشت همدیس نیم دایره $jy + \rho e^{j\theta}$ توسط سیستم $L(s)$ را تعیین کنید:

$$L(s) = \frac{1}{(\rho e^{j\theta})^m} L_1(jy + \rho e^{j\theta})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |L(jy + \rho e^{j\theta})| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|L_1(jy)|}{\rho^m} = \infty$$

✓ اندازه نگاشت در حد:

✓ این بدان معناست که این نیم دایره کوچک به یک نمودار با شعاع بی نهایت نگاشت می شود.

معيار پايدارى نايكويست

• معيار پايدارى نايكويست در حضور صفر و قطب بر روى محور $j\omega$

✓ تاثير نيم دايره كوچك $\rho e^{j\theta}$ در مجاورت قطب موهومی $s = jy$

$$L(s) = \frac{1}{(\rho e^{j\theta})^m} L_1(jy + \rho e^{j\theta})$$

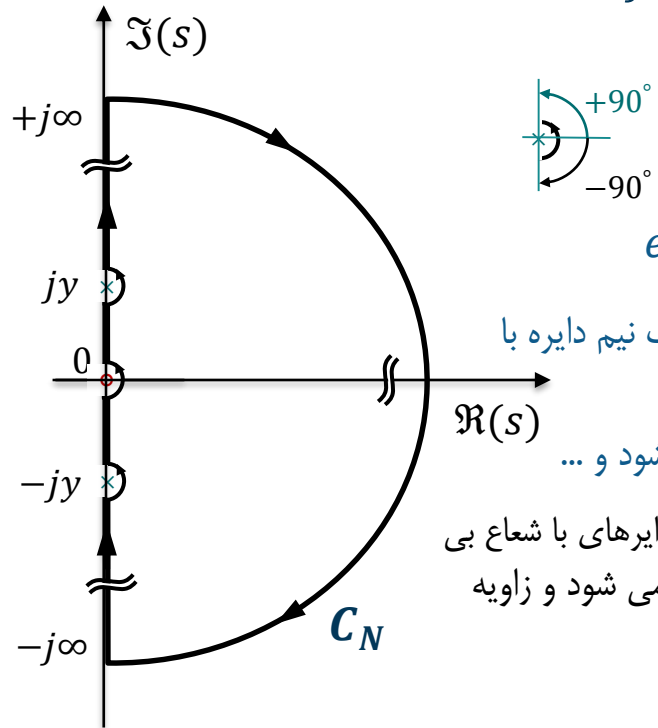
✓ زاويه نگاشت در حد برابر زاويه ترم $\frac{1}{(\rho e^{j\theta})^m}$ است که برابر است با $e^{-jm\theta}$

✓ اين بدان معناست که اگر $m = 1$ باشد اين نيم دايره كوچك **ساعتگرد** به يك نيم دايره با شعاع بي نهايت **پادساعت گرد** نگاشت می شود.

✓ اگر $m = 2$ باشد به يك دايره با شعاع بي نهايت **پادساعت گرد** نگاشت می شود و ...

در نتيجه يك نيم دايره كوچك در نزديكى قطب موهومی $s = jy$ به يك کمان دايره‌ای با شعاع بي نهايت نگاشت می شود که از نقطه $L_1(jy^-)$ شروع شده و به $L_1(jy^+)$ منتهی می شود و زاويه چرخش در اين کمان برابر است با

$$m \times 180^\circ + \angle L(jy^+) - \angle L(jy^-)$$



معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$

✓ تاثیر نیم دایره کوچک $\rho e^{j\theta}$ در مجاورت صفر موهومی $s = jy$

✓ فرض کنید صفر موهومی $s = jy$ با تکرار m در سیستم حضور داشته باشد:

$$L(s) = (s - jy)^m L_1(s)$$

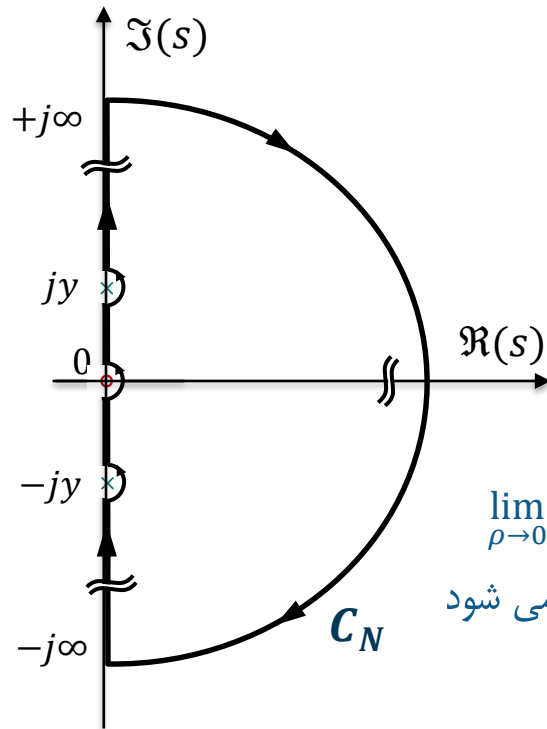
✓ نگاشت همدیس نیم دایره $jy + \rho e^{j\theta}$ توسط سیستم $L(s)$ را تعیین کنید:

$$L(s) = (\rho e^{j\theta})^m L_1(jy + \rho e^{j\theta})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |L(jy + \rho e^{j\theta})| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^m |L_1(jy)| = 0$$

✓ اندازه نگاشت در حد:

✓ این بدان معناست که این نیم دایره کوچک به نگاشت نقطه $s = jy$ همگرا می شود و **تاثیری** در نمودار نایکویست نخواهد داشت.

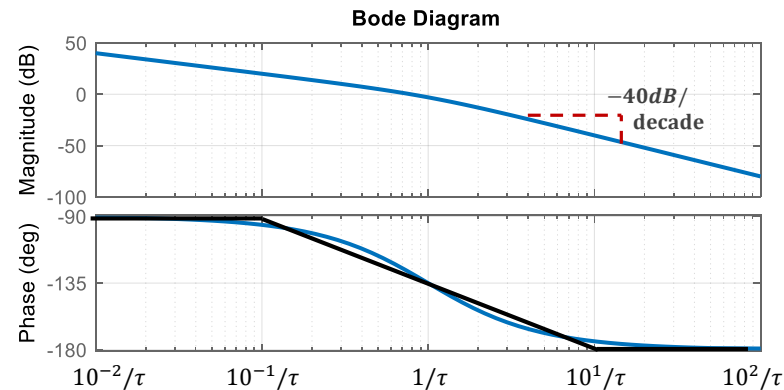


معيار پايداري نايكويست

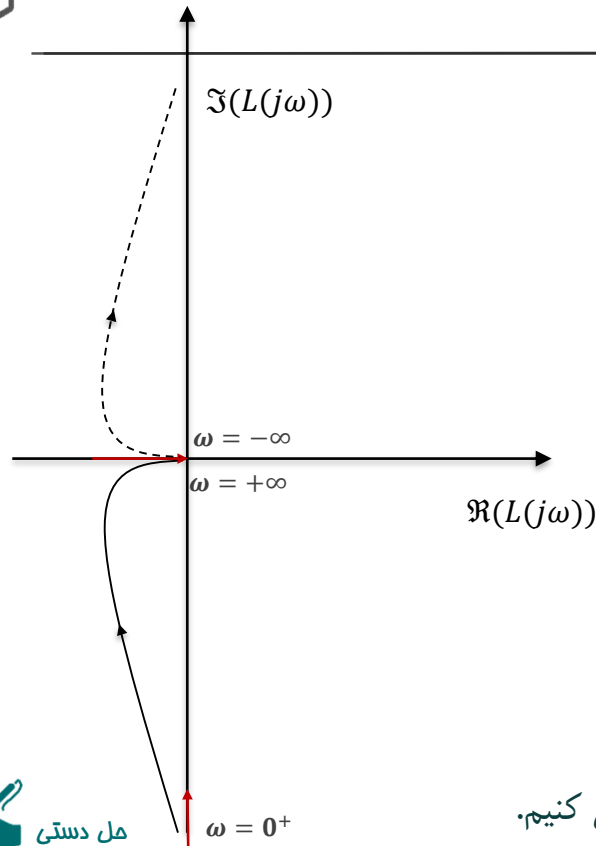
• معيار پايداري نايكويست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$

$$L(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad \checkmark \text{ مثال ۴:}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.

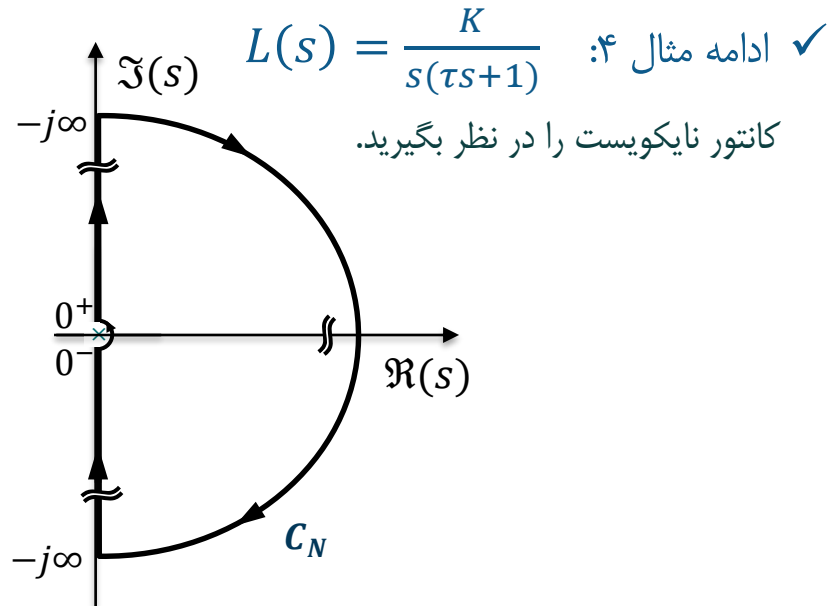
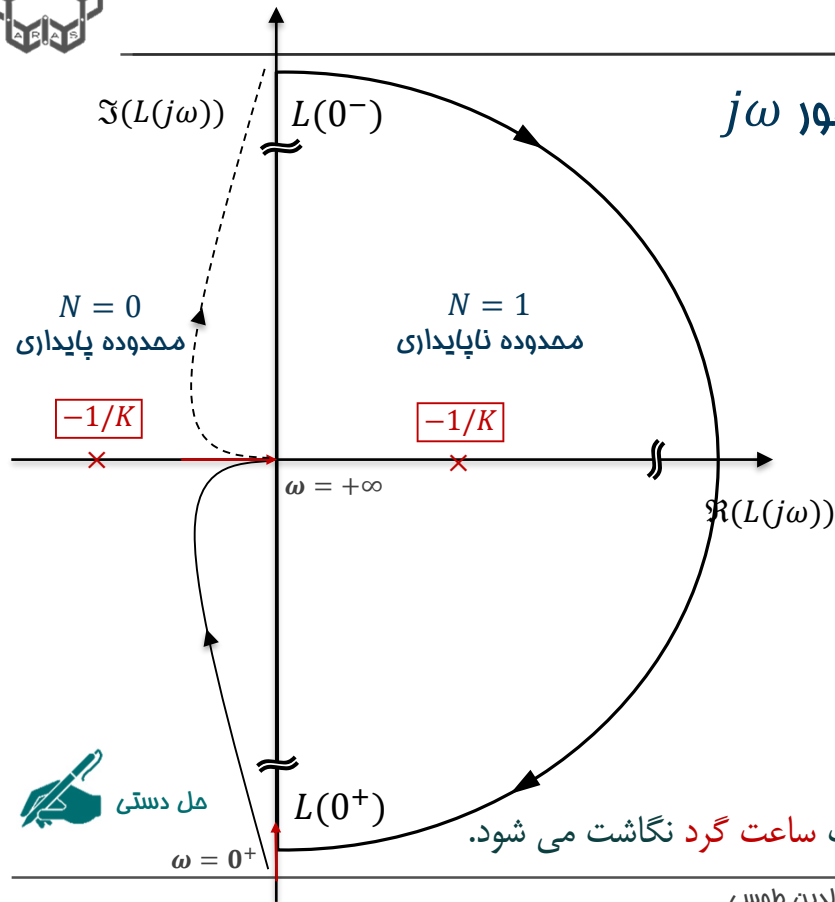


بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب در مبدا نمودار نايكويست را رسم می کنیم.



معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$



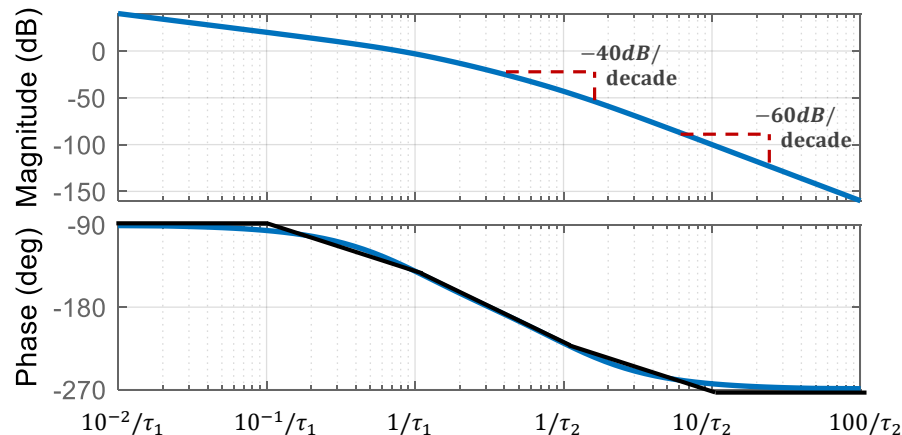
نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت **ساعت گرد** نگاشت می شود.



معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در مفضور قطب بر روی محور $j\omega$

Bode Diagram



$$L(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \checkmark \text{ مثال ۵:}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.

نمودار بودی زاویه -۱۸۰ را قطع می کند پس نقطه تقاطع با محور حقیقی را به دست می آوریم:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\tau_1\omega + 1)(j\tau_2\omega + 1)}$$

$$\Im(L(j\omega)) = \frac{-\frac{K}{\omega}(1 - \tau_1\tau_2\omega)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4(\tau_1^2\tau_2^2)} = 0 \rightarrow \omega^2 = 1/\tau_1\tau_2$$

$$\Re(L(j\omega)) = \frac{-K}{(\omega^4(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2)^{1/2}}$$

$$\text{For } \omega^2 = 1/\tau_1\tau_2: \quad \Re(L(j\omega)) = \dots = -\frac{K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$



معیار پایداری نایکوئیست

معیار پایداری نایکوئیست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$

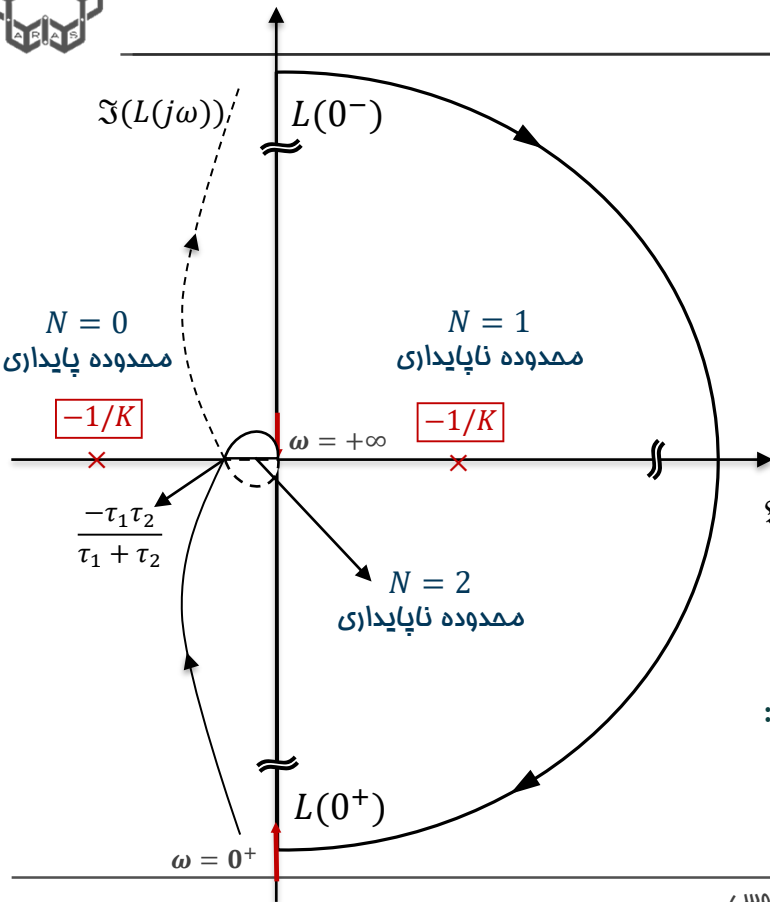
✓ ادامه مثال ۵:
$$L(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب در مبدا نمودار نایکوئیست را رسم می کنیم.

کانتور نایکوئیست را همانند مثال ۴ در نظر بگیرید.
نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.

چرخش ها را شمارش کرده و ناحیه پایداری را به صورت زیر تعیین کنید:

$$-\frac{1}{K} < \frac{-\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \rightarrow K > \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$$



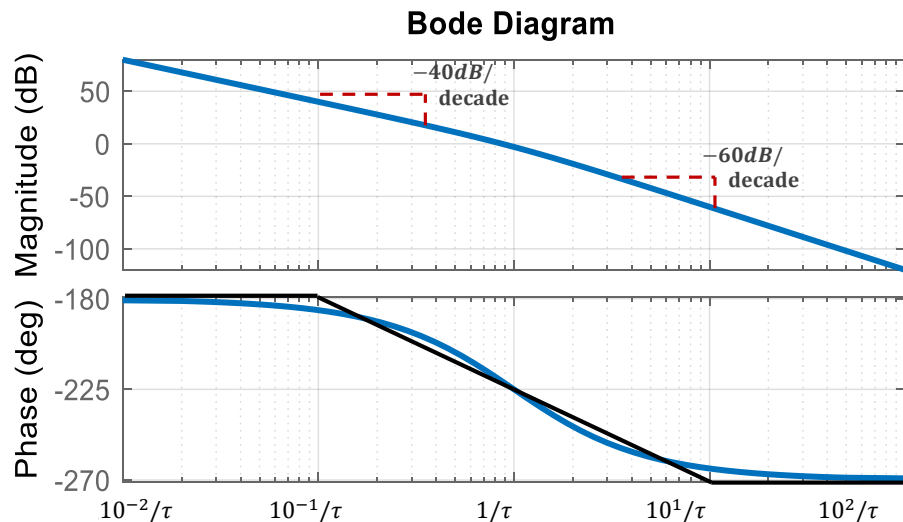
معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور دو قطب در مبدا

$$L(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)} \quad \checkmark \text{ مثال ۶:}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.

نمودار بودی زاویه -180° را قطع نمی کند.



معيار پایداری نایکویست

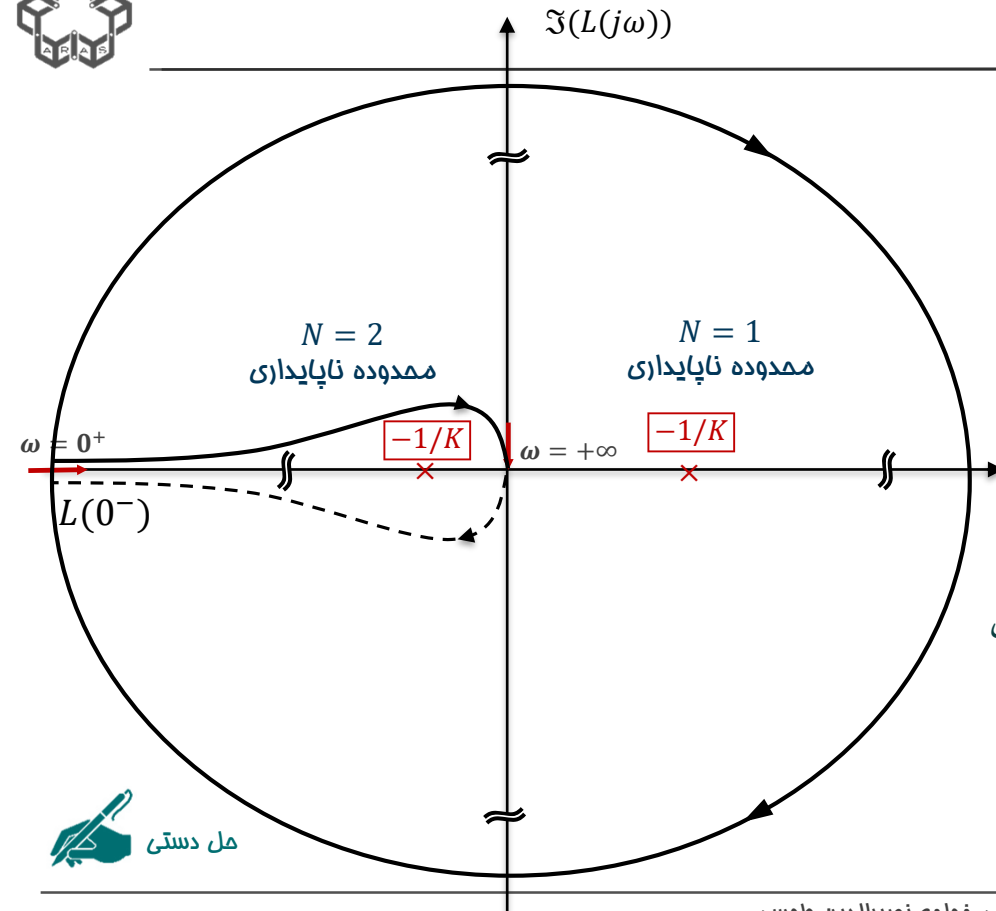
معيار پایداری نایکویست در حضور دو قطب در مبدا

✓ ادامه مثال ۶:
$$L(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب در مبدا نمودار نایکویست را رسم می کنیم.

کانتور نایکویست را همانند مثال ۴ در نظر بگیرید.
نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد به یک دایره با شعاع بی نهایت **ساعت گرد** نگاشت می شود.

چرخش ها را شمارش کرده و مشاهده می شود ناحیه پایداری به ازای کنترلگر بهره K وجود ندارد.



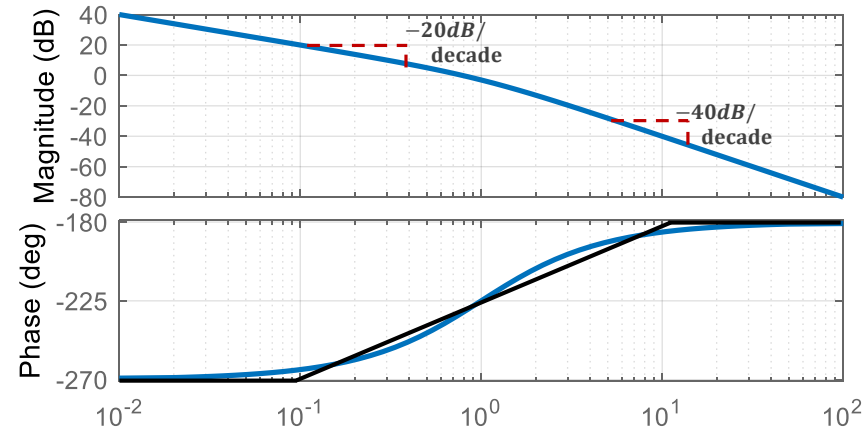
معيار پایداری نایکویست

معيار پایداری نایکویست در مبدا

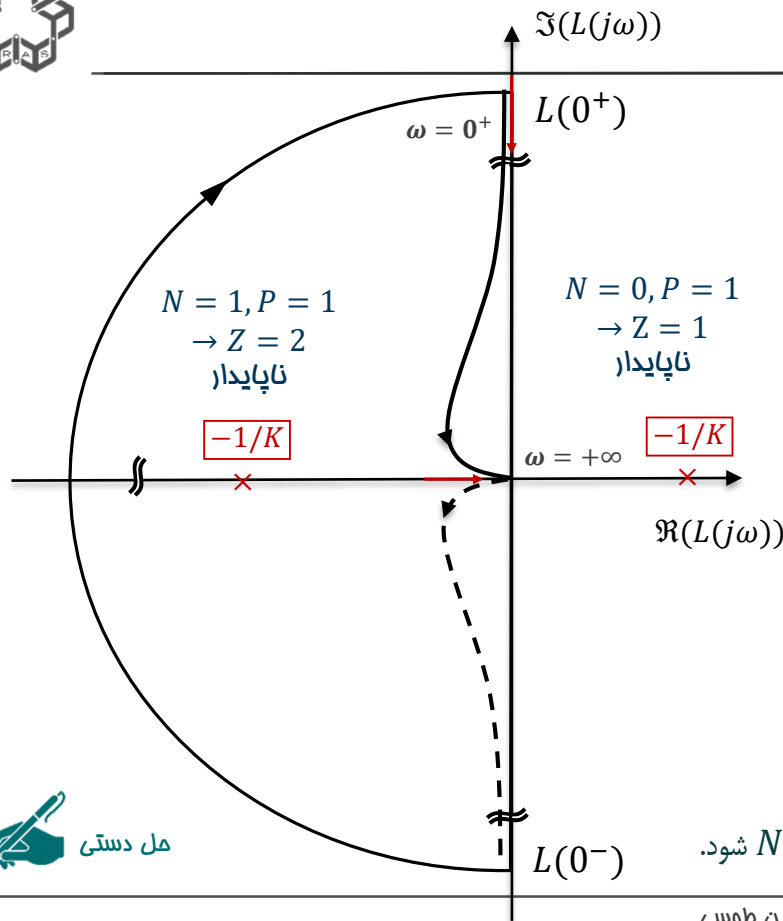
$$L(s) = \frac{K}{s(s-1)} = \frac{K}{-s(-s+1)}$$

✓ مثال ۷:

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.



نیم دایره کوچک به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت **ساعت گرد** نگاشت می شود.
با توجه به اینکه یک قطب ناپایدار در L وجود دارد بایستی برای پایداری $N = -1$ شود.





معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور صفر موهومی

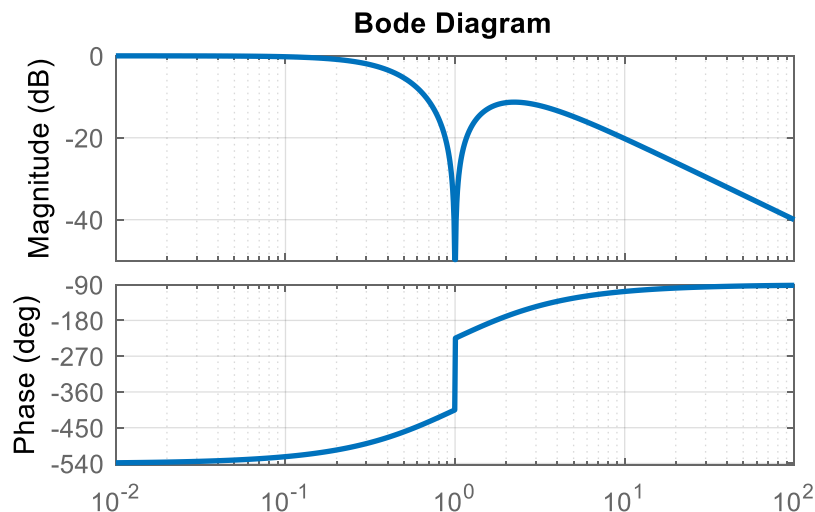
$$L(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s-1)^3} \quad \checkmark \text{ مثال ۸:}$$

نمودار بودی را رسم می کنیم.

افزایش سریع ۱۸۰ درجه ای زاویه در فرکانس $\omega = 1$

به علت حضور یک زوج صفر مزدوج موهومی است.

جدول زیر را برای ترسیم نمودار نایکویست تعیین کنید:



ω	0	1^-	1^+	$+\infty$
$ G(j\omega) $	1	0	0	0
$\angle G(j\omega)$	$-540^\circ = -180^\circ$	$-405^\circ = -45^\circ$	$-405^\circ + 180^\circ = -225^\circ$	-90°



مل دستی



معيار پایداری نایکویست

معيار پایداری نایکویست در حضور صفر موهومی

$$L(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s-1)^3} \quad \checkmark \text{ ادامه مثال ۸:}$$

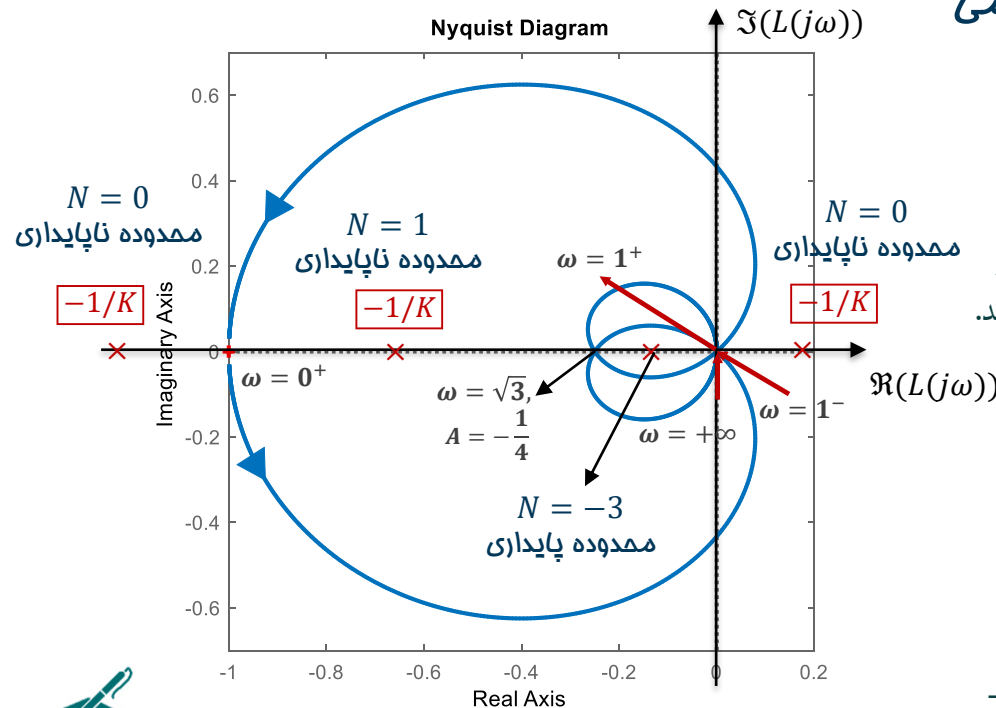
بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک صفر های موهومی نمودار نایکویست را رسم می کنیم. صفر ها در شکل نهایی تاثیری ندارند. محل برخورد با محور حقیقی را به دست می آوریم.

