



Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

# Automatic Control

Chapter 1:

## Introduction to Control Systems and Laplace Transformation

1391-92 Fall Semester

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
  - Part 1: Introduction to Control Systems
    - Control Engineering
    - Control Systems
    - Sample Control Systems (Clips)
  - Part 2: Introduction to Laplace Transformation
    - Complex Functions
    - Laplace Transformation
    - Partial Fraction Expansion
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems

- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

# Part 1:

## Introduction to Control Systems

- Control Engineering
- Control Systems
- Sample Control Systems (Clips)

Contents





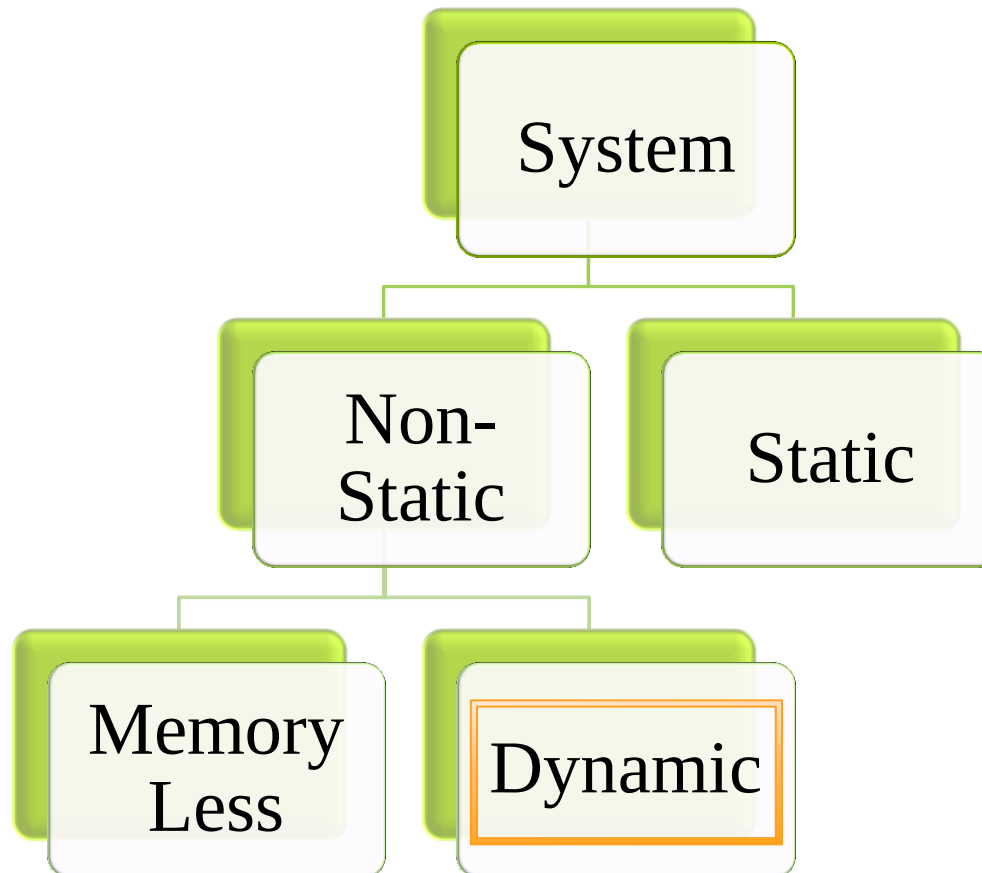
Next Clip

### \* مهندسی کنترل:

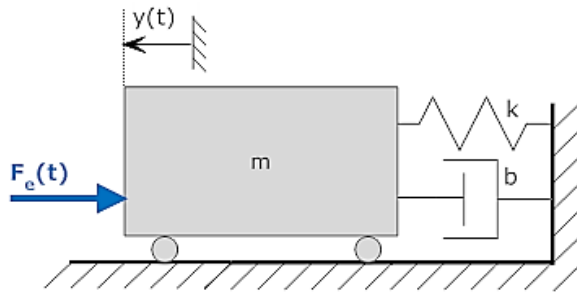
- در این شاخه مهندسی، به تحلیل، طراحی و ساخت سیستم های هدف دار پرداخته می شود.
- هدف از طراحی سیستم های کنترلی این است که متغیری از سیستم، در یک مقدار مشخص ثابت شود و یا به صورت تابع مشخصی از یک ورودی تغییر کند.

### \* سیستم کنترلی:

- عبارت است از مجموعه ای از اجزا که وظیفه کنترل یک متغیر در یک سیستم را بر عهده دارند. این متغیر می تواند دما، موقعیت، سرعت، نیرو یا ارتفاع باشد.
- اگر در سیستم کنترلی نقش کنترلر را سیستمی غیر از انسان ایفا کند، به عملیات کنترل اصطلاحاً Automatic Control گویند.



- فقط سیستم های دینامیکی دارای کنترل هستند.
- معادلات حاکم بر این سیستم ها، از متغیرهای حالت یا State Space و پارامترها تشکیل شده اند.
- برای مثال در مدل بندی سیستم جرم و فنر، پارامترهای جرم و ثابت های فنر و دمپر و متغیرهای حالت  $y$ ,  $\dot{y}$  حضور دارند:



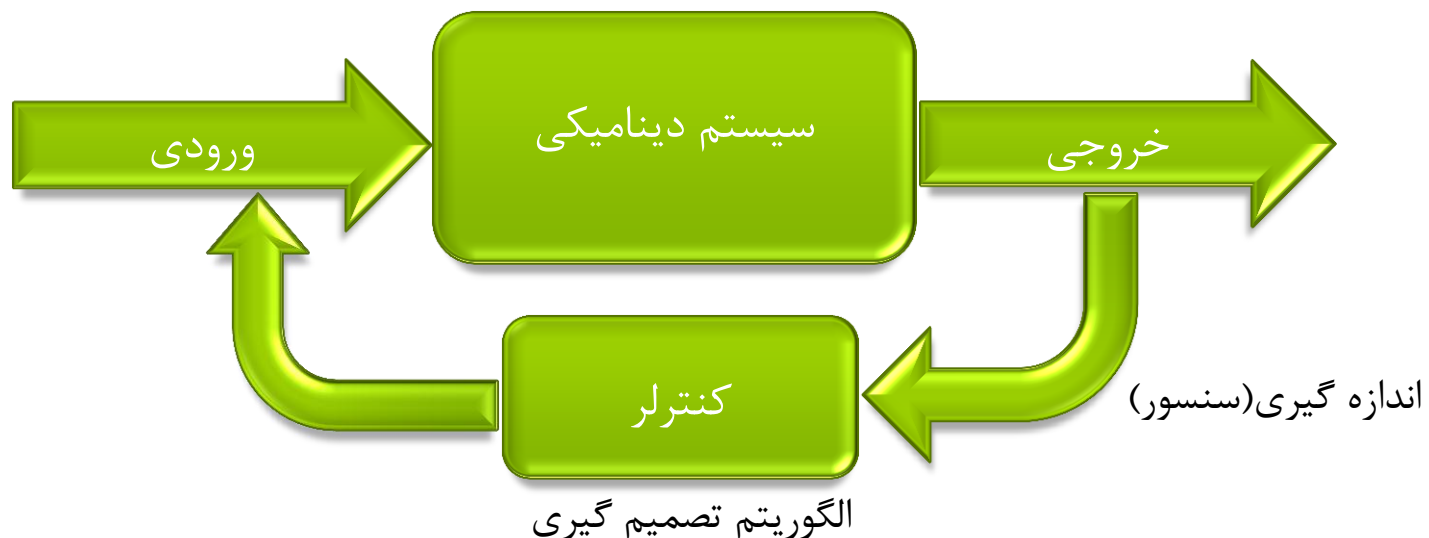
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_e(t)$$

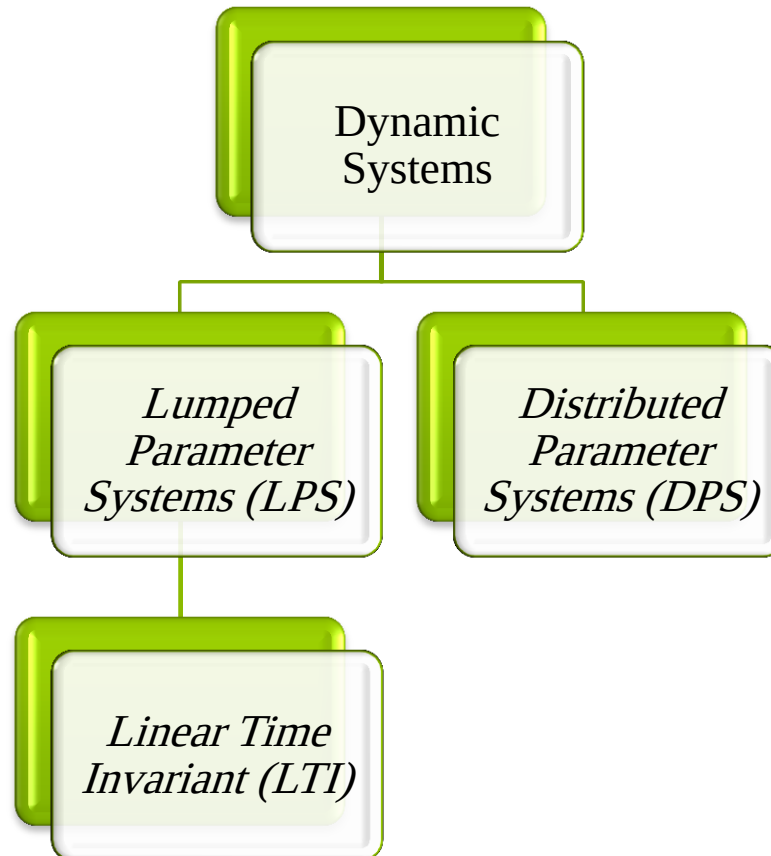
- در این سیستم نیروی وارد بر جرم، ورودی و جابجایی آن خروجی سیستم به شمار می رود.
- پارامترهای سیستم دینامیکی بر حسب زمان می توانند ثابت (Time Invariant) و یا متغیر باشند.

\* اجزای اصلی سیستم کنترلی:

- سیستم دینامیکی (Plant/Process)  
عبارت است از سیستمی که قصد کنترل کردن متغیری خاص از آن را داریم.

- کنترلر (Controller)  
عبارت است از اجزایی که وظیفه کنترل متغیر را بر عهده دارند.





\* در سیستم جرم و فنر، چنانچه بتوان جرم را به صورت نقطه ای فرض کرد، مدل بندی سیستم، از نوع LPS خواهد بود و معادله دیفرانسیل حاکم از نوع ODE است.

- مدل بندی صورت گرفته برای این سیستم در [اسلاید قبل](#)، از این نوع بوده است.

\* چنانچه توزیع جرم به صورت گسترده در نظر گرفته شود، مدل بندی سیستم دینامیکی از نوع DPS بوده و معادلات حاکم از نوع دیفرانسیلی پاره ای است.

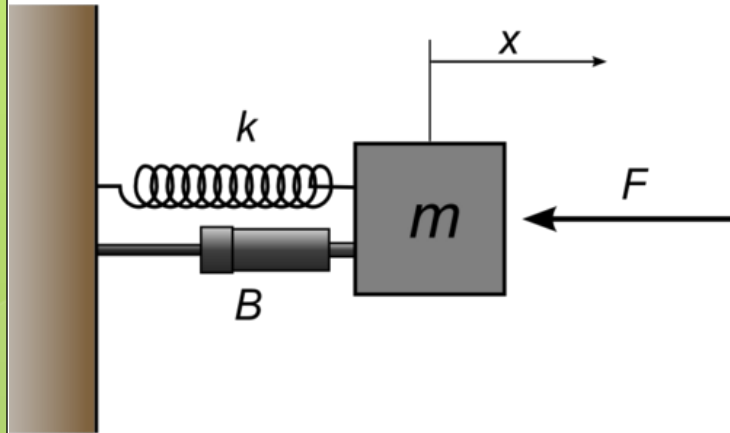
\* در این درس، بحث در مورد معادلات ODE با پارامترهای ثابت با زمان است. به این نوع سیستم های LPS، سیستم های LTI گویند.

\* سیستم های LTI (Linear Time Invariant):

- اگر ورودی چند برابر شود، خروجی نیز چند برابر می شود (شرط خطی بودن).

- اگر ورودی سیستم، جمع چند ورودی مستقل باشد، خروجی نیز برابر مجموع خروجی های متناظر با هر یک از ورودی ها است.

- ضرایب متغیرها یا همان پارامترها نباید وابسته به زمان باشند.



*LTI Model:  $m\ddot{x} + B\dot{x} + kx = F(t)$  ;  $m$  ,  $B$  ,  $k$  are constant*

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } x = x_1 + x_2 \Rightarrow F(t) = F_1(t) + F_2(t) \\ \text{if } x = nx_1 \Rightarrow F(t) = nF_1(t) \end{cases}$$

Previous Clip



## Inverted Pendulum



## Ball and Beam





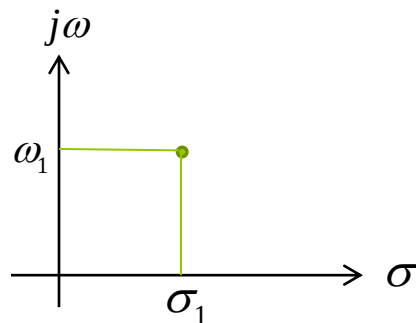
# Part 2:

## Introduction to Laplace Transformations

- Complex Functions
- Laplace Transformation
- Partial Fraction Expansion

Contents

\* فضای مختلط:



$$s = \sigma_1 + j \omega_1, F(s) = F_x + jF_y$$

$$\Rightarrow \bar{F} = F_x - jF_y, |F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

\* اگر تساوی زیر برقرار باشد، طبق قضیه کوشی-ریمان تابع مختلط در همه جا مشتق پذیر است:

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_x}{\partial \omega}$$

- مثال:

$$\begin{cases} G(s) = \frac{1}{s+1} \\ s = \sigma + j\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_x = \frac{\sigma+1}{(\sigma+1)^2 + \omega^2} \\ G_y = \frac{-\omega}{(\sigma+1)^2 + \omega^2} \end{cases}, \frac{dG(s)}{ds} = \frac{-1}{(s+1)^2}$$

- \* صفر تابع مختلط: ریشه های چندجمله ای صورت تابع، صفرهای آن هستند.
- \* قطب تابع مختلط: ریشه های چندجمله ای مخرج تابع، قطب های آن هستند.
- در سیستم های کنترلی، درجه صورت تابع های مختلط کمتر از درجه مخرج است و معمولاً تعدادی صفر تابع در بی نهایت وجود دارد.

\* مثال: صفرها و قطب های تابع مختلط

$$G(s) = \frac{k(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

*System poles* : 0, -1, -5, -15, -15

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \frac{ks^2}{s^5} = \frac{k}{s^3} = 0 \rightarrow \text{System zeros : } -2, -10, \infty, \infty, \infty$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

\* قضیه ی اوایلر: تعریف تابع نمایی مختلط

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

\* تبدیل لاپلاس:

- تبدیل لاپلاس فقط برای توابعی قابل تعریف است که در شرط زیر صدق کنند  
(رشد تابع نباید شدیدتر از هر تابع نمایی به شکل رو به رو باشد):

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}$$

- برای مثال تبدیل لاپلاس تابع  $f(t) = e^{t^2}$  وجود ندارد.

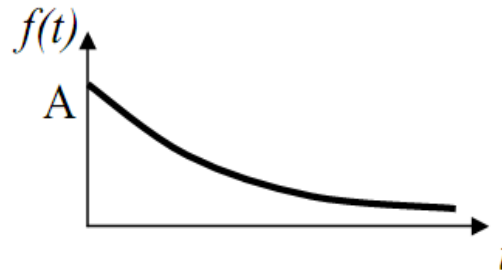
\* خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس:

$$L(cf(t)) = cL(f(t))$$

$$L(f(t) + g(t)) = L(f(t)) + L(g(t))$$

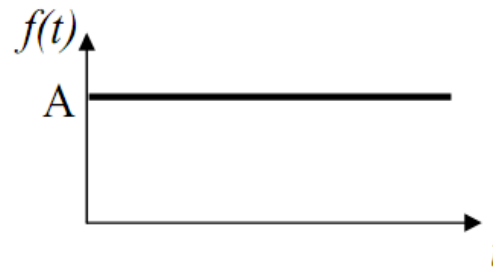
\* تبدیل لاپلاس توابع معروف:

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ F(s) = \frac{A}{s + \alpha} \end{cases}$$



- تابع نمایی

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ F(s) = \frac{A}{s} \end{cases}$$



- تابع پله

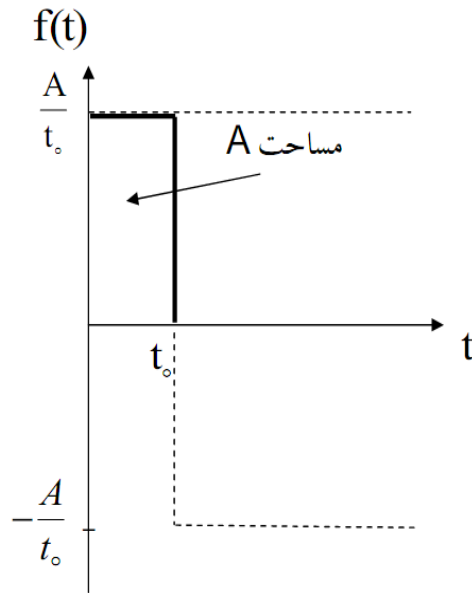
$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ F(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ F(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2} \end{cases}$$

- توابع مثلثاتی



- تابع پالس

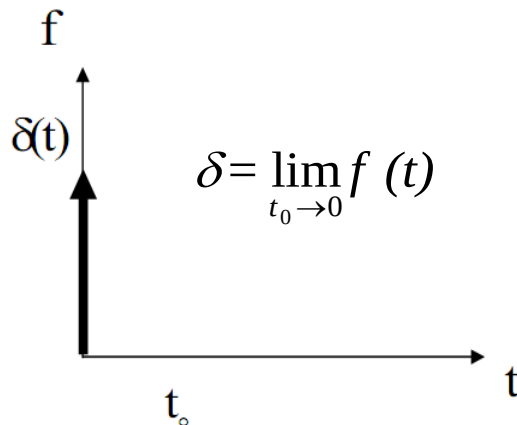


$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \text{ or } t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{A}{t_0} - \frac{A}{t_0} (1(t - t_0))$$

$$F(s) = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A e^{-t_0 s}}{t_0 s} = \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-t_0 s})$$

- تابع ضربه

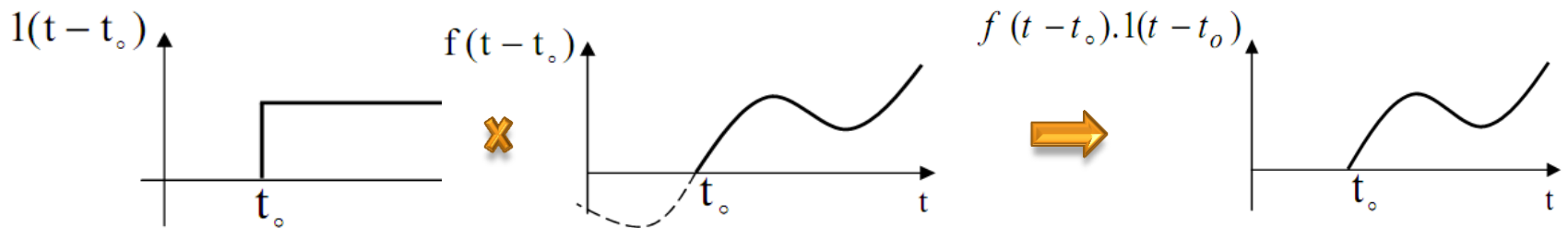
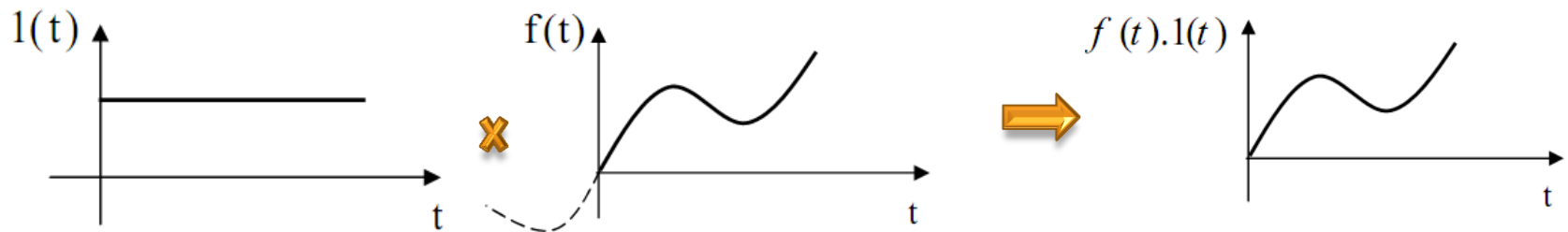


$$L(\delta(t)) = \frac{A}{s} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-t_0 s})}{t_0}$$

$$\xrightarrow{HOP} L(\delta(t)) = A$$

\* عملکرد تابع پله واحد:

$$L(1(t - \alpha) f(t - \alpha)) = e^{-\alpha s} F(s)$$



\* برخی روابط مهم تبدیل لاپلاس:

$$1) L\left(f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = \alpha F(\alpha s)$$

$$2) L(e^{-\alpha t} f(t)) = F(s + \alpha)$$

$$3) L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$4) L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$5) L\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$6) L\left(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$7) \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) \Rightarrow L(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) F_2(s)$$

\* قضیه مقدار نهایی (Final Value Theory):

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- این قضیه ارتباط دامنه های زمان و حالت را مشخص می کند و از آن برای محاسبه پاسخ ماندگار مدل سیستم استفاده خواهد شد.

- شرط برقراری قضیه :  $sF(s)$  نباید قطبی روی محور موهومی و سمت راست آن داشته باشد.

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- نکته: به طور مشابه داریم:

\* اگر همه قطب ها ساده باشند، می توان هر تابع چند جمله ای را به شکل زیر نوشت:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)}$$

$$= \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_n}{s+p_n} \quad ; n > m, \quad a_k = [(s+p_k)F(s)]_{s=-p_k}$$

\* اگر همه قطب ها ساده و قطب kام از مرتبه ی سه باشند:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_k)^3....(s+p_n)}$$

$$= \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_k}{s+p_k} + \frac{a_k'}{(s+p_k)^2} + \frac{a_k''}{(s+p_k)^3} + ... + \frac{a_n}{s+p_n} \quad n+2 > m$$

$$a_k = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+p_k)^3 F(s)]_{s=-p_k} \quad a_k' = \frac{d}{ds} [(s+p_k)^3 F(s)]_{s=-p_k}$$

$$a_k'' = [(s+p_k)^3 F(s)]_{s=-p_k}$$

\* اگر یک جفت قطب مختلط مزدوج داشته باشیم:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s^2+2\xi_k\omega_k s + \omega_k^2)....(s+p_n)} =$$

$$\frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_k s + \bar{a}_k}{s^2+2\xi_k\omega_k s + \omega_k^2} + ... + \frac{a_n}{s+p_n} \quad n+1 > m$$

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

\* مثال ۱: تبدیل لاپلاس معکوس  
- حل:

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = \frac{2s+12}{(s+1)^2+4} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{5(2)}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = 2e^{-t} \cos(2t) + 5e^{-t} \sin(2t)$$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس معکوس

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

- حل: با توجه به روابط مربوط به تفکیک جزیی کسرها داریم:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} = \frac{b_1}{s + 1} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_3}{(s + 1)^3}$$

$$\Rightarrow (s + 1)^3 F(s) = b_1(s + 1)^2 + b_2(s + 1) + b_3$$

$$\frac{d^2}{ds^2} [(s + 1)^3 F(s)] = 2b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{(3-1)!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} (s + 1)^3 F(s) \right]_{s=-1} = \frac{1}{2} (2) = 1$$

$$\frac{d}{ds} [(s + 1)^3 F(s)] = 2b_1(s + 1) + b_2 \Rightarrow b_2 = \left[ \frac{d}{ds} (s + 1)^3 F(s) \right]_{s=-1} = 0$$

$$(s + 1)^3 F(s) = b_1(s + 1)^2 + b_2(s + 1) + b_3 \Rightarrow b_3 = [(s + 1)^3 F(s)]_{s=-1} = 2$$

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{(s + 1)^3} \Rightarrow f(t) = L^{-1}(F(s)) = e^{-t} + t^2 e^{-t}$$

Thanks for your attention!

[Contents](#)





Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

# Automatic Control

Chapter 2:

## Mathematical Modeling of Control Systems

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
  - Part 1: Introduction to Control Systems
    - Transfer Function
    - Block Diagram and Closed Loop Control Systems
    - Simplification of Block Diagrams
    - Control Theory (Clip)
  - Part 2: Mason's Rule for Simplification of Block Diagrams
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems

- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

# Part 1:

## Modeling of Control Systems

- Transfer Function
- Block Diagram and Closed Loop Control Systems
- Simplification of Block Diagrams
- Control Theory (Clip)

Contents

\* سیستم های کنترلی مورد بحث در این کلاس، LTI (خطی با ضرایب ثابت) هستند.

\* مدل ریاضی سیستم های کنترلی LTI معمولاً به صورت معادله ی دیفرانسیل زیر است:

$u(t)$ : input ,  $y(t)$ : output

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} u^{(1)} + b_m u$$

لاپلاس گیری

$$\longrightarrow (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s)$$

شرایط اولیه = ۰

$$\frac{\text{Output Laplace}}{\text{Input Laplace}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)} \rightarrow \text{Transfer Function}$$

\* مفهوم تابع تبدیل:

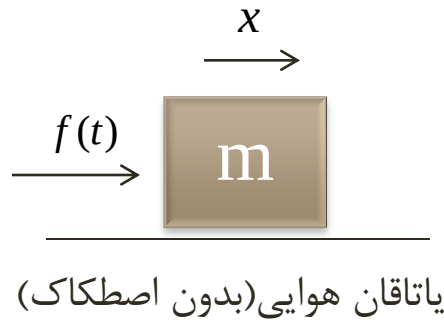


توصیفی ریاضی از فرایندی است که توسط سیستم روی ورودی انجام می شود، تا خروجی بدست آید.

\* نکاتی در مورد تابع تبدیل:

۱. تابع تبدیل، یک مدل ریاضی سیستم دینامیکی است.
۲. مستقل از اندازه و نوع ورودی است.
۳. دارای بعد است و باید واحد آن رعایت شود.
۴. در صورت معلوم بودن تابع تبدیل هر سیستم، می توان پاسخ آن را برای ورودی های مختلف یافت.
۵. اگر تابع تبدیل معلوم نباشد، از طریق آزمایش قابل شناسایی است.

\* مثال:



معادله ی حاکم :  $f(t) = m\ddot{x}$

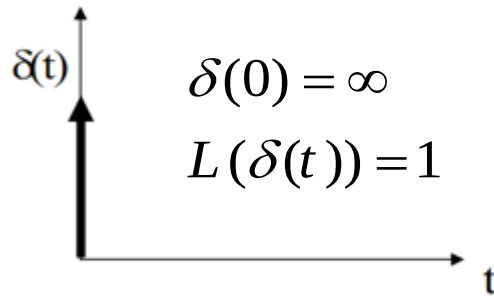
ورودی      خروجی

$$\xrightarrow{\quad} x = \int (\int f(t) dt + c_1) dt + c_2 \xrightarrow{L(x(t))} F(s) = m(s^2 X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0))$$

Double integrator

$$\xrightarrow{L(I.C=0)} F(s) = ms^2 X(s) \xrightarrow{\text{لاپلاس خروجی}} \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2} \xrightarrow{\text{تابع تبدیل}} \text{Transfer Function}$$

لاپلاس ورودی



\* پاسخ به ضربه واحد:

- همه ی کارها در حوزه ی لاپلاس انجام می شود.
- در مرحله ی آخر یک لاپلاس معکوس گرفته می شود.

$$\begin{cases} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \\ \text{Unit impulse input: } u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G(s) \Rightarrow y(t) = g(t) = L^{-1}G(s)$$

\* انتگرال پیچشی (Convolution Integral)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = U(s)G(s)$$

$$\xrightarrow{\text{Laplace inverse}} y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$



\* دلیل استفاده از دیاگرام جعبه ای:  
برای اجتناب از نوشتن مکرر معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم‌های پیچیده،  
از دیاگرام جعبه ای استفاده می شود.

\* المان پایه:  
- سیگنال ها حتماً باید جهت دار باشند.  
- سیگنال ها، در عمل زنجیره ای پیوسته از اطلاعات هستند.



\* دیاگرام جعبه ای یک سیستم کنترل با پسخوراند (Feedback control system):  
سیستم کنترل با پسخوراند سیستمی کنترلی است، که در آن ورودی به خروجی وابسته باشد.

\* اصطلاحات مهم در دیاگرام های جعبه ای:  
- حلقه (loop):

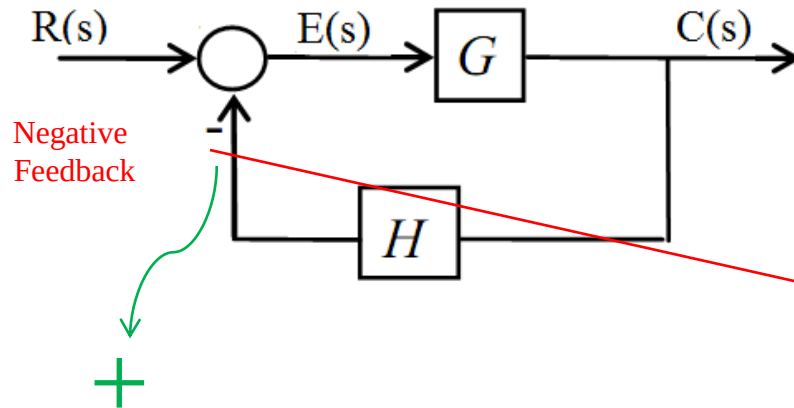
هرگاه در دیاگرام جعبه ای، عامل پسخوراند وجود داشته باشد یک حلقه به وجود می آید.

- تابع تبدیل مدار باز (Open Loop Transfer Function - OLTF):  
اگر حلقه به طور کامل باز شود و همه ی توابع تبدیل موجود در آن در هم ضرب شوند، به تابع تبدیل بدست آمده تابع تبدیل مدار باز می گویند.

- تابع تبدیل مسیر پیشرو (Feed Forward Transfer Function - FFTF):  
اگر مستقیماً از ورودی به خروجی بدون در نظر گرفتن شاخه ی پسخوراند حرکت کنیم، حاصلضرب توابع تبدیل این مسیر را تابع تبدیل مسیر پیشرو گویند.

- تابع تبدیل مدار بسته (Closed Loop Transfer Function - CLTF):  
نسبت واقعی خروجی به ورودی (با در نظر گرفتن شاخه ی پسخوراند) را گویند.

\* مدل سیستم کنترل مدار بسته با پسخوراند منفی:



$$FFTF = G(s)$$

$$OLTF = G(s)H(s)$$

$$CLTF = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$C(s) = E(s)G(s) = (R(s) - C(s)H(s))G(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

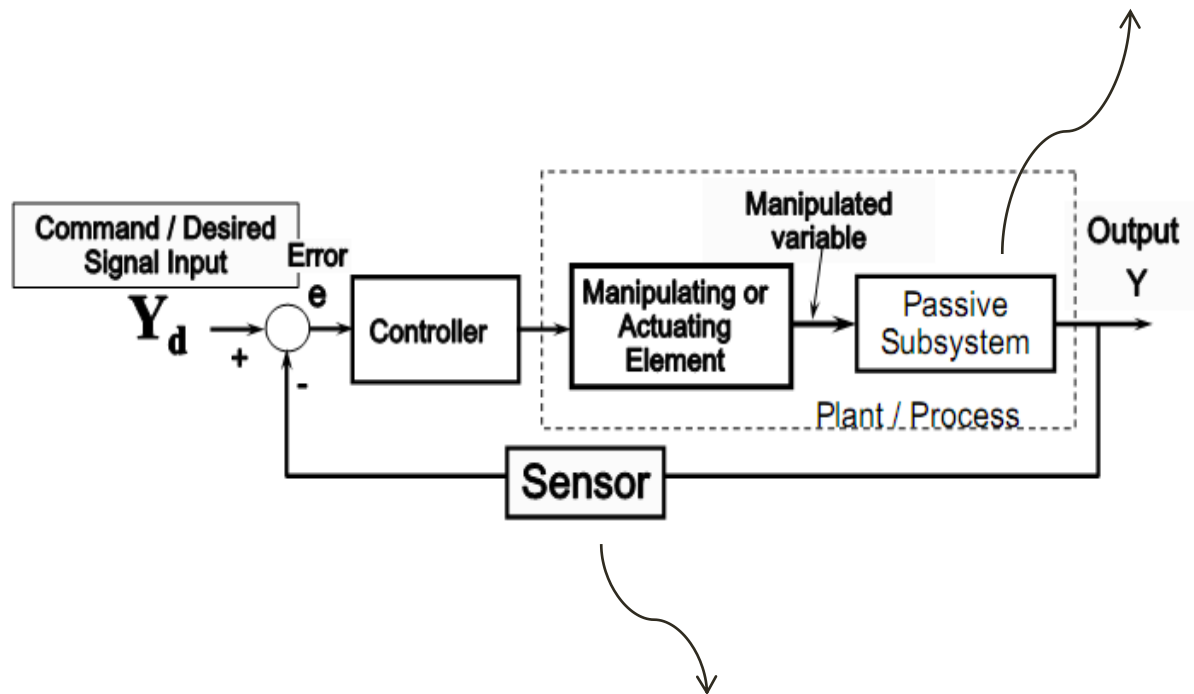
$$CLTF = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{FFTF}{1 + OLTF}$$

$$CLTF = \frac{FFTF}{1 - OLTF}$$

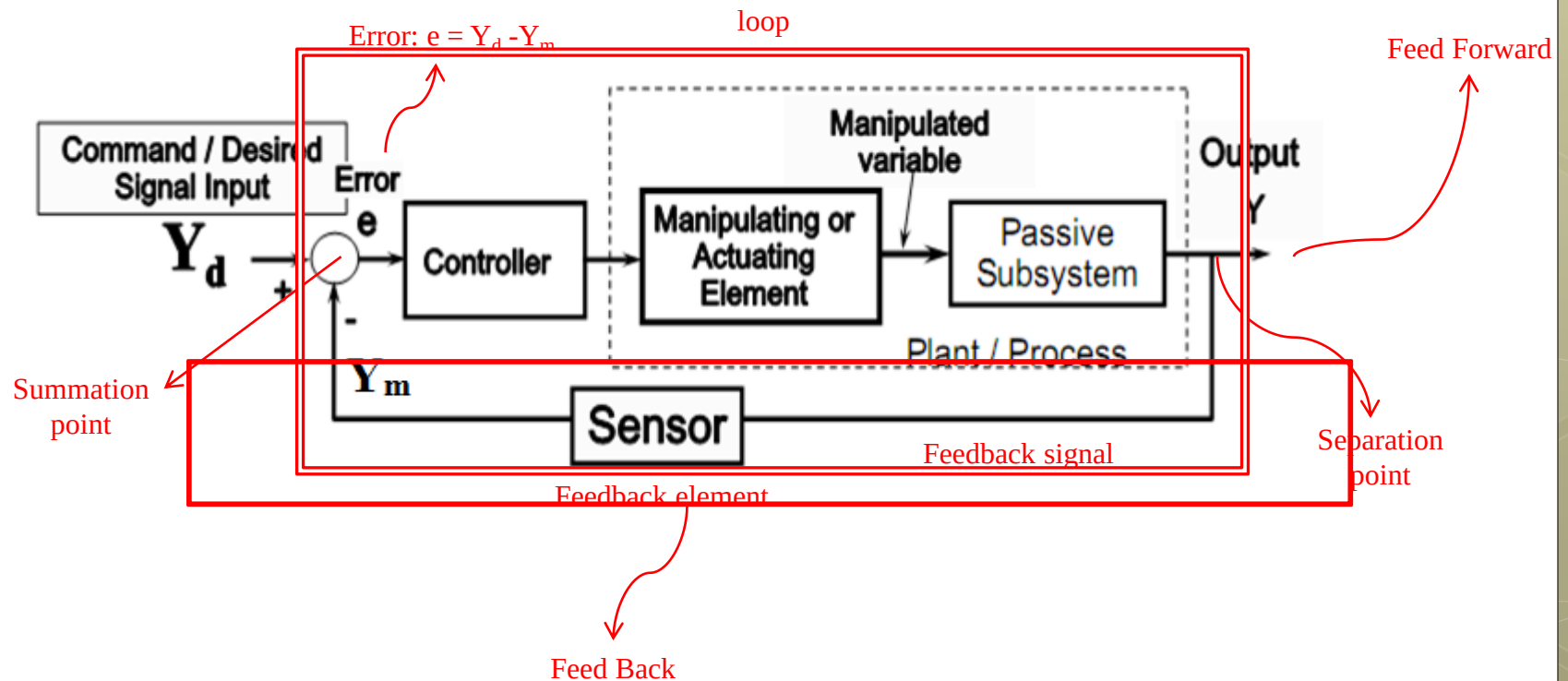
\* به طور کلی:

- فرایند (Process): قصد کنترل دما، رطوبت، جریان و ... را داریم.

- سرو مکانیزم (Servo mechanism): قصد کنترل سرعت، مکان و ... را داریم.



- حسگر (Sensor): تاکومتر برای سرعت زاویه ای، پتانسیومتر و انکودر برای زاویه، ترموکوپل برای دما، فشارسنج برای فشار و ... .



- در بعضی از حسگرها به محض این که اتفاقی در خروجی بیفتد، خود را در حسگر نشان می دهد این نوع حسگر ها اصطلاحاً دینامیک ندارند. برای این نوع حسگرها تابع تبدیل واحد در شاخه پسخوراند در نظر گرفته می شود.

- در گروه دیگری از حسگرها باید صبر کرد تا تغییرات بوجود آمده در خروجی را در حسگر مشاهده کرد. این نوع حسگر ها اصطلاحاً دینامیک دارند و برای آنها تابع تبدیل متناسب با معادلات دینامیکی حاکم بر آنها در نظر گرفته می شود.

- عملگرها (actuators) معمولاً در عمل دارای دینامیک هستند، لذا باید تابع تبدیل مناسب را برای آنها متناسب با معادلات دینامیکی حاکم بر آنها در نظر گرفت.



Rotary Encoder  
with  
Feedback Display  
Demonstration

<http://www.waitingforfriday.com>

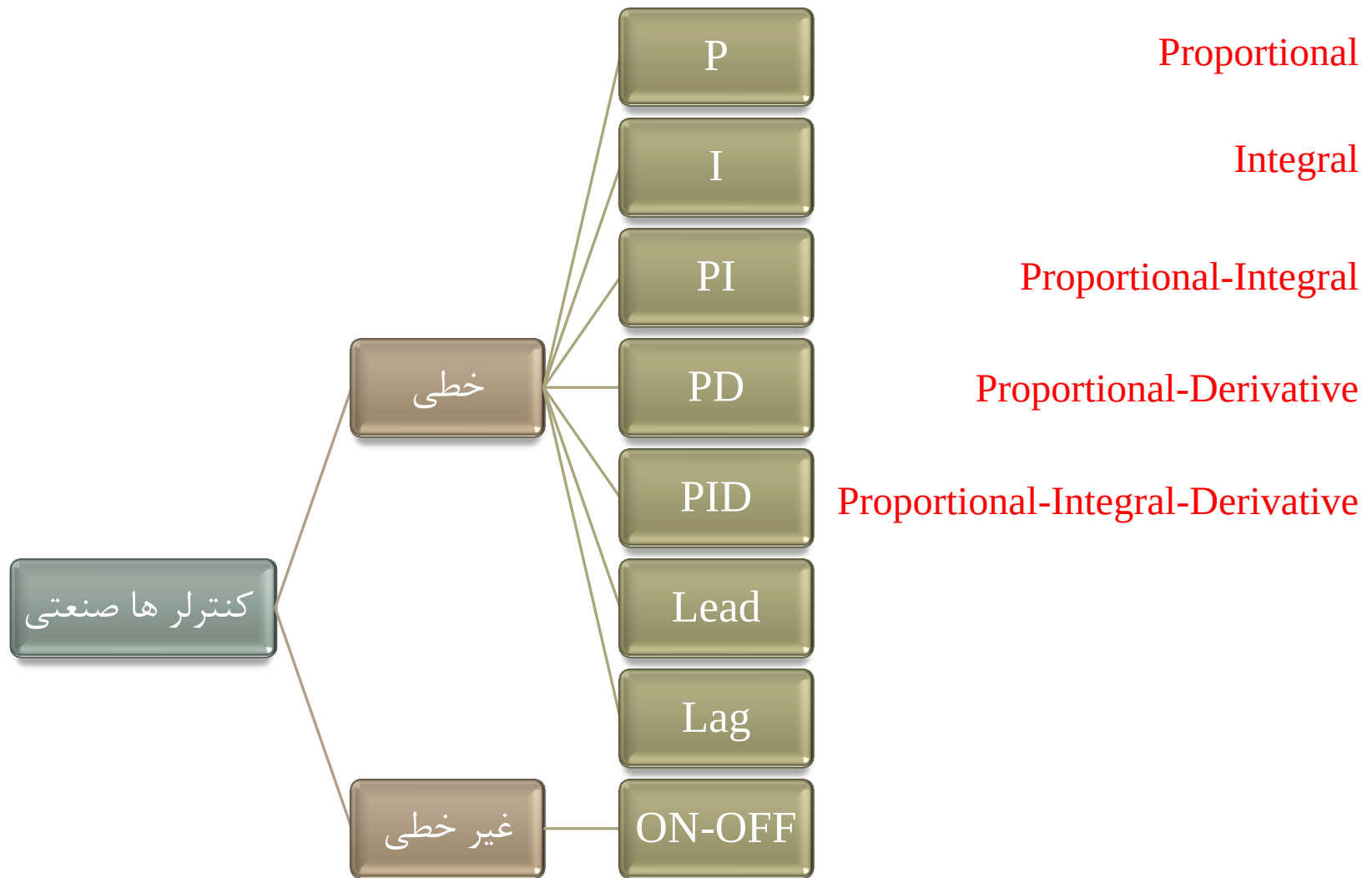
*Sharif University of Technology*

## Digital Tachometer (Clip)



Next Clip



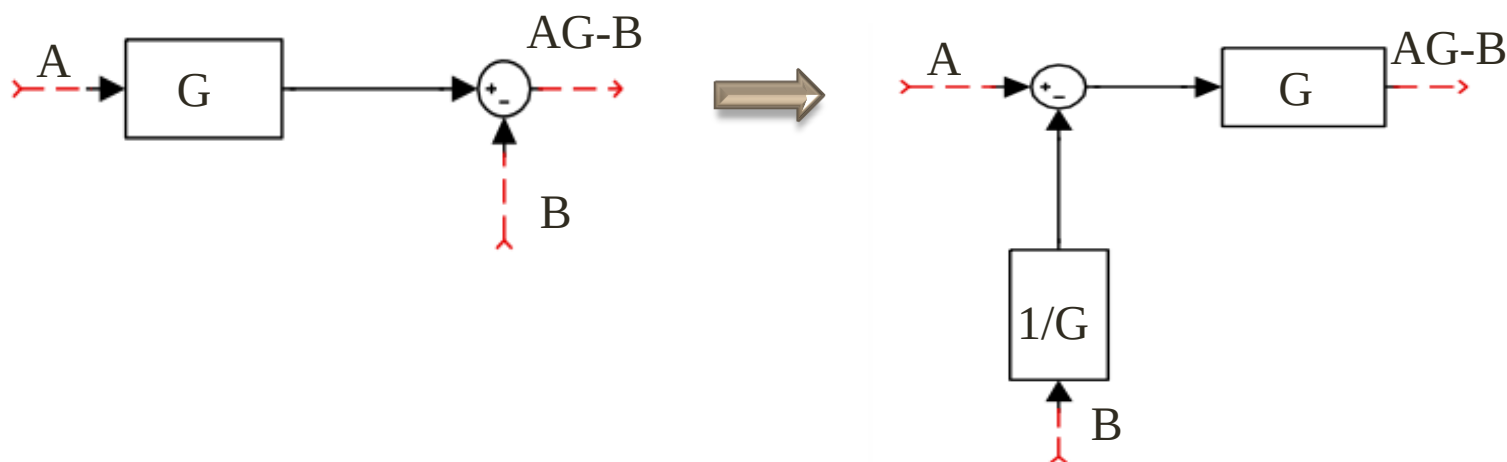




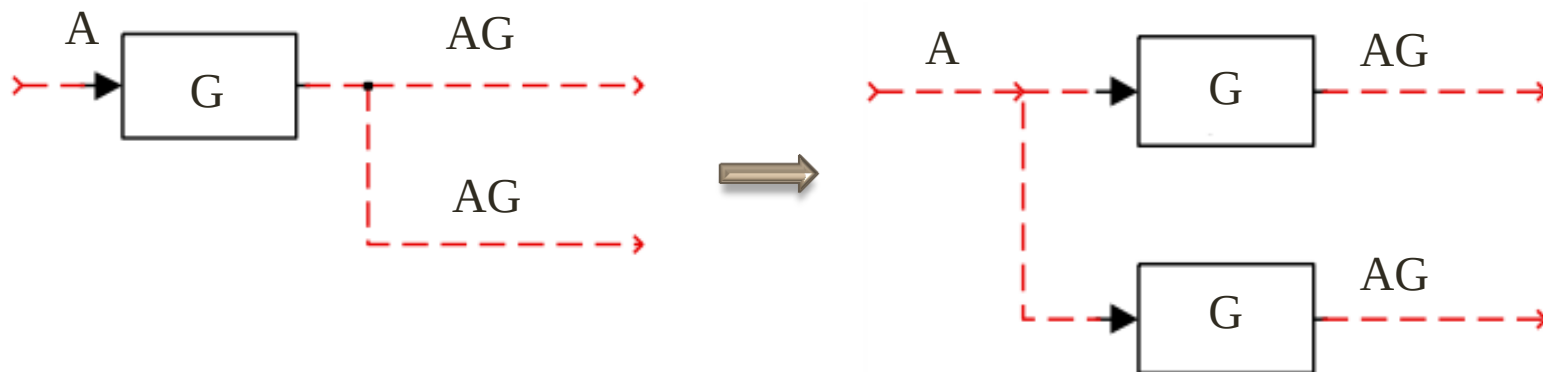
\* قواعد:

- حاصلضرب توابع تبدیل در مسیر پیشرو نباید تغییر کند.
- توابع تبدیل مدار باز باید ثابت باشد.