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 1}{-j\omega(\omega^2 - 3) + (3\omega^2 - 1)}$$

$$\Im(G(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega^2 = 3$$

$$\text{For } \omega^2 = 3 \rightarrow G(j\omega) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

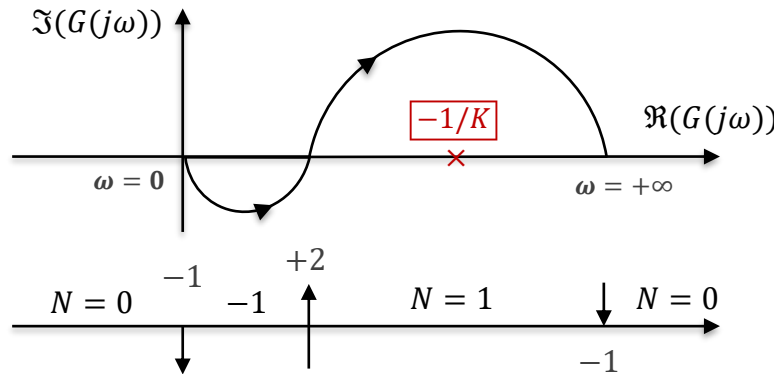
$$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{K} < 0 \rightarrow 4 < K < +\infty \text{ محدوده پایداری}$$



معیار پایداری نایکویست

• شمارش تعداد چرخش N

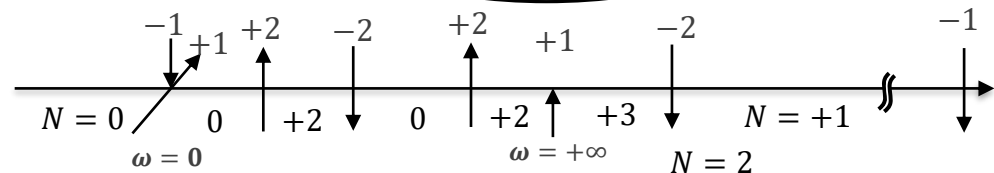
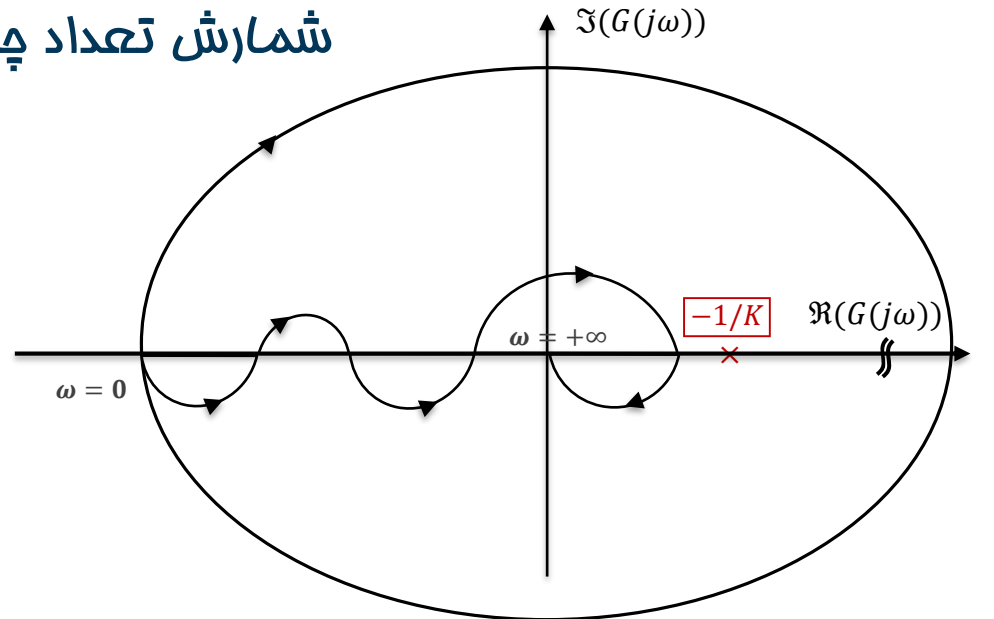
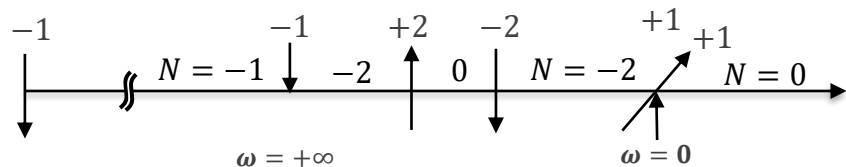
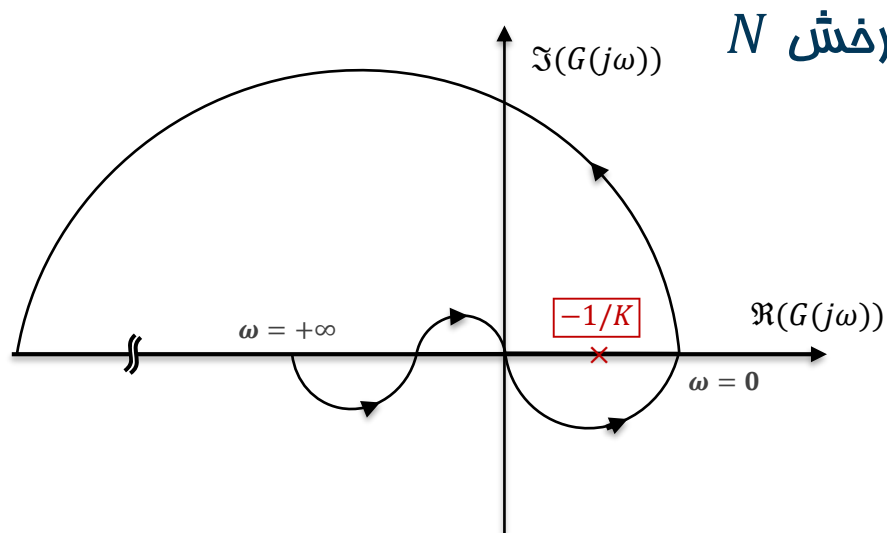
- ✓ در برخی از مسائل نظیر مثال قبل شمارش تعداد چرخش کمی چالش برانگیز است.
- ✓ در این نوع مسائل تنها با رسم نمودار نایکویست در فرکانس های **مثبت** از این روش استفاده کنید.
- تعداد نقاط عبور نمودار نایکویست در سمت **چپ** نقطه $-1/K$ را شمارش کنید
- چرخش های ساعت گرد (کاهش فاز) را مثبت + و چرخش های پاد ساعت گرد (افزایش فاز) را منفی - شمارش کنید.
- فرکانس های **صفر** و **بی نهایت** را یک بار چرخش و غیر آن را دو بار چرخش شمارش کنید.
- ✓ به عنوان مثال:



برگرفته از کتاب Belanger

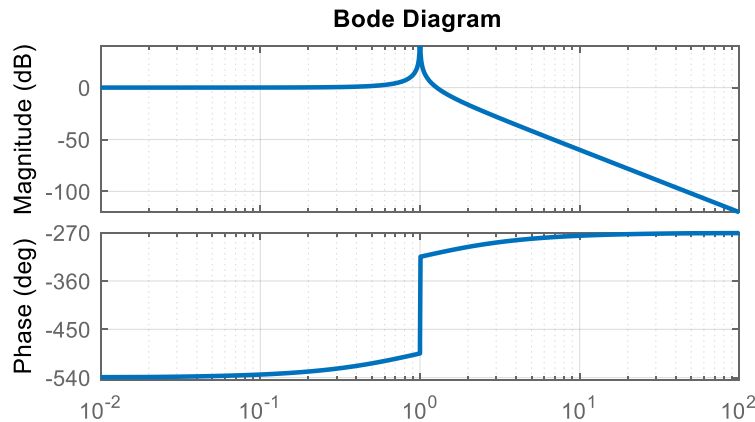
معیار پایداری نایکویست

شمارش تعداد چرخش N



معيار پايدارى نايكويست

• معيار پايدارى نايكويست در حضور قطب موهومی



$$L(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+1)} \quad \text{مثال ۹: } \checkmark$$

نمودار بودی را رسم می کنیم.

افزایش سریع ۱۸۰ درجه ای زاویه در فرکانس $\omega = 1$ به علت حضور یک زوج قطب مزدوج موهومی است.

جدول زیر را برای ترسیم نمودار نايكويست تعیین کنید:

ω	0	1^-	1^+	$+\infty$
$ G(j\omega) $	1	∞	∞	0
$\angle G(j\omega)$	-180°	-135°	$+45^\circ$	$+90^\circ$



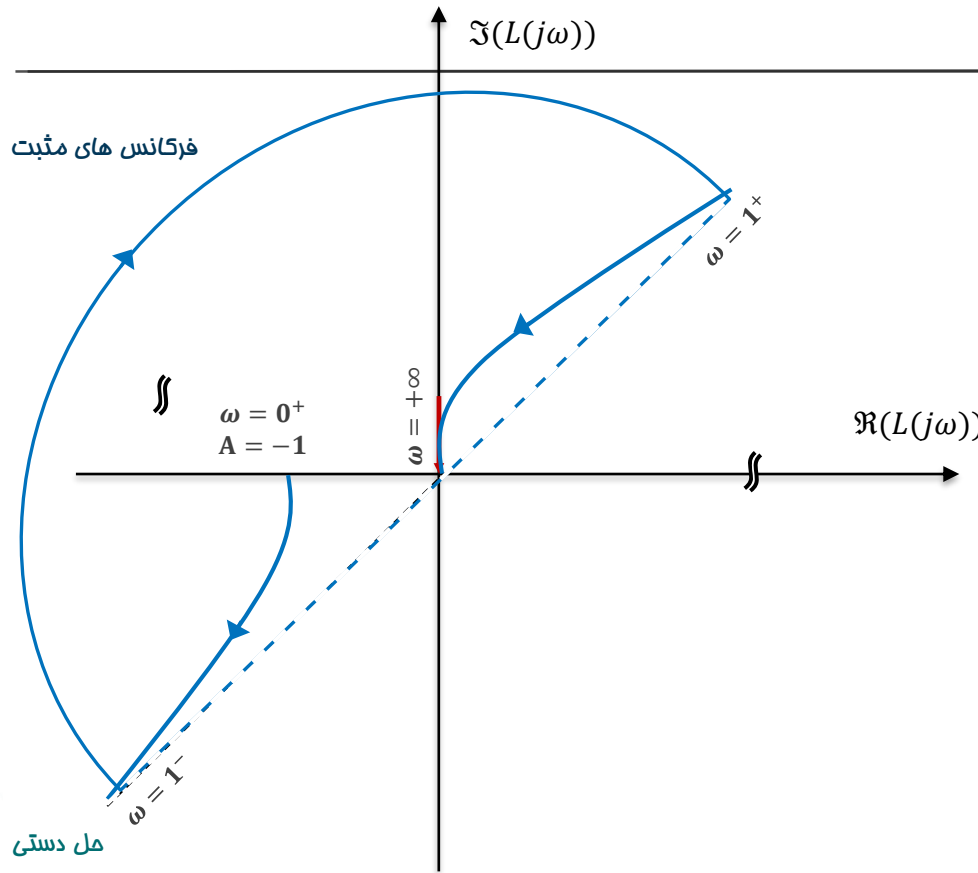
معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب موهومی

✓ ادامه مثال ۹:

$$L(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+1)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب های موهومی نمودار نایکوست را رسم می کنیم. صفر ها در شکل نهایی تاثیری ندارند. نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد حول قطب های موهومی به یک دایره با شعاع بی نهایت **ساعت گرد** نگاشت می شود.



معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب
موهومی

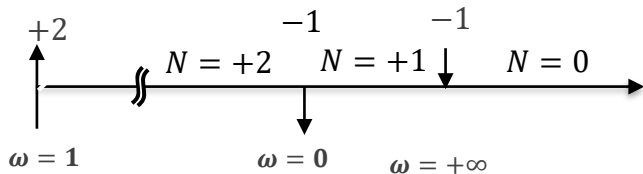
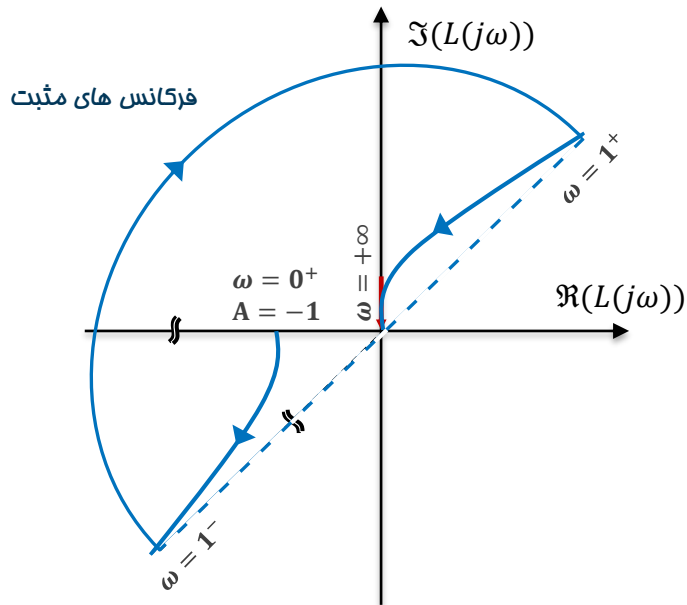
✓ ادامه مثال ۹:

$$L(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+1)}$$

تعداد چرخش ها و نواحی پایداری را با استفاده از روش
پیشنهادی بررسی می کنیم.

در این سیستم $P = 1$ و برای پایداری بایستی منطقه ای
را بیابیم که در آن $N = -1$ باشد.

همواره ناپایدار خواهد ماند!





معيار پایداری نایکویست

معيار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب موهومی

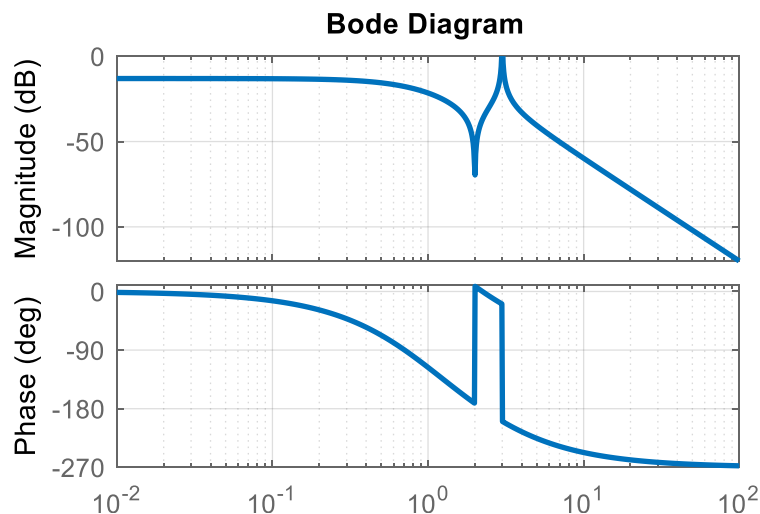
$$L(s) = \frac{K(s^2+4)}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}$$

✓ مثال ۱۰:

نمودار بودی را رسم می کنیم.

افزایش سریع ۱۸۰ درجه ای زاویه در فرکانس $\omega = 2$ به علت حضور یک زوج صفر مزدوج موهومی و در فرکانس $\omega = 3$ به علت یک زوج قطب مزدوج موهومی است.

جدول زیر را برای ترسیم نمودار نایکویست تعیین کنید:



ω	0	2^-	2^+	2.2	3^-	3^+	$+\infty$
$ G(j\omega) $	2/9	0	0	0.015	∞	∞	0
$\angle G(j\omega)$	0°	-170°	$+10^\circ$	0°	$\approx -10^\circ$	$\approx -190^\circ$	-270°



مل دستی

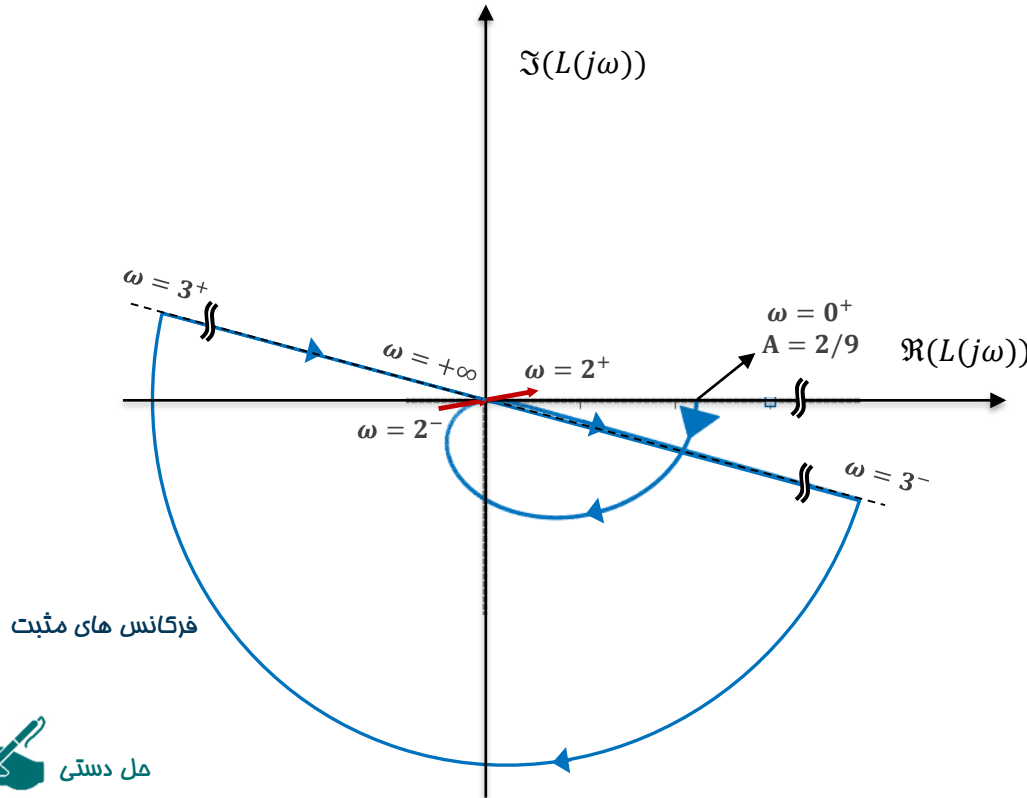
معیار پایداری نایکویست

• معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب موهومی

✓ ادامه مثال ۱۰:

$$L(s) = \frac{K(s^2+4)}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب های موهومی نمودار نایکویست را رسم می کنیم. صفر ها در شکل نهایی تاثیری ندارند. نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد حول قطب های موهومی به یک دایره با شعاع بی نهایت **ساعت گرد** نگاشت می شود.





معيار پایداری نایکویست

معيار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب موهومی

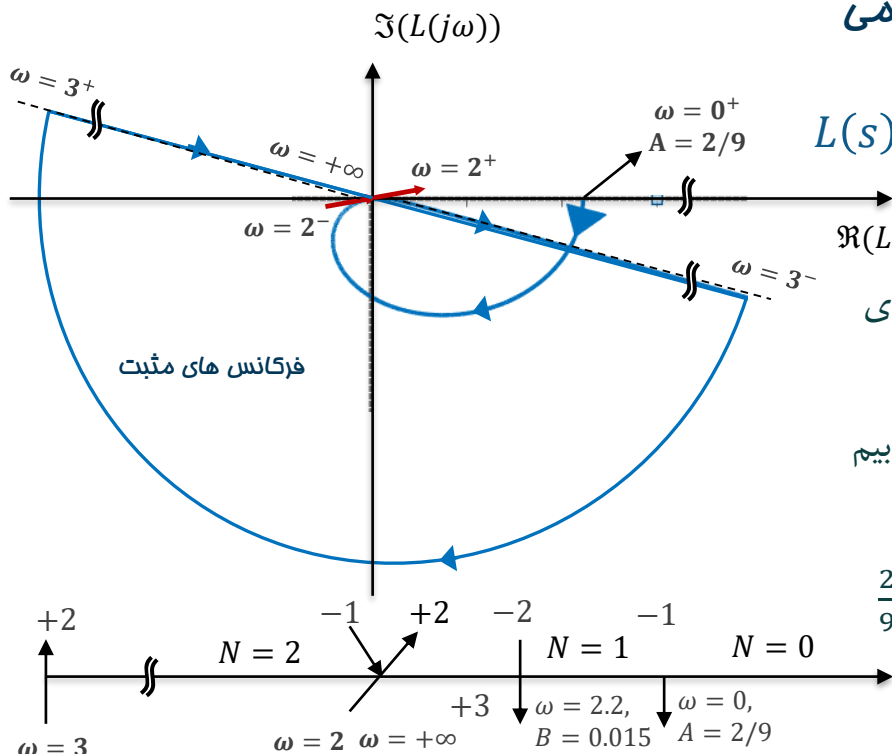
✓ ادامه مثال ۱۰:

$$L(s) = \frac{K(s^2+4)}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}$$

تعداد چرخش ها و نواحی پایداری را با استفاده از روش پیشنهادی تعیین می کنیم.

در این سیستم $P = 0$ و برای پایداری بایستی منطقه ای را بیابیم که در آن $N = 0$ باشد.

$$\frac{2}{9} < -\frac{1}{K} < +\infty \rightarrow -4.5 < K < 0$$
 محدوده پایداری



برگرفته از کتاب Belanger



معيار پایداری نایکویست

تعیین محدوده پایداری با نمودار بودی

✓ با توجه به روش پیشنهادی می توان بدون ترسیم نمودار نایکویست و با استفاده از نمودار بودی و تعیین محل تقاطع با محور حقیقی محدوده پایداری را تعیین نمود:

✓ مثال ۱۲:
$$L(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)(s+5)}$$

□ نمودار بودی را ترسیم کنید:

□ در دو نقطه نمودار فاز -180° را قطع می کند.

در $\omega = 0$: اندازه برابر -20 dB و فاز افزایشی است.

در $\omega = 1.71$: اندازه برابر -28.8 dB و فاز کاهشی است.

در $\omega = \infty$ به سمت مبدا میل می کند و فاز کاهشی است.

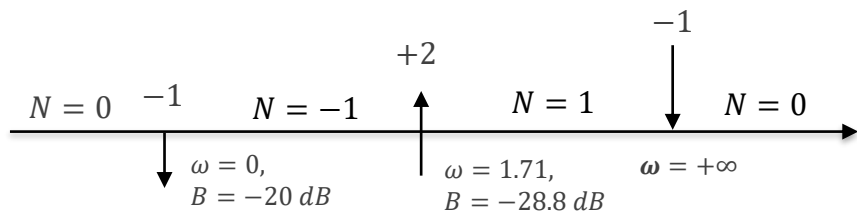
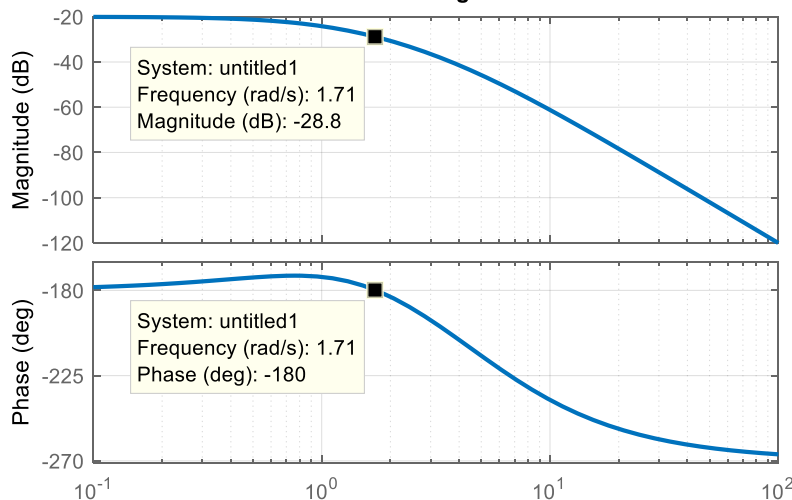
□ در این سیستم $P = 1$ و برای پایداری بایستی $N = -1$

$$-28.8 \text{ dB} < -\frac{1}{K} < -20 \text{ dB} \rightarrow \text{محدوده پایداری}$$

$$10 = 20 \text{ dB} < K < 28.8 \text{ dB} = 27.5$$

برگرفته از کتاب Belanger

Bode Diagram



بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق - کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیستم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.



حمید رضا تقی راد
استاد



گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل فطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به [این سایت](#) مراجعه نمایید



متشکرم



سیستم های کنترل فطی

فصل پنجم: طراحی کنترلگر در موزه فرکانس



در این فصل طراحی جبران ساز ها و کنترلگرهای فطی در موزه فرکانس مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا مشخصات فرکانسی سیستم های کنترل فطی به فصوص سیستم های مرتبه دوم مورد ملاحظه قرار گرفته و مشخصات مطلوب پیشنهاد می شوند. سپس با تعریف ماشیه پایداری، روش های تعیین ماشیه فاز و بهره در سیستم های کنترل فطی بیان شده و اهمیت آن در طراحی جبران سازهای مناسب تومیه می شود. نمودار نیکولز و کانتور های آن به منظور تحلیل ماشیه پایداری و رفتار سیستم های کنترل فطی معرفی خواهد شد. روش های طراحی جبران سازهای پایه ای و کاربرد در صنعت، از جمله جبران ساز های پیش فاز، پس فاز، پیش فاز-پس فاز و متناظرا PI ، PD و PID بیان شده و بر روی سیستم غیر کمینه فازی اعمال می شوند. در نهایت با استفاده از تابع تبدیل مساسیت روش های طراحی کنترلگرهای مرتبه بالاتر برای سیستم های پیچیده، ناپایدار و غیر کمینه فاز مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.



به چشم انداز

کسب مهارت های لازم
در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی
خوش آمدید





در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. گروه رباتیک ارس به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

عناوین فصل

مشخصات فرکانسی

۱ انگیزه، تشدید بیشینه M_r ، پهنای باند، فرکانس گذر بهره، فرکانس گذر فاز، نرخ شکست، مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو، مثال های کاربردی.

پایداری نسبی

۲ انگیزه، تعریف کیفی و کمی پایداری نسبی، حاشیه بهره، فرکانس گذر فاز، حاشیه فاز، فرکانس گذر بهره، تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی، حاشیه فاز و بهره مثبت و منفی، تحلیل فرکانسی با نمودار نیکولز، کانتور های نمودار نیکولز، مثال های کاربردی.

طراحی جبران ساز در موزه فرکانس

۳ چرا جبران ساز؟ رفتار مطلوب در حوزه فرکانس، ویژگی های جبران ساز های پیش فاز، پس فاز و پیش فاز-پس فاز، طراحی گام به گام جبران ساز پیش فاز، PD، پس فاز، PI، پیش فاز-پس فاز و PID، طراحی نمونه بر روی سیستم غیر کمینه فاز، ارزیابی رفتار زمانی و فرکانسی.

طراحی کنترلرگر با تابع تبدیل مساسیت

۴ انگیزه، تابع تبدیل حساسیت و متمم آن، توابع مطلوب، چگونگی طراحی کنترلرگر، کنترلرگر سره و علی، قضیه پایداری (شرایط درون یابی)، چگونگی طراحی یک سیستم پیچیده، سیستم ناپایدار، سیستم غیر کمینه فاز و سیستم ناپایدار و غیر کمینه فاز، مثال های کاربردی.

در این فصل طراحی جبران ساز ها و کنترلرگرهای فطی در موزه فرکانس مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا مشخصات فرکانسی سیستم های کنترل فطی به خصوص سیستم های مرتبه دوم مورد ملاحظه قرار گرفته و مشخصات مطلوب پیشنهاد می شوند. سپس با تعریف ماشیه پایداری، روش های تعیین ماشیه فاز و بهره در سیستم های کنترل فطی بیان شده و اهمیت آن در طراحی جبران سازهای مناسب تومیه می شود. نمودار نیکولز و کانتور های آن به منظور تحلیل ماشیه پایداری و رفتار سیستم های کنترل فطی معرفی خواهد شد. روش های طراحی جبران سازهای پایه ای و پرکاربرد در صنعت، از جمله جبران ساز های پیش فاز، پس فاز، پیش فاز-پس فاز و متناظرا PD، PI و PID بیان شده و بر روی سیستم غیر کمینه فازی اعمال می شوند. در نهایت با استفاده از تابع تبدیل مساسیت روش های طراحی کنترلرگرهای مرتبه بالاتر برای سیستم های پیچیده، ناپایدار و غیر کمینه فاز مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.



مشخصات فرکانسی

• انگیزه

- ✓ تا به حال طراحی کنترلگر با تنها دو پارامتر طراحی بررسی شده است.
- ✓ نیاز به کنترلگرهای دینامیکی با مرتبه بالاتر برای مصالحه بین اهداف مختلف ردیابی و پایداری
- ✓ اهداف طراحی کنترلگر
 - حفظ پایداری سیستم حلقه بسته
 - ردیابی مناسب (سرعت بیشینه و خطای ماندگار کمینه با محدودیت عملگرها و حسگرها)
- ✓ بیان مشخصات مورد نیاز در فضای زمانی.
- ✓ تحلیل پایداری در حوزه فرکانسی
- ✓ نیاز به تعریف سایر مشخصات مورد نیاز در حوزه فرکانس
 - فراجش در حوزه فرکانس، خطای ماندگار، فرکانس شکست، پهنای باند، پایداری نسبی، تابع تبدیل حساسیت و ...