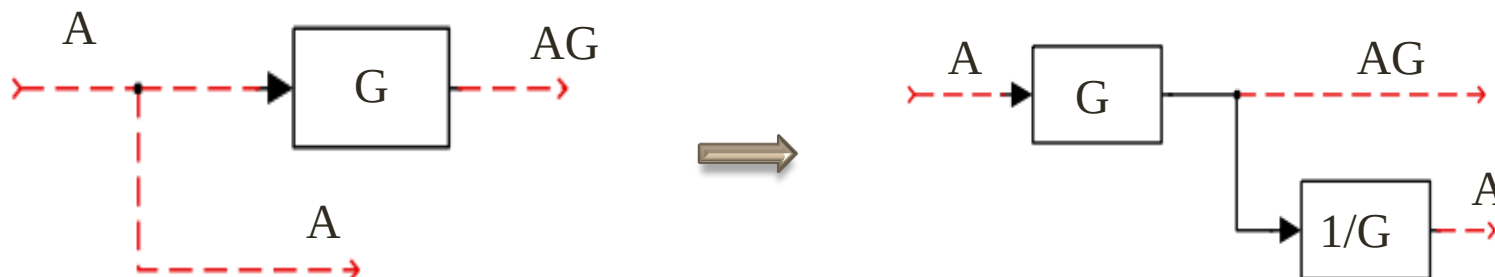
\* مثال ۱: انتقال جعبه به بعد از نقطه ی تجمع



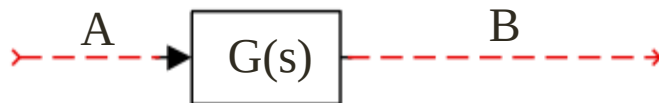
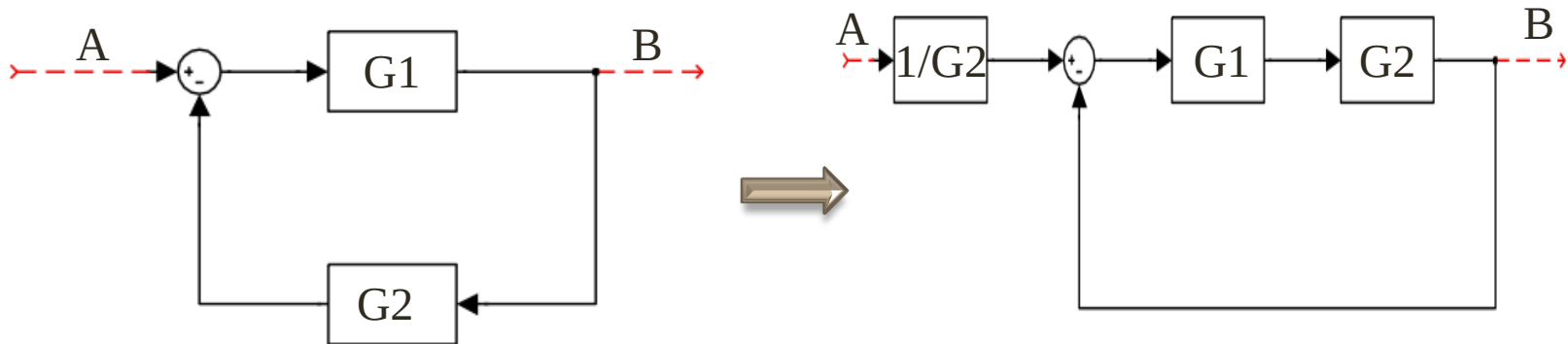
\* مثال ۲: انتقال جعبه به بعد از نقطه ی انشعاب



\* مثال ۳: انتقال جعبه به قبل از نقطه ی انشعاب

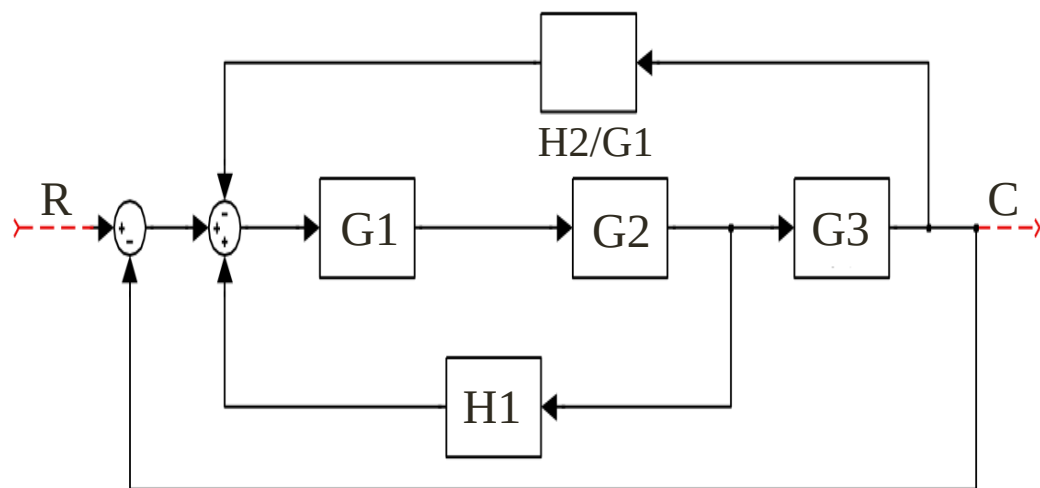
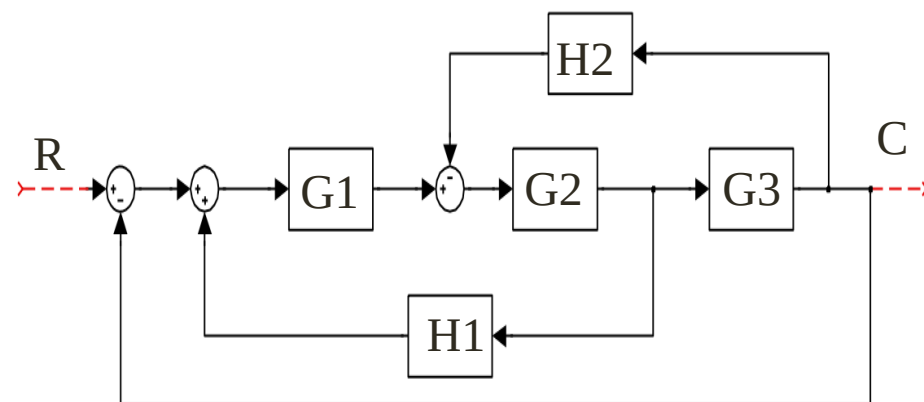


\* مثال ۴: انتقال عضو پسخوراند به مسیر پیشرو

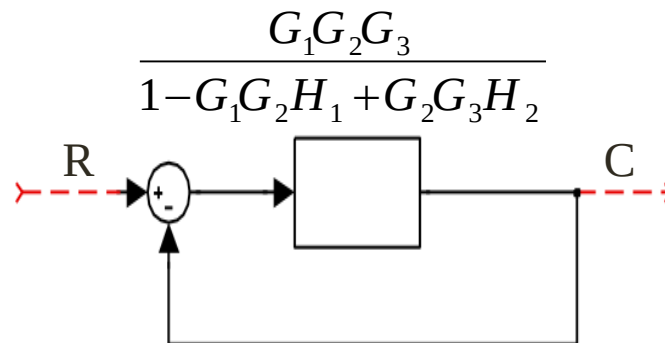
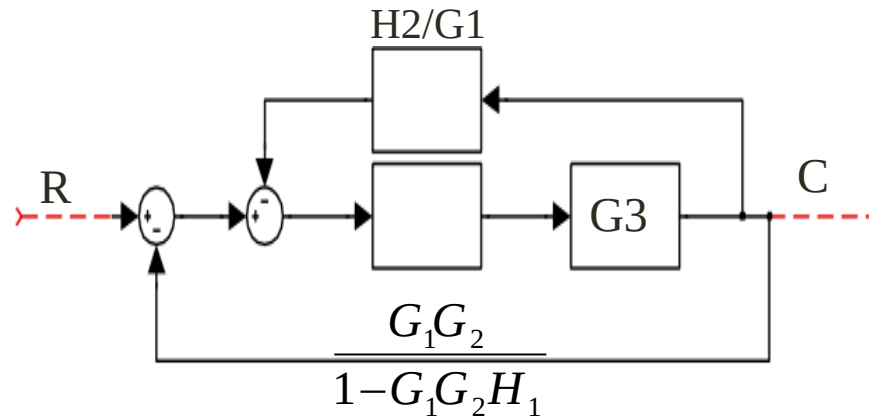


$$G(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

\* مثال ۵: ساده سازی و یافتن تابع تبدیل



- ادامه:



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$



Previous Clip



# Part 2:

## Mason's Rule for Simplification of Block Diagrams



[Contents](#)

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

$P_k$  = path gain or transmittance of kth forward path

$\Delta$  = determinant of graph

= 1 - (sum of all individual loop gains) + (sum of gain products of all possible combinations of two nontouching loops) - (sum of gain products of all possible combinations of three nontouching loops + ...)

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum_a L_a$  = sum of all individual loop gains

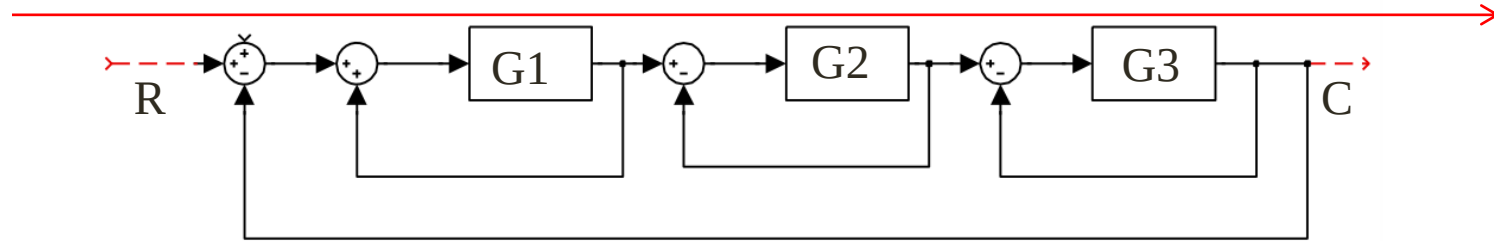
$\sum_{b,c} L_b L_c$  = sum of gain products of all possible combinations of two nontouching loops

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$  = sum of gain products of all possible combinations of three nontouching loops

$\Delta_k$  = cofactor of the kth forward path determinant of the graph with the loops touching the kth forward path removed, that is, the cofactor  $\Delta$ , is obtained from  $\Delta$  by removing the loops that touch path  $P_k$

\* Note: the loop gains should be considered with their signs.

\* مثال ١ :



$$P_1 = G_1 G_2 G_3 ; L_1 = +G_1, L_2 = -G_2, L_3 = -G_3, L_4 = -G_1 G_2 G_3$$

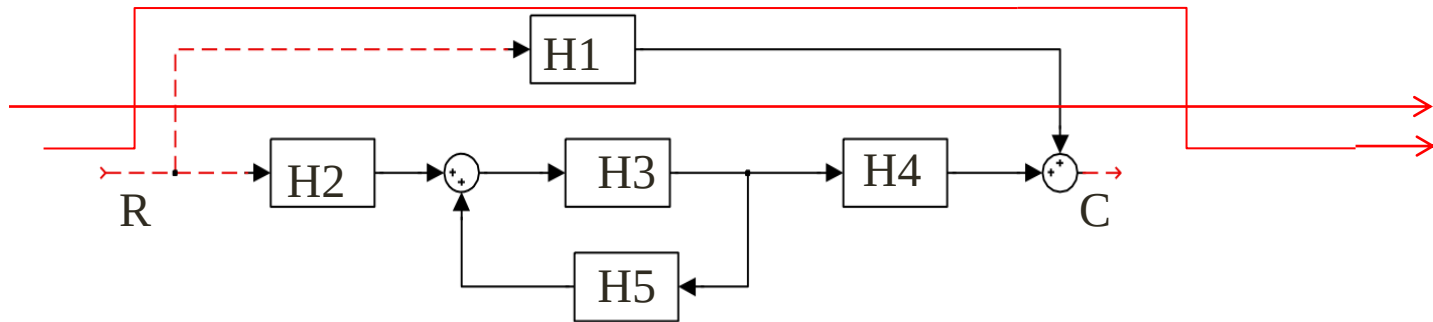
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) - (L_1 L_2 L_3), \Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$$P = \frac{(G_1 G_2 G_3)(1)}{1 - (G_1 - G_2 - G_3 - G_1 G_2 G_3) + (-G_1 G_2 - G_1 G_3 + G_2 G_3) - (G_1 G_2 G_3)}$$

$$P = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 + G_2 + G_3 - G_1 G_2 - G_1 G_3 + G_2 G_3}$$

\* مثال ٢:



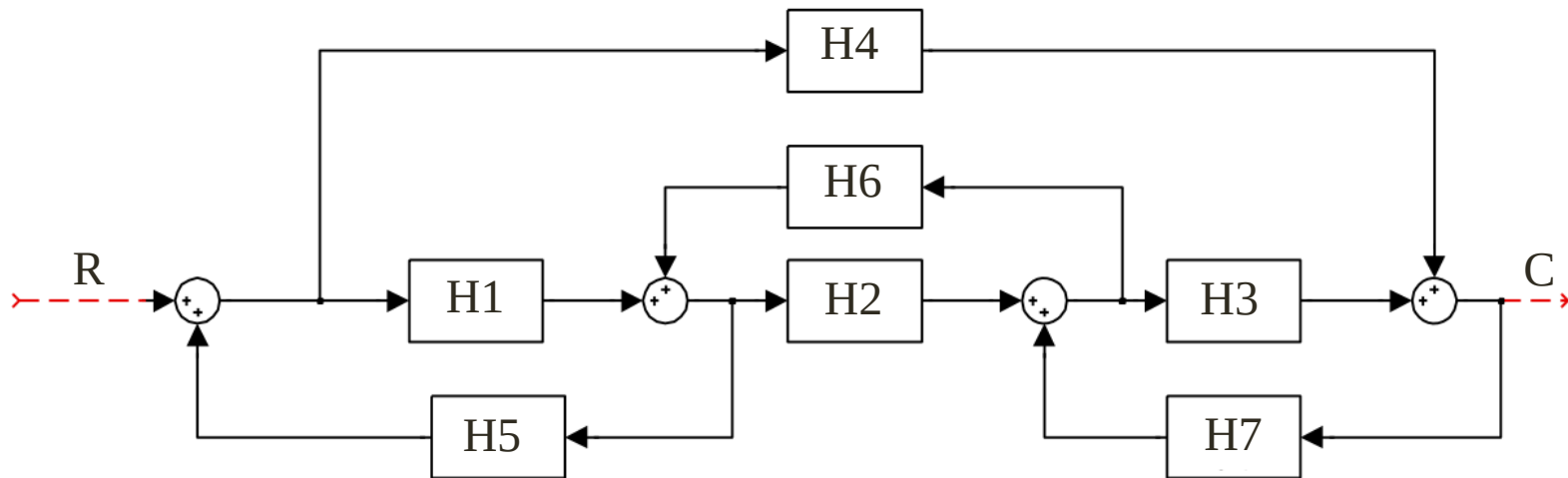
$$P_1 = H_1, P_2 = H_2 H_3 H_4$$

$$L_1 = +H_3 H_5$$

$$\Delta = 1 - L_1, \Delta_1 = 1 - L_1, \Delta_2 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{H_1 - H_1 H_3 H_5 + H_2 H_3 H_4}{1 - H_3 H_5}$$

\* مثال ٣:



$$P_1 = H_4, P_2 = H_1 H_2 H_3$$

$$L_1 = +H_1 H_5, L_2 = +H_2 H_6, L_3 = +H_3 H_7, L_4 = +H_4 H_7 H_6 H_5$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3), \Delta_1 = 1 - L_2, \Delta_2 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$P = \frac{(H_4)(1 - H_2H_6) + (H_1H_2H_3)(1)}{1 - (H_1H_5 + H_2H_6 + H_3H_7 + H_4H_7H_6H_5) + [(H_1H_5)(H_3H_7)]}$$

$$P = \frac{H_4 - H_2H_4H_6 + H_1H_2H_3}{1 - H_1H_5 - H_2H_6 - H_3H_7 + H_1H_3H_5H_7 - H_4H_5H_6H_7}$$

Thanks for your attention!

[Contents](#)





Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

# Automatic Control

Chapter 3:

## Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems

1391-92 Fall Semester

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- **Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems**
  - Part 1: Modeling of Mechanical Systems
    - Mass and Spring (Example 1)
    - Inverted Pendulum (Example 2)
  - Part 2: Modeling of Electrical and Electronic Systems
    - RLC Circuits
    - Operational Amplifiers
  - Part 3: Modeling of Liquid-Level Systems

- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

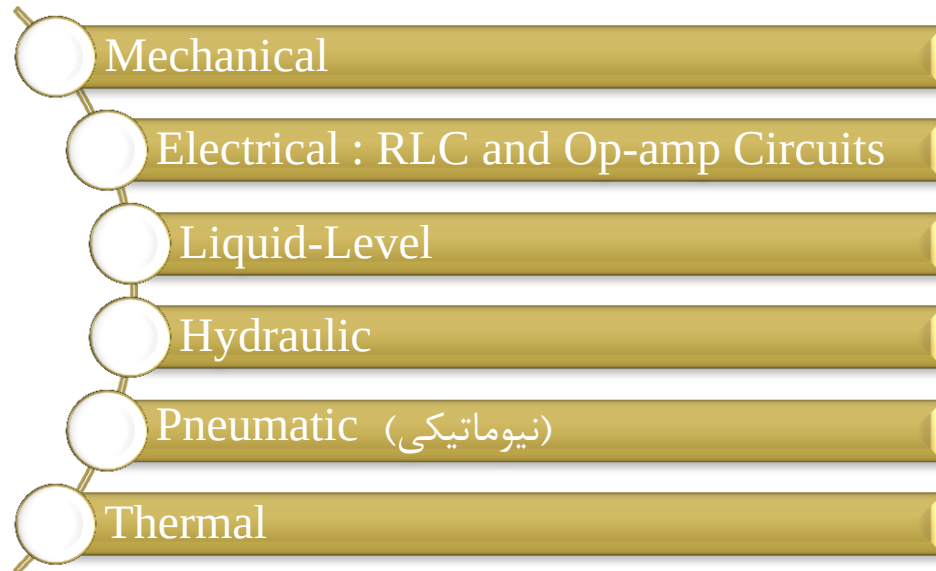
# Automatic control of a maze game using vision

EMSD7 Project, Aalborg  
University (AAU), Denmark

*Sharif University of Technology*

Next Clip

\* در این فصل و فصل بعد با مدل سازی سیستم های زیر آشنا خواهیم شد:



\* هدف، ایجاد ارتباط بین دانسته هایمان در تحلیل سیستم های بالا - که در درس های مختلف مانند دینامیک و سیالات و... آموخته ایم - با ابزارهای کنترل کلاسیک - که در دو فصل قبل تشریح شد - می باشد.

\* مراحل معمول در مدل سازی و بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم:



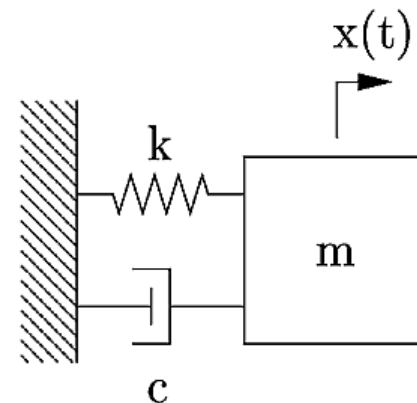
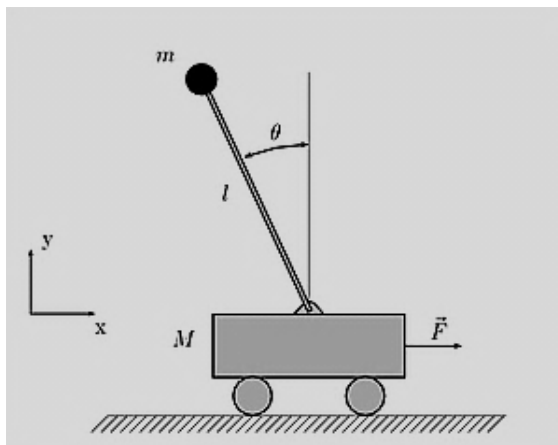
# Part 1:

## Modeling of Mechanical Systems

- Mass and Spring (Example 1)
- Inverted Pendulum (Example 2)

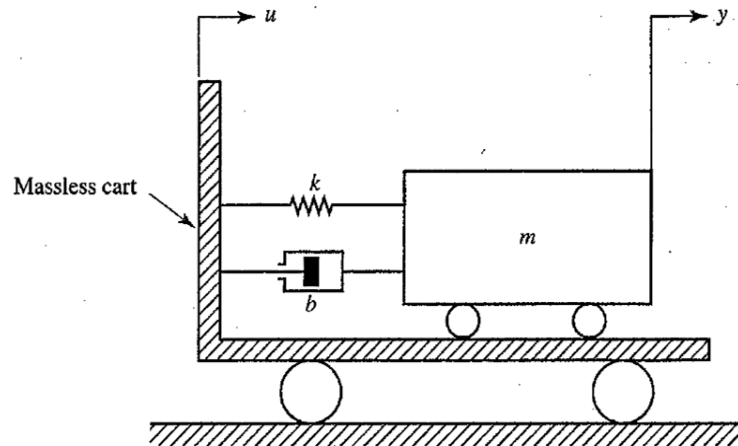
Contents

- \* سیستم های مکانیکی (سرو مکانیزم ها) از آشناترین سیستم ها هستند.
- \* در نوشتن معادلات حاکم از قانون دوم نیوتن و گاهی رابطه اوایلر (رابطه بین شتاب ها و نیروها و گشتاورها) استفاده می شود. پس اکثرا معادلات بدست آمده، درجه دو هستند.
- \* ورودی سیستم های مکانیکی معمولا از جنس جابجایی، سرعت (خطی یا زاویه ای) یا نیرو (گشتاور) و خروجی آن ها از جنس جابجایی و گاهی سرعت است.
- \* مثال هایی از این سیستم ها، جرم، فنر و دمپر و آونگ معکوس هستند.





\* مثال ۱: جرم، فنر و دمپر



گام ۱: نوشتن معادلات حاکم  $m\ddot{y} = -b(\dot{y} - \dot{u}) - k(y - u) \Rightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku$

گام ۲: تبدیل لاپلاس  $ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = bsU(s) + kU(s)$

گام ۳: تابع تبدیل  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$

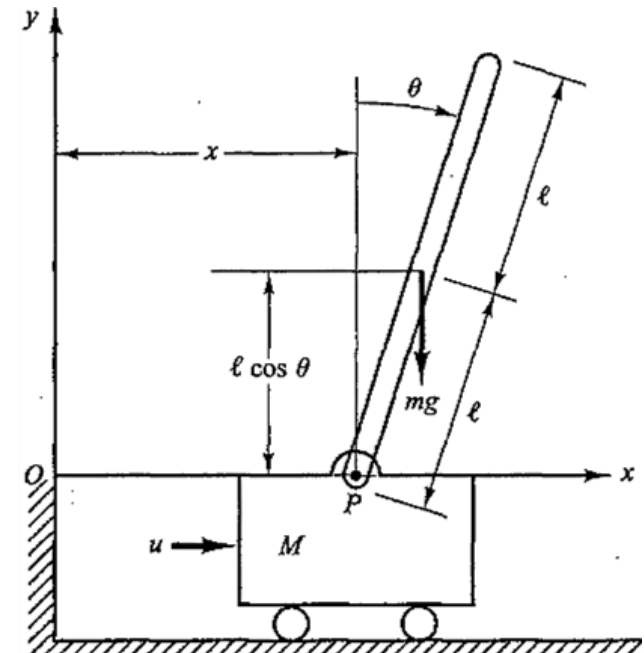
\* مثال ۲: آونگ معکوس (توضیح رفتار موشک پرتابگر ماهواره)

گام ۱: نوشتن معادلات حاکم

$$x_G = x + l \sin \theta, y_G = l \cos \theta$$

$$I \ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \\ m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \end{cases}$$



سینماتیک

قانون دوم برای پاندول

تجزیه در دو راستا (برای حذف H لازم است)

\* ادامه مثال:



$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H$$

گام ۲: خطی سازی

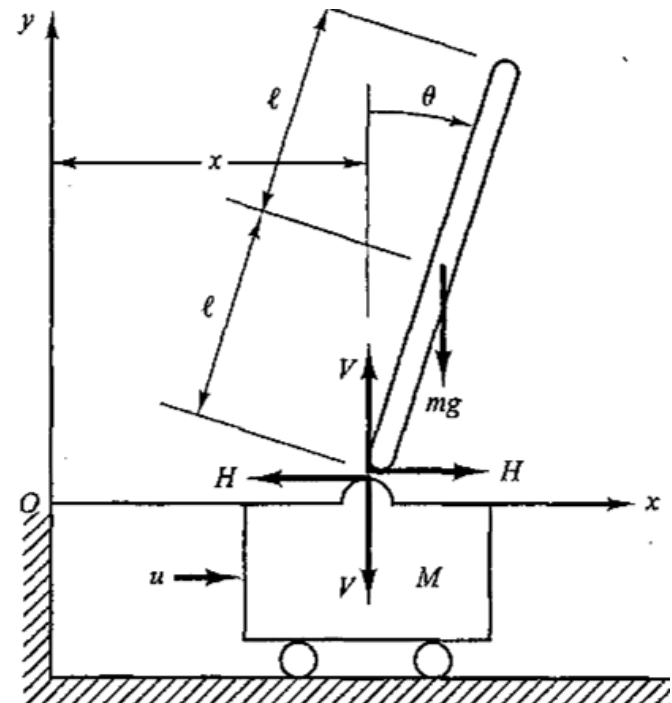
روابط مربوط به آونگ نیاز به خطی سازی دارند. چون نقطه تعادل، مبدا مختصات است می توان برای خطی سازی از بسط تیلور مرتبه اول استفاده کرد:

$$\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1, \dot{\theta} \theta = 0$$

$$I \ddot{\theta} = V l \theta - H l$$

$$m(\ddot{x} + l \ddot{\theta}) = H$$

$$0 = V - mg$$



\* ادامه مثال:



$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} &= mgl\theta\end{aligned}$$

گام ۳: تبدیل لاپلاس

$$\begin{aligned}(M + m)Xs^2 + ml\theta s^2 &= U \\ (I + ml^2)\theta s^2 + mlXs^2 &= mgl\theta\end{aligned}$$

گام ۴: تابع تبدیل



$$F(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-ml}{[I(M + m) + Mml^2]s^2 - (M + m)mgl}$$

\* برای تمرین خودتان تابع تبدیل را  $\frac{X(s)}{U(s)}$  بدست آورید.

\* کنترل خطی خودکار پاندول معکوس :



Previous Clip

## Part 2:

# Modeling of Electrical and Electronic Systems

- RLC Circuits
- Operational Amplifiers

Contents

\* با دو نوع عضو در حل مدارها مواجه می شویم: RLC و Op-amp

\* قوانین کیرشهف

- قانون ولتاژ: جمع جبری ولتاژها در یک حلقه صفر است.

- قانون جریان: جمع جریان های ورودی به یک گره برابر جمع جریان های خروجی است.