مشخصات فرکانسی

• تشدید بیشینه M_r

✓ M_r : بیشینه مقدار اندازه پاسخ فرکانسی

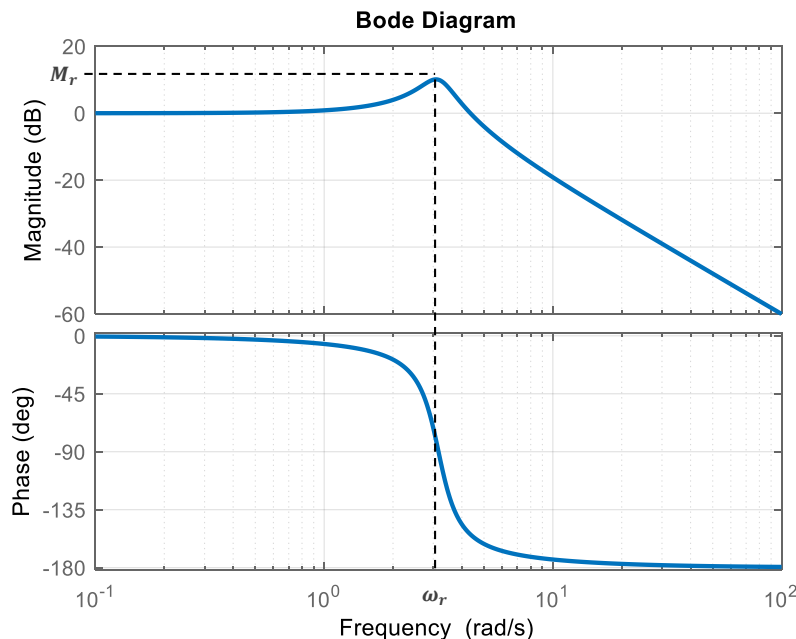
$$M_r = \max |M(j\omega)|$$

□ پاسخ فرکانسی یک سیستم نوعی را در نظر بگیرید.

□ تشدید بیشینه برای سیستم های دارای قطب مختلط در فرکانس تشدید ω_r ظهور می کند.

□ اگر سیستمی دارای ζ کم و نوسانات زیاد در پاسخ باشد M_r آن بزرگ است.

□ سیستم حلقه بسته مناسب نبایستی نوسانات زیادی داشته باشد.



$$1.1 \cong 0.83 \text{ dB} < M_r < 1.5 \cong 3.5 \text{ dB}$$

مشخصات فرکانسی

• پهنای باند BW

✓ پهنای باند ω_{BW} فرکانسی است که اندازه پاسخ فرکانسی در آن $-3dB = 0.707$ باشد

□ پهنای باند معیاری برای سرعت پاسخ سیستم است

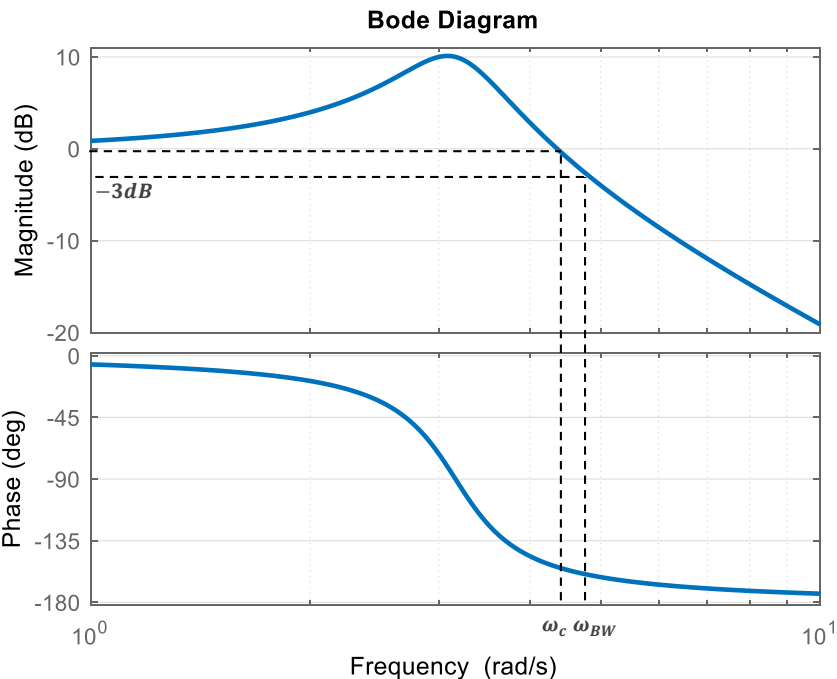
□ پهنای باند بیشتر معادل پاسخ گذرای سریع تر است

• فرکانس گذر (cross-over)

✓ فرکانس گذر فرکانسی است که اندازه پاسخ فرکانسی در آن $0dB = 1$ باشد

□ فرکانس گذر ω_c نزدیک پهنای باند سیستم است

□ ولی تعیین آن به مراتب راحت تر است.

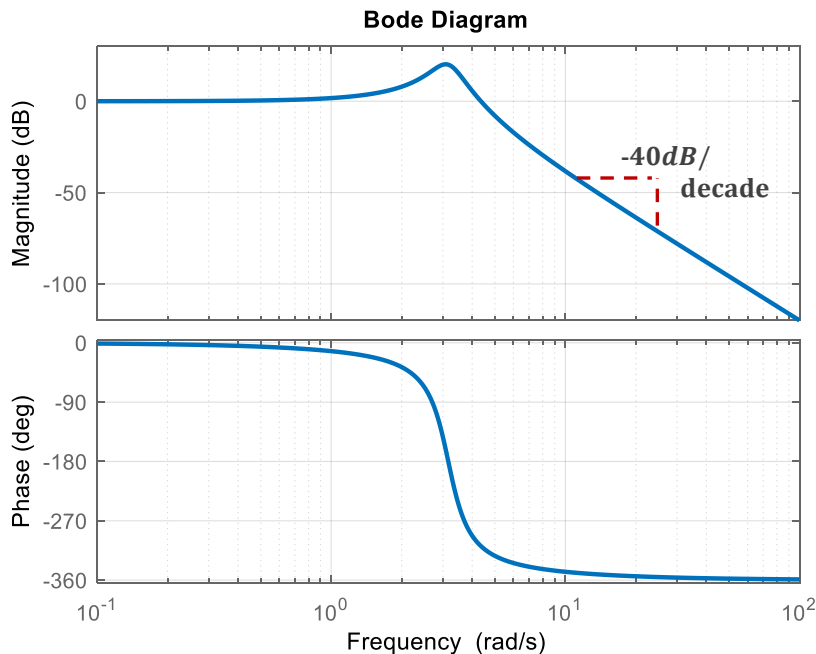




مشخصات فرکانسی

• نرخ شکست: (Cut-off rate)

- ✓ پهنای باند ω_{BW} به تنهایی نمی تواند میزان کاهش نویز در پاسخ سیستم را بیان کند
- ✓ شیب پاسخ فرکانسی در فرکانس های بالا را نرخ شکست می نامند
- ✓ در سیستم مرتبه یک نرخ شکست -20dB/decade است.
- ☐ هر چه نرخ شکست بیشتر باشد، میزان دفع نویز آن بیشتر است
- ☐ یک سیستم مرتبه دو که دارای نرخ شکست -40dB/decade است نویز را بیشتر از یک سیستم مرتبه یک دفع می کند.



• مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو

✓ سیستم حلقه بسته مرتبه دو زیر را در نظر بگیرید.

$$M(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

✓ پاسخ فرکانسی را به ازای فرکانس نرمالیزه شده $\Omega = \omega/\omega_n$ به دست آورید.

$$M(j\omega) = \frac{1}{(1 - \Omega^2) + j2\zeta\Omega}$$

✓ بدین ترتیب:

$$|M(j\omega)| = \frac{1}{[(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2]^{1/2}}, \quad \angle M(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2}$$



مشخصات فرکانسی

• مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو

✓ برای تعیین فرکانس تشدید ω_r مشتق اندازه را برابر صفر قرار دهید.

$$\frac{d}{d\Omega} |M(j\Omega)| = -\frac{1}{2} \left[(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} (4\Omega^3 - 4\Omega + 8\Omega\zeta^2) = 0$$

✓ در دو فرکانس که از پاسخ معادله درجه سه زیر به دست می آید این رابطه برقرار است:

$$(4\Omega^2 - 4 + 8\zeta^2)\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad \Omega = 0, \quad \Omega_r = \pm\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

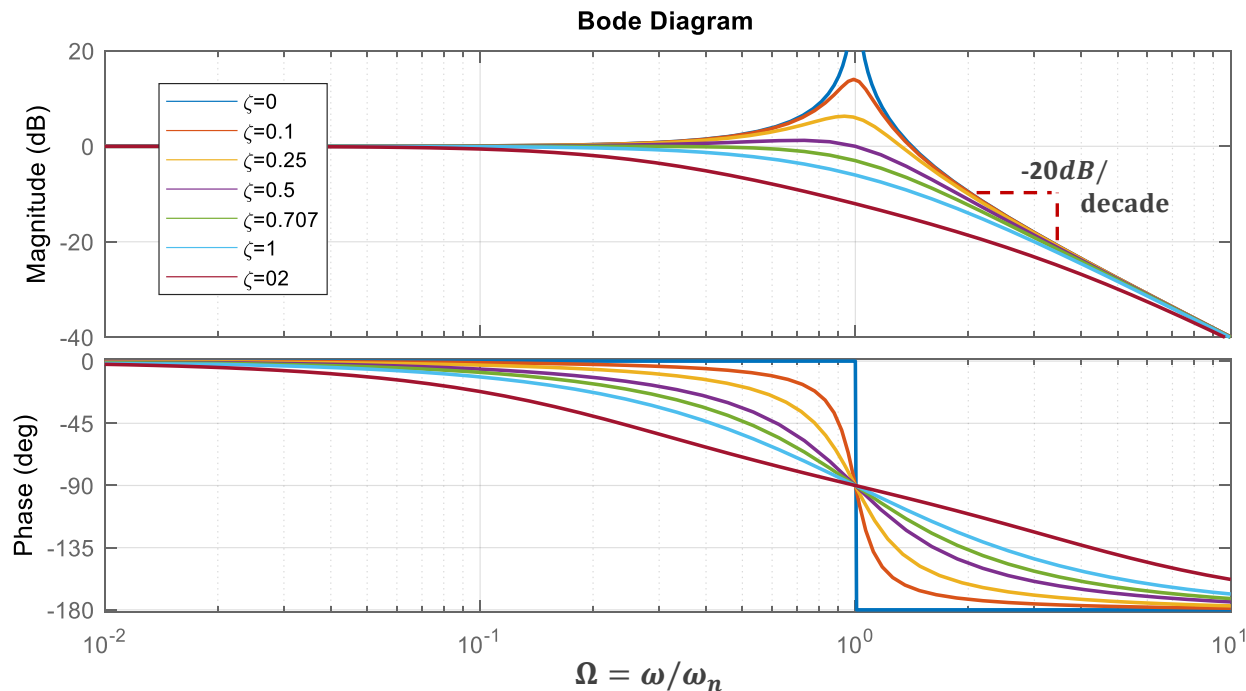
✓ پاسخ اول $\Omega = 0$ پاسخ بدیهی معادله و فرکانس تشدید برابر $\Omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ است.

✓ زمانی Ω_r وجود دارد که $\zeta < 0.707 \rightarrow 1 - 2\zeta^2 > 0$ باشد.

✓ در این حالت

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{for} \quad \zeta \leq 0.707$$

• مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو

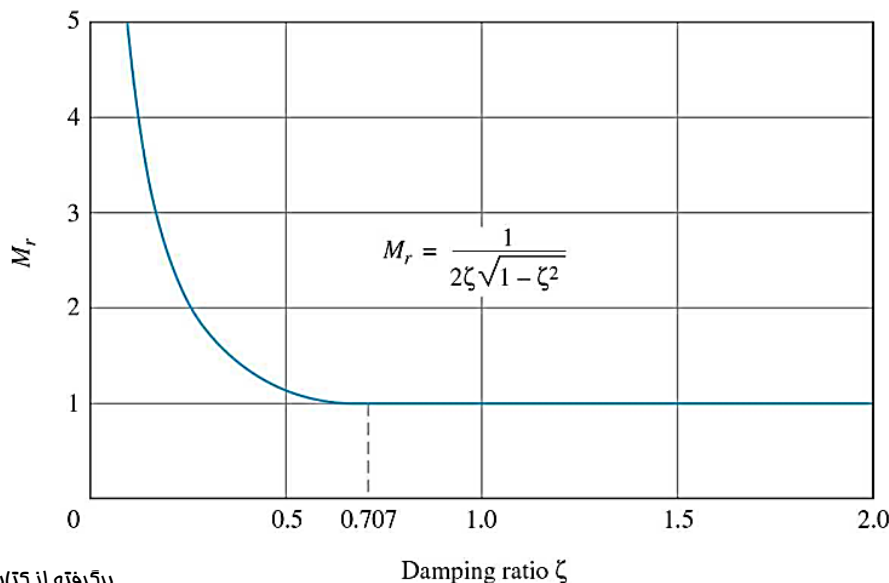




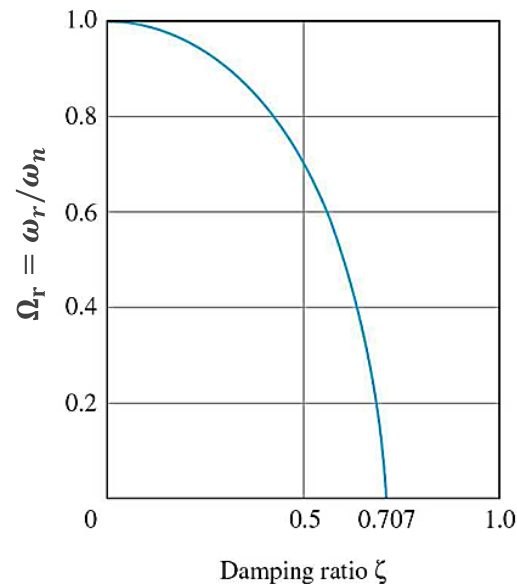
مشخصات فرکانسی

• مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو

رفتار تشدید بیشینه M_r بر حسب ζ



رفتار فرکانس تشدید بر حسب ζ



برگرفته از کتاب Kuo

Damping ratio ζ

Damping ratio ζ

مشخصات فرکانسی

• مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو

✓ پهنای باند

□ از تعریف استفاده کرده و قدر مطلق اندازه را برابر $1/\sqrt{2}$ قرار دهید.

$$|M(j\Omega)| = \frac{1}{[(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

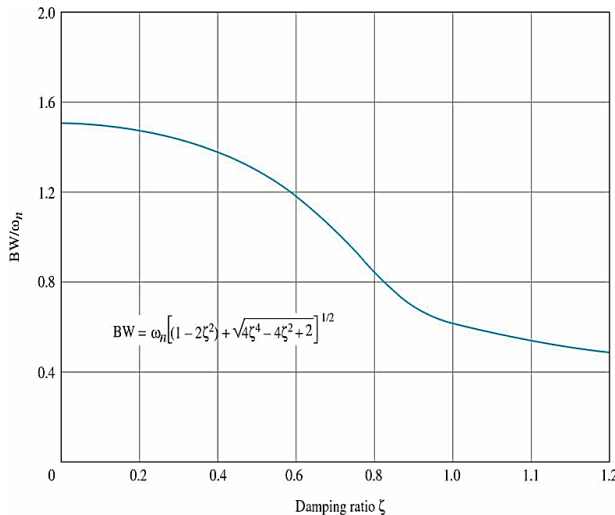
✓ بدین ترتیب:

$$[(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2] = 2 \rightarrow$$

$$\Omega^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}$$

✓ بنابر این پهنای باند دقیق از رابطه زیر تعیین می شود.

$$\omega_{BW} = \omega_n \left[(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2}$$



رفتار پهنای باند بر حسب ζ

برگرفته از کتاب Kuo

عناوین فصل

مشخصات فرکانسی

۱ انگیزه، تشدید بیشینه M_r ، پهنای باند، فرکانس گذر بهره، فرکانس گذر فاز، نرخ شکست، مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو، مثال های کاربردی.

طراحی جبران ساز در موزه فرکانس

۳ چرا جبران ساز؟ رفتار مطلوب در حوزه فرکانس، ویژگی های جبران ساز های پیش فاز، پس فاز و پیش فاز-پس فاز، طراحی گام به گام جبران ساز پیش فاز، PD، پس فاز، PI، پیش فاز-پس فاز و PID، طراحی نمونه بر روی سیستم غیر کمینه فاز، ارزیابی رفتار زمانی و فرکانسی.

پایداری نسبی

۲ انگیزه، تعریف کیفی و کمی پایداری نسبی، حاشیه بهره، فرکانس گذر فاز، حاشیه فاز، فرکانس گذر بهره، تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی، حاشیه فاز و بهره مثبت و منفی، تحلیل فرکانسی با نمودار نیکولز، کانتور های نمودار نیکولز، مثال های کاربردی.

طراحی کنترلر با تابع تبدیل مساسیت

۴ انگیزه، تابع تبدیل حساسیت و متمم آن، توابع مطلوب، چگونگی طراحی کنترلر، کنترلر سره و علی، قضیه پایداری (شرایط درون یابی)، چگونگی طراحی یک سیستم پیچیده، سیستم ناپایدار، سیستم غیر کمینه فاز و سیستم ناپایدار و غیر کمینه فاز، مثال های کاربردی.

در این فصل طراحی جبران ساز ها و کنترلرهای فطی در موزه فرکانس مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا مشخصات فرکانسی سیستم های کنترل فطی به خصوص سیستم های مرتبه دوم مورد ملاحظه قرار گرفته و مشخصات مطلوب پیشنهاد می شوند. سپس با تعریف ماشیه پایداری، روش های تعیین ماشیه فاز و بهره در سیستم های کنترل فطی بیان شده و اهمیت آن در طراحی جبران سازهای مناسب تومیه می شود. نمودار نیکولز و کانتور های آن به منظور تحلیل ماشیه پایداری و رفتار سیستم های کنترل فطی معرفی خواهد شد. روش های طراحی جبران سازهای پایه ای و پرکاربرد در صنعت، از جمله جبران ساز های پیش فاز، پس فاز، پیش فاز-پس فاز و متناظرا PD، PI و PID بیان شده و بر روی سیستم غیر کمینه فازی اعمال می شوند. در نهایت با استفاده از تابع تبدیل مساسیت روش های طراحی کنترلرهای مرتبه بالاتر برای سیستم های پیچیده، ناپایدار و غیر کمینه فاز مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

پایداری نسبی

• انگیزه

✓ پایداری یک ویژگی مطلق است: یک سیستم یا پایدار است، یا در مرز ناپایداری و یا ناپایدار.

✓ اما نزدیکی به مرز ناپایداری نیز مطلوب نیست: پایداری نسبی

□ در مکان هندسی ریشه ها نزدیکی قطب ها به محور $j\omega$

نوسانات شدیدی را ایجاد کرده و مطلوب نیست

□ در معیار پایداری نایکویست نزدیکی به نقطه -1

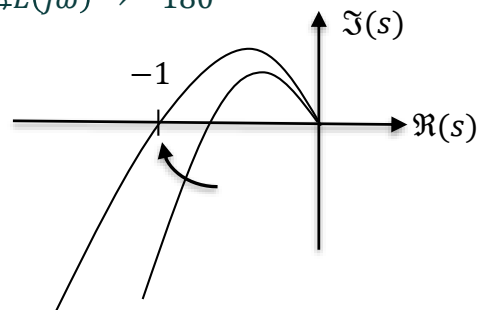
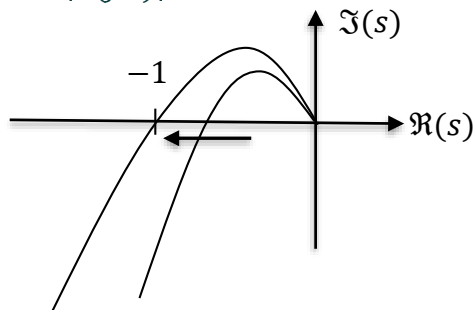
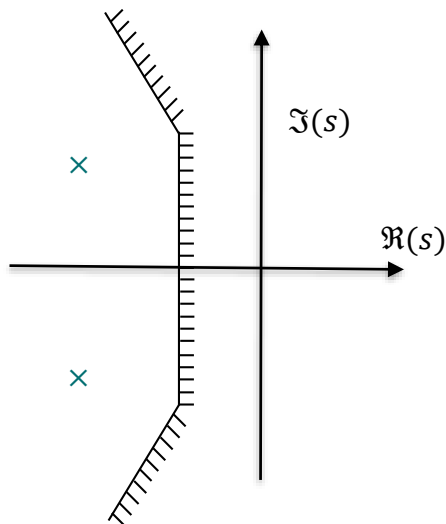
همین حالت را دارد و مطلوب نیست.

□ در پاسخ فرکانسی نزدیکی به نقطه -1 هم در اندازه و هم در زاویه قابل تحلیل است

$$|L(j\omega)| \rightarrow 1$$

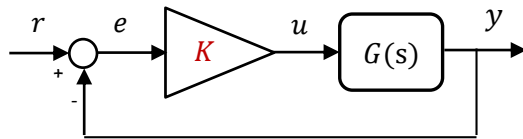
or

$$\angle L(j\omega) \rightarrow -180^\circ$$



پایداری نسبی

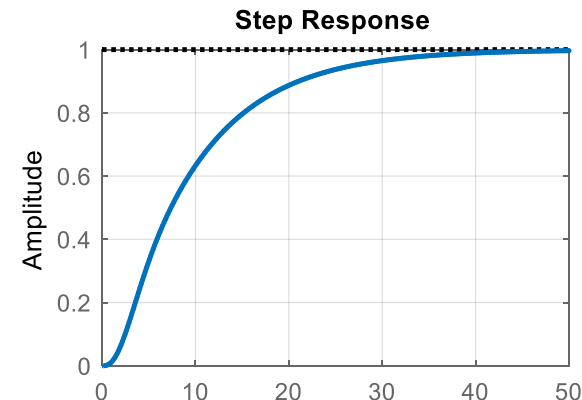
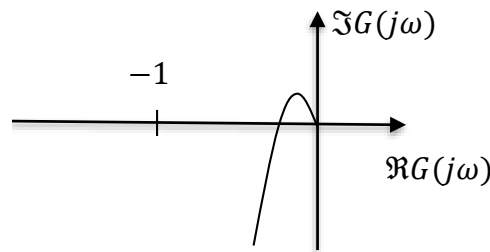
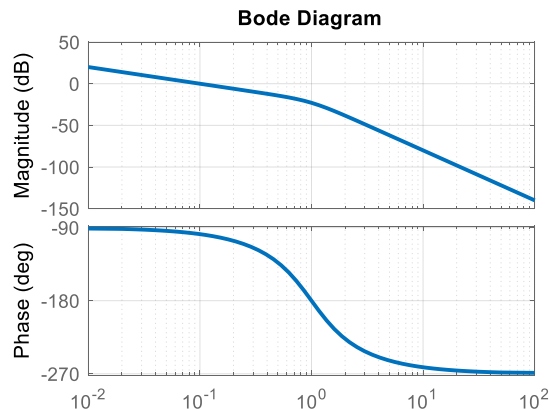
تعریف کیفی



✓ پایداری نسبی برای بیان چگونگی پایداری استفاده می شود.

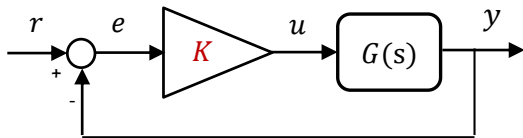
✓ سیستم حلقه بسته با بهره K را در نظر بگیرید: $L(s) = KG(s)$

✓ برای بهره K کوچک:



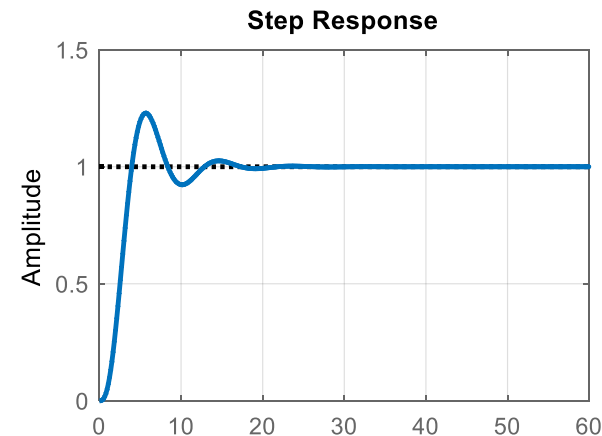
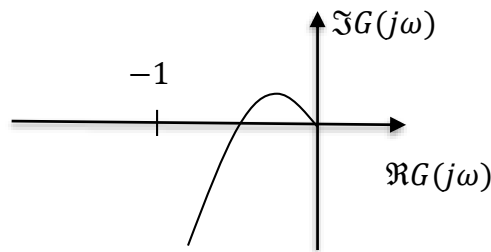
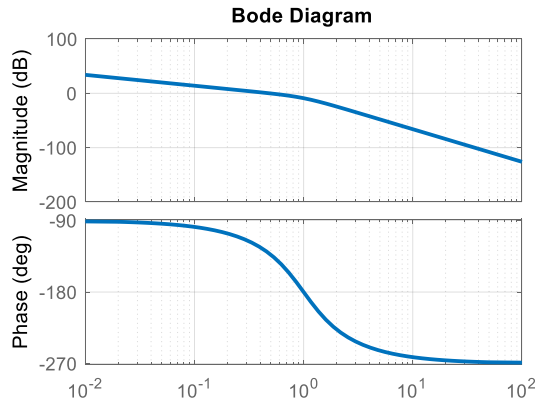
پایداری نسبی

• تعریف کیفی



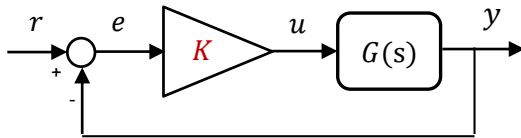
✓ سیستم حلقه بسته با بهره K را در نظر بگیرید: $L(s) = KG(s)$

✓ برای بهره K متوسط:



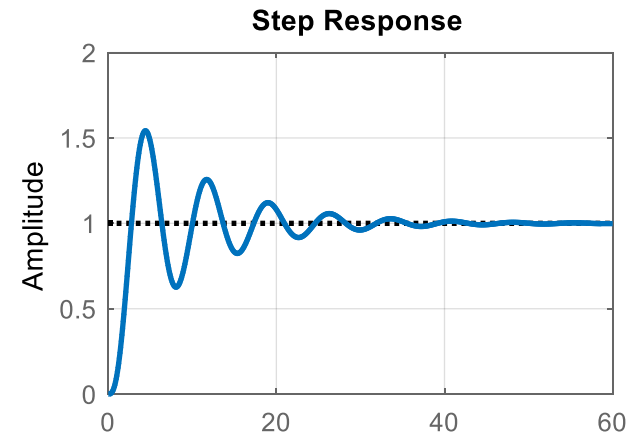
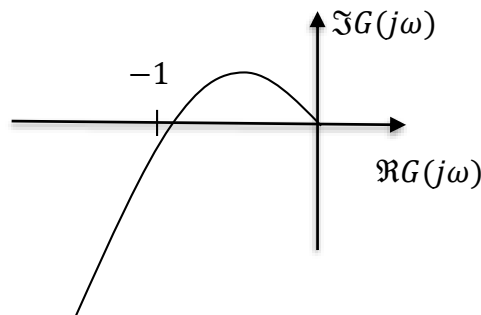
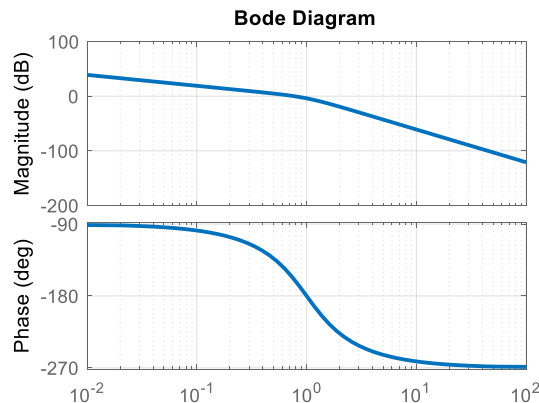
پایداری نسبی

• تعریف کیفی



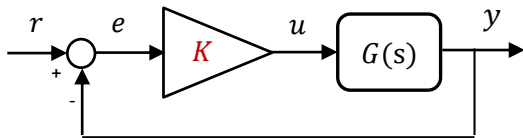
✓ سیستم حلقه بسته با بهره K را در نظر بگیرید: $L(s) = KG(s)$

✓ برای بهره K بزرگ:



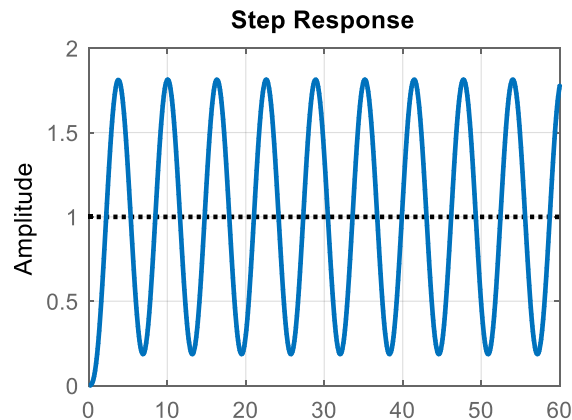
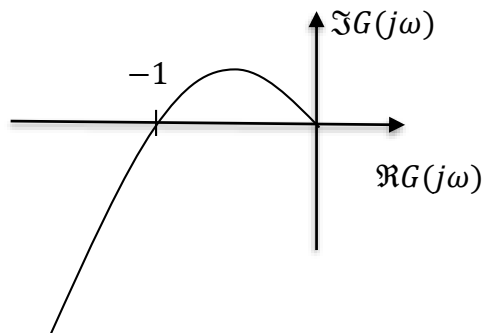
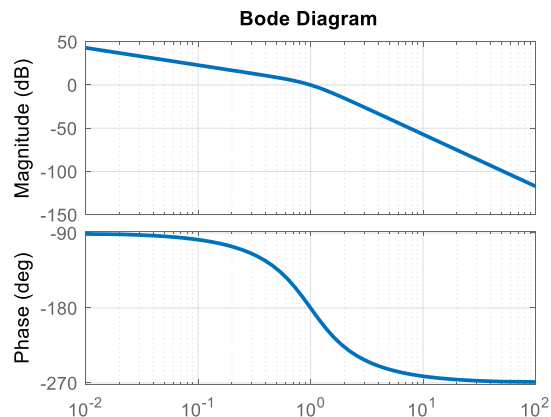
پایداری نسبی

• تعریف کیفی

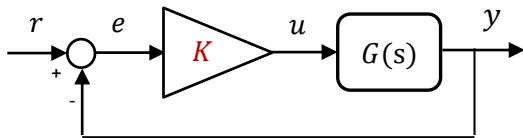


✓ سیستم حلقه بسته با بهره K را در نظر بگیرید: $L(s) = KG(s)$

✓ برای بهره K بحرانی:

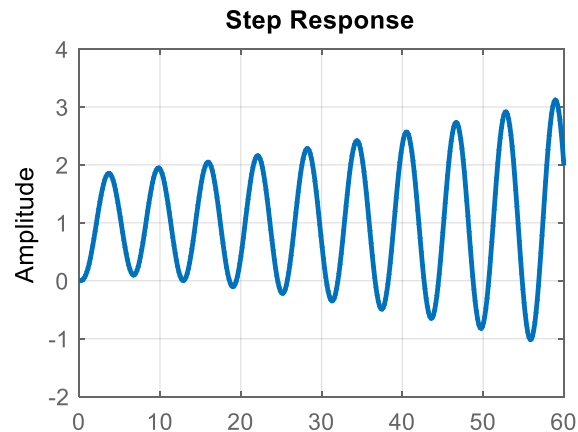
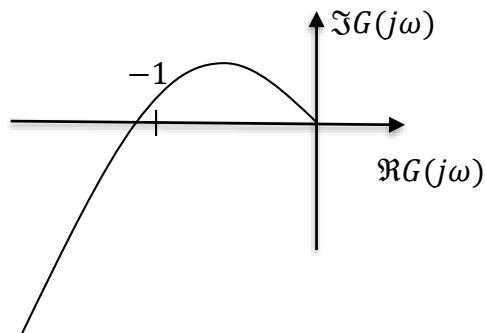
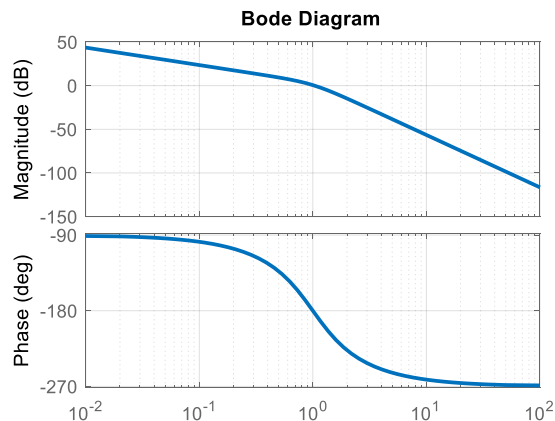


• تعریف کیفی



✓ سیستم حلقه بسته با بهره K را در نظر بگیرید: $L(s) = KG(s)$

✓ برای بهره K فوق بحرانی:



پایداری نسبی

• حاشیه بهره GM

✓ بیان مفهومی

□ چه بهره ای در $G(j\omega)$ ضرب شود تا آنرا به مرز ناپایداری برساند.