\* RLC

$$\text{Resistance: } v = Ri \xrightarrow{\text{Laplace}} V = RI$$

$$\text{Inductance: } v = L \frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{Laplace}} V = (Ls)I$$

$$\text{Capacitance: } v = \frac{1}{C} \int idt \xrightarrow{\text{Laplace}} V = \frac{1}{Cs} I$$

## \* مثال ۱: مدار RLC

گام ۱: یافتن معادلات حاکم

قانون ولتاژ کیرشهف

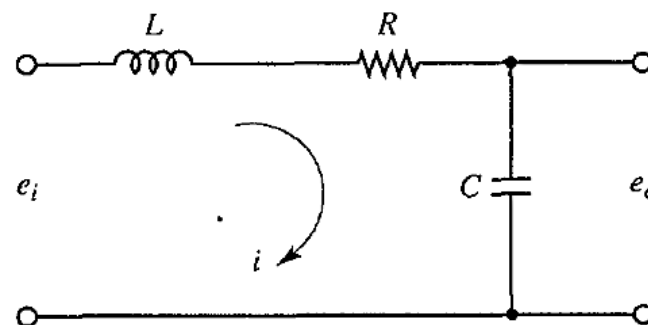
$$V_L + V_R + V_C = e_i$$

المان های RLC

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

رابطه ی خروجی

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt$$



گام ۲: تبدیل لاپلاس

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs})I(s) = E_i(s), \quad E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

گام ۳: تابع تبدیل

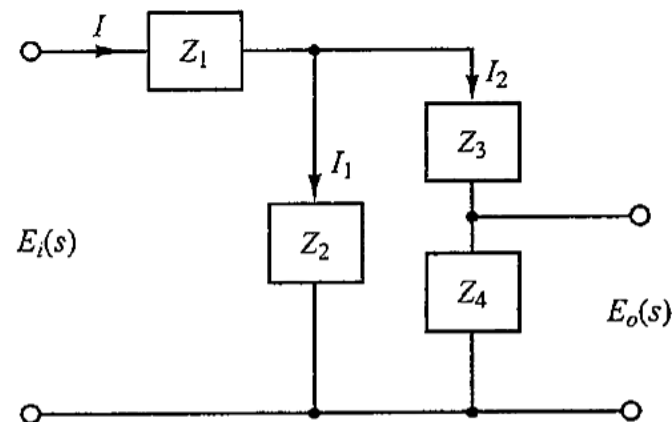
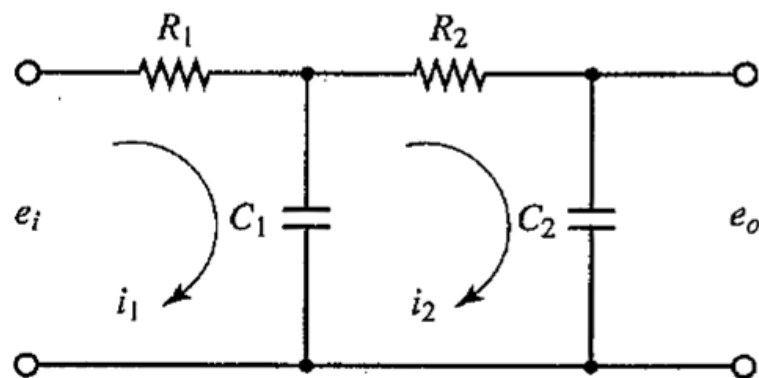
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(CL)s^2 + (RC)s + 1}$$



\* مثال ۲: در این روش ابتدا مدار را به فضای لاپلاس می بریم و بعد حل می کنیم.

- در عمل تقریباً همیشه از این روش استفاده می شود.

مدار در فضای لاپلاس و امپدانس موهومی



$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2, I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I, I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

\* ادامه مثال:

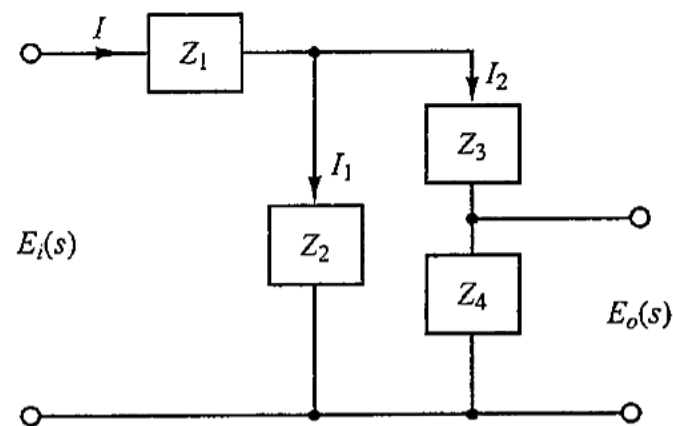
$$E_i = Z_1 I + Z_2 I_1 = \left[ Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$E_o = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

$$Z_1 = R_1, Z_2 = \frac{1}{C_1 s}, Z_3 = R_2, Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$$

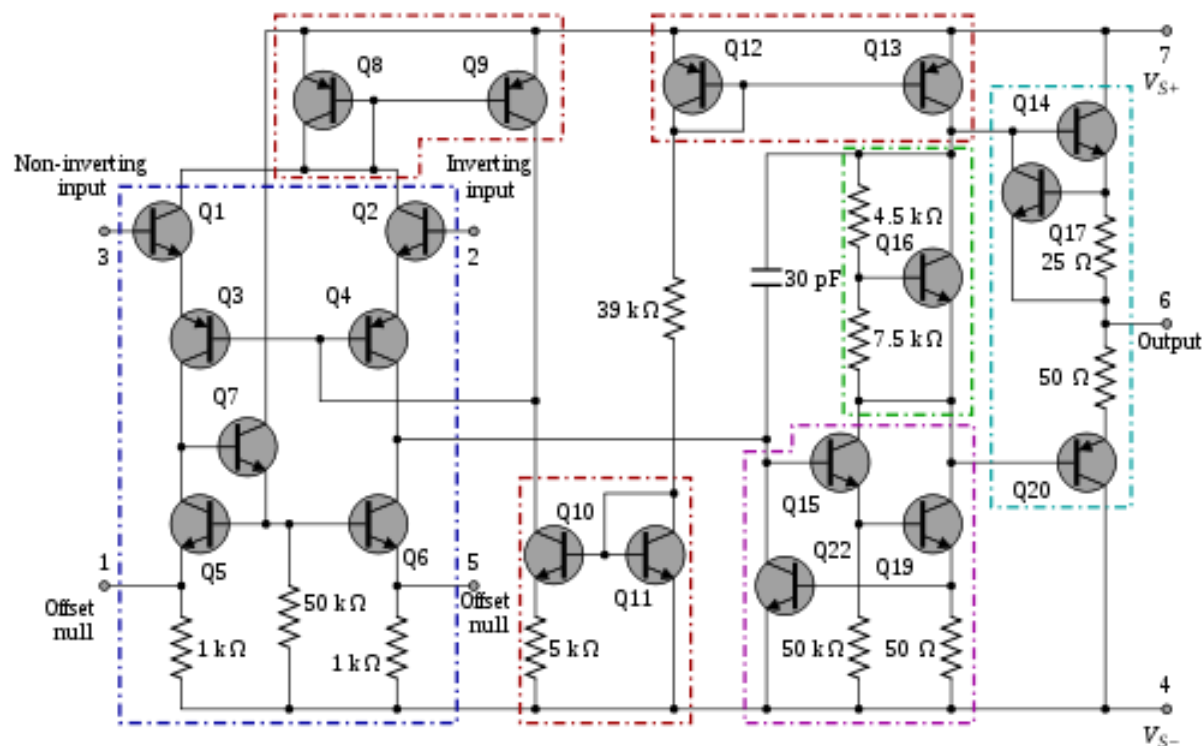
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

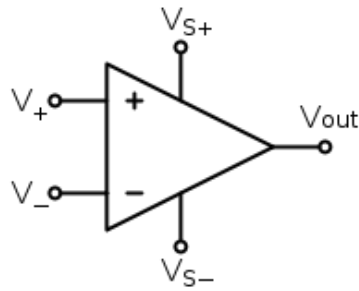
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$



\* Op-amp یا تقویت کننده های عملیاتی از اجزای بسیار مهم مدارهای الکترونیکی به خصوص مدارهای کنترلی هستند.

\* Op-amp ها یک جزء مداری ساده نیستند و خود دارای مداری پیچیده از طبقات ترانزیستور و اجزای RLC (مطابق شکل) هستند.





\* Op-amp از یک power supply (منبع قدرت) قدرت می گیرد؛ که در شکل با  $V_S$  مشخص شده است.

\* رابطه اصلی کارکرد Op-amp

$$V_o = K(V_+ - V_-)$$

- ولتاژهای ورودی می توانند ac یا dc باشند.

-  $K$ : بهره ولتاژ (Voltage gain)

\*  $K$  برای جریان های dc و جریان های ac با فرکانس کمتر از 10Hz،  $10^5 \sim 10^6$  می باشد و با افزایش فرکانس کاهش می یابد. چنان که برای فرکانس  $1\text{MHz} \sim 50\text{MHz}$  به حدود ۱ می رسد.

\* در حالت ایده آل قوانین Op-amp به صورت زیر در می آید :

$$I_+ = I_- = 0$$

- پایانه های Op-amp جریان نمی کشند:

$$V_+ = V_-$$

- پایانه های Op-amp اختلاف پتانسیل ندارند:

به عبارت دیگر، امپدانس ورودی بی نهایت و امپدانس خروجی صفر است؛ در نتیجه، ولتاژ خروجی مستقل از مقاومت خروجی مدار می باشد.

\* مثال ۱: مدار معکوس کننده (Inverting Op-amp)

کیرشوف

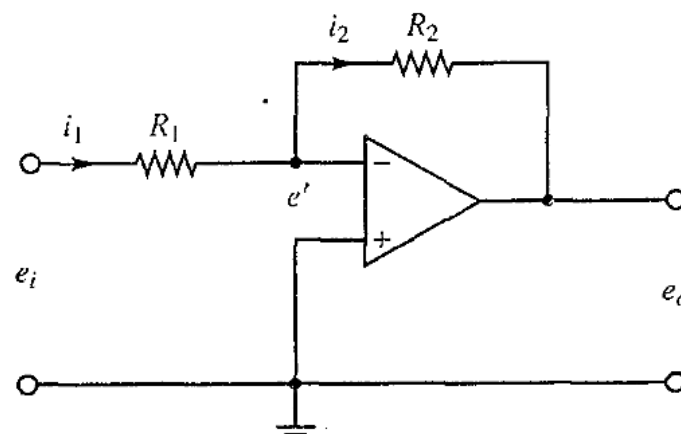
$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Op-amp جریان نمی کشد

$$i_1 = i_2$$

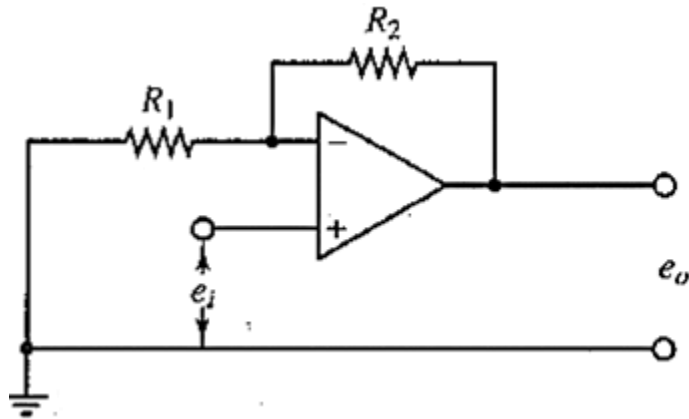
تابع تبدیل

$$\frac{e_o}{e_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$



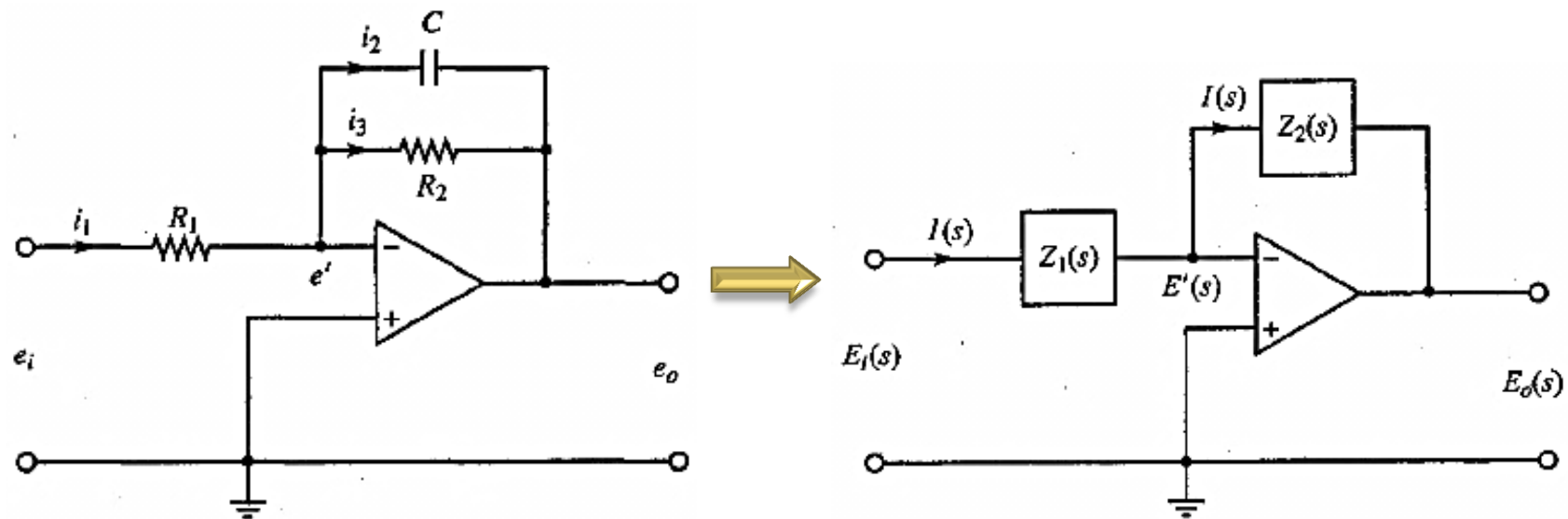
- علامت منفی (بهره منفی) دلیل این نام گذاری است.

\* مثال ۲: مدار غیر معکوس کننده (Non-inverting Op-amp)



$$\frac{e_o}{e_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

\* روش امپدانس موهومی در مدارهای Op-amp:





\* مثال ۳: کنترلر PID با استفاده از Op-amp:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

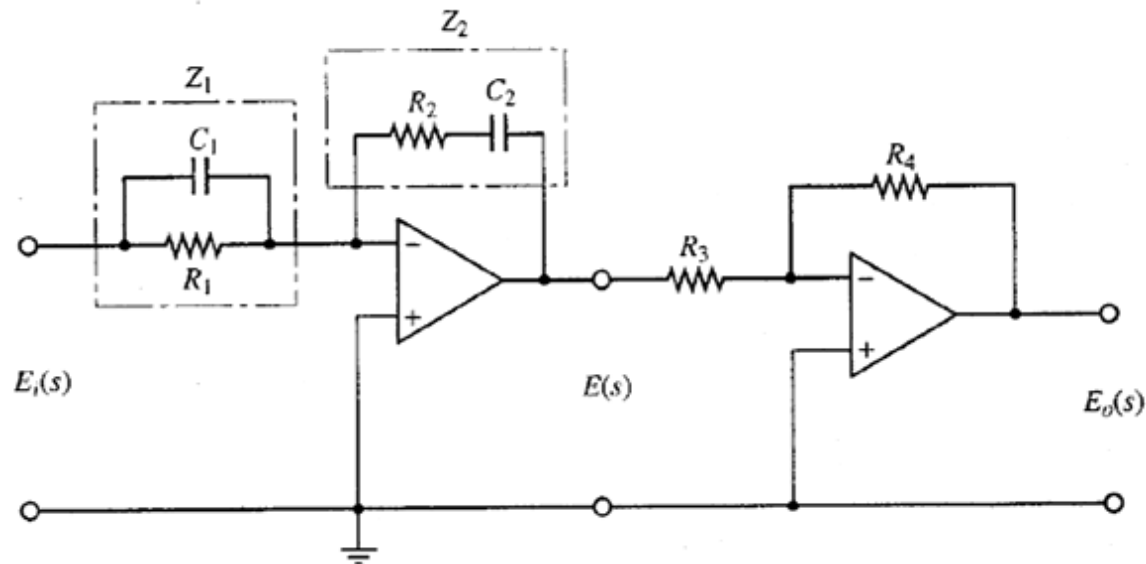
$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

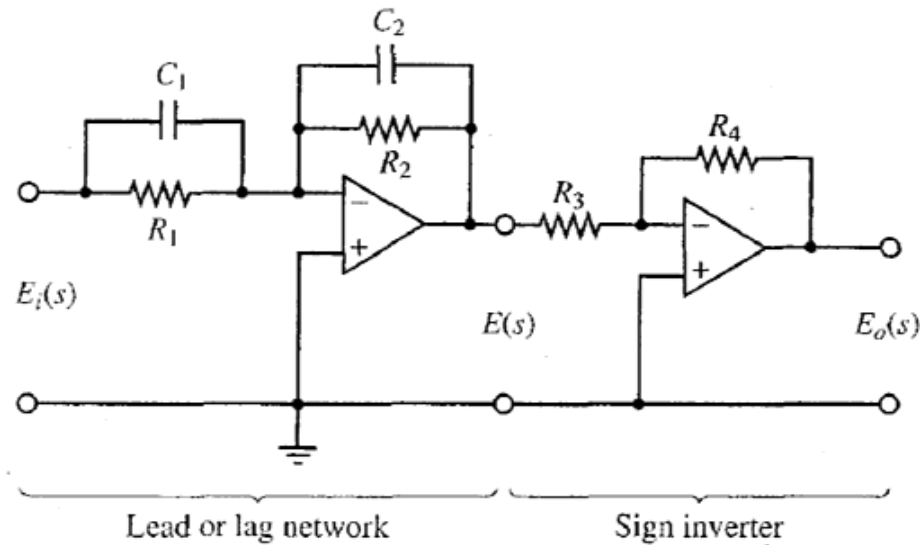
$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left( 1 + \frac{T_i}{s} + T_d s \right)$$

$$K_p = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_1 R_3 C_2}, \quad T_i = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}, \quad T_d = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$$



\* مثال ۴: شبکه Lead-Lag با استفاده از Op-amp:



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} ; T = R_1 C_1, \alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}, K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

|   | Control Action | $G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$                                                                                          | Operational Amplifier Circuits |
|---|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1 | P              | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1}$                                                                                       |                                |
| 2 | I              | $\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_1 C_2 s}$                                                                                   |                                |
| 3 | PD             | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} (R_1 C_1 s + 1)$                                                                       |                                |
| 4 | PI             | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s}$                                                       |                                |
| 5 | PID            | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$                                      |                                |
| 6 | Lead or lag    | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$                                                   |                                |
| 7 | Lag-lead       | $\frac{R_6}{R_5} \frac{R_4}{R_3} \frac{[(R_1 + R_3) C_1 s + 1](R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)[(R_2 + R_4) C_2 s + 1]}$ |                                |

# Part 3:

## Modeling of Liquid-Level Systems



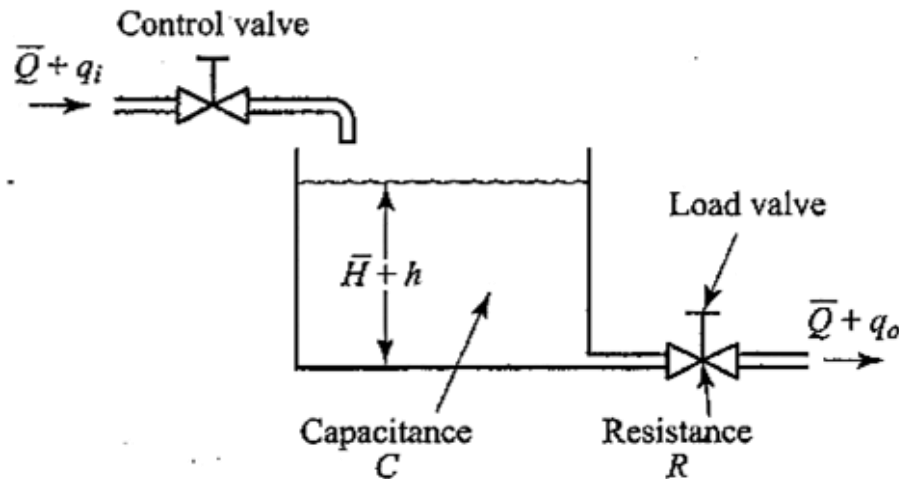
Contents

\* استفاده از سیالات (گازها و مایع ها)، انعطاف پذیرترین روش انتقال قدرت و سیگنال (انتقال اطلاعات) است.

\* سیستم های نیوماتیک، از هوا و دیگر گازها استفاده می کنند و در مقابل سیستم های هیدرولیک با روغن کار می کنند.

- ابتدا سیستم های کنترل سطح سیال را بررسی می کنیم.
- سپس سیستم های نیوماتیک را که در اتوماسیون تولید و کنترلرهای اتوماتیک کاربرد دارند، مورد بررسی قرار می دهیم.
- در ادامه سیستم های هیدرولیک را که در ماشین ابزار، سیستم های کنترل هوایی و ... استفاده می شوند، بررسی می کنیم.
- در نهایت به طور مختصر، در مورد سیستم های حرارتی بحث می کنیم.

\* حالت پایدار سیستم را  $\bar{H}, \bar{Q}_o, \bar{Q}_i$  در نظر می گیریم و رابطه حاکم را خطی سازی می کنیم.



$q_i$ : ورودی ،  $q_o$ : خروجی  
 $h$ : متغیر ،  $C$ : ظرفیت مخزن

$$q_i - q_o = C \frac{dh}{dt}$$

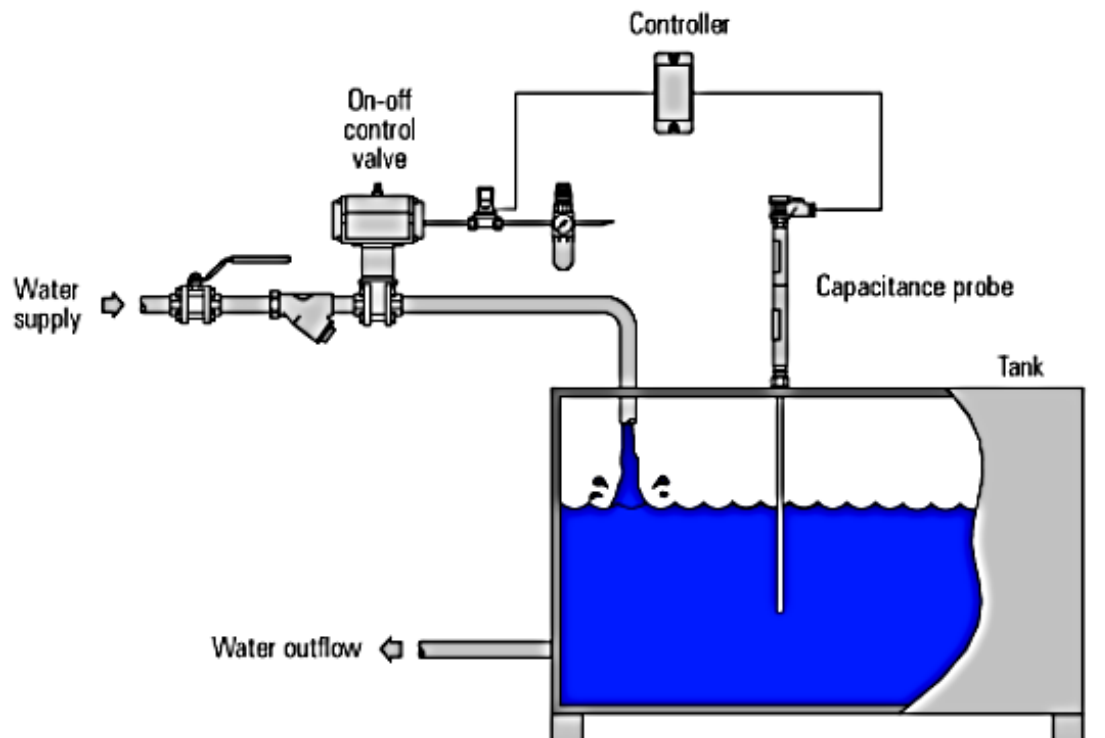
- رابطه خطی سازی شده مخزن حول حالت پایدار:

$$R = \frac{\Delta h}{q_o} = \frac{h - 0}{q_o}$$

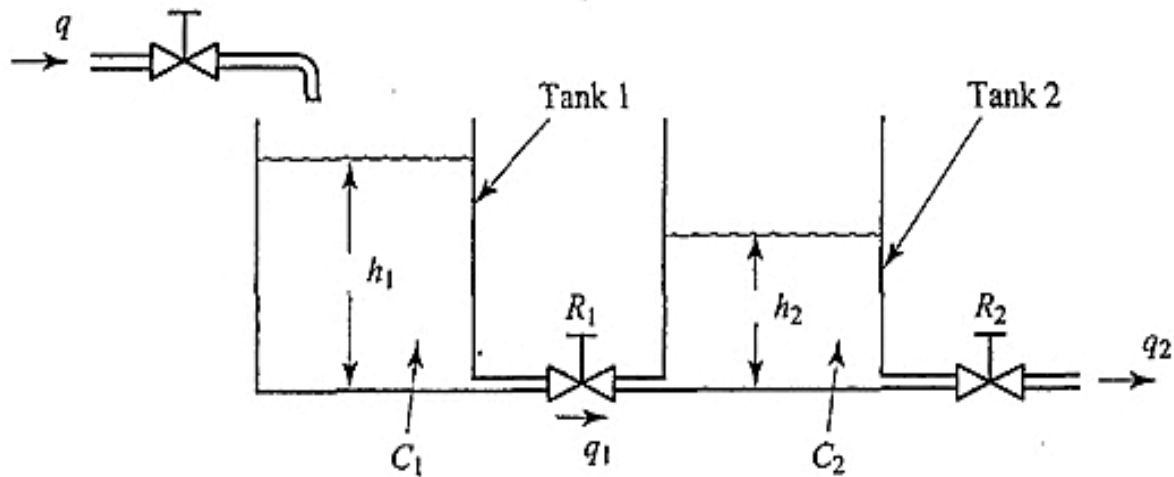
- برای شیر مقاومتی هم داریم:

\* در ادامه با ترکیب روابط خواهیم داشت:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}, \quad \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$



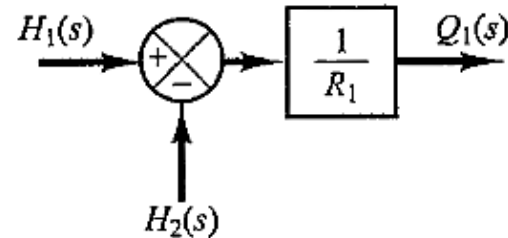
\* مثال: حل با استفاده از دیاگرام بلوکی



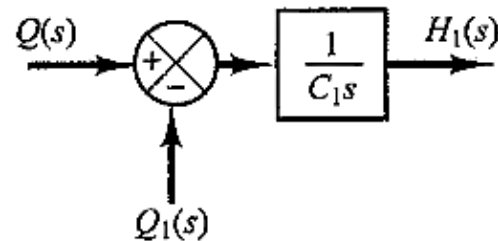


\* ادامه مثال:

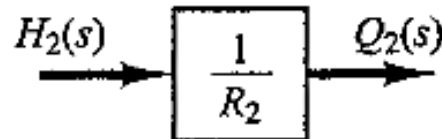
$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$



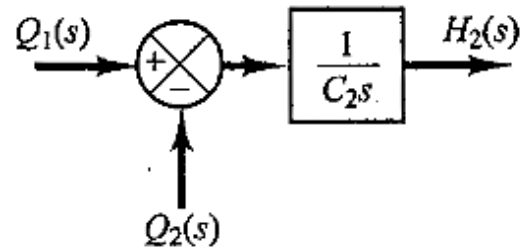
$$q - q_1 = C_1 \frac{dh_1}{dt}$$



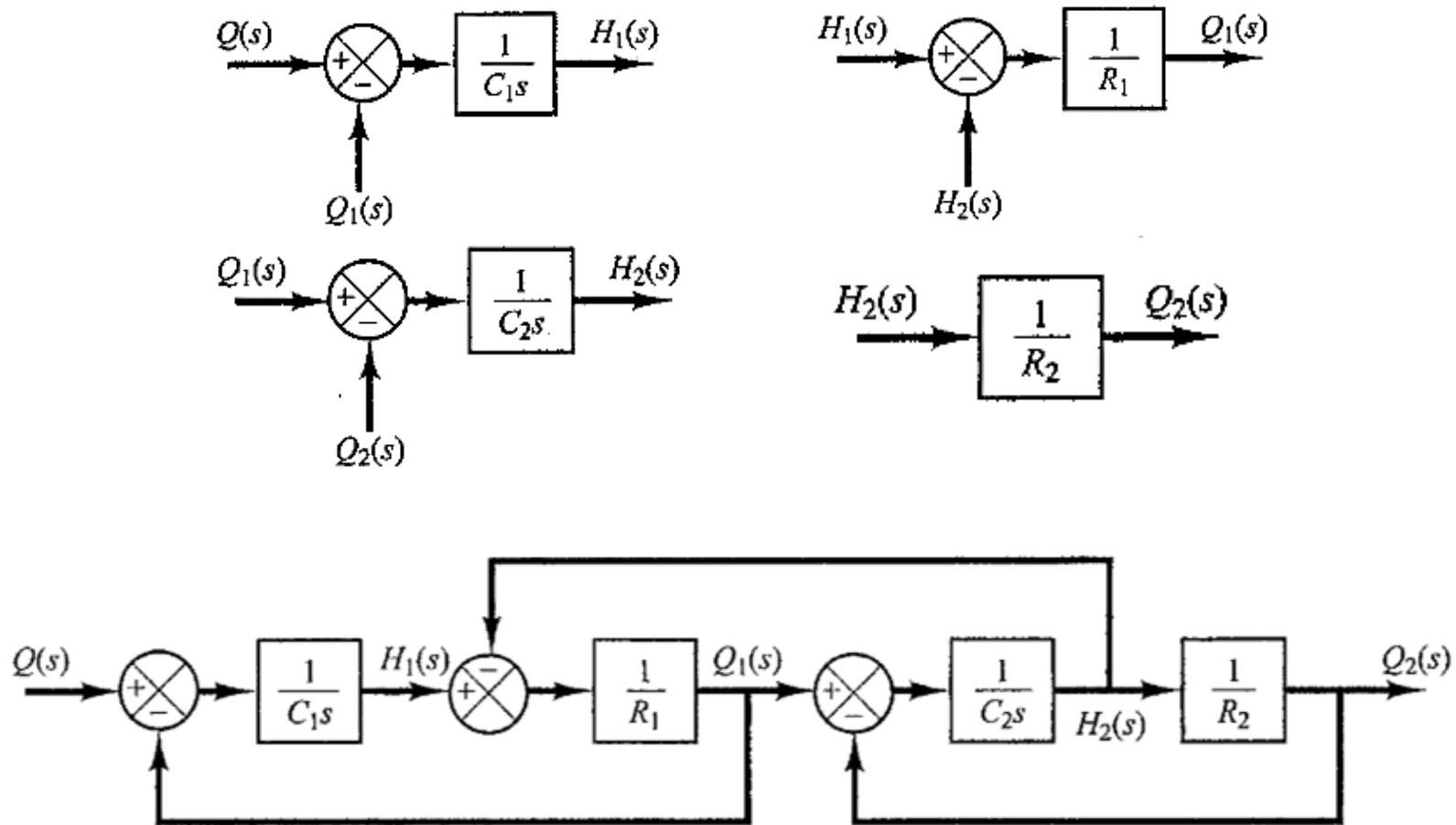
$$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$



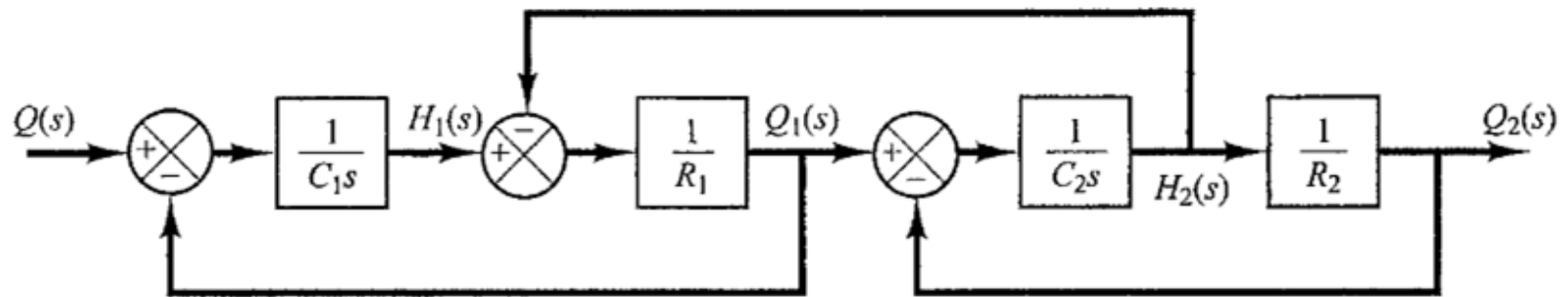
$$q_1 - q_2 = C_2 \frac{dh_2}{dt}$$



\* ادامه - با ترکیب دیاگرام های بدست آمده به دیاگرام کلی زیر می رسم:



\* ادامه مثال:



$$Q(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}} \rightarrow Q_2(s)$$

Thanks for your attention!

Contents



Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

# Automatic Control

Chapter 5:

## Transient and Steady-State Response Analysis

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
  - Part 1: Transient Response – First Order Systems
    - Unit Step Response
    - Unit Ramp Response
    - Unit Impulse Response

- Part 2: Transient Response – Second Order Systems
  - Unit Step Response
  - Transient Response Specification
  - Servo System
- Part 3: Transient Response – Higher Order Systems
  - Unit Step Response
- Part 4: Stability Analysis
  - Routh's Stability Criterion
  - Routh's Criteria – Special Cases
  - Effects of Control Actions on System Performance
- Part 5: Steady-State Error of Unity Feedback Control Systems
  - Static Position Error Constant
  - Static Velocity Error Constant
  - Static Acceleration Error Constant

- ◉ [Chapter 6](#): Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- ◉ [Chapter 7](#): Control Systems Design by Root-Locus Method
- ◉ [Chapter 8](#): Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- ◉ [Chapter 9](#): Control Systems Design by Frequency Response Method
- ◉ [Chapter 10](#): PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method



- \* در دو فصل قبل، به یافتن مدل ریاضی سیستم ها - اولین مرحله ی تحلیل یک سیستم کنترلی - پرداختیم.
- \* روش های مختلفی برای تحلیل عملکرد سیستم ها با کمک این مدل ها وجود دارد.
- \* در عمل، ورودی اعمالی به سیستم ها اکثرا ماهیتی رندوم دارد و تابعی شناخته شده نیست؛ مگر در مواردی محدود مانند کنترل ابزارهای برش.
- \* پس هدف از تحلیل با ورودی های ساده و تحلیلی که حوزه این فصل است، چیست؟
- \* این تحلیل ها پایه ای برای مقایسه عملکرد سیستم های مختلف و همچنین ایجاد کننده محدوده ای برای طراحی سیستم های کنترلی هستند.

| ورودی                         | تابع لاپلاس     | معادل             |
|-------------------------------|-----------------|-------------------|
| Unit impulse – ضربه واحد      | 1               | ورودی شوک         |
| Unit step – پله واحد          | $\frac{1}{s}$   | اختلال ناگهانی    |
| Unit ramp – شیب واحد          | $\frac{1}{s^2}$ | تغییر تدریجی مکان |
| Unit acceleration – شتاب واحد | $\frac{1}{s^3}$ | تغییر تدریجی سرعت |
| Sinusoidal – ورودی سینوسی     | –               | ورودی متناوب      |
| White noise                   | رندوم           | نویز خفیف سیستم   |

- \* هر کنترلر مدار بسته سه هدف مهم را دنبال می کند:
- (۱) تامین پایداری سیستم که مهم ترین هدف است.
  - (۲) اصلاح رفتار گذرای سیستم
  - (۳) بهبود خطای ماندگار

\* اگر  $c(t)$  پاسخ سیستم به یک ورودی خاص باشد، می توان نوشت:

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

که جمع پاسخ گذرا و پایدار سیستم است.

در این فصل با هر سه مفهوم و نحوه محاسبه آنها در سیستم های تک ورودی-تک خروجی آشنا می شویم.

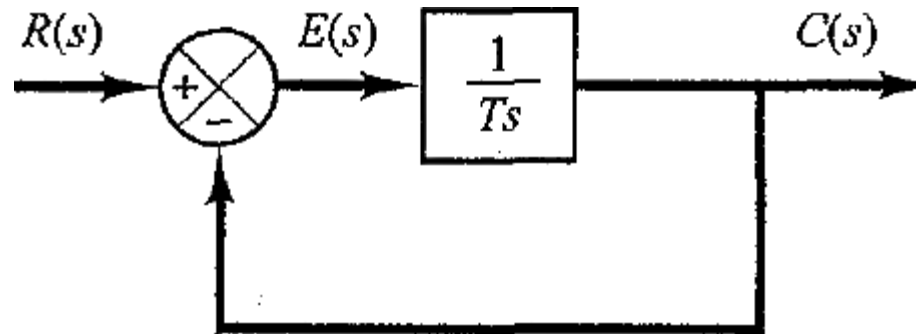
# Part 1:

## Transient Response – First Order Systems

- [Unit Step Response](#)
- [Unit Ramp Response](#)
- [Unit Impulse Response](#)

**Contents**

\* می توانند مدلی از یک سیستم حرارتی یا یک مدار RC باشند.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

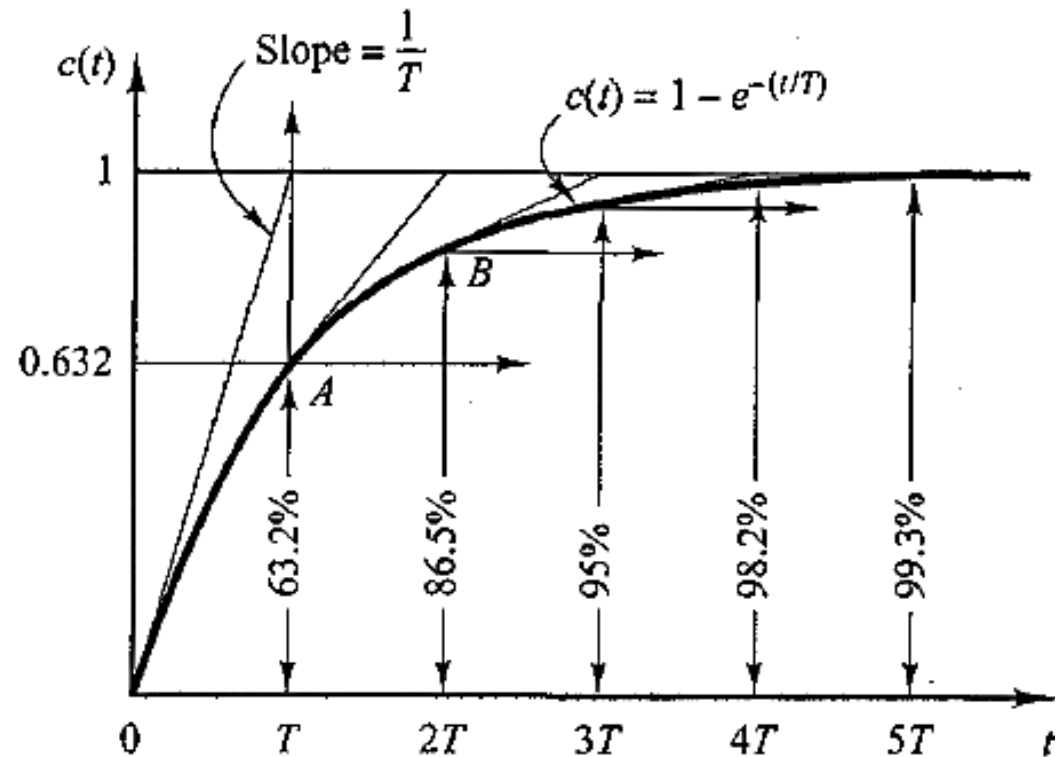
ورودی پله :  $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$



\*  $T$  را ثابت زمانی سیستم می نامیم. هر چه  $T$  کوچکتر باشد، اثر  $s$  (دینامیک سیستم) را کم می کند و پاسخ سیستم، سریعتر خواهد بود.

\* مقدار اولیه پاسخ صفر و مقدار نهایی یک است.

ورودی شیب :  $R(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{Ts + 1}$$

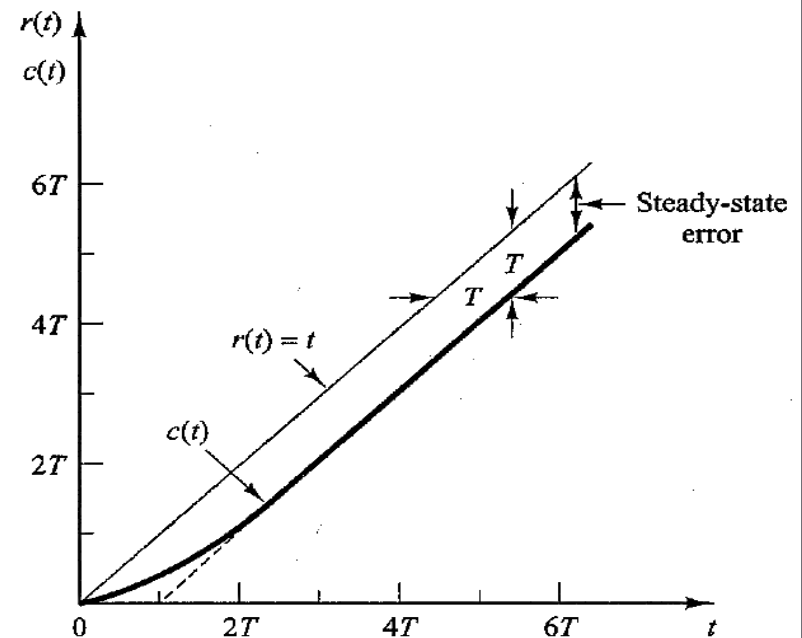
$$a = [s^2 C(s)]|_{s=0} = 1$$

$$b = [s^2 C(s)]'|_{s=0} = -T$$

$$c = [(Ts + 1)C(s)]|_{s=-\frac{1}{T}} = T^2$$

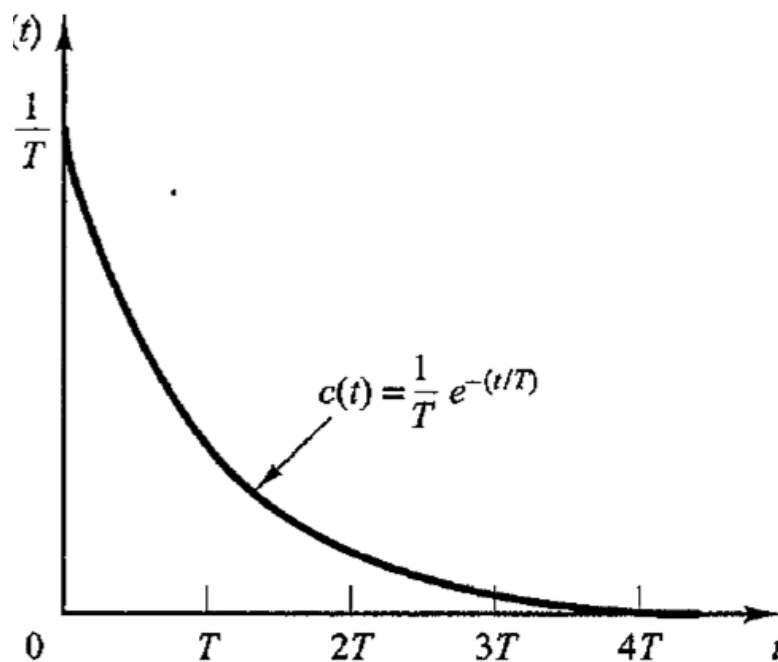
$$C(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{T^2}{Ts + 1} - \frac{T}{s} \Rightarrow c(t) = t - T + T e^{-t/T}$$

$$e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow e(\infty) = r(\infty) - c(\infty) = T$$



ورودی ضربه:  $r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$





\* از ویژگی های سیستم های LTI این است که پاسخ مشتق یک ورودی برابر با مشتق پاسخ آن ورودی و پاسخ انتگرال یک ورودی برابر با انتگرال پاسخ آن ورودی است:

شیب

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Derivation( $\times s$ )

پله

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

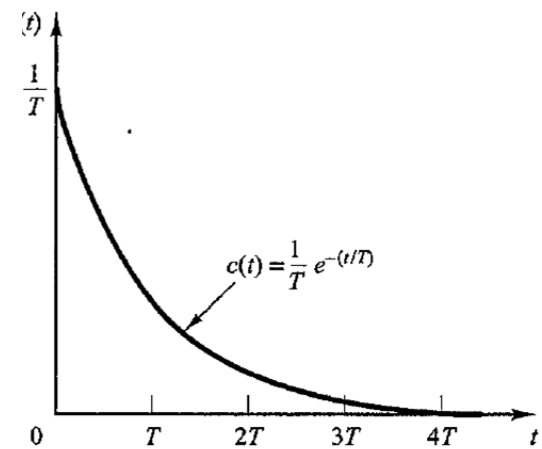
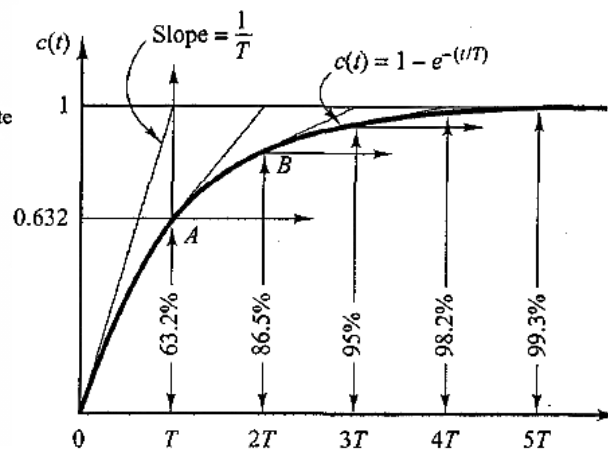
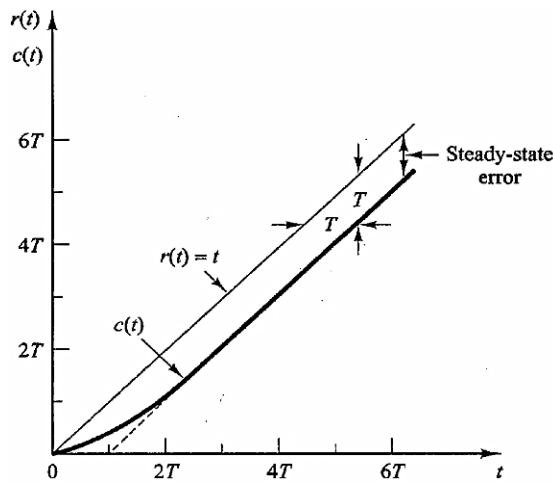
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Derivation( $\times s$ )

ضربه

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

$$R(s) = 1$$



# Part 2:

## Transient Response - Second Order Systems

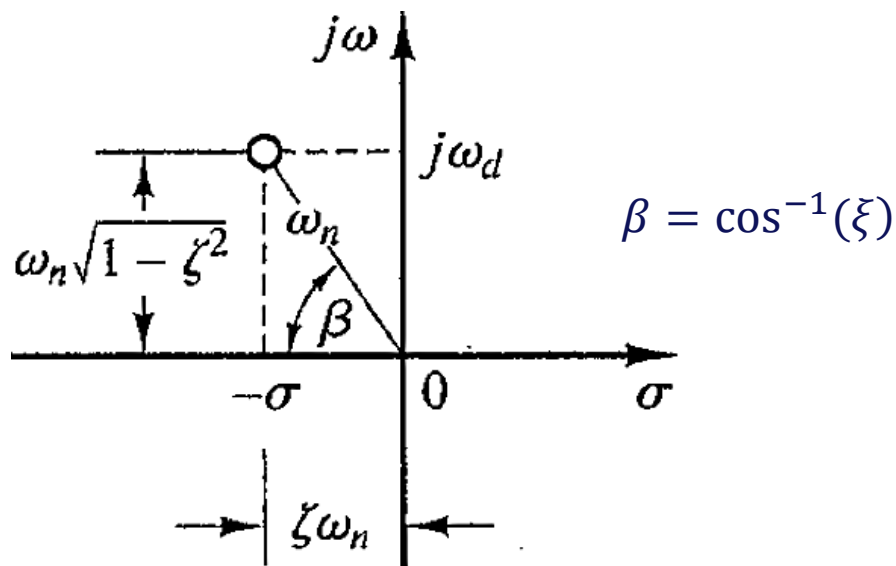
- [Unit Step Response](#)
- [Transient Response Specifications](#)
- [Servo System](#)

**Contents**

فرم استاندارد : 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ریشه های مخرج :  $S_1, S_2 = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$

**Damping Ratio**  $\xi$       **Natural Frequency**  $\omega_n$       **Damped Frequency**  $\omega_d$



|                   |               |
|-------------------|---------------|
| Undamped          | $\xi = 0$     |
| Underdamped       | $0 < \xi < 1$ |
| Critically damped | $\xi = 1$     |
| Overdamped        | $\xi > 1$     |

(1) Underdamped Case ( $0 < \xi < 1$ ):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{R(s)=1/s} C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\omega_d t \right)$$

(2) Undamped Case ( $\xi = 0$ )  $\Rightarrow c(t) = 1 - \cos\omega_n t$

(3) Critically damped case ( $\xi = 1$ ):

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

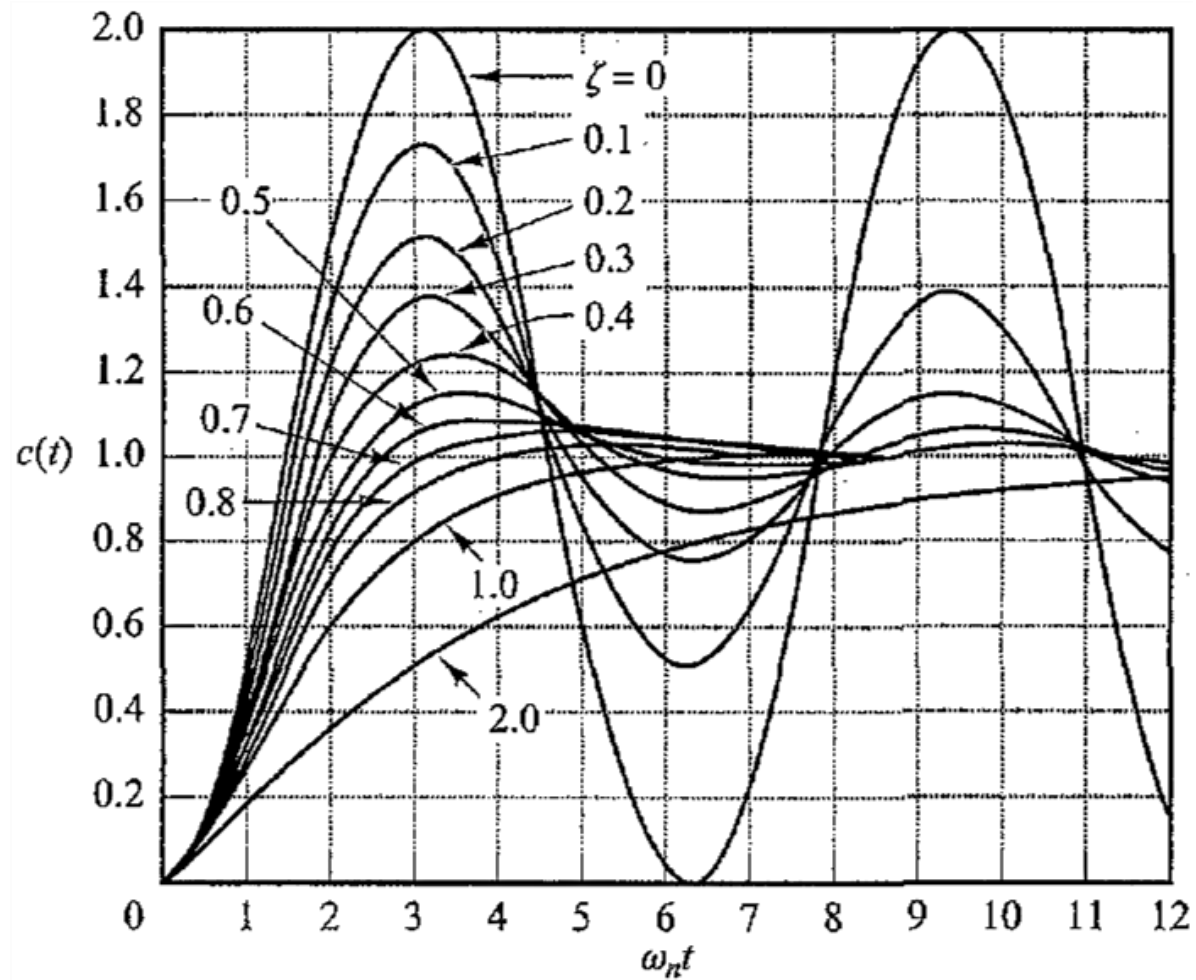
(4) Overdamped ( $\xi > 1$ ):

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right)$$

$$s_1 = \omega_n \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

$$s_2 = \omega_n \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

\*  $s_1$  و  $s_2$  ریشه های حقیقی مخرج تابع تبدیل هستند.