• نمودار نایکوست $G(j\omega)$ در اثر بهره $K > 1 = 0db$ **باد می کند**.

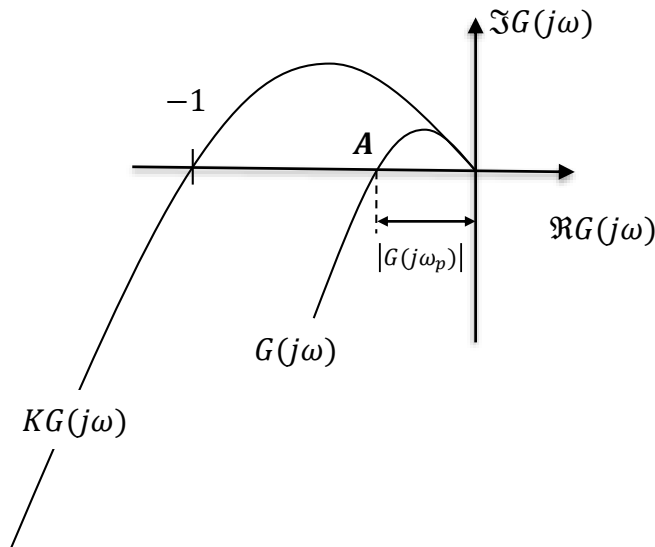
• نقطه A در اثر بهره K به نقطه -1 میل می کند.

□ نقطه A بر روی محور حقیقی و دارای زاویه 180° درجه است.

• به خاطر این ویژگی A به عنوان نقطه گذر فاز معرفی می شود.

✓ تعریف فرکانس گذر فاز

Phase cross over frequency: $\omega_p \ni \angle G(j\omega_p) = -180^\circ$

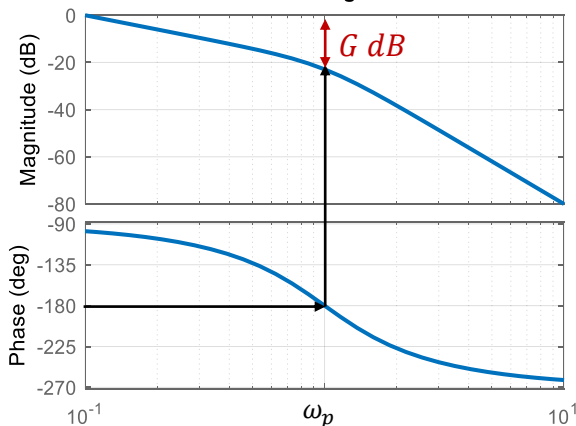
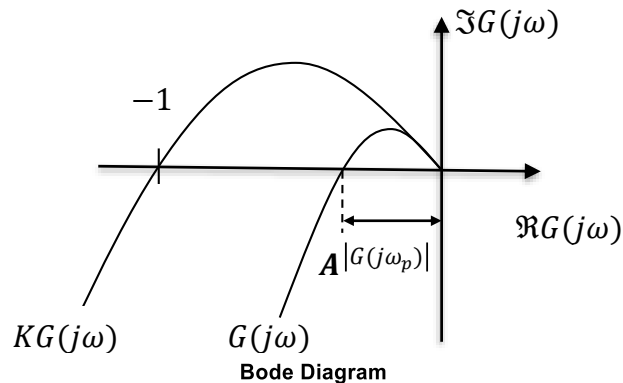


پایداری نسبی

• حاشیه بهره GM

✓ تعریف دقیق

$$GM = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_p)|} = -20 \log_{10} |G(j\omega_p)| \text{ dB}$$



✓ تعیین GM از روی نمودار بودی بهره حلقه

□ از منحنی فاز فرکانس گذر فاز در زاویه -180° درجه را تعیین کنید.

□ در فرکانس گذر فاز بهره سیستم به $G \text{ dB}$ را تعیین کنید:

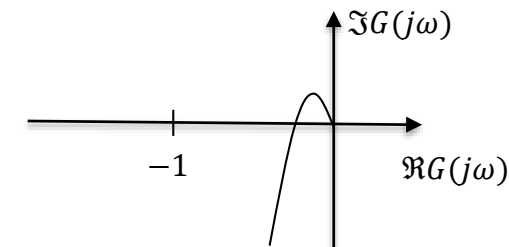
□ حاشیه بهره به dB منفی مقدار فوق خواهد بود: $GM = -G \text{ dB}$

پایداری نسبی

• ماشیه بهره GM

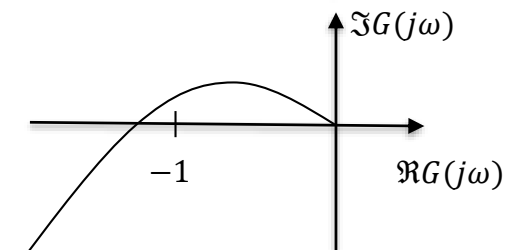
✓ مثال ۱: اگر $0 < |G(j\omega_p)| < 1 = 0dB$ آنگاه

سیستم پایدار است $GM = -|G(j\omega_p)| dB \rightarrow GM > 0dB$



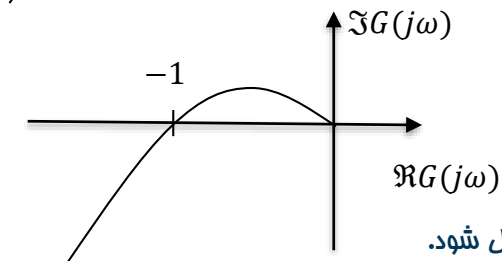
✓ مثال ۲: اگر $|G(j\omega_p)| > 1 = 0dB$ آنگاه

سیستم ناپایدار است $GM = -|G(j\omega_p)| dB \rightarrow GM < 0dB$



✓ مثال ۳: اگر $|G(j\omega_p)| = 1 = 0dB$ آنگاه

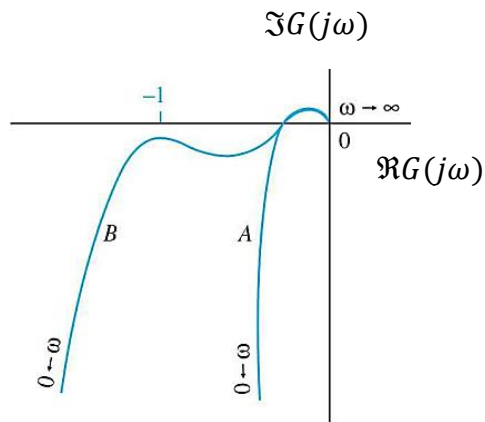
سیستم در مرز ناپایداری است $GM = 0dB$



توجه: برای $G(s)$ ناپایدار یا غیر کمینه فاز ممکن است با ماشیه فاز منفی نیز پایداری سیستم ملقه بسته حاصل شود.

پایداری نسبی

• حاشیه فاز PM



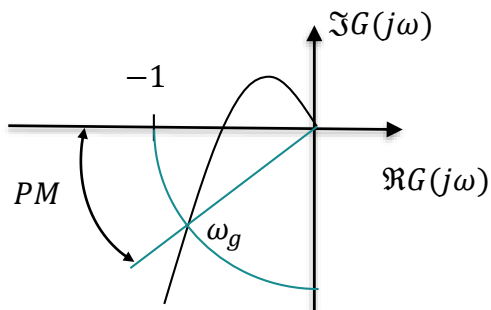
- ✓ با اینکه حاشیه بهره پایداری نسبی را از یک نظر تعیین می کند اما همیشه حاشیه بهره بزرگ دور بودن از ناپایداری را تضمین نمی کند
- در شکل روبرو هر دو سیستم دارای حاشیه بهره زیادی هستند ولی سیستم B حاشیه پایداری کمتری را تجربه می کند.

✓ بیان مفهومی

- چه میزان فاز $G(j\omega)$ اضافه شود تا آنرا به مرز ناپایداری برساند.
- نمودار نایکوست $G(j\omega)$ در اثر افزایش فاز می چرخد.
- نقطه B در اثر در اثر افزایش فاز θ به نقطه -1 میل می کند.
- نقطه B بر روی دایره واحد و دارای اندازه 1 یا صفر dB است.
- به خاطر این ویژگی B به عنوان نقطه گذر بهره معرفی می شود.

✓ تعریف فرکانس گذر بهره

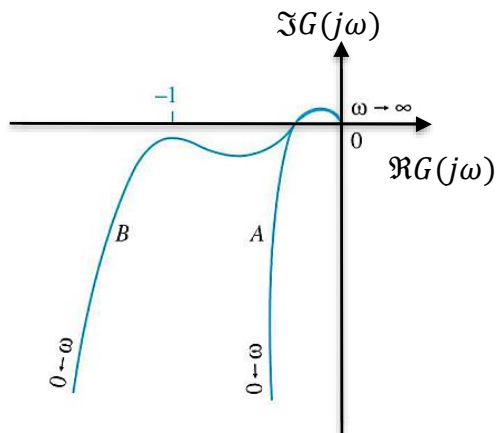
Gain cross over frequency: $\omega_g \ni |G(j\omega_g)| = 1 = 0 \text{ dB}$



پایداری نسبی

• حاشیه فاز PM

- ✓ با اینکه حاشیه بهره پایداری نسبی را از یک نظر تعیین می کند اما همیشه حاشیه بهره بزرگ دور بودن از ناپایداری را تضمین نمی کند
- در شکل روبرو هر دو سیستم دارای حاشیه بهره زیادی هستند ولی سیستم B حاشیه پایداری کمتری را تجربه می کند.



✓ بیان مفهومی

- چه میزان فاز به $G(j\omega)$ اضافه شود تا آنرا به مرز ناپایداری برساند.

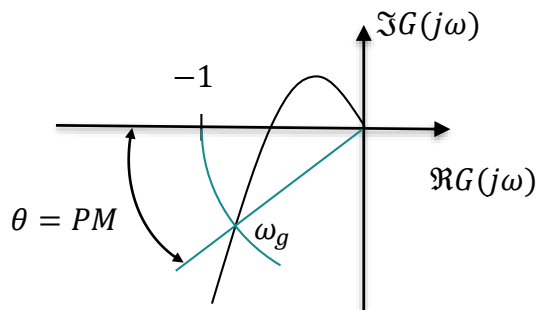
- نمودار نایکوست $G(j\omega)$ در اثر افزایش فاز θ می چرخد.
- نقطه g در اثر افزایش فاز θ به نقطه -1 میل می کند.

- نقطه g بر روی دایره واحد و دارای اندازه 1 یا صفر dB است.

- به خاطر این ویژگی B به عنوان نقطه گذر بهره معرفی می شود.

✓ تعریف فرکانس گذر بهره

Gain cross over frequency: $\omega_g \ni |G(j\omega_g)| = 1 = 0 \text{ dB}$



• حاشیه فاز PM

✓ تعریف دقیق

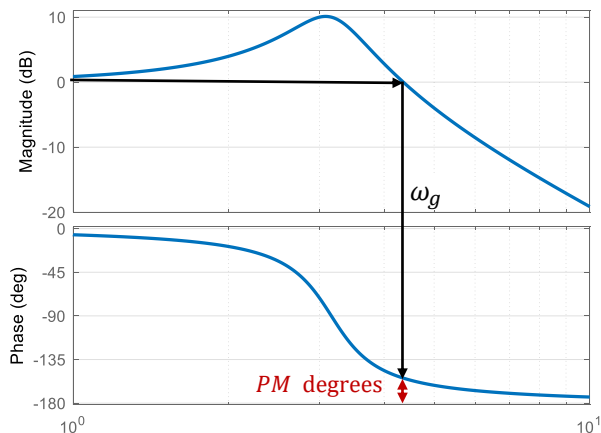
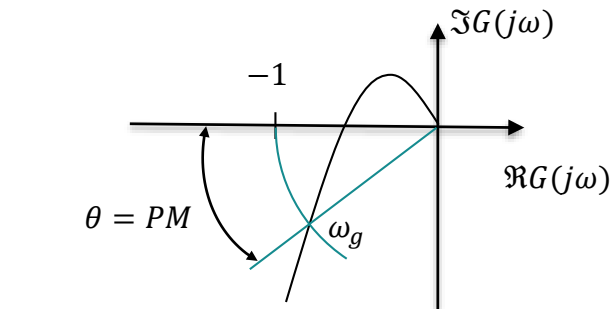
$$PM = \angle G(j\omega_g) - 180^\circ$$

✓ تعیین GM از روی نمودار بودی بهره حلقه

□ از منحنی اندازه محل برخورد با $0dB$ و فرکانس گذر بهره را تعیین کنید.

□ در فرکانس گذر بهره فاز سیستم را تعیین کنید. $PM + 180^\circ$

□ 180° درجه از این زاویه کم کنید تا حاشیه فاز به دست آید.

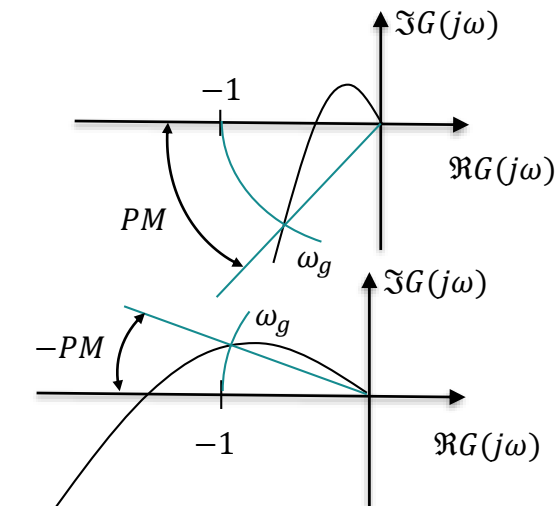


پایداری نسبی

• ماشیه فاز PM

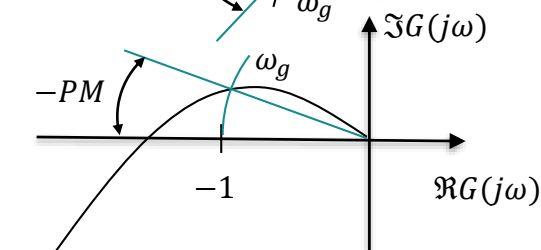
✓ مثال ۱: اگر $180^\circ < \angle G(j\omega_g) < 360^\circ$ آنگاه

سیستم پایدار است $\rightarrow PM = \angle G(j\omega_g) - 180^\circ > 0^\circ$



✓ مثال ۲: اگر $0^\circ < \angle G(j\omega_g) < 180^\circ$ آنگاه

سیستم ناپایدار است $\rightarrow PM = \angle G(j\omega_g) - 180^\circ < 0^\circ$



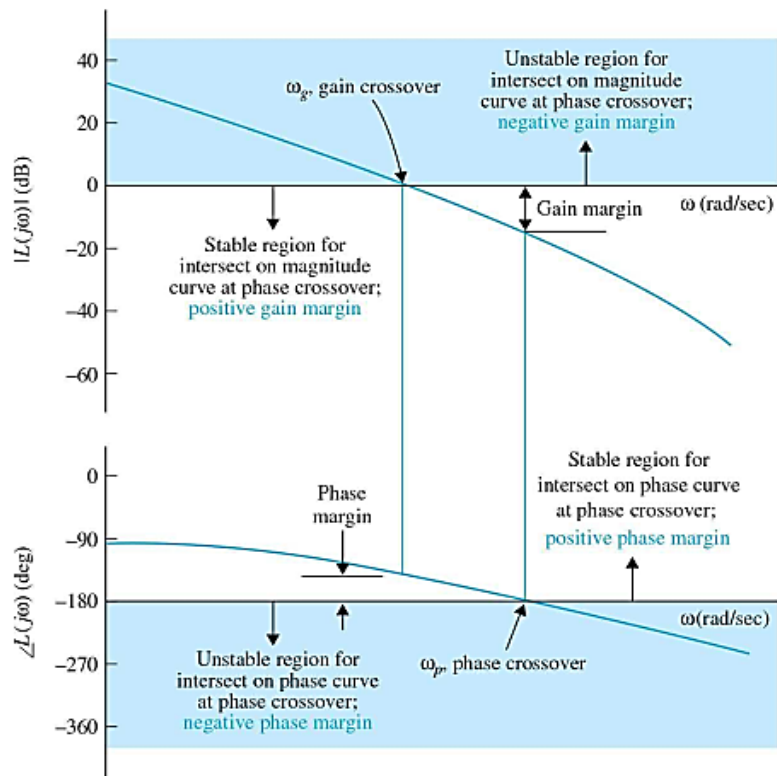
✓ مثال ۳: اگر $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$ آنگاه

سیستم در مرز ناپایداری است $\rightarrow PM = 0^\circ$

توجه: برای $G(s)$ ناپایدار یا غیر کمینه فاز ممکن است با ماشیه فاز منفی نیز پایداری سیستم ملقه بسته حاصل شود.

پایداری نسبی

• تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی



✓ با رسم خطوط افقی $0dB$ و -180° نقاط گذر بهره و فاز را تعیین می کنیم.

✓ مطابق شکل مقابل به صورت همزمان حاشیه فاز و بهره تعیین می شوند.

✓ در سیستم های کمینه فاز محدوده پایداری مطابق شکل روبرو تعیین می شود.

□ حاشیه بهره منفی به dB و حاشیه فاز منفی به درجه محدوده های ناپایداری خواهند بود

□ برای سیستم های ناپایدار با غیر کمینه فاز بهتر است از معیار پایداری نایکوئیست استفاده شود.

پایداری نسبی

• حاشیه بهره و فاز مثبت و منفی

✓ برای $G(s)$ ناپایدار یا غیر کمینه فاز ممکن است با حاشیه فاز یا حاشیه بهره مثبت و منفی برخورد کرده و لازم باشد محدوده پایداری تعیین شود:

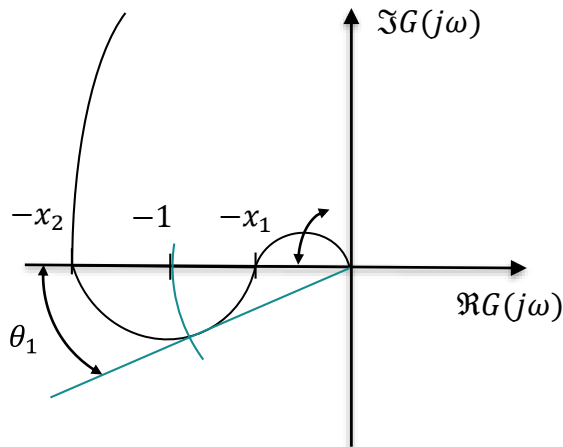
✓ برای مثال سیستمی را در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه باز آن دارای یک قطب ناپایدار است. $P = 1$

✓ با توجه به معیار پایداری نایکویست بایستی یک چرخش منفی پادساعتگرد حول نقطه $-1/K$ داشته باشیم تا $N = -1$ و سیستم حلقه بسته پایدار شود: $Z = N + P = 0$

✓ برای این سیستم دو حاشیه بهره مثبت و منفی با توجه به مقادیر $-x_1$ و $-x_2$ به دست می آید.

✓ محدوده پایداری هم از رابطه زیر به دست می آید:

$$-x_2 < -\frac{1}{K} < -x_1$$





• تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی

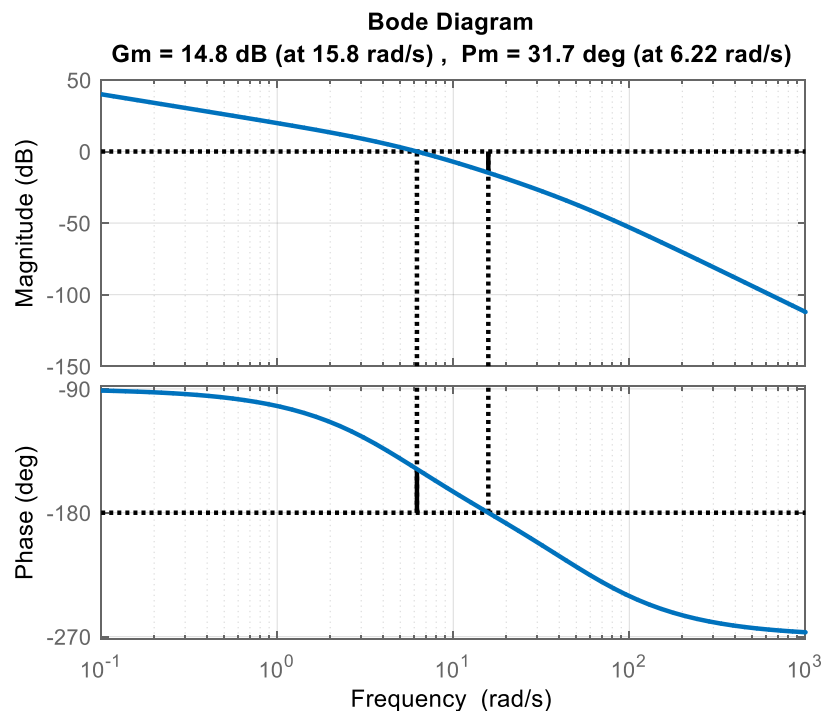
✓ مثال ۱: حاشیه فاز و بهره سیستم زیر را تعیین کنید.

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.02s+1)}$$

```
num=10;den=conv([0.2, 1 0],[0.02 1]);
sys1=tf(num,den);
margin(sys1), grid
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
```

$$GM = 14.8 \text{ dB} \quad @15.8 \text{ rad/s}$$

$$PM = 31.7^\circ \quad @6.22 \text{ rad/s}$$



مل کامپیوتری



• تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی

✓ مثال ۲: حاشیه فاز و بهره سیستم زیر را تعیین کنید.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

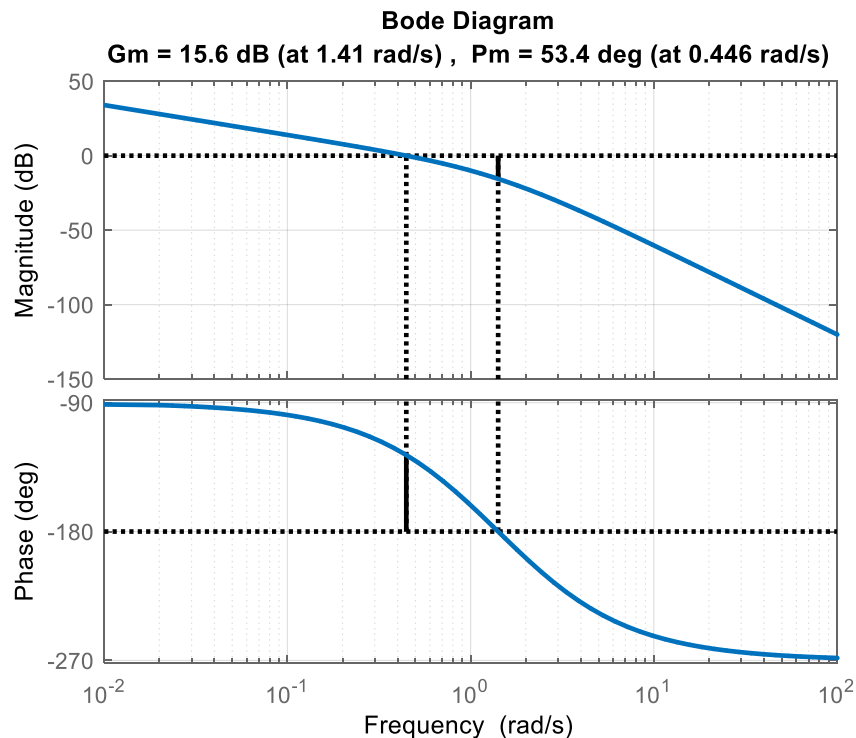
```
sys2=zpk([], [0 -1 -2], 1);
```

```
margin(sys2), grid
```

```
set(findall(figure(1), 'type', 'line'), 'linewidth', 2)
```

$$GM = 15.6 \text{ dB} \quad @1.410 \text{ rad/s}$$

$$PM = 53.4^\circ \quad @0.446 \text{ rad/s}$$



مل کامپیوتری



تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی

✓ مثال ۳: حاشیه فاز سیستم زیر را تعیین کنید.

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)(s+2)}, \tau = 1$$

□ اضافه کردن $e^{-j\tau\omega}$ نمودار اندازه را تغییر نمی دهد

□ نمودار زاویه را به اندازه $-\tau\omega$ در هر فرکانس کاهش می دهد

□ مقدار ثابت زمانی تاخیر بحرانی از τ_c حاشیه فاز به دست می آید.

$$\tau_c \omega_g = 53.4^\circ \rightarrow \tau_c = 53.4 \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{0.446}$$

$$\tau_c = 2.09$$

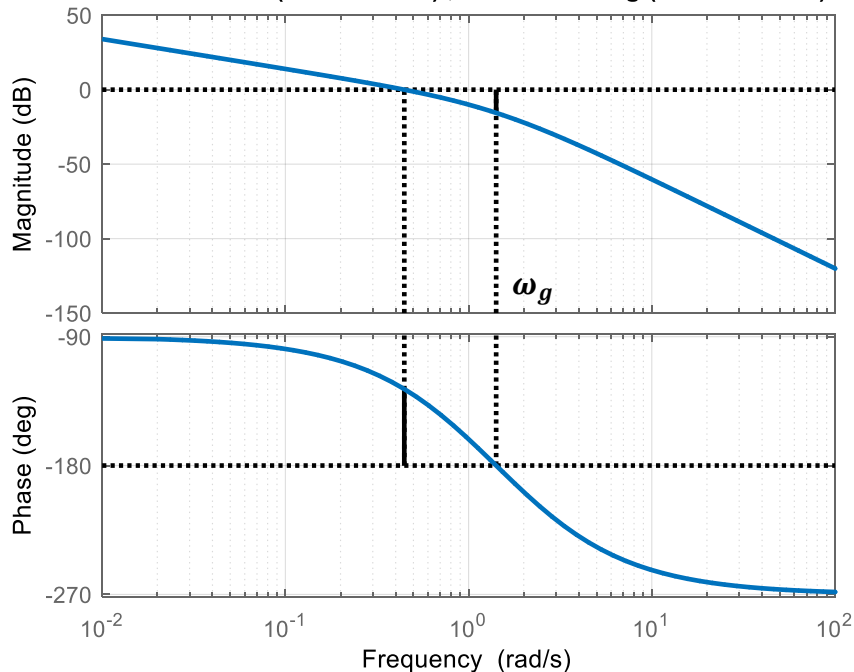
□ به ازای $\tau = 1$ تاخیر فاز اضافه شده برابر است با

$$\phi = 1 \times 0.446 \times \frac{180}{\pi} = 25.55^\circ$$

$$PM = 53.4 - 25.55 = 27.85^\circ$$

Bode Diagram

Gm = 15.6 dB (at 1.41 rad/s) , Pm = 53.4 deg (at 0.446 rad/s)



تحلیل فرکانسی سیستم با نمودار نیکولز

• انگیزه

- ✓ ویژگی های فرکانسی سیستم و حاشیه پایداری سیستم حلقه بسته $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ را می توان از پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز $L(s)$ به دست آورد.
 - ✓ تابع تبدیل حساسیت سیستم $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$ نیز رفع اغتشاش و عدم حساسیت به مدل را تعبیر می کند.
 - ✓ آیا می توان به صورت ترسیمی رابطه ای بین پاسخ فرکانسی $L(s)$ و توابع تبدیل مهم سیستم حلقه بسته $T(s), S(s)$ به دست آورد.
 - ✓ نمودار نیکولز و کانتورهای M, N این ارتباط را به صورت گرافیکی برقرار می کنند.
 - کانتور M مقادیر ثابت اندازه و کانتور N مقادیر ثابت فاز سیستم حلقه بسته را بر اساس پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز ترسیم می کنند.
 - مقدار تشدید بیشینه M_r ، فرکانس تشدید و پهنای باند سیستم نیز به راحتی مشخص می شوند.
 - ✓ اگر به جای ترسیم نمودار نیکولز $L(s)$ نمودار نیکولز $L^{-1}(s)$ را رسم کنیم همه این موارد برای تابع تبدیل حساسیت به دست می آید.
- $$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{L^{-1}(s)}{1+L^{-1}(s)}$$

تحلیل فرکانسی سیستم با نمودار نیکولز

نمودار نیکولز

✓ نمودار نیکولز از نمایش اندازه (در مقیاس dB) بر حسب زاویه (در مقیاس درجه) تابع تبدیل حلقه باز ترسیم می شود.