\* سیستم هایی که  $\xi$  یکسان و  $\omega_n$  متفاوت دارند، مسیر یکسانی را با سرعت متفاوت طی می کنند.

\* در میان سیستم های underdamped آنهایی که  $\xi$  بین 0.5~0.8 دارند، دارای سریع ترین پاسخ هستند.

\* پس از سیستم های underdamped، سیستم های critically damped، سریعترین پاسخ را دارند.

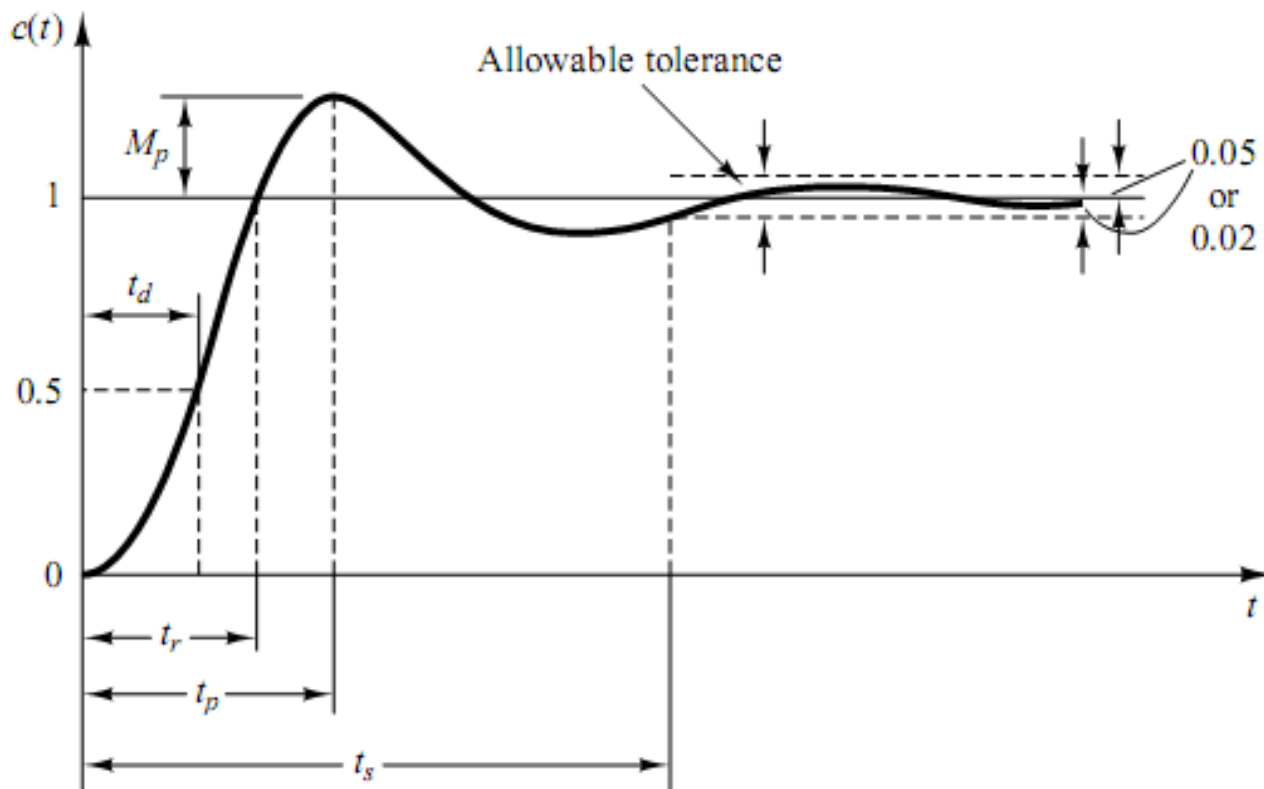
\* Overdamp شدن سیستم را کند و لخت می کند.

\* برای مقایسه عملکرد سیستم های کنترلی، از پارامترهای وابسته به پاسخ پله واحد استفاده می شود؛ که در محاسبه آنها، شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می شود:

| مشخصه             |       | تعریف                                                       |
|-------------------|-------|-------------------------------------------------------------|
| Delay time        | $t_d$ | زمان رسیدن پاسخ به نصف مقدار نهایی                          |
| Rise time         | $t_r$ | زمان رسیدن پاسخ از ۱۰٪ به ۹۰٪ مقدار نهایی                   |
| Peak time         | $t_p$ | زمان رسیدن پاسخ به اولین مقدار اورشوت                       |
| Maximum overshoot | $M_p$ | درصد تفاوت نسبی مقدار اولین اورشوت با مقدار نهایی           |
| Settling time     | $t_s$ | زمان رسیدن پاسخ به حاشیه ای ۲٪ یا ۵٪ و دائمی از مقدار نهایی |



\* مشخصات پاسخ گذرای پله واحد سیستم رسته دو در شکل قابل بررسی است:

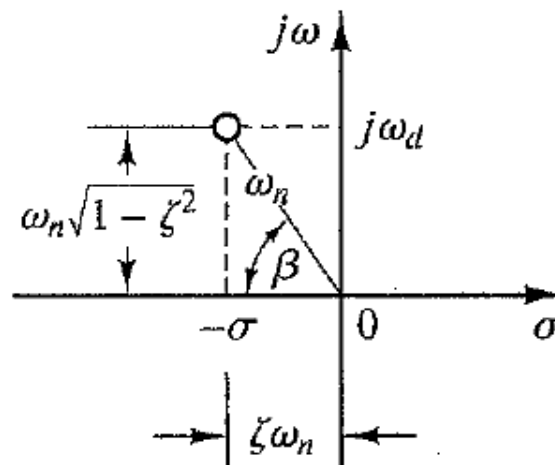


\* در حالت Underdamped سیستم رسته دو داریم:

1) Rise time -  $t_r$ :

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\xi\omega_n t_r} \left( \cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_d t_r \right)$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$



2) Peak time -  $t_p$ :

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_p) e^{-\xi \omega_n t_p} = 0 \Rightarrow \sin(\omega_d t_p) = 0$$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

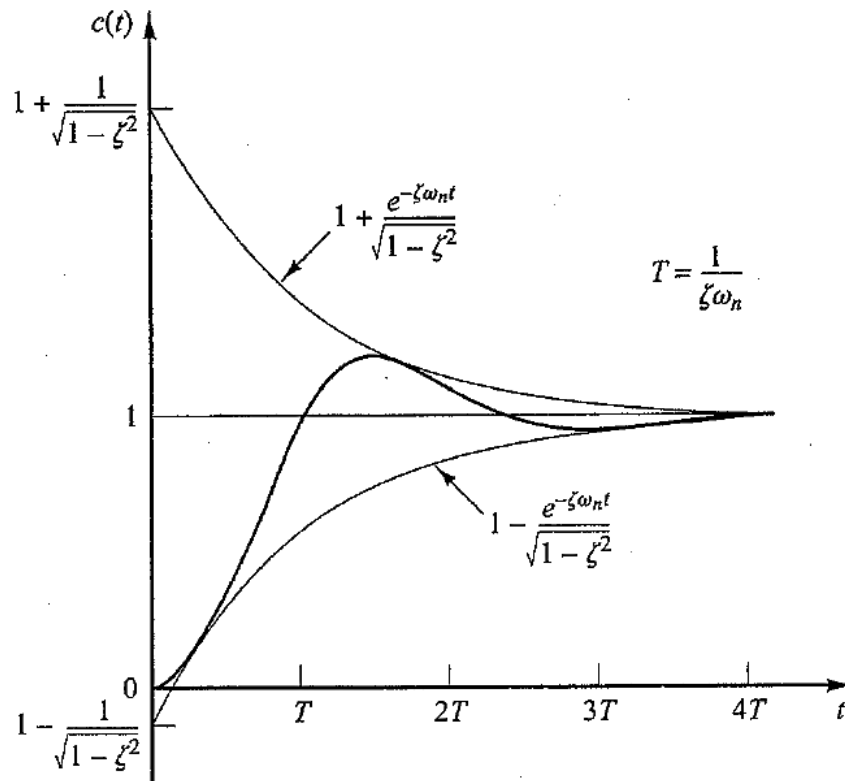
3) Maximum overshoot -  $M_p$ :

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \Rightarrow M_p = c(t_p) - 1 = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi}$$

\*  $M_p$  فقط تابع  $\xi$  است.

#### 4) Settling time - $t_s$ :

\* با کمک دو تابع نمایی محدود کننده بالا و پایین پاسخ، مطابق شکل زمان نشست را به صورت زیر تخمین می زنیم :

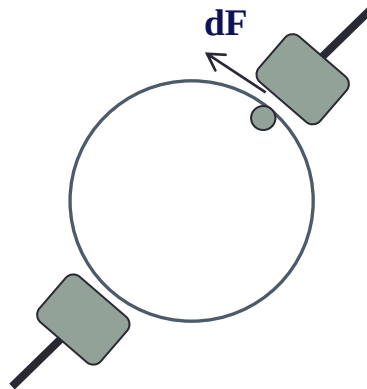


$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \text{حاشیه } 2\%$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad \text{حاشیه } 5\%$$

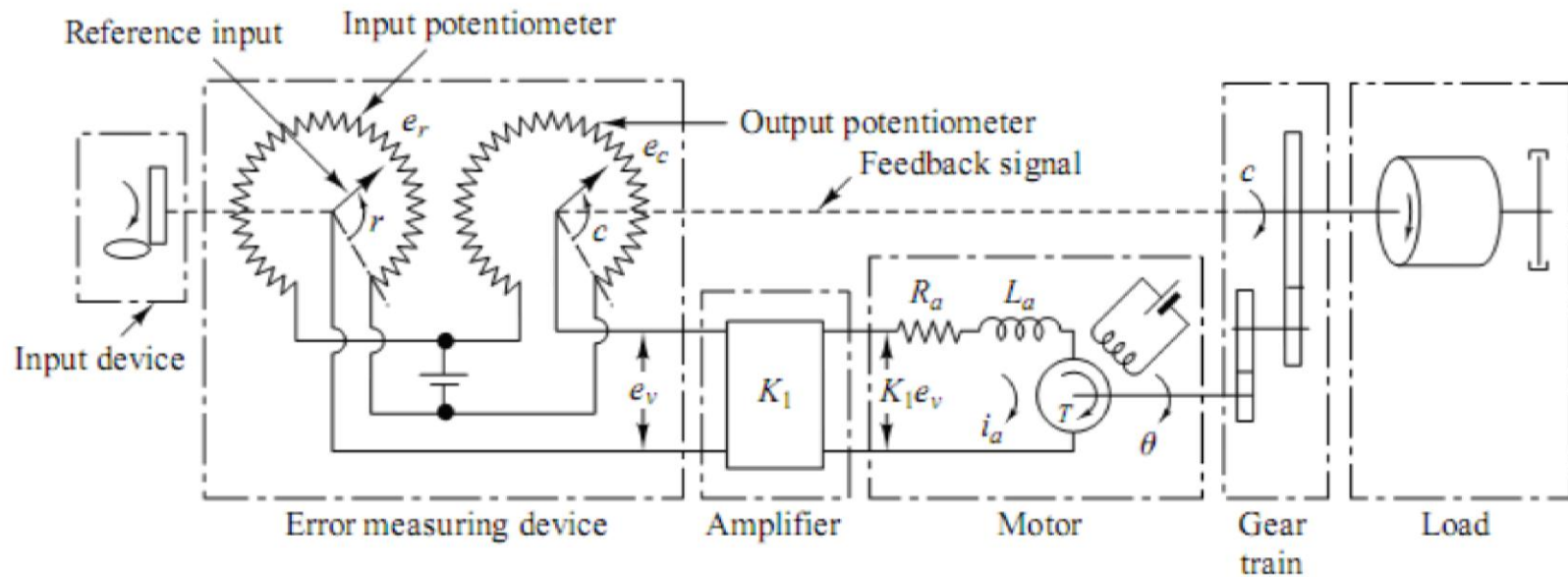
\* مثال:

- تاثیر متقابل میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی در سیم پیچ های موتور به تولید یک گشتاور برآیند ( $\tau$ ) می انجامد.
- این گشتاور، به شدت میدان مغناطیسی، جریان الکتریکی و پارامترهای هندسی موتور وابسته است.



$$\tau = k i_a i_f \rightarrow \tau = K i_a : \text{Armature controlled} \quad \& \quad \tau = K i_f : \text{Field controlled}$$

\* شکل زیر ساختمان کلی یک سروو موتور DC را نشان می دهد:



\* مدار آرمیچر، دارای المان های مقاومت و سلف است که وظیفه چرخاندن محور را دارد.

\* به منظور ایجاد دور پایین و گشتاور بالا، مدار آرمیچر را به یک جعبه دنده متصل می کنیم.

\* پتانسیومتر به منظور ورود فرمان (زاویه) و اندازه گیری میزان چرخش محور به کار می رود. برای مدل بندی پتانسیومترها داریم:

$$e_r = K_0 r, e_c = K_0 c \Rightarrow e_v = e_r - e_c = K_0(r - c) = K_0 e \quad ; \quad e: \text{Error}$$

\* این مدار DC قابلیت انجام کار مکانیکی ندارد، بنابراین به یک مدار راه انداز نیازمندیم.

\* به علت چرخش آرمیچر، ولتاژی متناسب با حاصلضرب شار و سرعت زاویه ای در مدار ایجاد می شود. برای شار ثابت، داریم:

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

\* معادله ولتاژ در مدار آرمیچر:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \Rightarrow L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v$$

\* تعادل گشتاوری:

$$J_0 \ddot{\theta} + b_0 \dot{\theta} = T = K_2 i_a$$

\* تابع تبدیل موتور DC به همراه Amplifier:

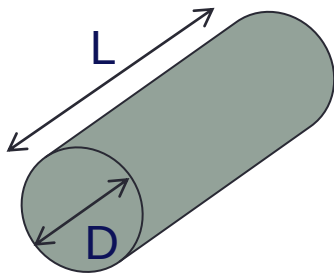
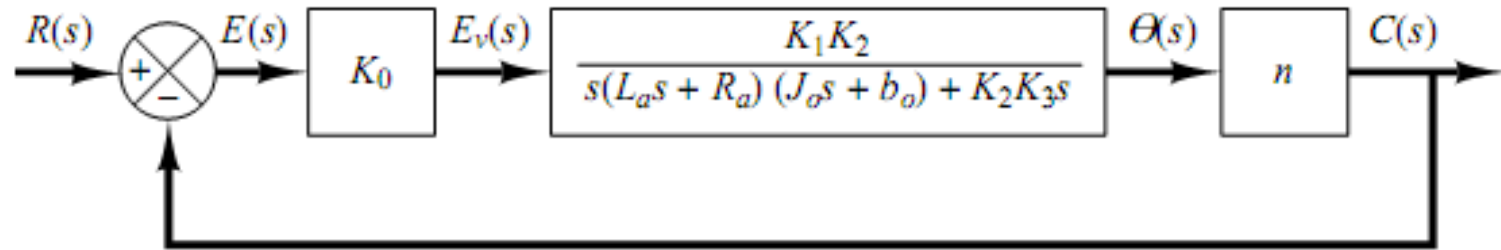
$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s}$$

\* تابع تبدیل گیربکس:

$$\frac{C(s)}{\theta(s)} = n$$



\* با توجه به توضیحات ارائه شده در اسلایدهای قبل دیاگرام بلوکی کلی سیستم به شکل زیر بدست می آید:



$$L \gg D \Rightarrow R_a \gg L_a \Rightarrow G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

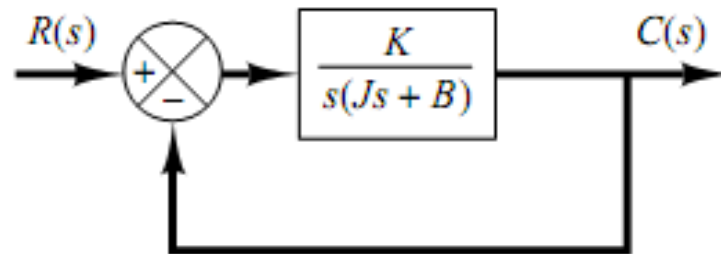
$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]} \xrightarrow{\times \frac{1}{R_a n^2}} G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

$J = \frac{J_0}{n^2}$  : moment of inertia referred to the output shaft

$B = [b_0 + (\frac{K_2 K_3}{R_a})]/n^2$  : viscous-friction coefficient referred to the output shaft

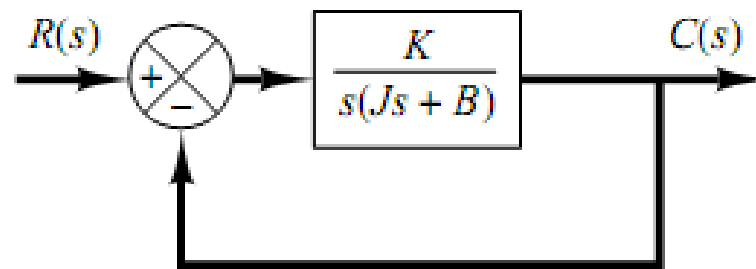
$$K = \frac{K_0 K_1 K_2}{n R_a}$$

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad ; \quad K_m = \frac{K}{B}, T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3}$$



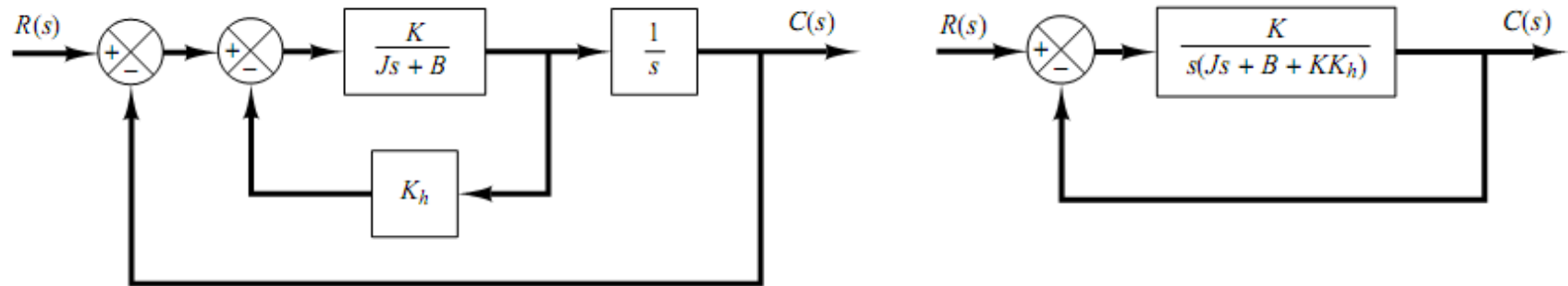
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{Js^2 + Bs}}{1 + \frac{k}{Js^2 + Bs}} = \frac{k}{js^2 + Bs + k} = \frac{\frac{k}{J}}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{k}{J}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{kJ}} \quad , \quad \omega_n^2 = \frac{k}{J}$$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K}$$

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}}, \quad \bar{\zeta} = \zeta + \frac{K_h\sqrt{K}}{2\sqrt{J}} = \zeta + \frac{\omega_n}{2} K_h$$



\* با استفاده از فیدبک سرعت، می توان بدون تغییر  $\omega_n$ ، مقدار  $\zeta$  و در نتیجه اورشوت را تنظیم کرد.



# Part 3:

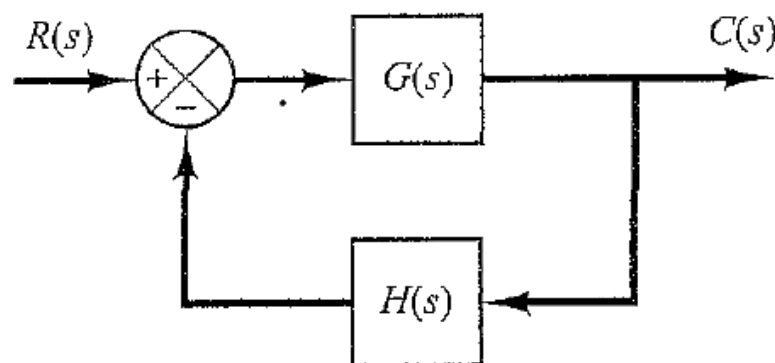
## Transient Response – Higher Order Systems

- [Unit Step Response](#)

Contents

\* در این قسمت سیستم هایی با رسته ی بالاتر از دو را در حالت کلی بررسی می کنیم.

\* سیستم مدار بسته کلی زیر را در نظر بگیرید:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} ; G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} , H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} ; m \leq n$$

\* حال پاسخ سیستم را به پله واحد بررسی می کنیم.

\* حالت اول: تمام قطب های سیستم مدار بسته حقیقی و متمایز باشند:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \xrightarrow{R(s)=1/s} C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

$$c(t) = a + \sum_{i=1}^n a_i e^{-p_i t}$$

\* residue  $a_i$  یا پسماند قطب  $p_i$  است.

\* اگر تمام قطب های سیستم مدار بسته در سمت چپ محور موهومی باشند،

اندازه نسبی پسماند هر قطب متناسب با اهمیت نسبی آن قطب است.

\*  $\frac{1}{s+p_i}$  یک مد دینامیکی تغییرات سیستم است.



- \* مد های دینامیکی فقط از قطب ها مشخص می شوند ولی اهمیت هر مد به وضعیت صفر ها هم بستگی دارد. اگر یک صفر و قطب به هم نزدیک باشند، پسماند آن مد کوچکتر می شود و در نتیجه اهمیت آن کم می شود.
- \* کوچک بودن پسماند یک ترم، باعث می شود سهم آن قطب در پاسخ گذرا (اهمیت آن) کم شود.
- \* اگر اهمیت نسبی قطبی کم باشد، می توان از آن صرف نظر کرد و سیستم را با رسته ای پایین تر تخمین زد.

\* حالت دوم: قطب های سیستم مدار بسته شامل زوج های مختلط و متمایز باشد:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \xi_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad q + 2r = n$$

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\xi_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t \\ + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t$$

# Part 4:

## Stability Analysis

- [Routh's Stability Criterion](#)
- [Routh's Criteria – Special Cases](#)
- [Effects of Control Actions on System Performance](#)

Contents

- \* اگر حتی یک قطب سیستم مدار بسته در سمت راست محور موهومی باشد، مقدار نهایی سیستم بینهایت می شود که بیان کننده یک سیستم ناپایدار است.
- \* در این حالت اگر اشباع رخ ندهد و هیچ قید محدود کننده مکانیکی وجود نداشته باشد ممکن است به صدمه و شکست سیستم بینجامد.
- \* در سیستم های LTI پایداری جزو خواص ذاتی سیستم است و به ورودی بستگی ندارد.
- \* به صورت ریاضی اگر روی محور موهومی قطب داشته باشیم، پاسخ نوساناتی با دامنه ثابت خواهد بود ولی در عمل با وجود نویز، ممکن است دامنه نوسانات متناسب با توان نویز افزایش یابد.