□ نقطه بحرانی در این نمودار تقاطع خطوط 0dB و -180° است.

□ نقطه گذر فاز جایی است که نمودار خط -180° را قطع می کند.

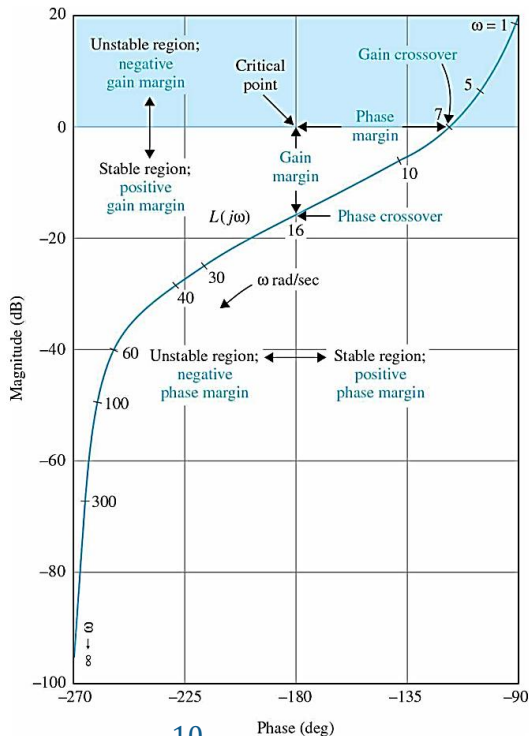
□ حاشیه بهره با استفاده از فاصله عمودی این نقطه تا 0dB تعیین می شود.

□ نقطه گذر بهره جایی است که نمودار خط 0dB را قطع می کند.

□ حاشیه فاز با استفاده از فاصله افقی این نقطه تا -180° تعیین می شود.

□ منطقه ای که حاشیه بهره یا فاز منفی می شود و سیستم حلقه بسته ناپایدار است نیز بر روی شکل مشخص شده است.

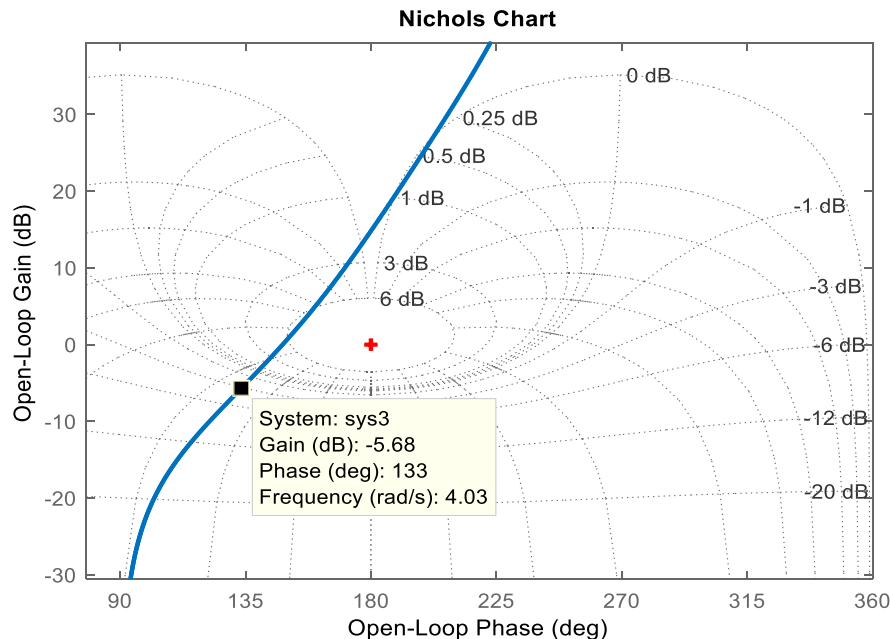
توجه: برای $L(s)$ ناپایدار یا غیر کمینه فاز از معیار پایداری نایکویست استفاده کنید..



$$L(s) = \frac{10}{s(0.02s + 1)(0.02s + 1)}$$

تحلیل فرکانسی سیستم با نمودار نیکولز

• کانتورهای نمودار نیکولز



✓ اگر کانتورهای M اندازه ثابت را بررسی کنید:

□ بیشینه تشدید M_r سیستم حلقه بسته نزدیک $6dB$

و در فرکانس 6.57 rad/s دیده می شود

□ پهنای باند از تقاطع پاسخ زمانی با کانتور $-3dB$ به

دست می آید که تقریباً 10.2 rad/s است.

✓ حال نمودار نیکولز $L^{-1}(s)$ را رسم کنید:

□ پهنای باند تابع تبدیل حساسیت از تقاطع نمودار با

کانتور $-3dB$ به دست می آید که تقریباً

4.03 rad/s است.

$$L(s) = \frac{10}{s(0.2s + 1)(0.02s + 1)}$$

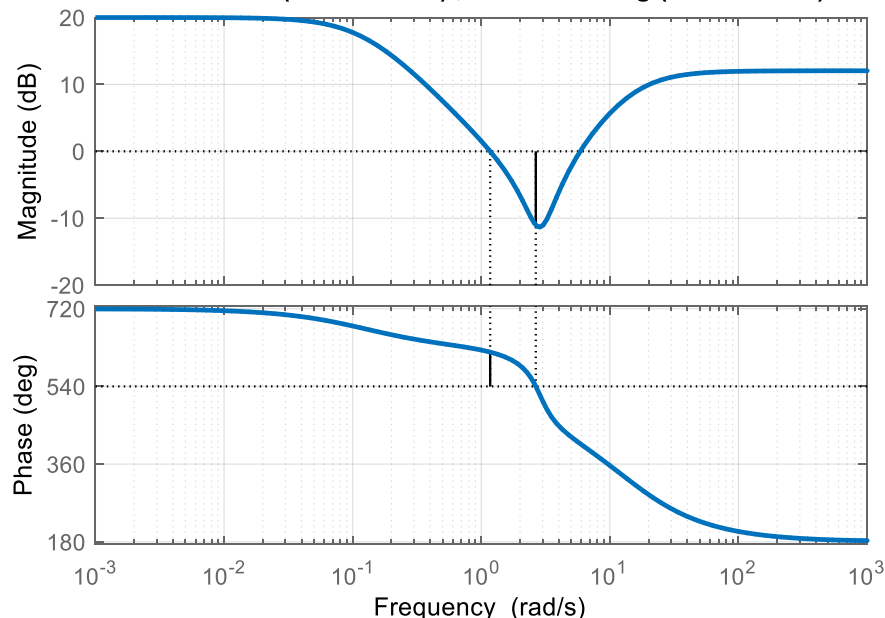


تحلیل فرکانسی سیستم با نمودار نیکولز

نمودار نیکولز

Bode Diagram

Gm = 11 dB (at 2.65 rad/s) , Pm = 79.4 deg (at 1.17 rad/s)



✓ مثال سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$L(s) = \frac{-4(s - 12.14)(s + 1.5)(s^2 - 1.37s + 8.22)}{(s + 2.28)(s + 0.12)(s^2 + 27.6s + 215.5)}$$

حاشیه پایداری و مشخصات فرکانسی سیستم حلقه بسته را تحلیل کنید.

□ ابتدا از دستور margin حاشیه پایداری را به دست می آوریم.

$$GM = 11 \text{ dB} \quad @2.65 \text{ rad/s}$$

$$PM = 79.4^\circ \quad @1.17 \text{ rad/s}$$



تحلیل فرکانسی سیستم با نمودار نیکولز

نمودار نیکولز

✓ ادامه مثال:

✓ حال نمودار نیکولز را رسم می کنیم.

□ پهنای باند سیستم: 1.68 rad/s

□ بیشینه تشدید ندارد.

✓ حال نمودار نیکولز $L^{-1}(s)$ را رسم کنید:

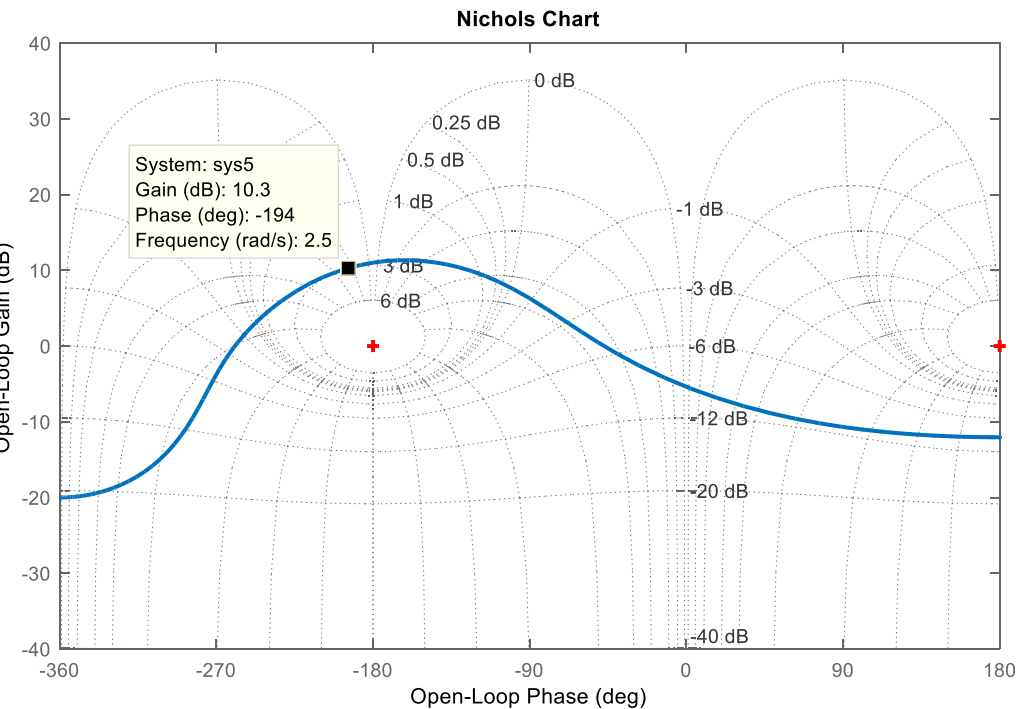
□ پهنای باند تابع تبدیل حساسیت تقریباً

4.79 rad/s است

□ بیشینه تشدید تابع تبدیل حساسیت تقریباً

3 dB و فرکانس تشدید برابر 2.5 rad/s

است.



عناوین فصل

مشخصات فرکانسی

۱ انگیزه، تشدید بیشینه M_r ، پهنای باند، فرکانس گذر بهره، فرکانس گذر فاز، نرخ شکست، مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو، مثال های کاربردی.

پایداری نسبی

۲ انگیزه، تعریف کیفی و کمی پایداری نسبی، حاشیه بهره، فرکانس گذر فاز، حاشیه فاز، فرکانس گذر بهره، تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی، حاشیه فاز و بهره مثبت و منفی، تحلیل فرکانسی با نمودار نیکولز، کانتور های نمودار نیکولز، مثال های کاربردی.

طراحی جبران ساز در موزه فرکانس

۳ چرا جبران ساز؟ رفتار مطلوب در حوزه فرکانس، ویژگی های جبران ساز های پیش فاز، پس فاز و پیش فاز-پس فاز، طراحی گام به گام جبران ساز پیش فاز، PD، پس فاز، PI، پیش فاز-پس فاز و PID، طراحی نمونه بر روی سیستم غیر کمینه فاز، ارزیابی رفتار زمانی و فرکانسی.

طراحی کنترلر با تابع تبدیل مساسیت

۴ انگیزه، تابع تبدیل حساسیت و متمم آن، توابع مطلوب، چگونگی طراحی کنترلر، کنترلر سره و علی، قضیه پایداری (شرایط درون یابی)، چگونگی طراحی یک سیستم پیچیده، سیستم ناپایدار، سیستم غیر کمینه فاز و سیستم ناپایدار و غیر کمینه فاز، مثال های کاربردی.

در این فصل طراحی جبران ساز ها و کنترلرهای فطی در موزه فرکانس مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا مشخصات فرکانسی سیستم های کنترل فطی به خصوص سیستم های مرتبه دوم مورد ملاحظه قرار گرفته و مشخصات مطلوب پیشنهاد می شوند. سپس با تعریف ماشیه پایداری، روش های تعیین ماشیه فاز و بهره در سیستم های کنترل فطی بیان شده و اهمیت آن در طراحی جبران سازهای مناسب تومیه می شود. نمودار نیکولز و کانتور های آن به منظور تحلیل ماشیه پایداری و رفتار سیستم های کنترل فطی معرفی خواهد شد. روش های طراحی جبران سازهای پایه ای و پرکاربرد در صنعت، از جمله جبران ساز های پیش فاز، پس فاز، پیش فاز-پس فاز و متناظرا PD، PI و PID بیان شده و بر روی سیستم غیر کمینه فازی اعمال می شوند. در نهایت با استفاده از تابع تبدیل مساسیت روش های طراحی کنترلرهای مرتبه بالاتر برای سیستم های پیچیده، ناپایدار و غیر کمینه فاز مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.



طراحی جبران ساز دینامیکی

مقدمه

✓ طراحی کنترلگر با استفاده از مکان هندسی ریشه ها

□ ارتباط مستقیم محل قطب های سیستم حلقه بسته با رفتار گذرا و پایداری نسبی

□ امکان طراحی تنها یک پارامتر

✓ طراحی کنترلگر با استفاده از پاسخ فرکانسی

□ ارتباط غیرمستقیم پاسخ فرکانسی بسته حلقه باز با رفتار گذرا و پایداری نسبی سیستم حلقه بسته

□ امکان طراحی بر اساس چند هدف و تعیین بیش از یک پارامتر

✓ چرا جبران ساز؟ جبران ساز به بخشی از کنترلگر گفته می شود که

□ به سیستم اصلی اضافه می شود تا مرحله به مرحله ضعف کارایی کنترلگر را رفع نماید.

□ ابتدا از کنترلگر بهره ثابت طراحی آغاز و در ادامه برای بهبود حاشیه پایداری، خطای ماندگار و سرعت سیستم بخش های

جبران سازی، پیش فاز یا پس فاز و یا هر دو به کنترلگر اضافه می شود.



طراحی جبران ساز دینامیکی

• مقدمه

✓ رفتار گذرای سیستم حلقه بسته

- در طراحی در حوزه فرکانس رفتار گذرا به صورت غیر مستقیم با حاشیه پایداری و بیشینه تشدید M_r مرتبط است.
- سرعت پاسخ به فرکانس گذر بهره، فرکانس تشدید و پهنای باند مرتبط است.
- خطای ماندگار به ورودی پله، شیب یا سهمی به بهره DC سیستم (در فرکانس صفر) مرتبط است.

✓ در طراحی در حوزه فرکانس

- ابتدا سیستم حلقه باز معین شده و از حلقه فیدبک با بهره واحد استفاده می کنیم.
- نمودار بودی سیستم حلقه باز بسیار راهگشا است و مورد استفاده قرار می گیرد.
- با استفاده از جبران ساز بهره ثابت اندازه پاسخ فرکانسی سیستم به اندازه این بهره بالا (بهره بزرگتر از ۱) و یا پایین (بهره کوچک تر از ۱) می رود، در حالی که فاز سیستم تغییر نمی کند.



طراحی جبران ساز دینامیکی

• مقدمه

✓ در طراحی در حوزه فرکانس

□ جبران ساز بهره ثابت یا به منظور کاهش خطای ماندگار به سیستم اضافه می شود یا برای تنظیم حاشیه بهره و فاز

□ اگر هر دو هدف را نتوان با یک بهره ثابت تامین کرد

• معمولاً از یک جبران ساز پس فاز برای تامین خطای ماندگار مناسب و/یا

• از یک جبران ساز پیش فاز برای تامین حاشیه پایداری یا پهنای باند مورد نیاز استفاده می شود.

□ اگر سیستم حلقه باز ناپایدار و یا غیر کمینه فاز باشد به منظور تحلیل پایداری نمودار بودی کافی نیست و از نمودار

نایکویست نیز استفاده می شود.

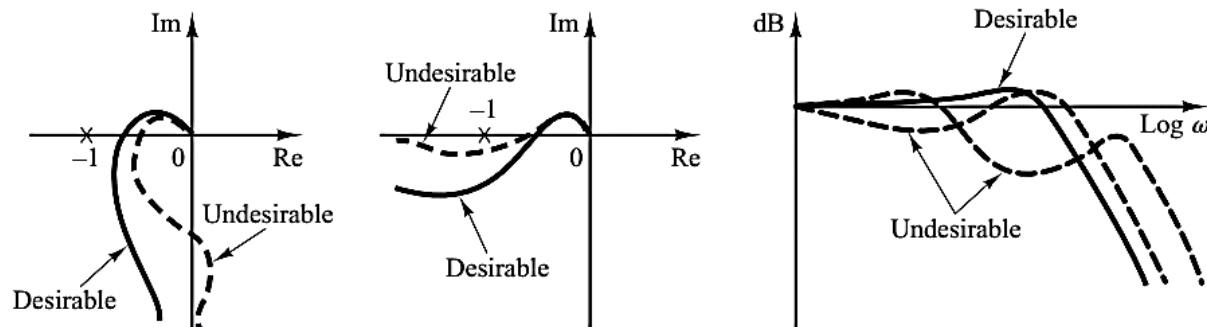
□ اگر سیستم حلقه باز دارای قطب ها و صفر های پایدار (در فرکانس بالا) باشد می توان ابتدا از یک جبران ساز اولیه

برای حذف یا جایگزینی آنها استفاده نمود و سپس سایر جبران ساز ها را به کنترلگر اضافه نمود.

طراحی جبران ساز دینامیکی

پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز مطلوب

- ✓ رفتار مناسب یک مصالحه بین خطای ماندگار کم و حاشیه پایداری و سرعت مناسب است.
- بدین منظور بهره DC سیستم حلقه باز بایستی تا حد ممکن زیاد باشد (خطای ماندگار کم)
- شیب نمودار اندازه در نزدیکی فرکانس گذر بهره می بایست نزدیک -20dB/decade باشد (قضیه بودی)
- حاشیه فاز به اندازه کافی بزرگ باشد (بین 30° تا 60° درجه)





طراحی جبران ساز دینامیکی

• ویژگی های جبران سازهای پیش فاز و پس فاز

✓ جبران ساز پیش فاز (Lead)

- رفتار گذرای سیستم حلقه بسته را به صورت قابل توجهی بهبود می بخشد.
- تاثیر زیادی در بهبود خطای ماندگار سیستم ندارد.
- تاثیر نویز اندازه گیری در پاسخ سیستم حلقه بسته را تشدید می کند.

✓ جبران ساز پس فاز (Lag)

- خطای ماندگار سیستم را به صورت قابل توجهی بهبود می دهد.
- تاخیر زمانی زیادی در رفتار گذرای سیستم اعمال می کند.

✓ جبران ساز پس فاز-پیش فاز (Lag-Lead)

- ویژگی های مثبت هر دو جبران ساز را فراهم می نماید.



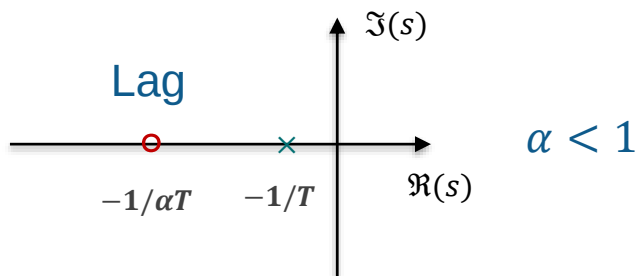
طراحی جبران ساز دینامیکی

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} \right)$$

• ویژگی های جبران سازهای پیش فاز و پس فاز

جبران ساز پس فاز

قطب به مبدا خیلی نزدیکتر است.

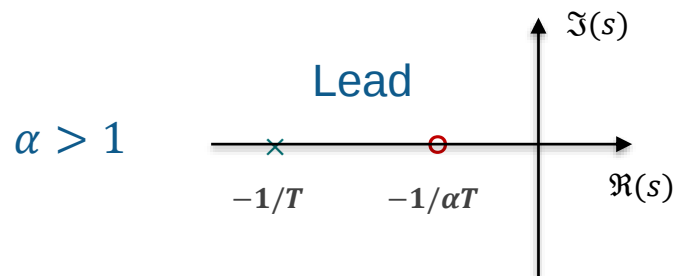


فاز منفی به سیستم اضافه می کند.

بهره سیستم را در فرکانس های پایین به اندازه K_c افزایش می دهد.

جبران ساز پیش فاز

صفر به مبدا نزدیکتر است.



فاز مثبت به سیستم اضافه می کند.

بهره سیستم را در فرکانس های بالا به اندازه $K_c \alpha$ افزایش می دهد.



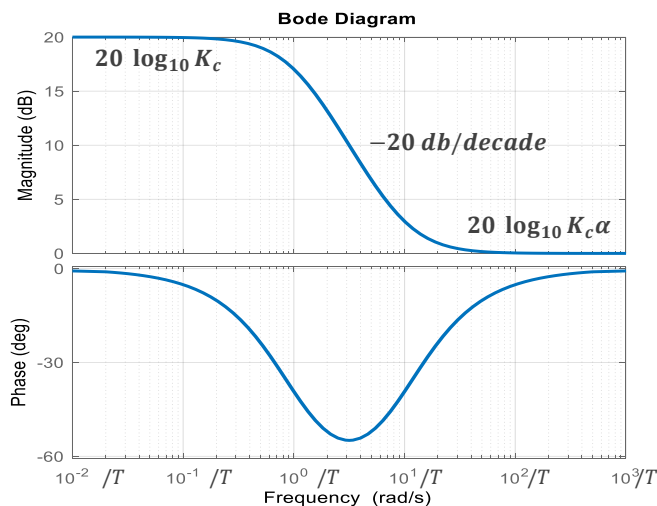
طراحی جبران ساز دینامیکی

ویژگی های جبران سازهای پیش فاز و پس فاز

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right)$$

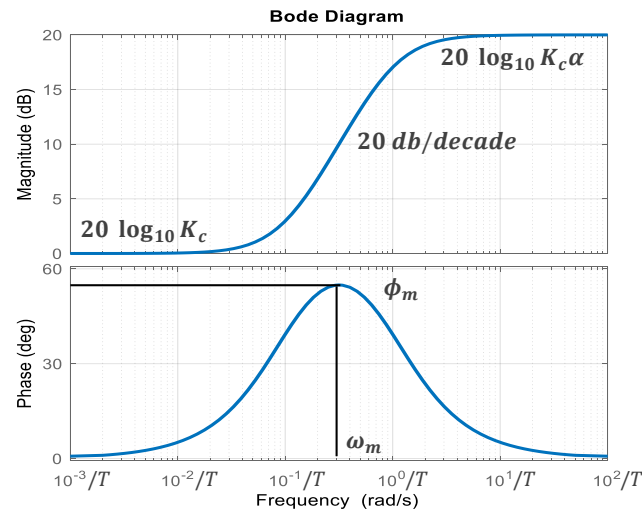
جبران ساز پس فاز

پاسخ فرکانسی به ازای $K_c = 10; T = 1, \alpha = 0.1$



جبران ساز پیش فاز

پاسخ فرکانسی به ازای $K_c = T = 1, \alpha = 10$

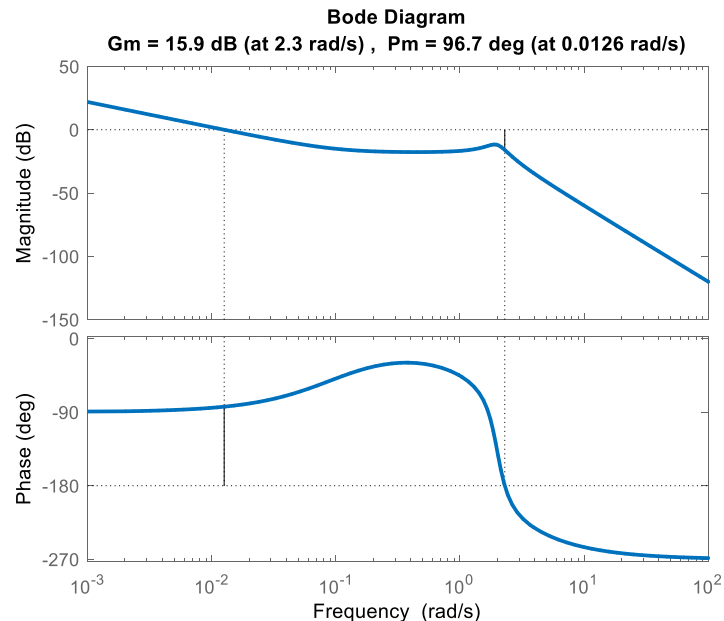




طراحی جبران ساز دینامیکی

• گام اول: طراحی کنترلر بهره ثابت $C(s) = K$

✓ با استفاده از کنترلر بهره ثابت در حلقه فیدبک



□ فاز سیستم تغییر نمی کند اما بهره سیستم به میزان $K > 1$ تقویت (و یا $K < 1$ تضعیف) می شود.

□ در نمودار بودی فاز تغییر نکرده ولی نمودار اندازه به ازای $K > 1$ به میزان $20 \log_{10} K$ بالاتر می رود.

□ فرکانس گذر بهره افزایش می یابد: سرعت سیستم افزایش می یابد.

□ بهره DC سیستم افزایش می یابد: خطای ماندگار سیستم کم می شود.

□ حاشیه فاز و بهره سیستم تغییر می کند.

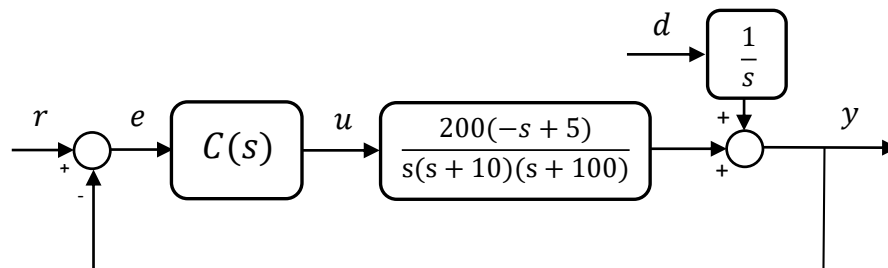
□ طراحی بهره مناسب مصالحه ای بین حاشیه پایداری و سرعت پاسخ یا میزان خطای ماندگار سیستم است.

$$L(s) = \frac{K(s + 0.1)}{s(s + 2)(s^2 + 0.7s + 4)}, K = 1$$

طراحی جبران ساز دینامیکی

• مثال طراحی

✓ سیستم غیر کمینه فاز زیر را در نظر بگیرید، که در آن اغتشاش در خروجی سیستم به آن اعمال می شود.



✓ کنترلر بهره ثابت $C(s) = K$ به گونه ای طراحی کنید که حاشیه فاز سیستم حلقه بسته بزرگتر از 65° و حاشیه بهره سیستم بیش از $10dB$ گردد.

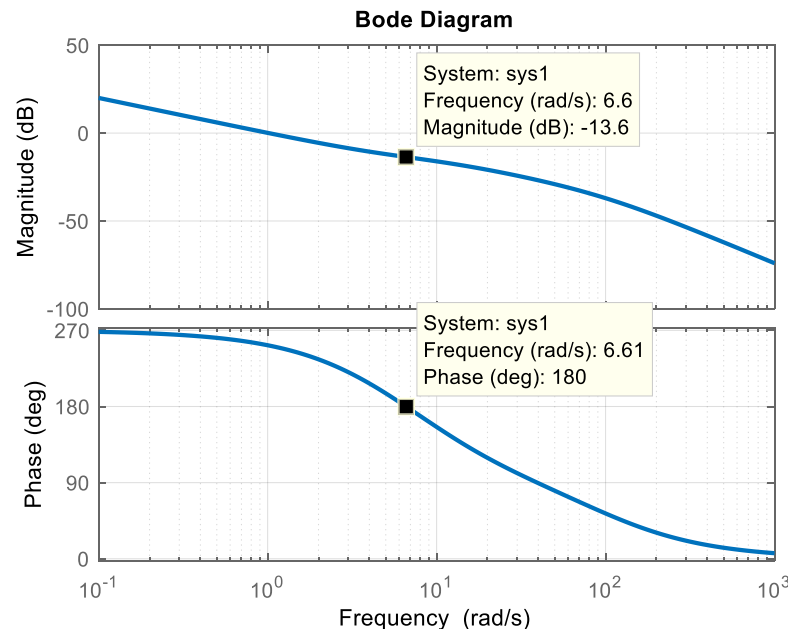
□ نمودار بودی سیستم را ترسیم و حاشیه پایداری آنرا در حالت $K = 1$ تعیین می کنیم.



طراحی جبران ساز دینامیکی

ادامه مثال طراحی

✓ نمودار بودی سیستم با $K = 1$



$$L(s) = \frac{K(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}, K = 1$$

□ حاشیه بهره 13.6 dB و حاشیه فاز 72.1° بیش از مقدار مطلوب است پس می توان بهره بیشتر از یک به سیستم اعمال کرد.