\* **سیستم پایدار:** سیستمی است که همه قطب های آن در سمت چپ یا روی محور موهومی قرار گرفته اند.

\* **سیستم پایدار مجانبی:** سیستمی است که همه قطب هایش در سمت چپ محور موهومی قرار گرفته اند.

\* **سیستم ناپایدار:** وجود حتی یک قطب در سمت راست محور، موجب ناپایداری سیستم می شود.

\* معیار پایداری راث روشی برای چک کردن پایداری یک سیستم کنترلی با بررسی علامت قطب های آن (ریشه های چند جمله ای مخرج) بدون حل کردن آن است.

\* **گام اول** : در صورت امکان چند جمله ای را به صورت زیر می نویسیم:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad ; a_i > 0$$

\* اگر تمام ضرایب هم علامت و غیر صفر نباشد، سیستم پایدار مطلق نخواهد بود.

\* اگر  $a_n=0$  باشد، یک  $s$  (ریشه در مخرج) را فاکتور می گیریم و ادامه می دهیم.

\* **گام دوم**: جدول راث را به صورتی که در اسلاید بعد تشریح می شود، تشکیل می

دهیم.

## Routh's Array of Coefficients

|           |                                       |                                       |       |       |         |
|-----------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------|-------|---------|
| $s^n$     | $a_0$                                 | $a_2$                                 | $a_4$ | $a_6$ | $\dots$ |
| $s^{n-1}$ | $a_1$                                 | $a_3$                                 | $a_5$ | $a_7$ | $\dots$ |
| $s^{n-2}$ | $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$ | $b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$ |       |       |         |
| $s^{n-3}$ | $c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$ | $c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$ |       |       |         |
| $\cdot$   | $\cdot$                               | $\cdot$                               |       |       |         |
| $\cdot$   | $\cdot$                               | $\cdot$                               |       |       |         |
| $\cdot$   | $\cdot$                               | $\cdot$                               |       |       |         |
| $s^0$     |                                       |                                       |       |       |         |

\* مثبت بودن تمام ضرایب ستون اول، شرط کافی است برای اینکه همه ریشه ها در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند.

\* به تعداد تغییر علامت ها در ستون اول، ریشه در سمت راست محور موهومی داریم.

\* مثال ۱: سیستم رسته دو

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $s^2$ | $a_0$ | $a_2$ |
| $s^1$ | $a_1$ |       |
| $s^0$ | $a_2$ |       |



$$a_0, a_1, a_2 > 0$$



\* مثال ۲: سیستم رسته سه

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 , \quad a_i > 0$$

|       |                                 |       |
|-------|---------------------------------|-------|
| $s^3$ | $a_0$                           | $a_2$ |
| $s^2$ | $a_1$                           | $a_3$ |
| $s^1$ | $\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$ |       |
| $s^0$ | $a_3$                           |       |



$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

\* مثال ۳: سیستم رسته چهار

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

|       |    |   |   |
|-------|----|---|---|
| $s^4$ | 1  | 3 | 5 |
| $s^3$ | 2  | 4 | 0 |
| $s^2$ | 1  | 5 |   |
| $s^1$ | -6 | 0 |   |
| $s^0$ | 5  |   |   |

\* از 1 به -6 و از -6 به 5 دو بار تغییر علامت داریم، بنابراین دو قطب در سمت راست محور موهومی خواهیم داشت.

\* مثال ۴:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

|       |                        |   |
|-------|------------------------|---|
| $s^3$ | 1                      | 1 |
| $s^2$ | 2                      | 2 |
| $s^1$ | $0 \simeq \varepsilon$ |   |
| $s^0$ | 2                      |   |

\* ایجاد صفر در ستون اول باعث تقسیم بر صفر خواهد شد به همین دلیل مقدار صفر را با مقدار مثبت  $\varepsilon$  جایگزین می کنیم.

\* وجود صفر روی ستون اول بدون تغییر علامت، نشان دهنده قطب روی محور موهومی است.

\* مثال ۵:

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

|       |                                         |    |
|-------|-----------------------------------------|----|
| $s^3$ | 1                                       | -3 |
| $s^2$ | $0 \simeq \varepsilon$                  | 2  |
| $s^1$ | $\frac{-3\varepsilon - 2}{\varepsilon}$ |    |
| $s^0$ | 2                                       |    |

\* چون دو تغییر علامت داریم، دو ریشه در سمت راست محور موهومی خواهیم داشت.

\* مثال ۶:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

|       |   |    |     |
|-------|---|----|-----|
| $s^5$ | 1 | 24 | -25 |
| $s^4$ | 2 | 48 | -50 |
| $s^3$ | 0 | 0  |     |
| $s^2$ | ? |    |     |
| $s^1$ | ? |    |     |
| $s^0$ | ? |    |     |

\* درایه های سطر سوم صفر شده اند، در نتیجه چند جمله ای کمکی را برای سطر سوم از سطر بالایی آن (سطر دوم) به صورت زیر می نویسیم:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

\* ادامه:

\* با مشتق گیری از چندجمله ای کمکی، ضرایب سطر سوم را بدست می آوریم:

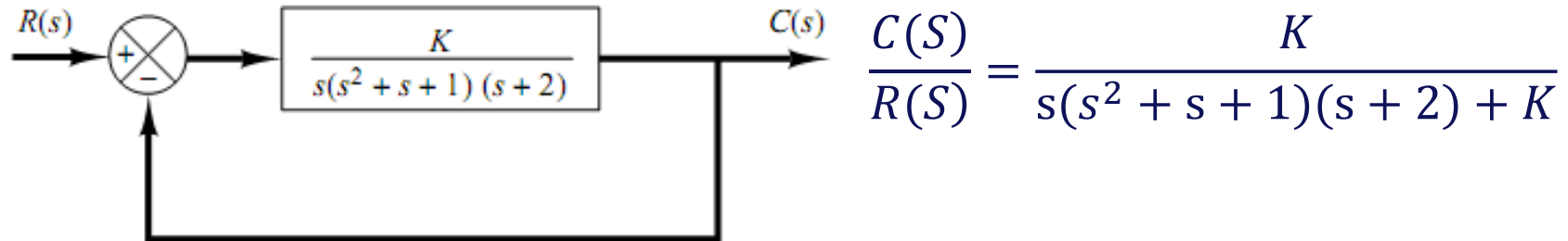
$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \Rightarrow \frac{dP}{ds} = 8s^3 + 96s$$

|       |       |     |     |
|-------|-------|-----|-----|
| $s^5$ | 1     | 24  | -25 |
| $s^4$ | 2     | 48  | -50 |
| $s^3$ |       |     |     |
| $s^2$ | 24    | -50 |     |
| $s^1$ | 112.7 |     |     |
| $s^0$ | -50   |     |     |

\* یک تغییر علامت داریم، در نتیجه یک ریشه ناپایدار خواهیم داشت.

\* ریشه های چندجمله ای کمکی، ریشه های معادله اصلی هستند.

\* مثال ۷: محاسبه محدوده ی  $K$  به منظور پایداری سیستم



Characteristic Equation:  $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

|       |            |     |     |
|-------|------------|-----|-----|
| $s^4$ | 1          | 3   | $K$ |
| $s^3$ | 3          | 2   | 0   |
| $s^2$ | $7/3$      | $K$ |     |
| $s^1$ | $2 - 9K/7$ | 0   |     |
| $s^0$ | $K$        |     |     |

شرط پایداری  $\Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ 2 - \frac{9K}{7} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{14}{9} > K > 0$

### \* عملگر انتگرالی:

- افزودن انتگرال گیر، موجب افزایش دقت (کاهش خطای دائم) می شود.
- در مقابل، موجب تضعیف پایداری و کند شدن پاسخ آن می شود.

### \* عملگر مشتقی:

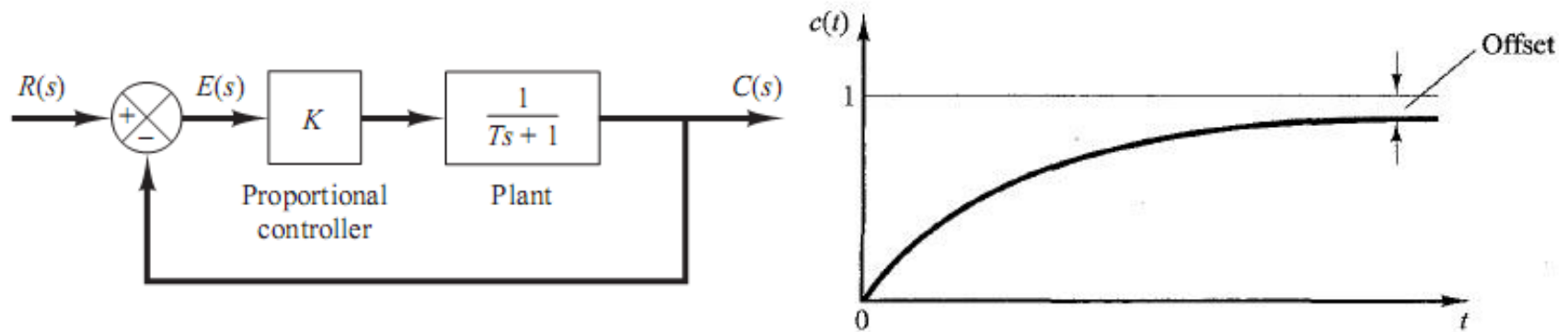
- افزودن مشتق گیر به کنترلر، بصورت غیر مستقیم با افزایش محدوده پایداری موجب افزایش دقت می شود.
- موجب افزایش پایداری می شود .
- باعث افزایش سرعت سیستم می شود ولی نگرانی برای نویز ایجاد می کند.



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \xrightarrow{R(s)=1/s} E(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} \frac{1}{s}$$

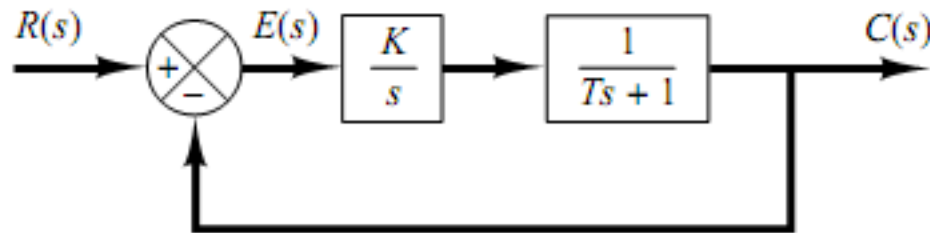
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} = \frac{1}{1 + K}$$



\* با جایگزینی کنترلر تناسبی با کنترلر انتگرالی داریم:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1) + K} \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K}$$

$$\xrightarrow{R(s)=1/s} e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Ts + 1)}{Ts^2 + s + K} \frac{1}{s} = 0$$

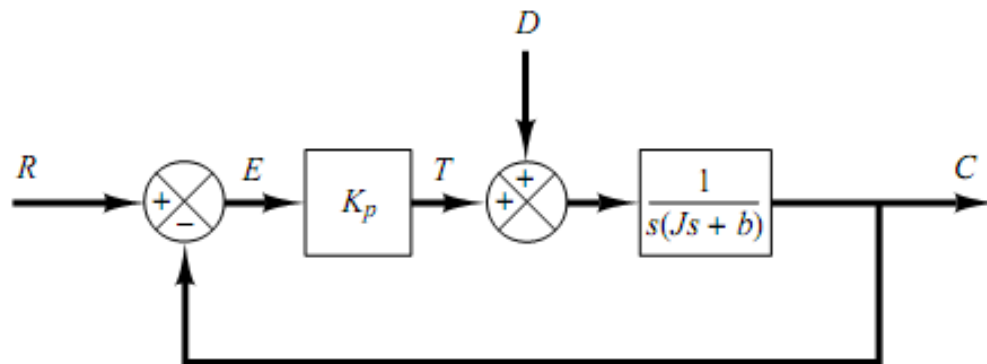


\* حالت اول: کنترلر تناسبی

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + bs + K_p}, \quad R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow c_{ss} = 1 \Rightarrow e_{ss} = 0$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{s(Js + b)}}{1 + \frac{K_p}{s(Js + b)}} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p} \Rightarrow \frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = \frac{T_d}{s} \Rightarrow c_{ss} = \frac{T_d}{K_p} \Rightarrow e_{ss} = 0 - \frac{T_d}{K_p} = -\frac{T_d}{K_p}$$

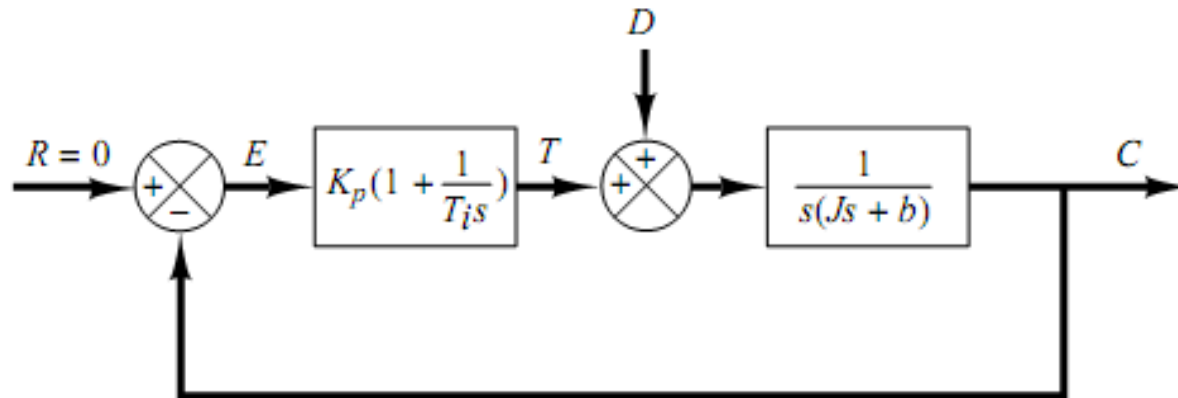


\* حالت دوم: کنترلر PI

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \xrightarrow{r(t)=0} E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} D(s)$$

\* برای اغتشاش پله واحد:

$$D(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{1}{s} \frac{-s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \right) = 0$$



$$TJs^3 + Tbs^2 + TKs + K = 0$$

|       |           |    |
|-------|-----------|----|
| $s^3$ | TJ        | KT |
| $s^2$ | Tb        | K  |
| $s^1$ | KT-(JK/b) | 0  |
| $s^0$ | K         |    |

\* سروو موتور DC با کنترلر PI

$$\Rightarrow KT > \frac{JK}{b} \Rightarrow T > \frac{J}{b}$$

$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

|       |         |   |
|-------|---------|---|
| $s^3$ | J       | · |
| $s^2$ | b       | K |
| $s^1$ | -(JK/b) | 0 |
| $s^0$ | K       |   |

\* سروو موتور DC با کنترلر I

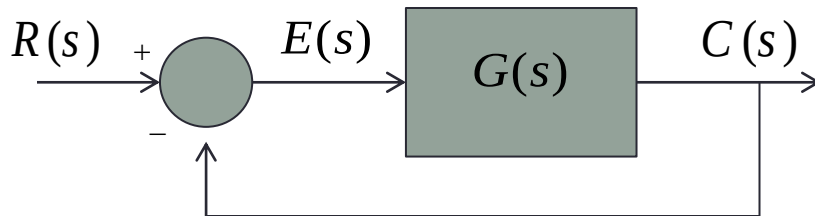
سیستم ناپایدار است

## Part 5:

# Steady-State Error of Unity Feedback Control Systems

- Static Position Error Constant
- Static Velocity Error Constant
- Static Acceleration Error Constant

**Contents**



$$G(s) = \frac{K (T_1' s + 1) \dots (T_m' s + 1)}{s^N (T_1 s + 1) \dots (T_n s + 1)}, n \geq m$$

$N=0$

سروسیستم نوع صفر

Type-0 servo system

$N=1$

سروسیستم نوع یک

Type-1 servo system

$N=2$

سروسیستم نوع دو

Type-2 servo system

\* با افزایش  $N$  دقت افزایش، پایداری و سرعت کاهش می یابد.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s}}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = K_p \text{ (Static position error constant)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \begin{cases} K_p = K \rightarrow \frac{1}{1 + K} ; N=0 \\ K_p = \infty \rightarrow 0 & ; N=1 \\ \vdots \\ K_p = \infty \rightarrow 0 & ; N=\dots \end{cases}$$



$$R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_v \text{ (Static velocity error constant)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \begin{cases} K_v = 0 \rightarrow \infty & ; N=0 \\ K_v = K \rightarrow \frac{1}{K} & ; N=1 \\ K_v = \infty \rightarrow 0 & ; N=2 \\ \dots \rightarrow 0 & ; N>2 \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = K_a \quad (\text{Static acceleration error constant})$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \begin{cases} K_a=0 \rightarrow \infty & ; N=0 \\ K_a=0 \rightarrow \infty & ; N=1 \\ K_a=K \rightarrow \frac{1}{k} & ; N=2 \\ K_a=\infty \rightarrow 0 & ; N=3 \\ \dots \rightarrow 0 & ; N>3 \end{cases}$$

Thanks for your attention!

**Contents**



Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

# Automatic Control

Chapter 6:

## Control Systems Analysis by Root- Locus Method

1391-92 Fall Semester

- [Chapter 1](#): Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- [Chapter 2](#): Mathematical Modeling of Control Systems
- [Chapter 3](#): Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- [Chapter 4](#): Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- [Chapter 5](#): Transient and Steady-State Response Analysis
- [Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method](#)
  - [Part 1](#): Root-Locus Analysis
    - Example I
    - Example II

- Summary of Rules
- Example III
- [Part 2](#): Special Cases
  - Positive Feedback Systems
  - Non-minimum Phase Systems
- [Chapter 7](#): Control Systems Design by Root-Locus Method
- [Chapter 8](#): Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- [Chapter 9](#): Control Systems Design by Frequency Response Method
- [Chapter 10](#): PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method



# Part 1:

## Root-Locus Analysis

- [Example I](#)
- [Example II](#)
- [Summary of Rules](#)
- [Example III](#)

Contents



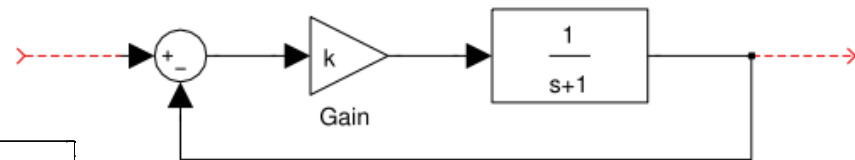
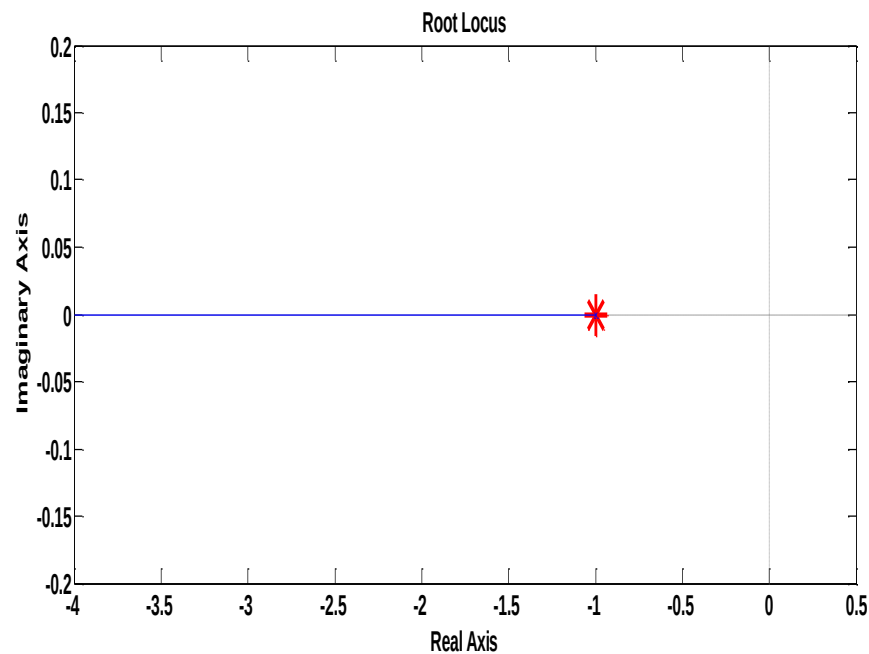
\* اگر در یک سیستم مدار بسته کنترلی، تابع تبدیل مدار باز، یک پارامتر متغیر (ضریب بهره کنترلی) داشته باشد، آنگاه قطب های مدار بسته (ریشه های معادله مشخصه مدار بسته) به مقدار پارامتر متغیر وابسته شده و متناسب با آن تغییر می کنند.

\* شکل تغییرات و مسیر قطب های مدار بسته بر حسب پارامتر متغیر بر روی صفحه مختلط را مکان هندسی ریشه ها می گویند.

\* مثال:

$$OLTF = \frac{k}{s+1} \rightarrow \text{Open-loop pole (OLP): } s=-1$$

$$CLTF = \frac{k}{s+1+k} \rightarrow \text{Closed-loop pole (CLP): } s=-1-k$$

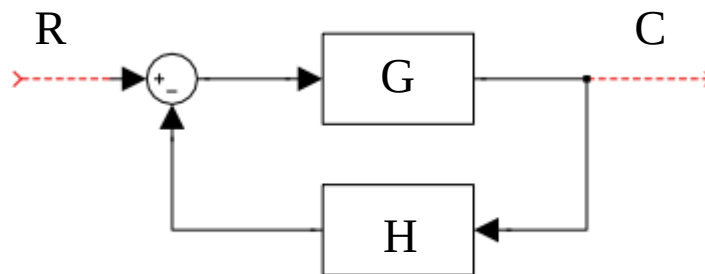


\* معادله ی  $GH=-1$  یک معادله ی مختلط است، در نتیجه منجر به دو معادله اندازه و زاویه خواهد شد.

$$CLTF = \frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} \Rightarrow \text{Closed - Loop Characteristic Eq: } 1+GH=0 \Rightarrow GH = -1$$

*Magnitude constraint:  $|GH| = 1$*

*Angle constraint:  $\angle GH = \pm 180(2k + 1)$*



\* از شرط زاویه برای رسم مکان هندسی استفاده می شود و از شرط اندازه برای بدست آوردن مقدار پارامتر مجهول برای یک نقطه مشخص از مکان هندسی استفاده می شود.

\* مکان هندسی ریشه های یک سیستم مدار بسته در صفحه ی مختلط عبارت است از کلیه نقاط روی صفحه مختلط که شرط اندازه و زاویه را توأمأً برای معادله مشخصه آن سیستم ارضا می کنند.

\* در حالت کلی داریم:  $(n > m)$

$$OLTF = \frac{(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_n)} \rightarrow OLTF \text{ zeros : } -z_1, \dots, -z_m, OLTF \text{ poles : } -p_1, \dots, -p_n$$

$$Characteristic Eq = 1 + k \frac{A(s)}{B(s)} = 1 + k \frac{(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_n)}$$

\* ادامه:

$$1 + k \frac{A}{B} = 0 \Rightarrow B + AK = 0 \xrightarrow{k=0} B = 0 \Rightarrow -p_j : OLTF \text{ poles}$$

در نتیجه قطب های مدار باز حتماً جزو مکان هندسی ریشه ها خواهند بود. به عبارت دیگر روشن است که در حقیقت مکان هندسی ریشه ها از قطب های مدار باز آغاز می شوند، زیرا قطب های مدار باز همان قطب های مدار بسته به ازای ضریب بهره صفرند و با افزایش ضریب بهره ریشه های دیگری برای مدار بسته به دست می آیند.

$$1 + k \frac{A}{B} = 0 \Rightarrow B + AK = 0 \xrightarrow{k=\infty} A = 0 \Rightarrow -z_j : OLTF \text{ zeros}$$

در نتیجه صفرهای مدار باز حتماً جزو مکان هندسی ریشه ها خواهند بود. به عبارت دیگر روشن است که در حقیقت مکان هندسی ریشه ها به صفرهای مدار باز ختم می شود، زیرا صفرهای مدار باز همان قطبهای مدار بسته به ازای ضریب بهره ی بینهایت اند.

## \* نتایج مهم:

۱- مکان هندسی ریشه ها  $n$  شاخه دارد که از  $n$  قطب مدار باز آغاز می شوند.

۲-  $m$  شاخه از این  $n$  شاخه به  $m$  صفر مدار باز متناهی ختم می شوند. ( $m < n$ )

۳-  $(n-m)$  شاخه باقی مانده به صفرهای نامتناهی (بینهایت) ختم می شوند.

۴- شاخه های مکان هندسی که به بینهایت ختم می شوند در بینهایت به یک خط راست مجانب خواهند شد. لذا با این فرض مکان هندسی دارای  $(n-m)$  مجانب خواهد بود.