□ به منظور داشتن حاشیه فاز 65° بهره سیستم را در فرکانسی که زاویه آن برابر $245^\circ = -180^\circ + 65^\circ$ به دست می آوریم.

$$245^\circ @ 1.45 \rightarrow |L(j\omega)| = -2.96 \text{ dB}$$

□ بدین ترتیب $0 < K < 2.96 \text{ dB} = 1.4$

□ به منظور داشتن حاشیه بهره 10 dB بهره سیستم را در فرکانسی که فاز آن برابر -180° به دست می آوریم.

$$-180^\circ @ 6.61 \rightarrow |L(j\omega)| = -13.6 \text{ dB}$$

□ بدین ترتیب $0 < K < 3.6 \text{ dB} = 1.53$

□ بهره نهایی کنترل کننده $K = 2.96 \text{ dB} = 1.4$

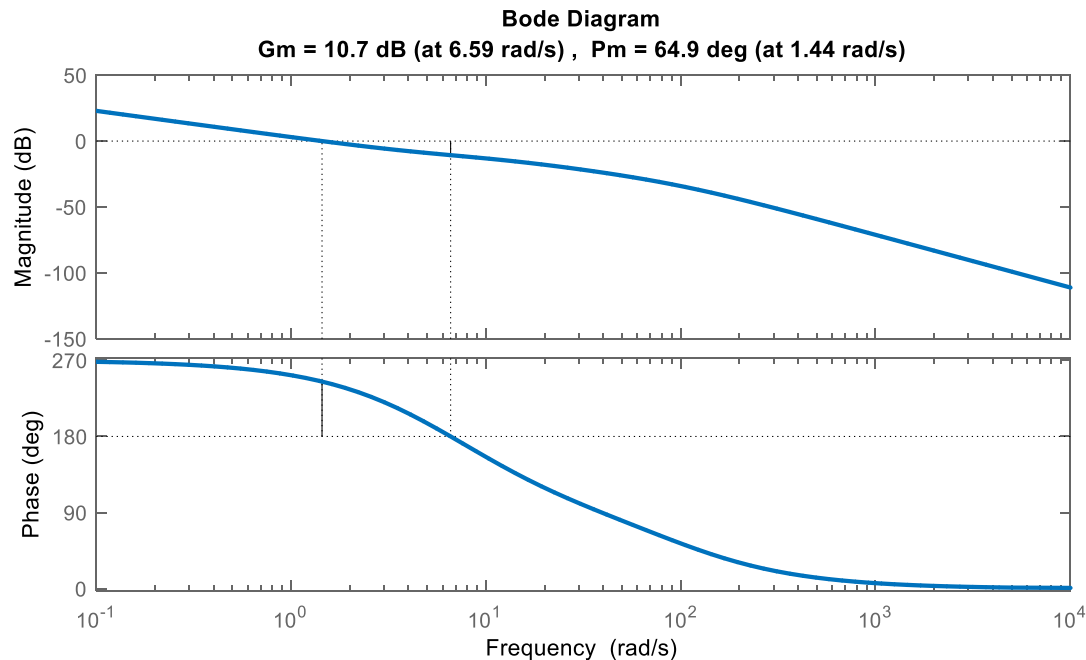


طراحی جبران ساز دینامیکی

• ادامه مثال طراحی

$$L(s) = \frac{K \cdot 200(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}, K = 1.4$$

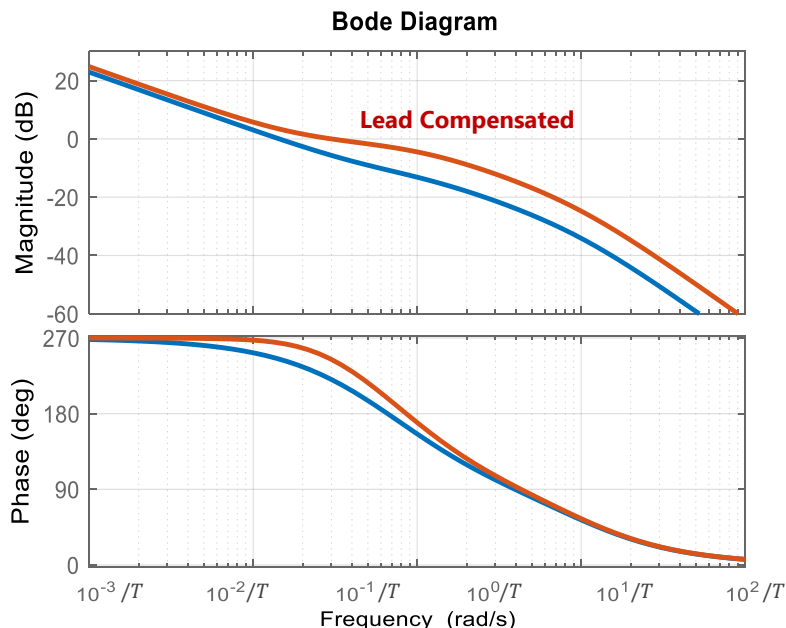
✓ نمودار بودی سیستم با $K = 1.4$





طراحی جبران ساز پیش فاز

• چرا جبران ساز پیش فاز



✓ جبران ساز پیش فاز می تواند برای اضافه کردن حاشیه فاز یا افزایش پهنای باند (سرعت پاسخ) اضافه شود.

✓ این جبران ساز شکل نمودار پاسخ فرکانسی را در فرکانس های میانی و نزدیک گذر بهره تغییر می دهد.

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right), \alpha > 1$$

✓ بدین ترتیب فرکانس گذر بهره را تا حدی افزایش می دهیم بدون اینکه حاشیه فاز تغییر کند.



طراحی جبران ساز پیش فاز

• پگونگی طراحی جبران ساز پیش فاز

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right), \alpha > 1$$

✓ در جبران ساز پیش فاز سه پارامتر K_c, α, T باید طراحی شوند:

✓ در طراحی بهینه مقدار بیشینه فاز، در فرکانس مورد نیاز به سیستم اضافه می شود.

✓ مقدار بیشینه فاز در جبران ساز پیش فاز را به دست آورید:

$$\phi = \angle C(j\omega) = \tan^{-1} \alpha \omega T - \tan^{-1} \omega T$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha T}{1 + (\alpha \omega T)^2} - \frac{T}{1 + (\omega T)^2} = 0 \rightarrow \alpha T(1 + (\omega T)^2) - T(1 + (\alpha \omega T)^2) = 0$$

$$\rightarrow \alpha \omega^2 T^3 (1 - \alpha) = T(1 - \alpha) \rightarrow \alpha \omega^2 T^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\omega T = 1/\sqrt{\alpha}}$$

$$\omega_m = 1/T\sqrt{\alpha}$$

✓ بدین ترتیب فرکانسی که در آن فاز بیشینه می شود برابر است با

$$\phi_m = \sin^{-1} \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

✓ در این فرکانس زاویه فاز بیشینه برابر است با

$$|C(j\omega_m)| = K_c \sqrt{\alpha}$$

✓ در این فرکانس اندازه جبران ساز برابر است با

$$C(s) = \frac{K_c}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right) \rightarrow |C(j\omega_m)| = K_c$$

✓ برای راحتی در طراحی بهره جبران ساز را نرمال می کنیم

طراحی جبران ساز پیش فاز

• چگونگی طراحی جبران ساز پیش فاز

✓ مقدار فاز مورد نیاز ϕ_m ، که بایستی در فرکانس گذر بهره مطلوب ω_{cd} به سیستم اضافه شود را تعیین کنید.

✓ اندازه α از رابطه زیر به دست آورید:

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

✓ با برابر قراردادن $\omega_m = \omega_{cd}$ ثابت زمانی T را به دست آورید:

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

✓ با توجه به اینکه $|C(j\omega_m)| = K_c$ بهره K_c را به گونه ای تنظیم کنید که $\omega_m = \omega_{cd}$ فرکانس گذر بهره گردد. بدین منظور لازم است بهره سیستم برابر $|K_c L(j\omega_m)| = 0dB$ شود.

پس در نتیجه

$$K_c = -|L(j\omega_m)|dB$$

جبران ساز پیش فاز نهایی: $C(s) = \frac{K_c}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right), \alpha > 1$



طراحی جبران ساز پیش فاز

• ادامه مثال طراحی

✓ جبران ساز پیش فازی به سیستم طراحی شده قبلی اضافه کنید
که فرکانس گذر بهره را از 1.44 به 3 rad/s افزایش دهد.

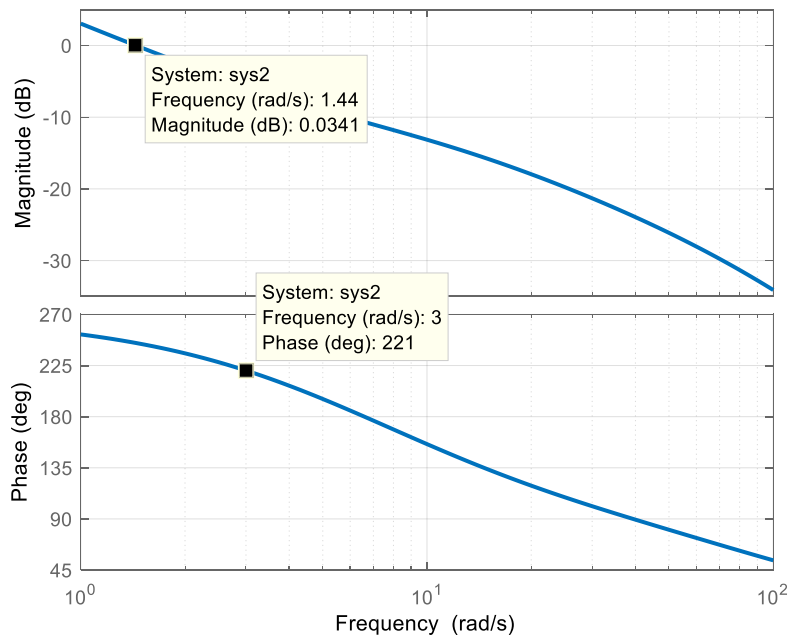
$$L(s) = \frac{K(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}, K = 1.4$$

□ نمودار بودی سیستم را رسم کرده و میزان فاز مورد نیاز در

فرکانس 3 را به دست آورید. به منظور داشتن حاشیه فاز 65° :

$$\begin{aligned} -180 + 65 &= -115^\circ = 245^\circ, & \angle L(j3) &= 221^\circ \\ \phi_m &= 245 - 221 = 24^\circ \end{aligned}$$

Bode Diagram





طراحی جبران ساز پیش فاز

• ادامه مثال طراحی

□ مقدار α را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = 2.37$$

□ مقدار T را از رابطه زیر به دست آورید.

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{3\sqrt{2.37}} = 0.22$$

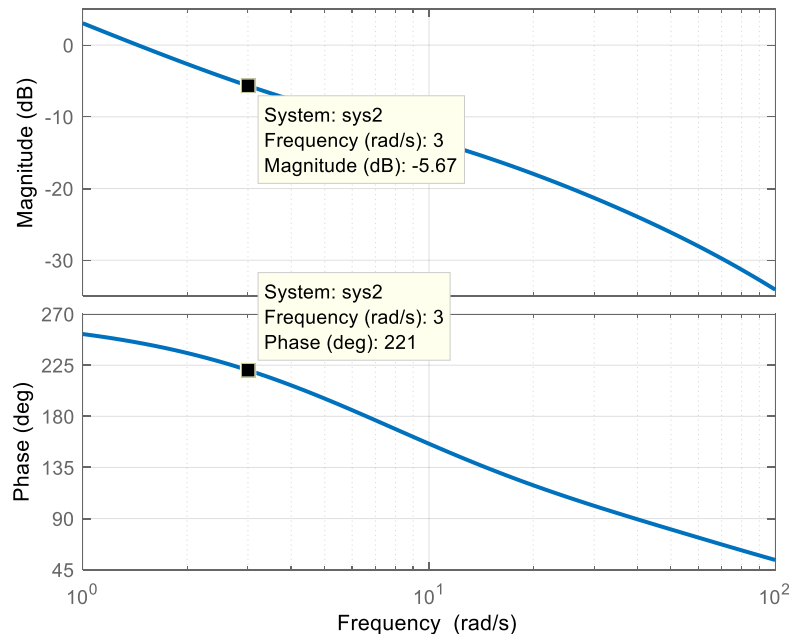
□ مقدار K_C را از اندازه بهره حلقه در فرکانس 3 به دست آورید.

$$K_C = -|L(j3)|_{dB} = 5.67 \text{ dB} = 1.92$$

□ در نتیجه جبران ساز پیش فاز پیشنهادی عبارت است از:

$$C(s) = \frac{1.92}{\sqrt{2.37}} \frac{2.37 \times 0.22s + 1}{0.22s + 1} = 1.25 \frac{0.52s + 1}{0.22s + 1}$$

Bode Diagram





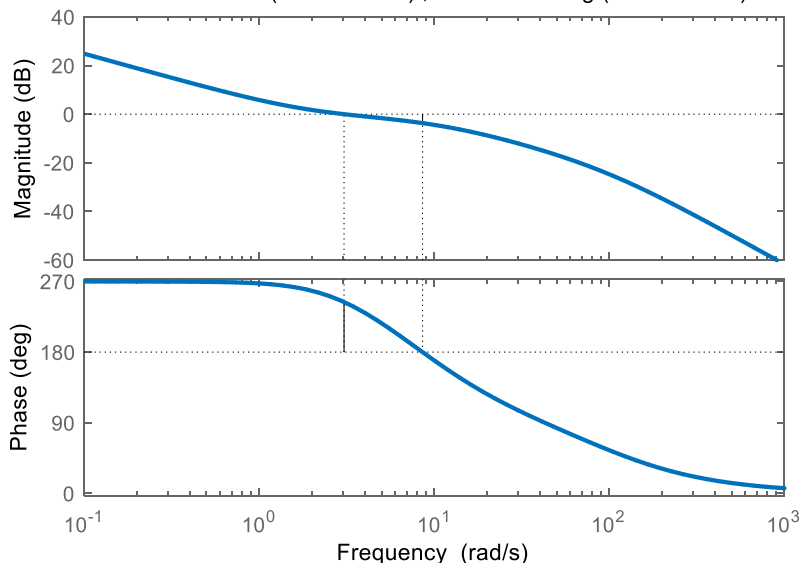
طراحی جبران ساز پیش فاز

• ادامه مثال طراحی

$$L(s) = 1.75 \frac{0.52s + 1}{0.22s + 1} \cdot \frac{200(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}$$

Bode Diagram

Gm = 3.67 dB (at 8.58 rad/s) , Pm = 63.8 deg (at 3.05 rad/s)



✓ نمودار بودی سیستم جبران سازی شده را ترسیم نمایید.

□ حاشیه فاز و بهره را ملاحظه کنید.

$$PM = 64^\circ \quad \text{But} \quad GM = 3.67dB$$

□ به علت غیر کمینه فاز بودن سیستم طراحی آسان نیست

□ اگر بخواهیم حاشیه بهره را اضافه کنیم بایستی بهره

سیستم را کاهش دهیم.

□ با کاهش بهره سیستم پهنای باند سیستم کاهش می یابد!

□ در این طراحی این مصالحه را پذیرفته و به بهای داشتن

حاشیه پایداری کمتر سرعت پاسخ را ترجیح می دهیم.

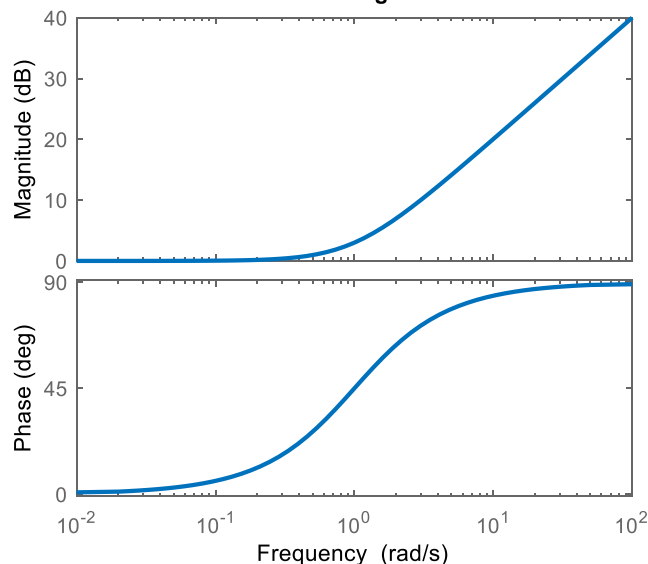


طراحی جبران ساز PD

• پگونگی طراحی جبران ساز PD

$$C(s) = K_c(Ts + 1)$$

Bode Diagram



- ✓ جبران ساز PD دارای یک صفر کمینه فاز و بدون قطب است.
- ✓ می توان آنرا حالت حدی جبران ساز پیش فاز در نظر گرفت که در آن T به سمت صفر میل کرده و αT محدود باقی می ماند.
- ✓ این جبران ساز علی نیست و به صورت ایده آل قابل پیاده سازی نیست، مگر اینکه سیگنال خروجی و مشتق آن هر دو اندازه گیری شوند.
- ✓ بنابر این در پیاده سازی عملی بیشتر اوقات از کنترل کننده پیش فاز استفاده می شود.
- ✓ فاز اضافه شده در جبران ساز PD تا ۹۰ درجه اضافه شده و بیشتر از جبران ساز پیش فاز است.
- ✓ بهره این جبران ساز نیز با افزایش فرکانس با شیب 20dB/decade افزایش می یابد.



طراحی جبران ساز PD

• پگونگی طراحی جبران ساز PD

- ✓ فاز جبران ساز در فرکانس های مختلف برابر است با:

$$\angle C(j\omega) = \tan^{-1} \omega T$$
- ✓ مقدار فاز مورد نیاز ϕ_{cd} ، که بایستی در فرکانس گذر بهره مطلوب ω_{cd} به سیستم اضافه شود را تعیین کنید.
- ✓ ثابت زمانی T را با توجه به فاز مورد نیاز تعیین کنید:

$$T = \frac{1}{\omega_{cd}} \tan \phi_{cd}$$
- ✓ بهره K_c را به گونه ای تنظیم کنید که در ω_{cd} فرکانس گذر بهره $|K_c L(j\omega_{cd})| = 0dB$ شود.
- ✓ برای راحتی در طراحی بهره جبران ساز را نرمال می کنیم:

$$C(s) = \frac{K_c}{(\omega_{cd}^2 T^2 + 1)^{1/2}} (Ts + 1) \rightarrow |C(j\omega_{cd})| = K_c$$

$$K_c = -|L(j\omega_{cd})|dB$$

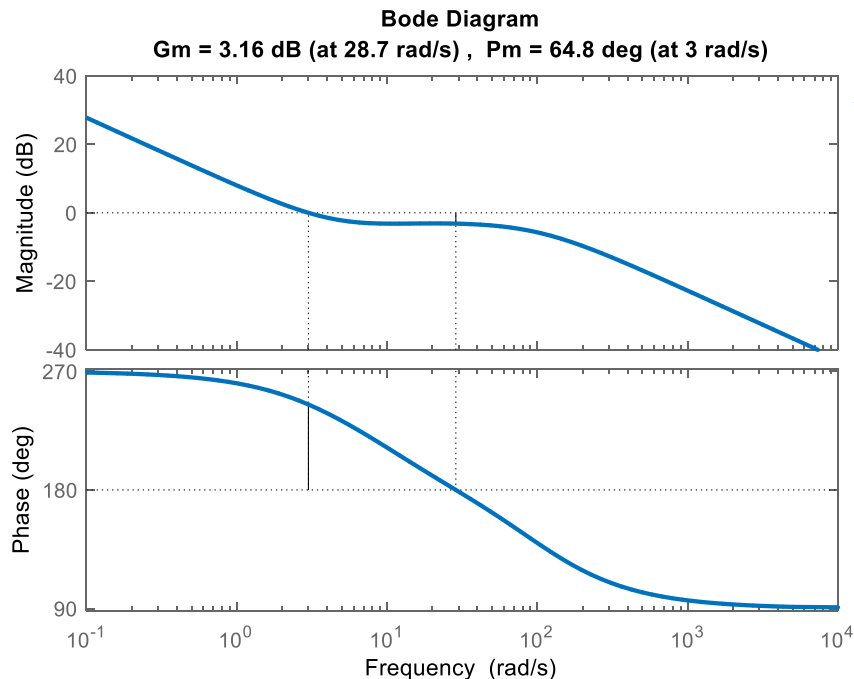
پس در نتیجه بهره جبران ساز را از این رابطه به دست آورید.

$$C(s) = \frac{K_c}{(\omega_{cd}^2 T^2 + 1)^{1/2}} (Ts + 1) \quad \text{جبران ساز PD نهایی:}$$



طراحی جبران ساز PD

• ادامه مثال طراحی



✓ با توجه به طراحی جبران ساز پیش فاز زاویه فاز مورد نیاز در فرکانس گذر بهره مطلوب $\omega_{cd} = 3$ برابر $\phi_d = 24^\circ$ است.

□ پس مقدار T برابر است با: $T = \frac{1}{3} \tan 24^\circ = 0.15$

□ مقدار K_c نیز همانند قبل برابر است با:

$$K_c = -|L(j3)|_{dB} = 5.67 \text{ dB} = 1.92$$

□ جبران ساز نهایی برابر است با:

$$C(s) = 1.75(0.15s + 1)$$

✓ حاشیه پایداری را با استفاده از نمودار بودی تعیین و بررسی کنید.



طراحی جبران ساز پس فاز

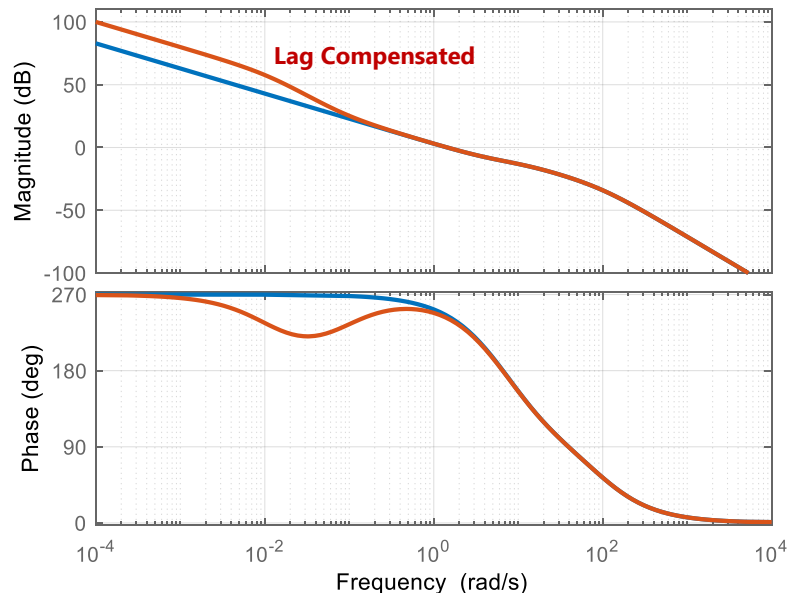
چرا جبران ساز پس فاز

- ✓ جبران ساز پس فاز می تواند برای افزودن بهره حلقه در فرکانس های پایین به منظور کاهش خطای ماندگار سیستم اضافه شود.
- ✓ این جبران ساز شکل نمودار پاسخ فرکانسی را در فرکانس های نزدیک صفر و قبل از گذر بهره تغییر می دهد.

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right), \alpha < 1$$

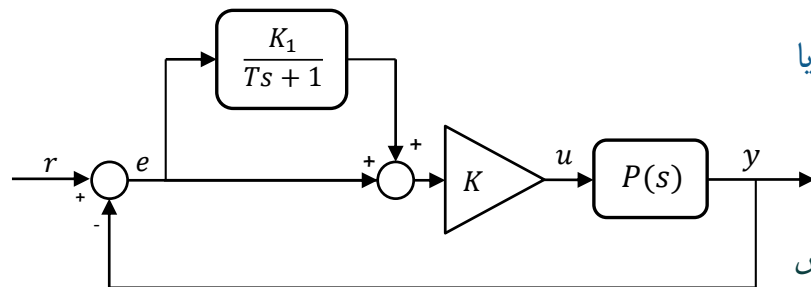
- ✓ بدین ترتیب بهره DC را تا حدی افزایش می دهیم که نیازمندی خطای ماندگار مرتفع شود بدون اینکه فرکانس گذر بهره و ویژگی های حاشیه پایداری تغییر کند.

Bode Diagram



طراحی جبران ساز پس فاز

• چگونگی طراحی جبران ساز پس فاز



✓ با استفاده از قضیه مقدار ماندگار یا از روی ثابت های موقعیت، سرعت یا شتاب سیستم، بهره DC مورد نیاز سیستم حلقه باز را تعیین کنید.

□ اگر این بهره را مستقیماً توسط جبران ساز بهره ثابت می توانید به سیستم اعمال کنید و حاشیه پایداری مطلوب را تضمین کنید نیازی به جبران ساز پس فاز ندارید.

□ اگر بهره مورد نیاز بی نهایت باشد بایستی از جبران ساز PI استفاده کنید.

$$C(s) = 1 + \frac{K_1}{Ts + 1} = \frac{Ts + (K_1 + 1)}{Ts + 1}$$

$$C(s) = (1 + K_1) \frac{T/(K_1 + 1)s + 1}{Ts + 1}$$

با فرض $K_c = 1 + K_1, > 1$ $\alpha = \frac{1}{K_c} < 1$

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right)$$

✓ یک تابع تبدیل پس فاز درجه یک به صورت موازی به سیستم حلقه بسته اضافه کنید.

✓ تابع تبدیل جبران ساز را به دست آورید و به فرم استاندارد تبدیل کنید.

□ توجه کنید که با در نظر گرفتن $\alpha = \frac{1}{K_c}$ بهره جبران ساز در فرکانس های بالا برابر یک خواهد شد.



طراحی جبران ساز پس فاز

• چگونه طراحی جبران ساز پس فاز

$$K_1 = K_c - 1$$

✓ مقدار K_c را برابر بهره مطلوب مورد نیاز قرار دهید و K_1 را تعیین کنید.

✓ به منظور حفظ حاشیه پایداری بهره سیستم در فرکانس گذر بهره نبایستی تغییر کند.

□ با در نظر گرفتن $\alpha = \frac{1}{K_c}$ بهره جبران ساز در فرکانس های بالا برابر یک خواهد شد.

□ محل صفر جبران ساز پس فاز بایستی هشت تا ده برابر کوچکتر از فرکانس گذر بهره باشد.

□ همچنین

$$|C(j\omega_c)| \cong 0dB \rightarrow \left| \frac{K_1}{j\omega_c T + 1} \right| = \frac{K_1}{\sqrt{(\omega_c T)^2 + 1}} = \epsilon \ll 1$$

$$\epsilon = 0.1 \text{ to } 0.01$$

✓ مقدار ϵ را عددی کوچک در نظر بگیرید.

□ اعداد خیلی کوچک مناسب نیست چرا که کندی زیادی در پاسخ گذرای سیستم ایجاد می کند.

$$T = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{\left(\frac{K_1}{\epsilon}\right)^2 - 1}$$

✓ در نتیجه مقدار T را از رابطه زیر به دست آورید.

$$C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right), \quad K_c = 1 + K_1, > 1 \quad \alpha = \frac{1}{K_c} < 1$$

✓ جبران ساز نهایی:

✓ حاشیه پایداری سیستم را بررسی نموده و بهره K_c را تنظیم نمایید.



طراحی جبران ساز پس فاز

ادامه مثال طراحی

✓ جبران سازی طراحی نموده که خطای ماندگار به ورودی اغتشاش پله واحد را به میزان ۱۰٪ تضعیف نماید و فرکانس گذر بهره ۳ و حاشیه فاز و بهره قبلی را تغییر ندهد.

$$L(s) = 1.75 \frac{0.52s+1}{0.22s+1} \frac{200(-s+5)}{s(s+10)(s+100)} \rightarrow PM = 64^\circ \quad \& \quad GM = 3.67dB$$

✓ ابتدا بهره DC لازم برای ارضای شرایط خطای ماندگار را تعیین می کنیم. (با استفاده از ثابت سرعت نیز می توان این کار را انجام داد)

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{s} S(s) = \frac{1}{s(1+C(s)P(s))}, d(s) = \frac{1}{s} \rightarrow y(s) = \frac{1}{s^2(1+C(s)P(s))}$$

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+C(s)P(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{0 + 1.75 \times \frac{5 \times 200}{1000}} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{1.75} < \frac{1}{10}$$

✓ بهره DC مورد نیاز به اندازه کافی نیست و لازم است بهره $K_c = \frac{10}{1.75} = 5.72$ به سیستم اضافه شود:

✓ با فرض $\epsilon = 0.05$ مقدار T را از رابطه زیر به دست آورید.

$$T = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{\left(\frac{K_1}{\epsilon}\right)^2 - 1} = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{4.72}{0.05}\right)^2 - 1} = 31.5$$

✓ مقدار α را نیز برابر $\alpha = 1/K_c = 0.175$ است. بدین ترتیب جبران ساز پس فاز نهایی برابر است با

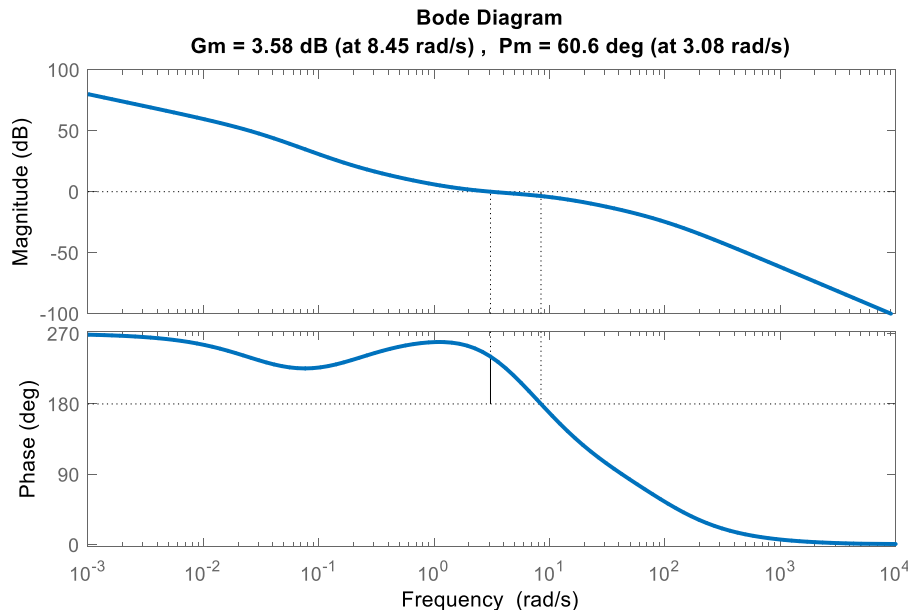
$$C(s) = C(s) = K_c \left(\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \right) = 5.72 \left(\frac{5.52s + 1}{31.5s + 1} \right)$$

طراحی جبران ساز پس فاز

• ادامه مثال طراحی

✓ حاشیه فاز سیستم حلقه بسته را بررسی کنید.

□ حاشیه فاز و بهره و فرکانس گذر بهره تغییر نکرده اند.



$$L(s) = 10 \left(\frac{5.52s + 1}{31.5s + 1} \right) \left(\frac{0.52s + 1}{0.22s + 1} \right) \frac{200(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}$$

طراحی جبران ساز PI

• پیکونگی طراحی جبران ساز PI

✓ در جبران ساز PI از یک انتگرالگیر استفاده می شود.

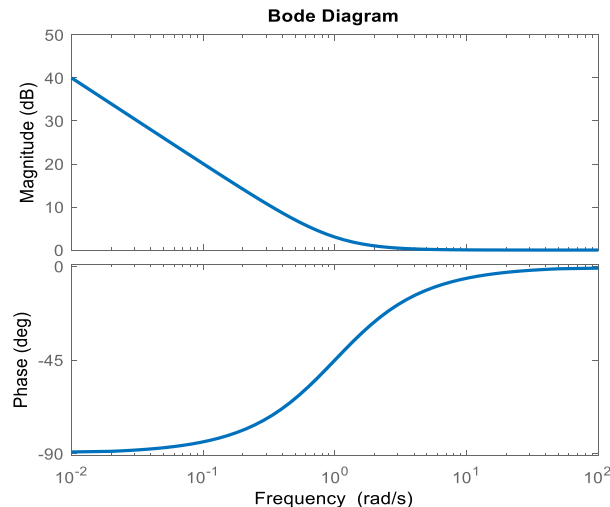
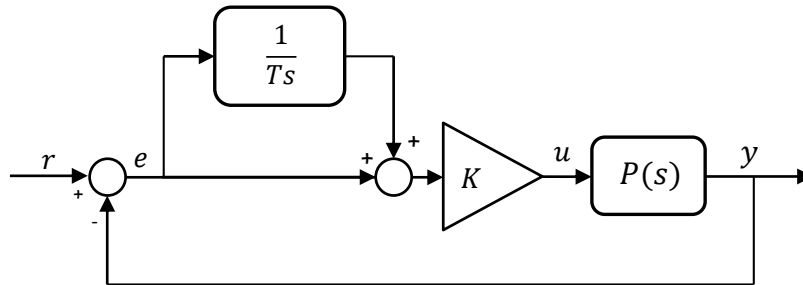
$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{Ts} \right)$$

✓ می توان آنرا حالت حدی جبران ساز پس فاز در نظر

گرفت که در آن T به سمت بی نهایت میل کرده و $\frac{K}{T}$ محدود باقی می ماند.

✓ فاز کاهش یافته در جبران ساز PI تا -90° می رسد و بیش از جبران ساز پس فاز است.

✓ بهره این جبران ساز در فرکانس صفر بی نهایت و این بهره با شیب -20dB/decade کاهش می یابد.





طراحی جبران ساز پس فاز

• پگونگی طراحی جبران ساز PI

✓ در جبران ساز PI نوع سیستم یک مرتبه افزایش می یابد و خطای ماندگار کاهش می یابد.

✓ هزینه آن کندی پاسخ در حالت گذرا است.

✓ با توجه به اینکه بهره زیادی به سیستم تزریق می شود در طراحی

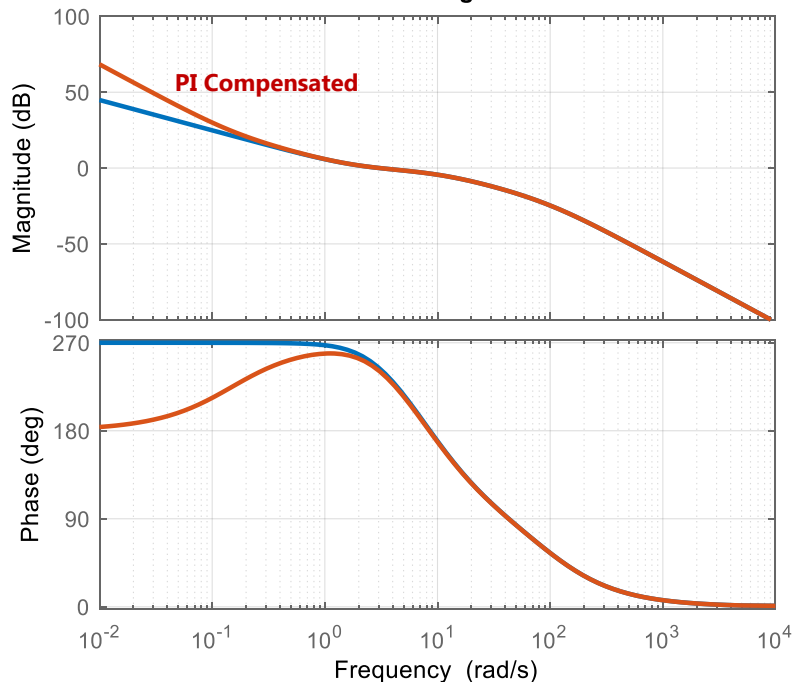
کافی است $\frac{1}{\omega_c T} = \epsilon \ll 1$ باشد.

✓ مقدار ϵ را بین 0.1 تا 0.01 در نظر گرفته و ثابت زمانی T را از این رابطه به دست آورید

$$T = \frac{1}{\omega_c \epsilon}$$

✓ حاشیه پایداری سیستم را بررسی نموده و بهره K را تنظیم نمایید.

Bode Diagram





طراحی جبران ساز PI

ادامه مثال طراحی

✓ مقدار ϵ را برابر 0.05 در نظر گرفته و برای سیستم جبران سازی شده پیش فاز و فرکانس گذر بهره 3 ثابت زمانی T را به دست آورید

$$T = \frac{1}{\omega_c \epsilon} = \frac{1}{3 \times 0.05} = 6.67$$

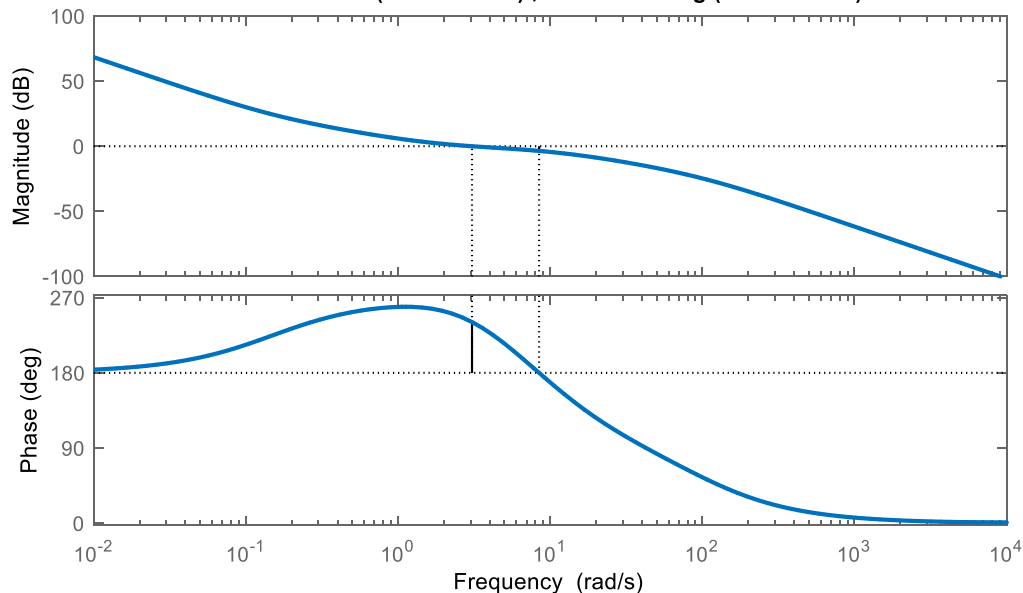
✓ جبران ساز PI نهایی برابر است با

$$C(s) = \left(1 + \frac{1}{6.67s}\right)$$

✓ حاشیه پایداری سیستم را بررسی نموده و مشاهده می شود تغییری نگرفته است.

Bode Diagram

Gm = 3.6 dB (at 8.45 rad/s) , Pm = 60.8 deg (at 3.06 rad/s)



$$L(s) = 1.75 \left(1 + \frac{1}{6.67s}\right) \left(\frac{0.52s + 1}{0.22s + 1}\right) \frac{200(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}$$



طراحی جبران ساز PID

• ادامه مثال طراحی

✓ اگر جبران ساز PI طراحی شده

$$C(s) = \left(1 + \frac{1}{6.67s}\right)$$

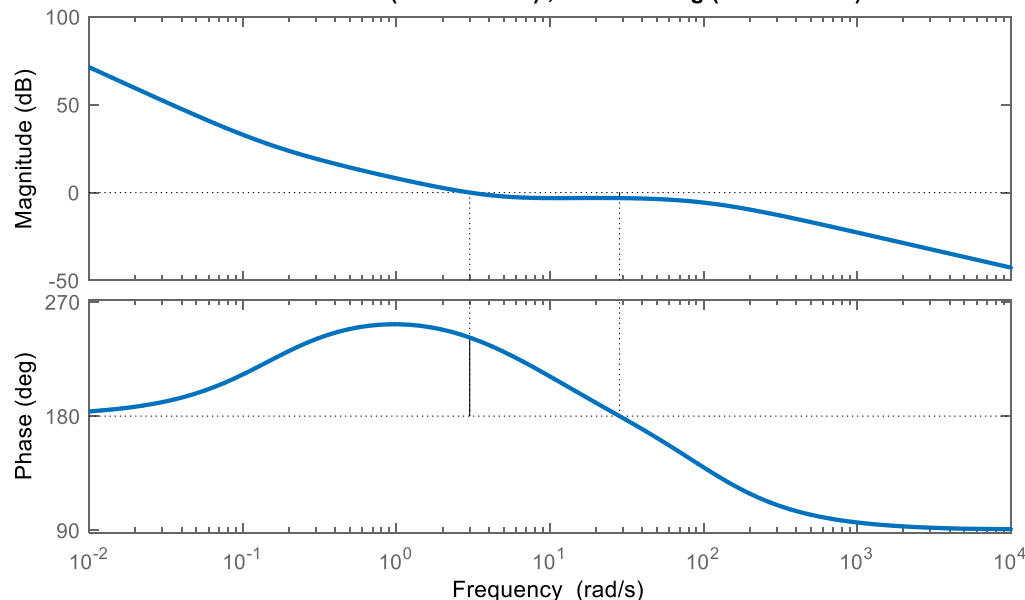
را بر روی سیستم جبران سازی شده PD

اعمال کنیم. کنترل کننده متداول PID حاصل می شود.

✓ حاشیه پایداری سیستم را بررسی نموده و

مشاهده می شود تغییری نکرده است.

Bode Diagram
Gm = 3.15 dB (at 28.4 rad/s) , Pm = 62 deg (at 3.01 rad/s)



$$L(s) = 1.75 \left(1 + \frac{1}{6.67s}\right) (0.15s + 1) \frac{200(-s + 5)}{s(s + 10)(s + 100)}$$

مقایسه جبران سازهای طراحی شده

• مقایسه زمانی

✓ به منظور شبیه سازی پاسخ پله

سیستم های مختلف مدل

سیمولینک مقابل را تولید کنید.

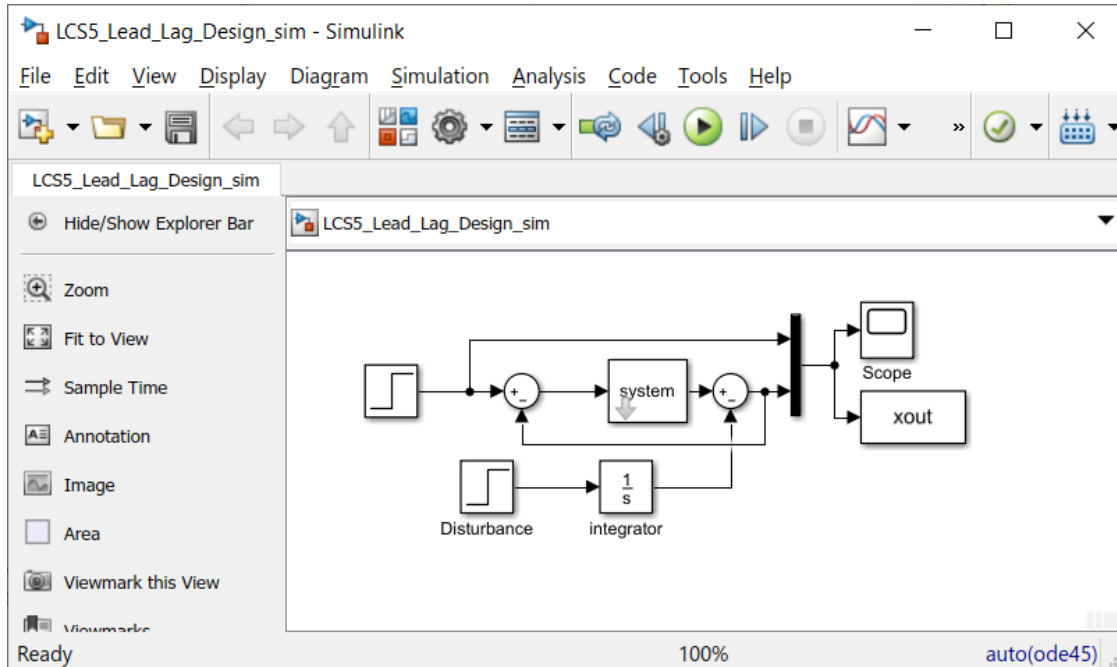
□ سیستم های مختلف طراحی شده

را جایگزین بلوک system کنید.

□ ورودی مرجع پله واحد

□ ورودی اغتشاش پله واحد در زمان

۵ ثانیه



کد متلب LCS5_Lead_Lag_Design_sim.slx

مقایسه جبران سازهای طراحی شده

مقایسه زمانی

✓ پاسخ پله سیستم های زیر را شبیه سازی و ترسیم کنید

□ سیستم حلقه بسته با بهره ثابت

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز پیش فاز

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز پیش فاز-پس فاز

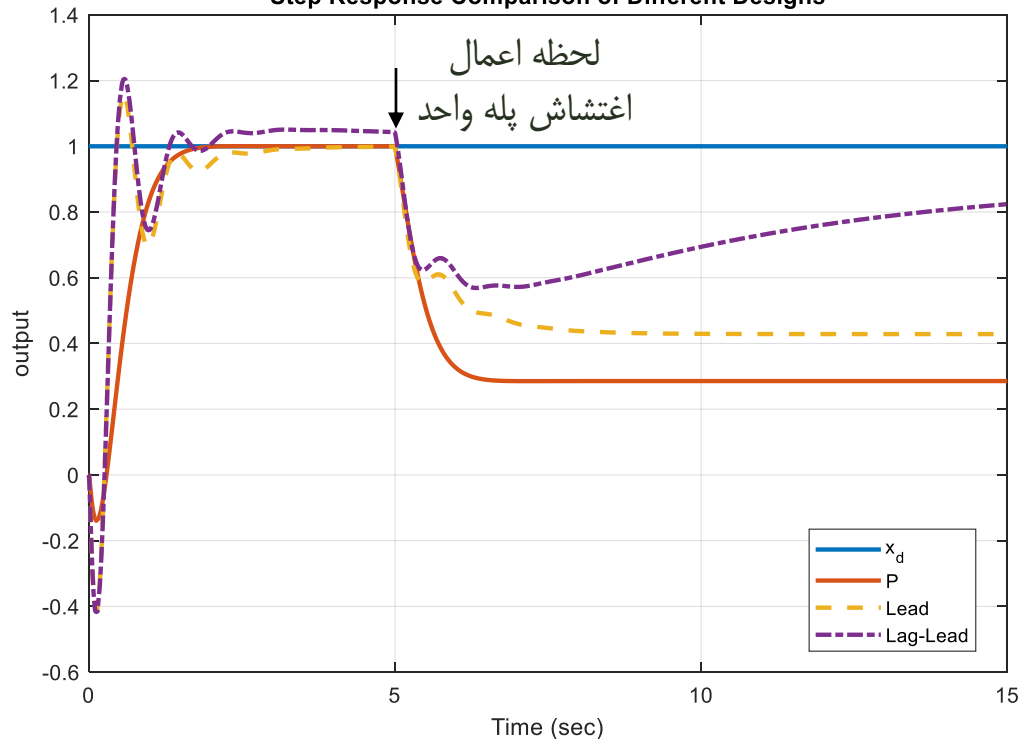
✓ کلیه پاسخها فروجهش دارند

✓ پاسخ سیستم اول بسیار هموار و بدون نوسانات ولی با کندی بیشتر و عدم توانایی رفع اغتشاش

✓ پاسخ سیستم بسیار سریعتر ولی با نوسانات و عدم توانایی رفع اغتشاش

✓ پاسخ سیستم سوم تند و با رفع اغتشاش پله (با کندی ولی به درستی)

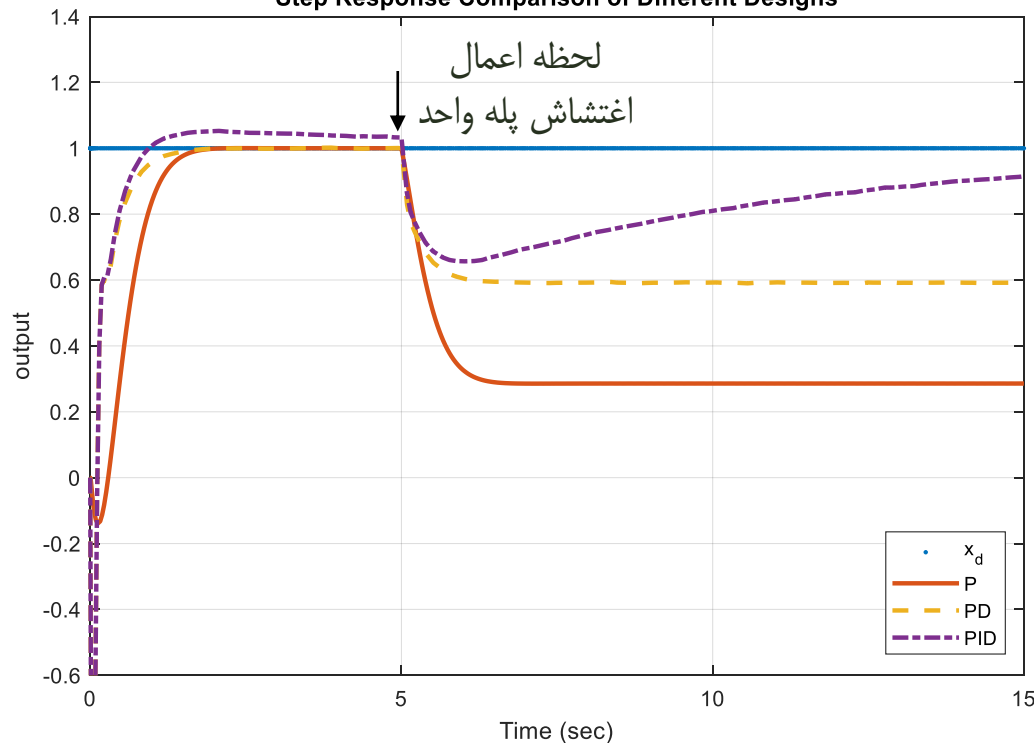
Step Response Comparison of Different Designs



مقایسه جبران سازهای طراحی شده

مقایسه زمانی

Step Response Comparison of Different Designs



✓ پاسخ پله سیستم های زیر را شبیه سازی و ترسیم کنید

□ سیستم حلقه بسته با بهره ثابت

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز PD

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز PID

✓ کلیه پاسخها فروجهش دارند

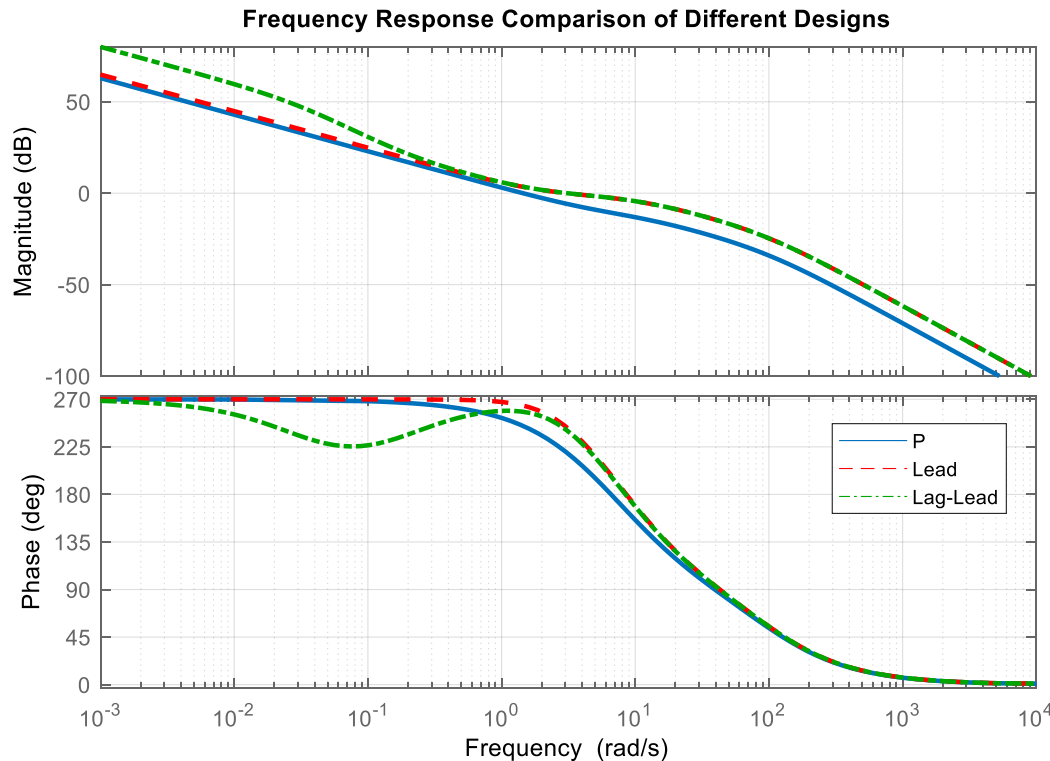
✓ پاسخ سیستم اول بسیار هموار و بدون نوسانات ولی با کندی بیشتر و عدم توانایی رفع اغتشاش

✓ پاسخ سیستم دوم بسیار سریعتر و هموار ولی با فروجهش زیاد و عدم توانایی رفع اغتشاش

✓ پاسخ سیستم سوم سریع و هموار ولی با فروجهش بسیار زیاد و رفع اغتشاش به کندی ولی به صورت کامل

مقایسه جبران سازهای طراحی شده

مقایسه فرکانسی



✓ نمودار بودی سیستم های زیر را ترسیم کنید

□ سیستم حلقه بسته با بهره ثابت

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز پیش فاز

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز پیش-فاز-پس فاز

✓ پاسخ فرکانسی سیستم با جبران ساز پیش فاز

دارای پهنای باند بیشتر کمی بهره بیشتر کمی فاز

بیشتر در فرکانس های میانی و حاشیه پایداری

مناسب.

✓ پاسخ فرکانسی سیستم با جبران ساز پیش فاز-پس

فاز دارای مشخصات یکسان فرکانسی در فرکانس

های بالا ولی بهره بیشتر به همراه فاز کمتر در

فرکانس پایین



مقایسه جبران سازهای طراحی شده

مقایسه فرکانسی

✓ نمودار بودی سیستم های زیر را ترسیم کنید

□ سیستم حلقه بسته با بهره ثابت

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز PD

□ سیستم حلقه بسته با جبران ساز PID

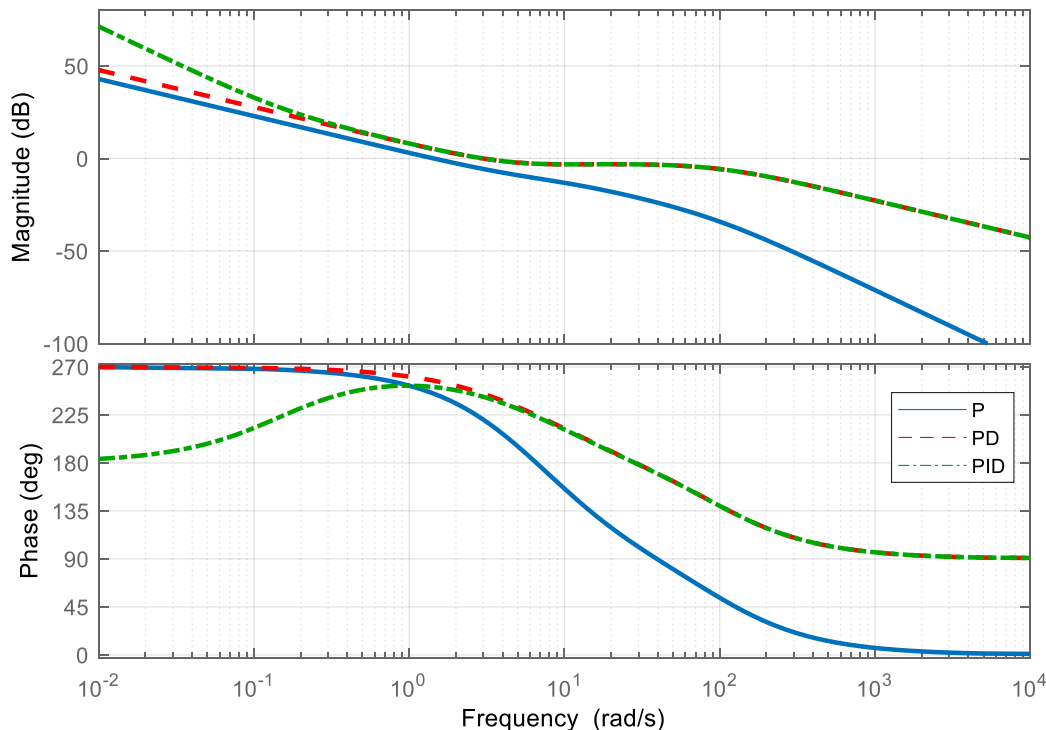
✓ پاسخ فرکانسی سیستم با جبران ساز PD دارای

پهنای باند بیشتر کمی بهره بیشتر و فاز بیشتر در
فرکانس های بالا و حاشیه پایداری مناسب.

✓ پاسخ فرکانسی سیستم با جبران ساز PID

مشخصات یکسان فرکانسی در فرکانس های بالا
ولی بهره بینهایت به همراه ۹۰ درجه فاز کمتر در
فرکانس پایین

Frequency Response Comparison of Different Designs





مقایسه جبران سازهای طراحی شده

• کد متلب طراحی و مقایسه زمانی و فرکانسی

```
%% Chapter 5 Comprehensive Example
clear all, clc, cla
% System definition
s=zpk('s');
sys1=200*(-s+5)/(s*(s+10)*(s+100));
margin(sys1),
w=logspace(-1,3,1000);
bode(sys1,w)
sys2=1.4*sys1;
margin(sys2)
bode(sys2,w),grid
system=sys2;
run('LCS5_Lead_Lag_Design_sim.slx');
echo on
% Run the simulink script any
% then press any key to continue
pause
echo off
tp=xout.Time;
xd=xout.Data(:,1);
xp=xout.Data(:,2)
```

```
% lead design
lead=1.25*(0.52*s+1)/(0.22*s+1);
sys3=sys2*lead;
margin(sys3)

% PD design
PD=1.75*(0.15*s+1);
sys4=sys2*PD;
margin(sys4)
% Lag design
lag=5.72*(5.52*s+1)/(31.5*s+1);
sys5=sys3*lag;
margin(sys5)
% PI Design
T=1/3/0.05;
PI=(1+1/T/s);
% PID
sys7=sys4*PI;
margin(sys7)
system=sys7;
```

```
figure(1)
plot(tp,xd,'.', tp,xp,'-', tpd,xpd,'--', tpid,xpid,'-.'),grid
set(findall.figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
xlabel('Time (sec)')
ylabel('output')
title('Step Response Comparison of Different Designs')
legend('location','best','x_d','P','PD','PID')
```

```
figure(2)
plot(tp,xd,'.', tp,xp,'-', tlead,xlead,'--', tlag,xlag,'-.'),grid
set(findall.figure(2),'type','line'),'linewidth',2)
xlabel('Time (sec)')
ylabel('output')
title('Step Response Comparison of Different Designs')
legend('location','best','x_d','P','Lead','Lag-Lead')
```

```
figure(1)
bode(sys2,sys3,'r--',sys5,'g-.')
set(findall.figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
title('Frequency Response Comparison of Different Designs')
legend('location','best','P','Lead','Lag-Lead')
grid on
```

```
figure(2)
bode(sys2,sys4,'r--',sys7,'g-.')
set(findall.figure(2),'type','line'),'linewidth',2)
title('Frequency Response Comparison of Different Designs')
legend('location','best','P','PD','PID')
grid on
```

کد متلب LCS5_Comp_example.m

عناوین فصل

مشخصات فرکانسی

۱ انگیزه، تشدید بیشینه M_r ، پهنای باند، فرکانس گذر بهره، فرکانس گذر فاز، نرخ شکست، مشخصات فرکانسی سیستم مرتبه دو، مثال های کاربردی.

پایداری نسبی

۲ انگیزه، تعریف کیفی و کمی پایداری نسبی، حاشیه بهره، فرکانس گذر فاز، حاشیه فاز، فرکانس گذر بهره، تعیین همزمان حاشیه بهره و فاز با نمودار بودی، حاشیه فاز و بهره مثبت و منفی، تحلیل فرکانسی با نمودار نیکولز، کانتور های نمودار نیکولز، مثال های کاربردی.

طراحی جبران ساز در موزه فرکانس

۳ چرا جبران ساز؟ رفتار مطلوب در حوزه فرکانس، ویژگی های جبران ساز های پیش فاز، پس فاز و پیش فاز-پس فاز، طراحی گام به گام جبران ساز پیش فاز، PD، پس فاز، PI، پیش فاز-پس فاز و PID، طراحی نمونه بر روی سیستم غیر کمینه فاز، ارزیابی رفتار زمانی و فرکانسی.

طراحی کنترلرگر با تابع تبدیل مساسیت

۴ انگیزه، تابع تبدیل حساسیت و متمم آن، توابع مطلوب، چگونگی طراحی کنترلرگر، کنترلرگر سره و علی، قضیه پایداری (شرایط درون یابی)، چگونگی طراحی یک سیستم پیچیده، سیستم ناپایدار، سیستم غیر کمینه فاز و سیستم ناپایدار و غیر کمینه فاز، مثال های کاربردی.

در این فصل طراحی جبران ساز ها و کنترلرگرهای فطی در موزه فرکانس مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا مشخصات فرکانسی سیستم های کنترل فطی به خصوص سیستم های مرتبه دوم مورد ملاحظه قرار گرفته و مشخصات مطلوب پیشنهاد می شوند. سپس با تعریف ماشیه پایداری، روش های تعیین ماشیه فاز و بهره در سیستم های کنترل فطی بیان شده و اهمیت آن در طراحی جبران سازهای مناسب تومیه می شود. نمودار نیکولز و کانتور های آن به منظور تحلیل ماشیه پایداری و رفتار سیستم های کنترل فطی معرفی فواهد شد. روش های طراحی جبران سازهای پایه ای و پرکاربرد در صنعت، از جمله جبران ساز های پیش فاز، پس فاز، پیش فاز-پس فاز و متناظرا PD، PI و PID بیان شده و بر روی سیستم غیر کمینه فازی اعمال می شوند. در نهایت با استفاده از تابع تبدیل مساسیت روش های طراحی کنترلرگرهای مرتبه بالاتر برای سیستم های پیچیده، ناپایدار و غیر کمینه فاز مورد بررسی و تحلیل قرار فواهد گرفت.



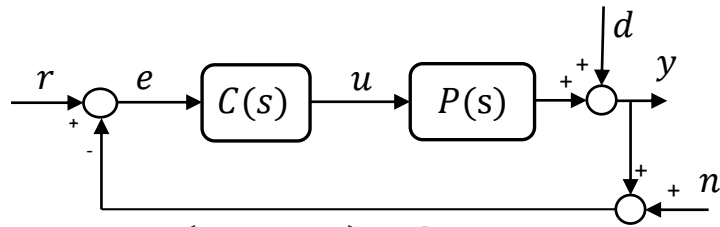
طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• انگیزه

- ✓ روش های طراحی جبران ساز کلاسیک بر مبنای تابع تبدیل بهره حلقه استوار شده است.
- با ترسیم مکان هندسی ریشه های $L(s)$ ویژگی های تابع تبدیل حلقه بسته به دست می آید.
- با ترسیم نمودار بودی، نایکویست یا نیکولز $L(s)$ ویژگی های تابع تبدیل حلقه بسته به دست می آید.
- ✓ این روش ها برای سیستم های معمول بسیار راهگشا است.
- اگر سیستمی دارای صفر و قطب در نیم صفحه سمت راست باشد یا دارای قطب ها و صفرهای متعدد مختلط باشد، روش های کلاسیک محدودیت دارند.
- در این سیستم ها کنترلر درجه یک یا دو ممکن است کافی نباشد و کنترلر درجات بالاتر مورد نیاز است.
- ✓ طراحی در این نوع سیستم ها
- در حوزه فرکانس با استفاده از **شکل دادن تابع تبدیل حساسیت** صورت می گیرد
- در حوزه زمان با استفاده از روش های کنترل مدرن توسعه یافته است.

طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• تابع تبدیل حساسیت



$$y = CP(r - n - y) + d$$

✓ سیستم حلقه بسته مقابل را در نظر بگیرید

□ اگر تابع تبدیل بهره حلقه را $L(s) = C(s)P(s)$ بنامیم

□ تابع تبدیل حلقه بسته خروجی سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} r(s) + \frac{1}{1 + L(s)} d(s) - \frac{L(s)}{1 + L(s)} n(s),$$

$$e = r - y - n$$

□ تابع تبدیل حلقه بسته خطای سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s) - \frac{1}{1 + L(s)} d(s) - \frac{1}{1 + L(s)} n(s),$$

□ این همان اعجاز فیدبک است که رابطه ورودی های مختلف سیستم حلقه بسته به خطای ردیابی یکسان است.

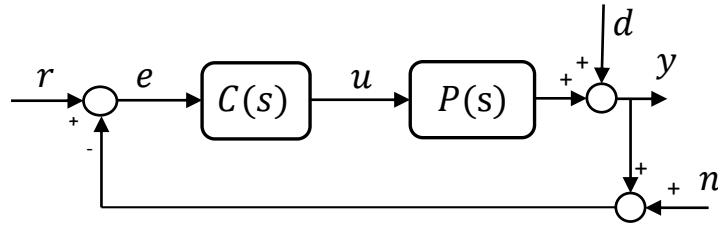
✓ تابع تبدیل حساسیت را با $S(s)$ نمایش داده و تابع تبدیل متمم حساسیت را با $T(s)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}, \quad T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad S(s) + T(s) = 1.$$

طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• تابع تبدیل حساسیت

✓ بدین ترتیب خواهیم داشت:



□ تابع تبدیل حلقه بسته خروجی سیستم:

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s),$$

□ تابع تبدیل حلقه بسته خطای سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$e(s) = S(s)r(s) - S(s)d(s) - S(s)n(s),$$

✓ به منظور ردیابی مناسب و رفع اغتشاش به صورت همزمان بایستی اندازه $S(j\omega)$ در پهنای باند مورد نظر

سیستم حلقه بسته بسیار کوچک و نزدیک صفر باشد. $|S(j\omega)| \cong 0$ for $0 < \omega < \omega_c$

✓ با توجه به رابطه جبری $S(j\omega) + T(j\omega) = 1$ بایستی تابع تبدیل متمم حساسیت $T(j\omega)$ در پهنای باند

مورد نظر سیستم حلقه بسته نزدیک یک باشد. $|T(j\omega)| \cong 1$ for $0 < \omega < \omega_c$



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• پگونگی طراحی کنترلر

✓ اگر هیچ محدودیتی وجود نمی داشت، یک راه حل مناسب انتخاب مناسب $S_d(s)$ (و یا متمم آن $T_d(s)$) و تعیین کنترلر از آن می بود.

□ تابع تبدیل متمم حساسیت را یک فیلتر پایین گذر با فرکانس گذر بهره مطلوب $\omega_0 = \omega_{c_d}$ انتخاب کنید.

□ به عنوان مثال فیلتر باترورث با درجه دلخواه بسیار مناسب است (دستور butter متلب). فیلتر باترورث درجه دوم:

$$T_d(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \rightarrow S_d(s) = \frac{s(s + \sqrt{2}\omega_0)}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

□ کنترلر مطلوب را با استفاده از رابطه زیر به دست آورید:

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}, T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \rightarrow \frac{T(s)}{S(s)} = C(s)P(s) \rightarrow C(s) = \frac{T(s)}{S(s)P(s)}$$

طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• پیکوئگی طراحی کنترلر

✓ مثال ۱: سیستم پیچیده زیر را در نظر بگیرید و برای آن کنترلر با فرکانس گذر بهره $\omega_{cd} = 5$ طراحی کنید.

$$P(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

□ تابع تبدیل متمم حساسیت مطلوب را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$T_d(s) = \frac{25}{s^2 + 7.071s + 25} \rightarrow \frac{T_d(s)}{S_d(s)} = \frac{25}{s(s + 7.071)}$$

□ و کنترلر سره و علی طراحی شده از مرتبه سه بوده و عبارت است از:

$$C(s) = \frac{T_d(s)}{S_d(s)P(s)} = \frac{25(s + 1)(s^2 + s + 1)}{(s + 7.071)(s^2 + 2s + 2)}$$

□ بهره حلقه سیستم به صورت زیر به دست می آید که نشان می دهد صفرها و قطب های LHP سیستم حذف شده اند.

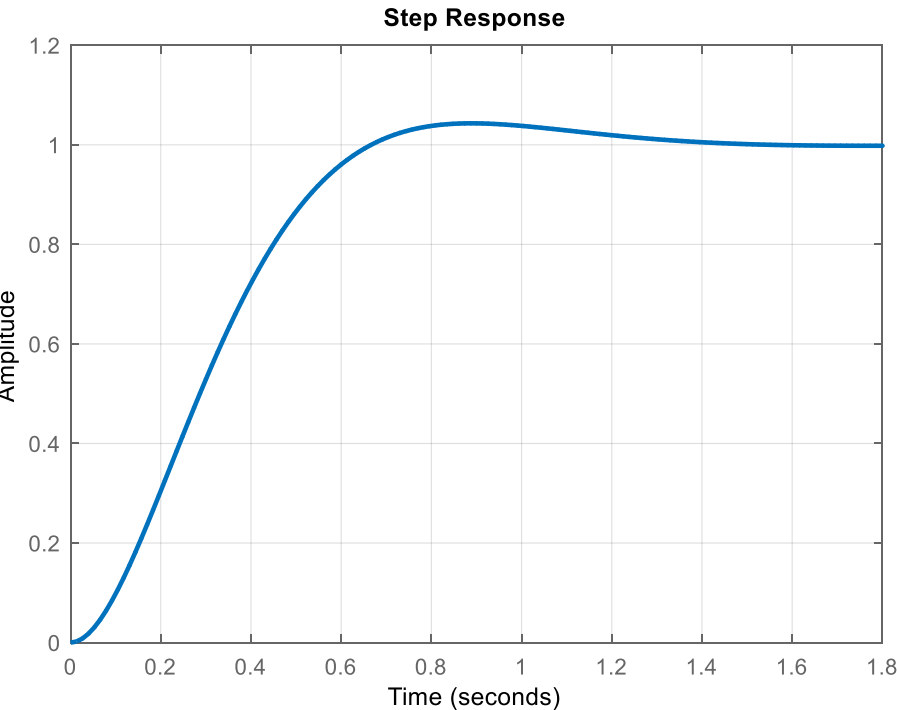
$$L(s) = C(s)P(s) = \frac{25}{s(s + 7.071)}$$



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• چگونگی طراحی کنترلر

✓ ادامه مثال ۱



□ پاسخ فرکانسی و حاشیه پایداری سیستم اولیه را مشاهده کنید.

• حاشیه پایداری و پهنای باند نامطلوب

□ پاسخ فرکانسی و حاشیه پایداری سیستم کنترل شده را مشاهده کنید.

□ ویژگی های فرکانسی دو سیستم را مقایسه کنید.

• حاشیه پایداری و پهنای باند مطلوب و مورد انتظار

□ پاسخ زمانی بسیار مطلوب سیستم حلقه بسته را مشاهده کنید.



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• کنترلر سره و علی

✓ در روش پیشنهادی مرتبه تابع تبدیل متمم حساسیت بایستی مناسب انتخاب شود تا کنترلر نهایی سره و علی باشد.

□ اگر مثال ۱ را بررسی کنید درجه نسبی (تعداد بیشتر قطب ها از صفر های سیستم) سیستم مورد آزمون دو است.

□ کنترلر طراحی شده نیز سره، علی و قابل پیاده سازی است.

• مرتبه تابع تبدیل متمم حساسیت

✓ به منظور طراحی کنترلر سره، مرتبه $T_d(s)$ را برابر درجه نسبی سیستم قرار دهید.

✓ اگر مرتبه $T_d(s)$ را بیشتر از درجه نسبی سیستم انتخاب کنید، کنترلر نتیجه شده اکیدا سره خواهد شد.



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

تضمین پایداری داخلی

- ✓ اگر سیستم مورد نظر پایدار و کمینه فاز باشد (هیچ صفر و قطبی در RHP نداشته باشد) پایداری داخلی سیستم حلقه بسته (و همه اجزای آن) تنها با انتخاب تابع حساسیت $S(s)$ (یا تابع متمم حساسیت $T(s)$) پایدار تضمین می شود.
- ✓ اگر سیستم ناپایدار باشد، لازم است $P(s)S(s)$ پایدار باقی بماند.
- اگر سیستم دارای قطب p_0 ناپایدار باشد ضروری است $S(p_0) = 0$ باشد.
 - این بدان معنا است که $S(s)$ باید صفر غیر کمینه فازی در محل همان قطب داشته باشد که قطب ناپایدار را حذف کند.
 - این به معنای حذف قطب ناپایدار با صفر کنترلر نیست! به هیچ وجه قطب ناپایدار را به صفر متناظر در کنترلر حذف نکنید!
- این محدودیت خیلی آزار دهنده نیست، چرا که برای داشتن ردیابی مناسب و رفع اغتشاش لازم است $S(s)$ در پهنای باند سیستم باید نزدیک صفر باشد و در عین حال در نقطه p_0 ضروری است که برابر صفر باشد.
 - این دو هدف را می توان با تدبیر مناسب به صورت همزمان ارضا نمود
 - مگر قطب ناپایدار خیلی از مبدا دور باشد که شرایط را دشوار می سازد.



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

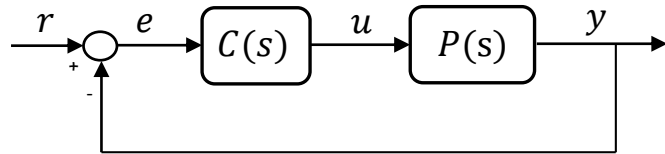
تضمین پایداری داخلی (ادامه)

- ✓ اگر سیستم غیر کمینه فاز باشد، لازم است $P^{-1}(s)T(s)$ پایدار باقی بماند.
- اگر سیستم دارای صفر z_0 غیر کمینه فاز باشد ضروری است $T(z_0) = 0$ باشد.
- این بدان معنا است که $T(s)$ باید صفر غیر کمینه فازی در محل صفر کمینه فاز سیستم داشته باشد.
- این محدودیت بسیار آزار دهنده است، چرا که برای داشتن ردیابی مناسب و رفع اغتشاش لازم است $T(s)$ در پهنای باند سیستم نزدیک یک باشد و در عین حال در نقطه z_0 ضروری است که برابر صفر باشد
- این بدان معنا است که پهنای باند قابل دستیابی سیستم حلقه بسته بین دو تا ده برابر کوچکتر از محل صفر غیر کمینه فاز سیستم تعیین می شود.

شرایط درون یابی

- ✓ به شرایط سه گانه تضمین پایداری فوق شرایط درون یابی گفته می شود:
- برای پایداری لازم است سه تابع تبدیل $T(s)$, $P(s)S(s)$, $P^{-1}(s)T(s)$ همگی پایدار باقی بمانند.

طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت



• قضیه پایداری داخلی (شرایط درون یابی)

✓ سیستم حلقه بسته نشان داده شده در شکل پایدار داخلی است،

اگر و تنها اگر، توابع تبدیل $T(s)$, $P(s)S(s)$, $P^{-1}(s)T(s)$ همگی پایدار باشند.

□ اگر $T(s)$ پایدار باشد حتماً $S(s)$ نیز پایدار است، چون معادله مشخصه هر دو تابع تبدیل یکسان است.

□ اگر $P(s)$ دارای قطب ناپایدار p_0 با تکرار m باشد ضروری است:

$$S(p_0) = \frac{dS}{ds}(p_0) = \dots = \frac{d^{m-1}S}{ds^m}(p_0) = 0$$

□ اگر $P(s)$ دارای صفر غیر کمینه فاز z_0 با تکرار m باشد ضروری است:

$$T(z_0) = \frac{dT}{ds}(z_0) = \dots = \frac{d^{m-1}T}{ds^m}(z_0) = 0$$



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• پهنای طراحی کنترلر

✓ مثال ۲: سیستم ناپایدار زیر را در نظر بگیرید و برای آن کنترلر با فرکانس گذر بهره $\omega_{cd} = 5$ طراحی کنید.

$$P(s) = \frac{(s+1)(s^2+2s+2)}{s(s^2+s+1)(-s+1)}$$

□ درجه نسبی سیستم یک است و یک شرط درون یابی نیز داریم. لذا تابع تبدیل متمم حساسیت را با درجه دو در نظر می گیریم.

□ شرط درون یابی برابر است با $T(p_0) = 1 \rightarrow T(1) = 1$

$$T_d(s) = \frac{25(s/\tau+1)}{(s+5)^2}$$

□ تابع تبدیل متمم حساسیت را بدین صورت انتخاب می کنیم.

$$T_d(1) = \frac{25(1/\tau+1)}{(1+5)^2} = 1 \rightarrow \tau = 2.27$$

□ شرط درون یابی را تضمین می کنیم:

$$T_d(s) = \frac{11(s+2.27)}{(s+5)^2}, S_d(s) = 1 - T_d(s) = \dots = \frac{s(s-1)}{(s+2)^2}$$

در نتیجه:



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• پهنای طراحی کنترلر

✓ ادامه مثال ۲:

□ بدین ترتیب کنترلر مناسب بدین صورت طراحی می شود

$$C(s) = \frac{T_d(s)}{S_d(s)P(s)} = \dots$$

$$= \frac{-11(s+2.273)(s^2+s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

□ حاشیه پایداری سیستم حلقه باز را بررسی کنید.

□ نمودار نایکویست سیستم حلقه باز با کنترلر طراحی شده زیر

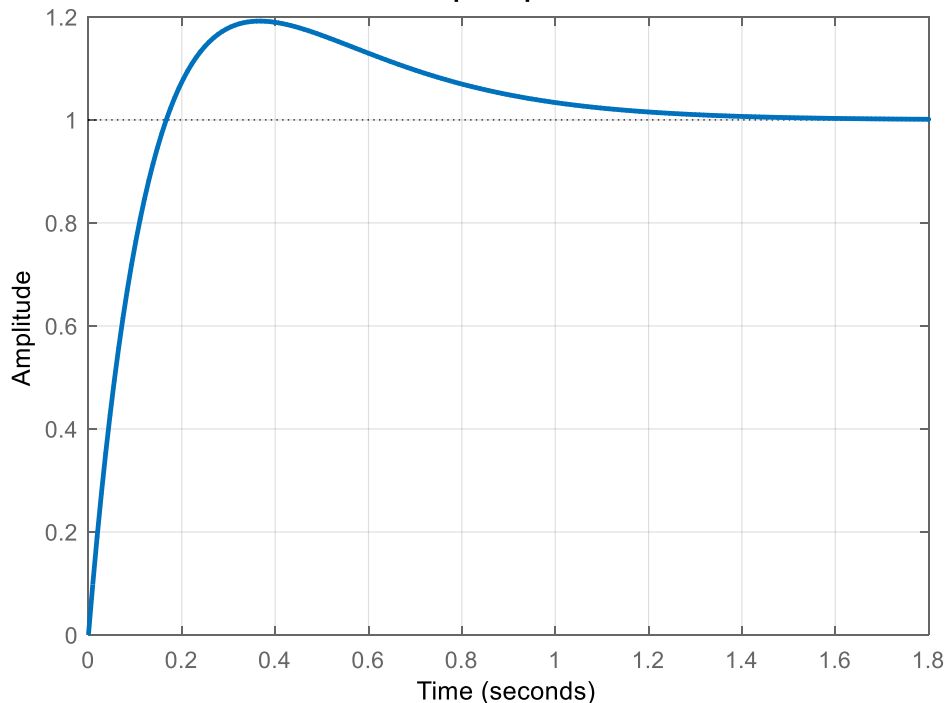
را بررسی و حاشیه پایداری را بررسی کنید.

$$L(s) = \frac{7(s+2.273)}{s(s-1)}$$

□ پاسخ پله سیستم را نیز ترسیم و تایید کنید.

• سیستم پایدار و دارای رفتار زمانی بسیار مناسبی است.

Step Response





طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• پیکونگی طراحی کنترلر

✓ مثال ۳: سیستم غیر کمینه فاز زیر را در نظر بگیرید و برای آن کنترلر با فرکانس گذر بهره $\omega_{cd} = 0.5$ طراحی کنید.

$$P(s) = \frac{(-s+5)(s^2+2s+2)}{s(s^2+s+1)(s+1)}$$

□ درجه نسبی سیستم یک است و یک شرط درون یابی نیز داریم. لذا تابع تبدیل متمم حساسیت را با درجه دو در نظر می گیریم.

□ شرط درون یابی برابر است با $T(z_0) = 0 \rightarrow T(5) = 0$

□ تابع تبدیل متمم حساسیت را بدین صورت انتخاب می کنیم.

$$T_d(s) = \frac{0.25(s/\tau+1)}{(s+0.5)^2}$$

□ شرط درون یابی را تضمین می کنیم:

$$T_d(5) = \frac{0.25(5/\tau+1)}{(5+0.5)^2} = 0 \rightarrow \tau = -5$$

در نتیجه:

$$T_d(s) = \frac{-0.05(s-5)}{(s+0.5)^2}, S_d(s) = 1 - T_d(s) = \dots = \frac{s(s+1.05)}{(s+0.5)^2}$$



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• چگونگی طراحی کنترلر

✓ ادامه مثال ۳:

□ بدین ترتیب کنترلر مناسب بدین صورت طراحی می شود

$$C(s) = \frac{T_d(s)}{S_d(s)P(s)} = \dots = \frac{0.05(s+1)(s^2+s+1)}{(s+1.05)(s^2+2s+2)}$$

□ حاشیه پایداری سیستم حلقه باز را بررسی کنید.

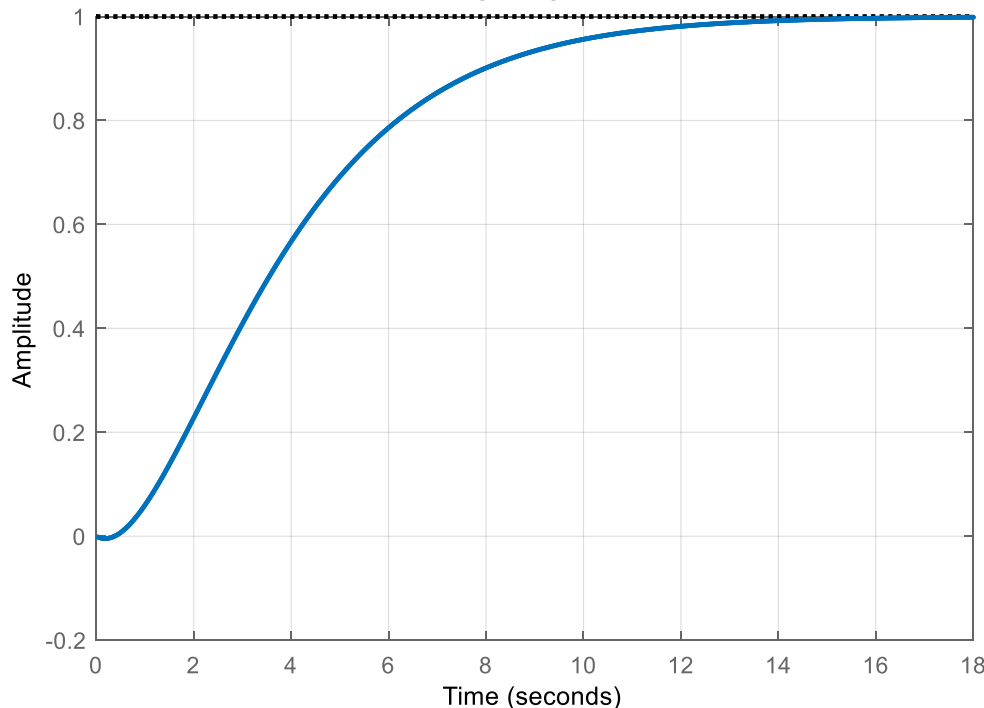
□ حاشیه پایداری سیستم حلقه باز با کنترلر طراحی شده را بررسی و حاشیه پایداری را بررسی کنید.

$$L(s) = \frac{-0.05(s-5)}{s(s+1.05)}$$

□ پاسخ پله سیستم را نیز ترسیم و تایید کنید.

• علت فروجهش غیر کمینه فاز بودن سیستم است.

Step Response





طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• چگونگی طراحی کنترلر

✓ مثال ۴: سیستم ناپایدار و غیر کمینه فاز زیر را در نظر بگیرید و برای آن کنترلر با فرکانس گذر بهره $\omega_{cd} = 3$

$$P(s) = \frac{(s-5)(s^2+2s+2)}{s(s^2+s+1)(s-1)}$$

طراحی کنید.

□ درجه نسبی سیستم یک است و دو شرط درون یابی نیز داریم. لذا تابع تبدیل متمم حساسیت را با درجه سه در نظر می گیریم.

$$T(z_0) = 0 \rightarrow T(5) = 0, \quad T(p_0) = 1 \rightarrow T(1) = 1;$$

□ دو شرط درون یابی برابر است با:

$$T_d(s) = \frac{27(s/\tau+1)(-s+5)/5}{(s+3)^3}$$

□ تابع تبدیل متمم حساسیت را بدین صورت انتخاب می کنیم.

$$T_d(1) = \frac{5.4(1/\tau+1)(-1+5)}{(1+0.5)^3} = 1 \rightarrow \tau = 0.51$$

□ شرط درون یابی را تضمین می کنیم:

$$T_d(s) = \frac{10.6(s+0.51)(-s+5)}{(s+3)^3}, \quad S_d(s) = 1 - T_d(s) = \dots = \frac{s(s+20.6)(s-1)}{(s+3)^3}$$

در نتیجه:



طراحی کنترلر با استفاده از تابع تبدیل حساسیت

• چگونگی طراحی کنترلر

✓ ادامه مثال ۳:

□ بدین ترتیب کنترلر مناسب بدین صورت طراحی می شود

$$C(s) = \frac{T_d(s)}{S_d(s)P(s)} = \dots = \frac{-10.6(s + 0.51)(s^2 + s + 1)}{(s + 20.6)(s^2 + 2s + 2)}$$

□ کنترلر پایدار است ولی بهره آن منفی است (فیدبک مثبت).

□ حاشیه پایداری سیستم حلقه باز را بررسی کنید.

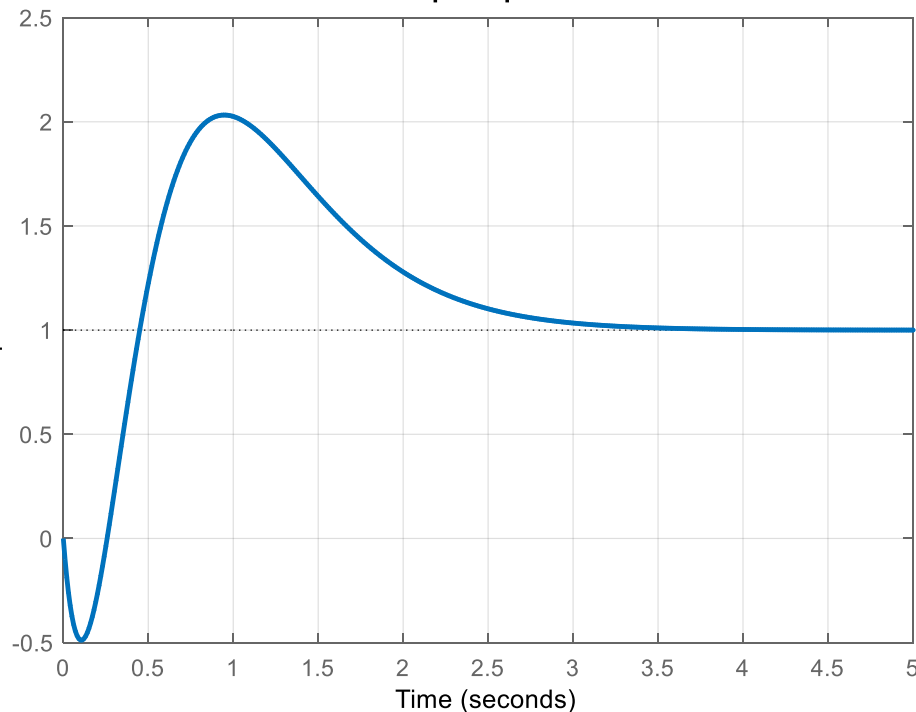
□ حاشیه پایداری سیستم حلقه باز با کنترلر طراحی شده را توسط نمودار نایکویست و پاسخ فرکانسی بررسی کنید.

$$L(s) = \frac{10.6(-s+5)(s+0.51)}{s(s-1)(s+20.6)}$$

□ پاسخ پله سیستم را نیز ترسیم و تایید کنید.

• علت فروجهش غیر کمینه فاز بودن سیستم است.

Step Response





Stephen Butterworth

(11 August 1885 – 28 October 1958)

was a British physicist who invented the filter that bears his name, a class of electrical circuits that separates electrical signals of different frequencies. He was a first-rate applied mathematician. He often solved problems that others had regarded as insoluble. For his successes, he employed judicious approximations, penetrating physical insight, ingenious experiments, and skillful use of models. He was a quiet and unassuming man. Nevertheless, his knowledge and advice were widely sought and readily offered. He was respected by his colleagues and revered by his subordinates. In 1942 he was awarded the Order of the British Empire. In 1945 he retired from the Admiralty Research Laboratory. He died on 28 October 1958 at his home in England at the age of 73.

برگرفته از پیوند



George Zames

(January 7, 1934 – August 10, 1997)

was a Polish-Canadian **control theorist** and professor at **McGill University**, Canada. Zames is known for his fundamental contributions to the theory of **robust control**, and was credited for the development of various well-known results such as **small-gain theorem**, **passivity theorem**, **circle criterion** in input–output form, and most famously, **H-infinity methods**.

From 1960 to 1965, Zames held various teaching positions at **MIT** and **Harvard University**. In 1965, Zames received a **Guggenheim Fellowship** and moved to the NASA Electronic Research Center (ERC), where he founded the Office of Control Theory and Applications (OCTA). In 1969, it was announced that NASA ERC was to be closed, and Zames joined the newly established Department of Transportation Research Center in 1970. In 1974, he returned to **McGill University** to become a **professor** and eventually the **MacDonald Chair of Electrical Engineering** until his death in 1997.

برگرفته از [پیوند](#)





به پایان آمد این دفتر

حکایت بهمان باقی است

مدل سازی سیستم های کنترل

نقطه شروع طراحی در سیستم های کنترل، شناخت رفتار سیستم یا مدل آن است. در درس هی کنترل مدرن و صنعتی به این مهم پرداخته خواهد شد.

اندازه گیری کمیت های فیزیکی

فیدبک خروجی تنها با اندازه گیری دقیق کمیت های فیزیکی خروجی قابل دستیابی است. این مهم در درس ابزار دقیق مورد توجه قرار خواهد گرفت

روش های کنترل مدرن

مدل سازی سیستم در فضای حالت و بررسی زمانی رفتار سیستم ها و طراحی فیدبک حالت از روش های مهم طراحی به شمار می رود که در درس کنترل مدرن به آن پرداخته می شود

تنظیم و پیاده سازی کنترلگر های صنعتی

چگونگی پیاده سازی کنترلگر های صنعتی توسط مدار های الکترونیکی و یا پیاده سازی در میکروکنترلر های متداول در درس کنترل صنعتی و اصول میکروکنترلر بیان می شود.

روشهای طراحی و پیاده سازی کنترلگر دیجیتال

مبانی نظری و طراحی سیستم های کنترل در حوزه زمان-گسسته و پیاده سازی آن در پروسور های دیجیتال در درس کنترل دیجیتال مرور خواهد شد

طراحی کنترلگر بهینه

طراحی کنترلگر هایی که مصالحه مناسبی بین پایداری و کارایی را بهینه سازی نمایند با نگاه کلاسیک در دری کنترل مقاوم و با دیدگاه مدرن در درس کنترل بهینه تدریس می شود.

ادامه دارد...

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق - کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیستم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.



حمید رضا تقی راد
استاد



گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل فطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به [این سایت](#) مراجعه نمایید



متشکرم