\* محاسبه اندازه و فاز یک نقطه در صفحه مختلط:

$$GH = \frac{k(s + z_1)}{(s + p_1) \dots (s + p_4)}$$

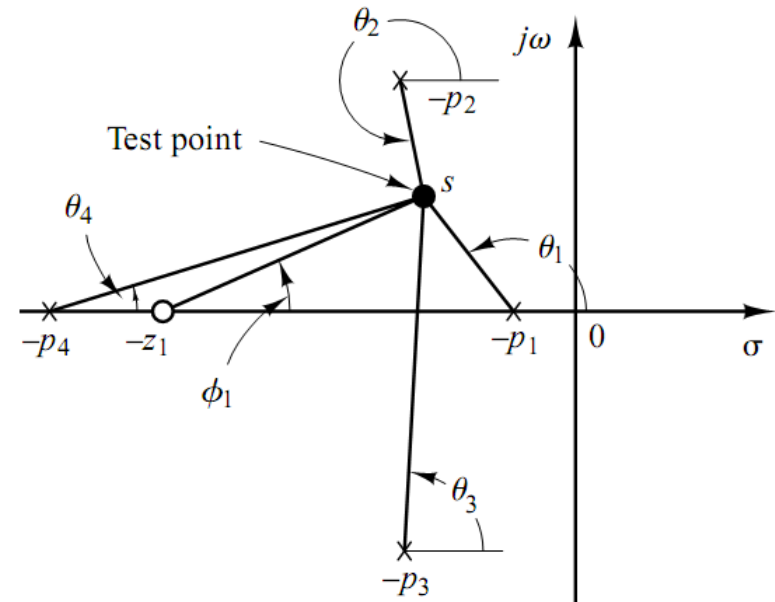
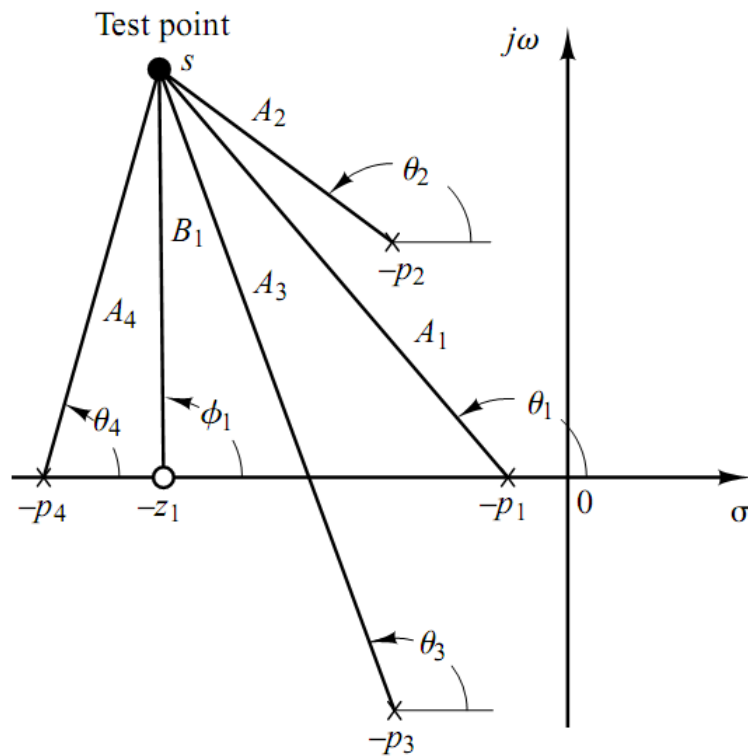
$$|GH|_{s_t} = |k| \cdot \frac{|s_t + z_1|}{|s_t + p_1| \dots |s_t + p_4|} = \frac{k.B_1}{A_1.A_2.A_3.A_4} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\angle GH|_{s_t} = \angle k + \angle s_t + z_1 - \angle s_t + p_1 - \dots - \angle s_t + p_4 = 0 + \phi_1 - \theta_1 - \dots - \theta_4$$

$$\angle GH|_{s_t} = \phi_1 - \theta_1 - \dots - \theta_4 \stackrel{?}{=} (2l+1)180$$

\* با برآورده شدن این دو شرط، نقطه نمونه  $S_t$  حائز شرایط قرار گرفتن در مکان هندسی ریشه ها خواهد بود.

\* محاسبه اندازه و فاز یک نقطه در صفحه مختلط:





\* مراحل بدست آوردن مکان هندسی ریشه ها:

- مشخص کردن بخشهایی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد.

- بدست آوردن مجانب های مکان هندسی ریشه ها  
بدست آوردن زاویه مجانب ها با محور حقیقی  
بدست آوردن محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی

- بدست آوردن نقاط Break in & Break away

- بدست آوردن محل تلاقی مکان هندسی با محور موهومی (مرز پایداری)

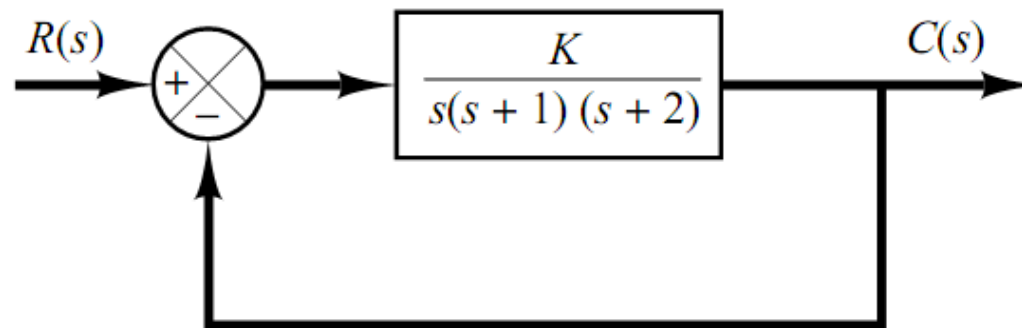
- بدست آوردن زاویه ی خروج مکان هندسی از قطب مختلط

\* مثال:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}, H(s) = 1$$

$n=3$  : سه قطب مدار باز -  $m=0$  : صفر مدار باز نداریم

تعداد شاخه ها:  $n=3$  - تعداد مجانب ها:  $n-m=3$



Next Example

\* ادامه:

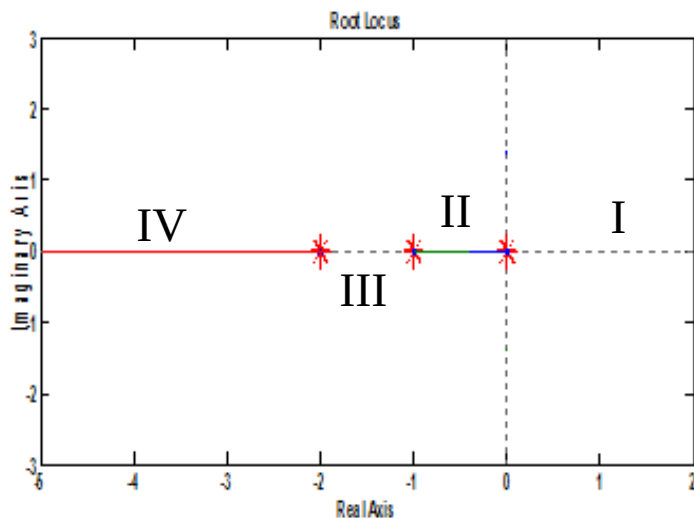
- مشخص کردن بخش هایی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد:

*Angle Condition:*

$$I) G(s_t) = 0-0-0-0 \neq \pm 180(2a+1) \quad II) G(s_t) = 0-180-0-0 = -180 = \pm 180(2a+1)$$

$$III) G(s_t) = 0-180-180-0 = -360 \neq \pm 180(2a+1)$$

$$IV) G(s_t) = 0-180-180-180 = -540 = \pm 180(2a+1)$$



\* نتیجه مهم:

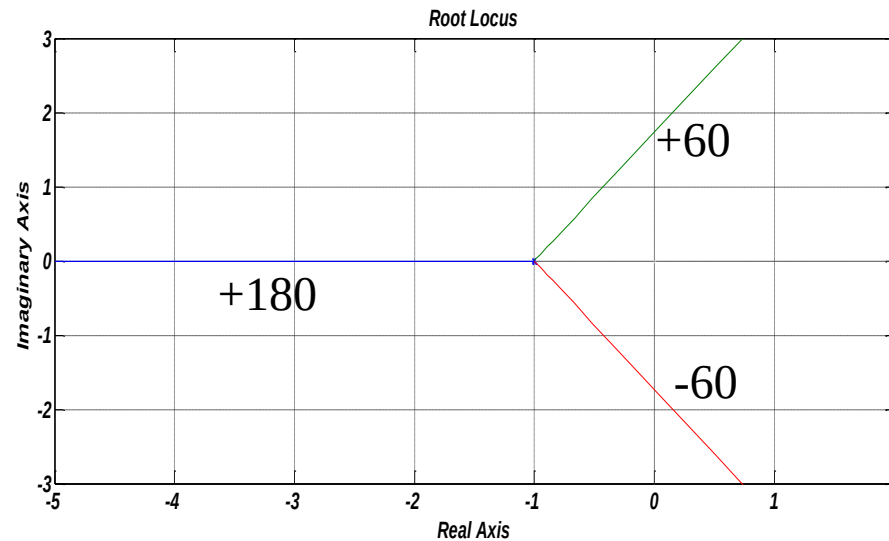
اگر در سمت راست نقطه نمونه، مجموع تعداد صفرها و قطب ها فرد باشد، آن نقطه جزو مکان است در غیر این صورت آن بخش از محور، جزو مکان نیست.

\* ادامه:

- نحوه بدست آوردن مجانب های مکان هندسی (Asymptotes):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (GH) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s^3 \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(1 + \frac{2}{s}\right)} \approx \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s^3}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \angle GH = \lim_{s \rightarrow \infty} \angle \frac{k}{s^3} = 0 - 3 \angle s = \pm 180(2l+1) \Rightarrow \angle s = \pm 60(2l+1) = \begin{cases} -60 \\ +60 \\ +180 \end{cases}$$



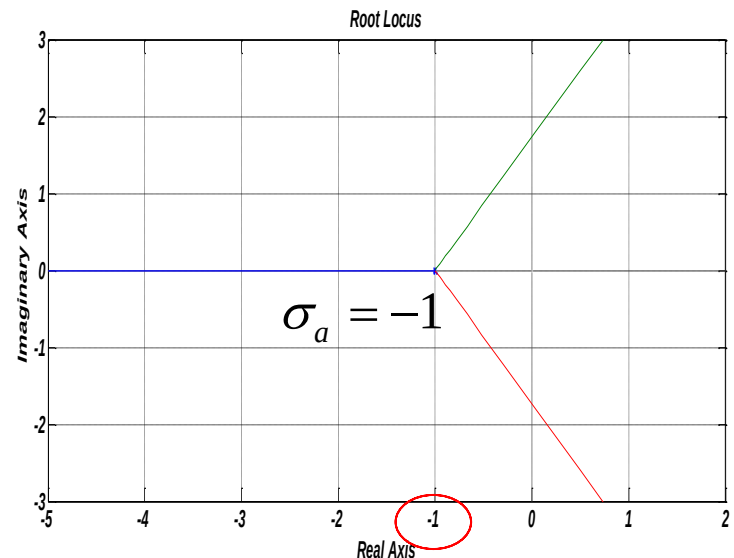
\* ادامه:

- نحوه ی بدست آوردن محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی:  
اگر تقریب را در نوشتن هم ارزی به اندازه ی یک درجه بالاتر ببریم در این صورت اطلاعات لازم برای بدست آوردن محل تلاقی با محور حقیقی بدست می آید.

$$s(s+1)(s+2) = s^3 + 3s^2 + 2s \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s(s+1)(s+2) \simeq \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^3$$

$$(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{(s+1)^3} \Rightarrow \sigma_a = -1$$



\* ادامه:

- نحوه بدست آوردن نقاط خروج از محور حقیقی و ورود به آن (Break away & Break in):  
در نقاط برخورد شاخه ها، دو قطب روی هم داریم در نتیجه وضعیت سیستم مدار بسته critically damped است.

$$OLTF = \frac{A(s)}{B(s)} \rightarrow \text{Characteristic Eq: } 1 + k \frac{A(s)}{B(s)} = 0 \Rightarrow f(s) = B(s) + kA(s) = 0$$

$$f(s) = (s - s_1) \dots (s - s_j)^r \dots (s - s_n) = 0$$

$$f(s_j) = 0, \quad \frac{df}{ds} \Big|_{s=s_j} = r(s - s_j)^{r-1} \dots \Big|_{s=s_j} = \begin{cases} \neq 0 & r=1 \\ =0 & r>1 \end{cases}$$

- در حالت کلی اگر قطب  $s_j$ ،  $r$  بار تکرار شود در این صورت از مرتبه  $r$  است و تا  $i=r-1$  داریم:

$$\frac{d^i f}{ds^i} \Big|_{s=s_1} = 0$$

\* ادامه:

- در نقاط B.A و B.I دو شاخه با هم برخورد می کنند، بنابراین قطب مربوطه از مرتبه دو است و باید  $f(s)$  و مشتق آن در آن قطب صفر شوند. در نتیجه:

$$f = B + kA = 0 \Rightarrow \frac{df}{ds} \Big|_{s=s_1} = B' + kA' = 0 \Rightarrow k = -\frac{B'}{A'}$$

$$f = B + kA = B - \frac{B'}{A'} A = 0 \Rightarrow BA' - B'A = 0$$

$$k = -\frac{B}{A} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{B'A - BA'}{A^2} = 0 \Rightarrow \frac{dk}{ds} \Big|_{s=s_1} = 0$$

- برای مثال فعلی:

$$\text{Characteristic Eq: } 1 + k \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow k = -s(s+1)(s+2) = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$\frac{dk}{ds} = -3(s^2 + 6s + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -0.423 \Rightarrow k_1 = 0.385 \\ s_2 = -1.158 \Rightarrow k < 0 \text{ not accepted} \end{cases}$$

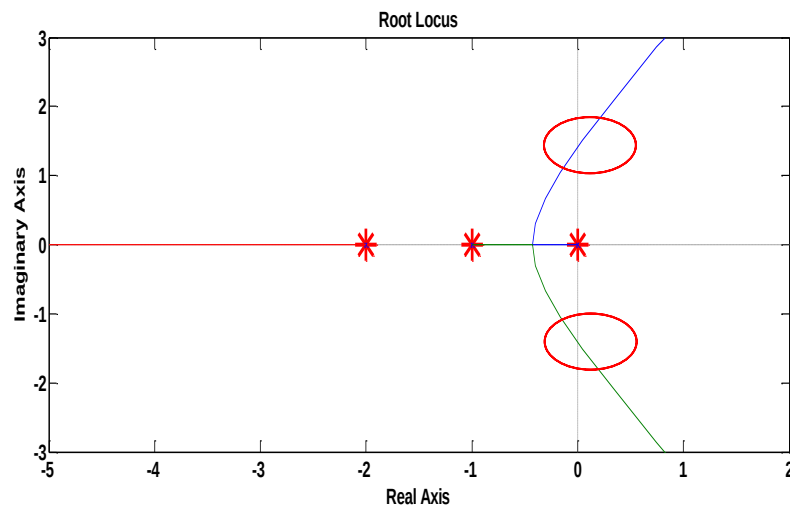
\* ادامه:

- نحوه پیدا کردن مکان عبور مکان هندسی از محور موهومی (مرز پایداری):
- روش اول:

On the imaginary axis:  $s = j\omega$

$$k = -s^3 - 3s^2 - 2s \Rightarrow k = -(j\omega)^3 - 3(j\omega)^2 - 2(j\omega) = +j\omega^3 + 3\omega^2 - j2\omega, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^3 - 2\omega = 0 \\ k = 3\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}, 0 \Rightarrow k = 6, 0 \xrightarrow{k>0} \omega = \pm\sqrt{2}, k = 6$$



- با توجه به شکل، به ازای  $0 < k < 6$  سیستم مدار بسته پایدار باقی می ماند.



\* ادامه:

- روش دوم: (جدول راث)  
به ازای  $k=6$  محل های تقاطع با محور موهومی به دست می آیند.  
با توجه به سطر مربوط به  $s^2$  داریم:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$s^3 \quad 1 \quad 2$$

$$s^2 \quad 3 \quad k$$

$$s^1 \quad \frac{6-k}{3} \quad 0$$

$$s^0 \quad k$$

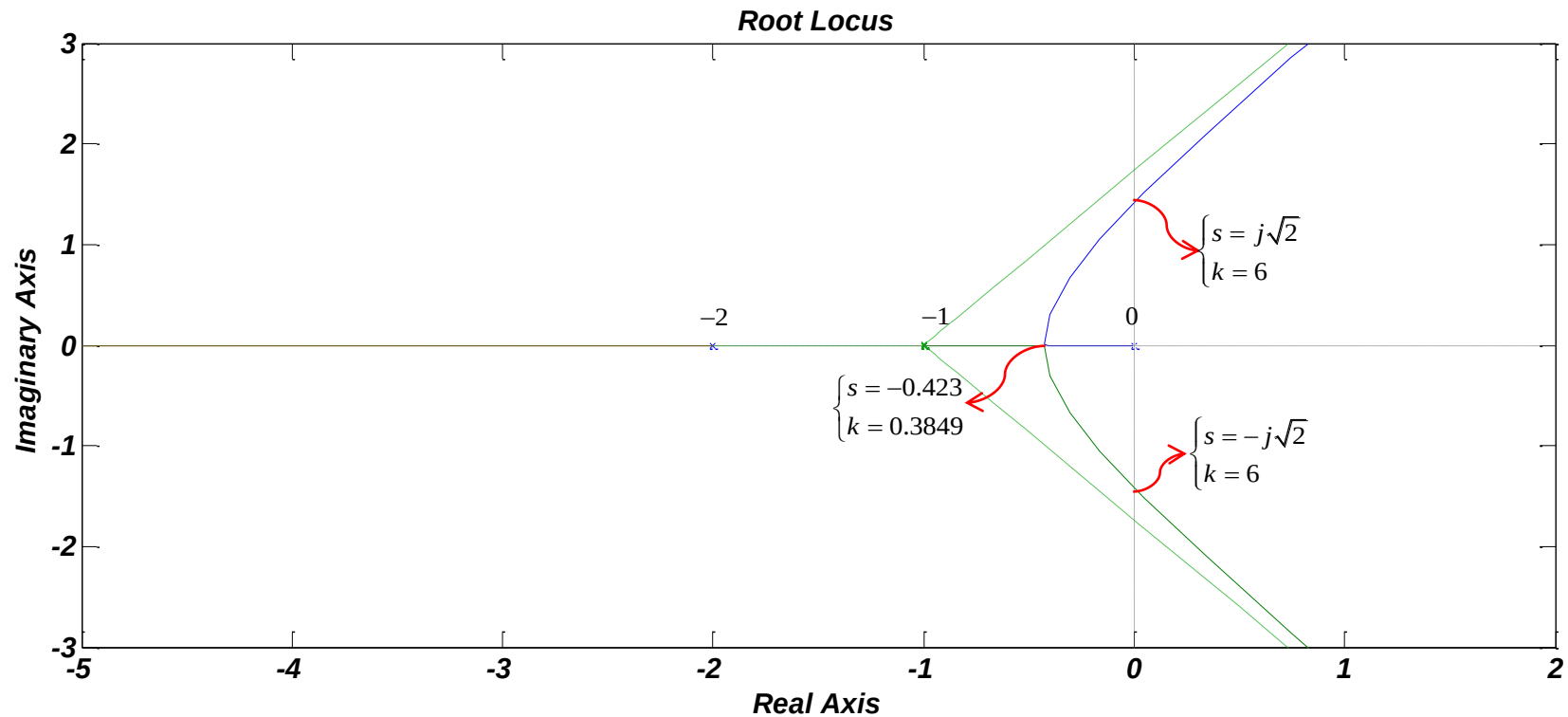
$$P(s) = 3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

با بدست آوردن  $k$  می توان مقادیر  $s$  متناظر را با حل کردن معادله ی  $k$  هم بدست آورد:

$$s^3 + 3s^2 + 2s = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0 \Rightarrow s = -3, \pm j\sqrt{2} \rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

\* ادامه:

حال می توان به طور تقریبی مکان هندسی ریشه ها را رسم کرد.

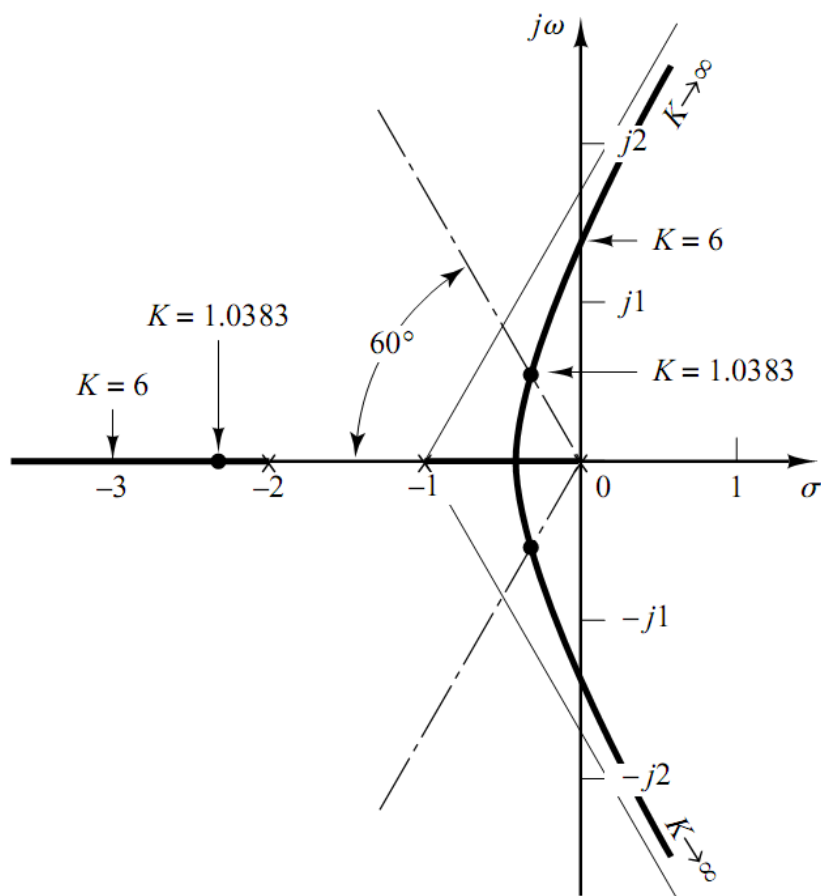


\* ادامه:

- می خواهیم  $k$  به نحوی انتخاب شود که ریشه های مدار بسته دارای  $\zeta=0.5$  باشند.

- برای این منظور با استفاده از شرط اندازه - برای نقطه حاصل از تقاطع مکان هندسی ریشه ها و شعاع دارای زاویه مربوط به  $\zeta$  داده شده - مقدار  $k$  را می یابیم.

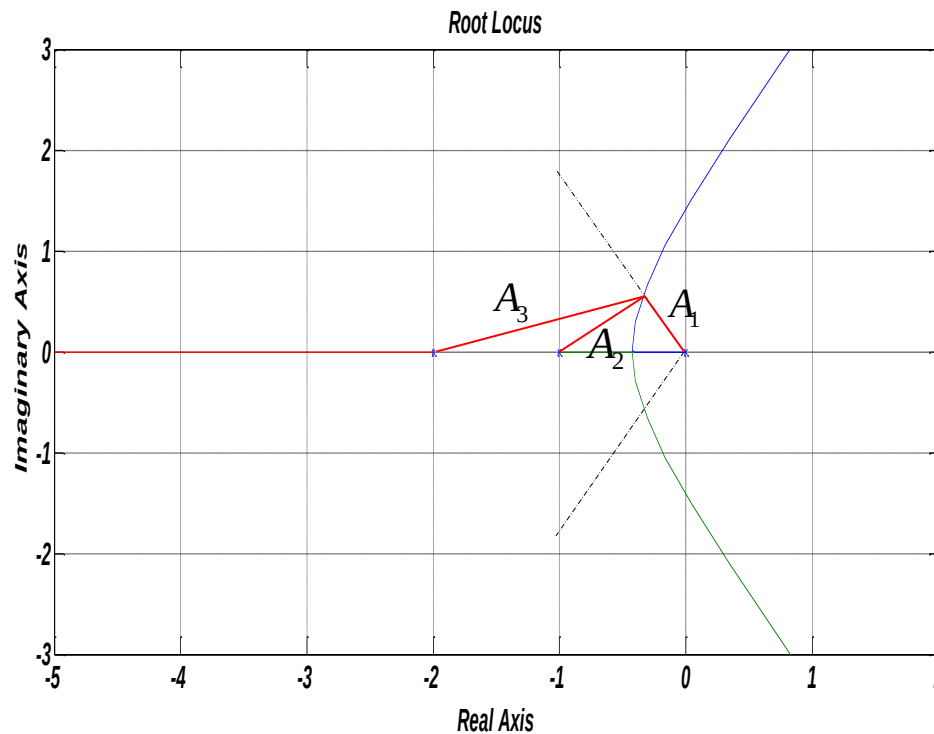
$$\zeta = 0.5 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ$$



\* ادامه:

Intersection point:  $s_1 = -0.33 \pm 0.58j \Rightarrow k = |s(s+1)(s+2)|_{s=s_1} = |s_1| \cdot |s_1 + 1| \cdot |s_1 + 2| = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$k = \sqrt{0.58^2 + 0.33^2} \cdot \sqrt{0.58^2 + (1 - 0.33)^2} \cdot \sqrt{0.58^2 + (2 - 0.33)^2} = 1.05$$

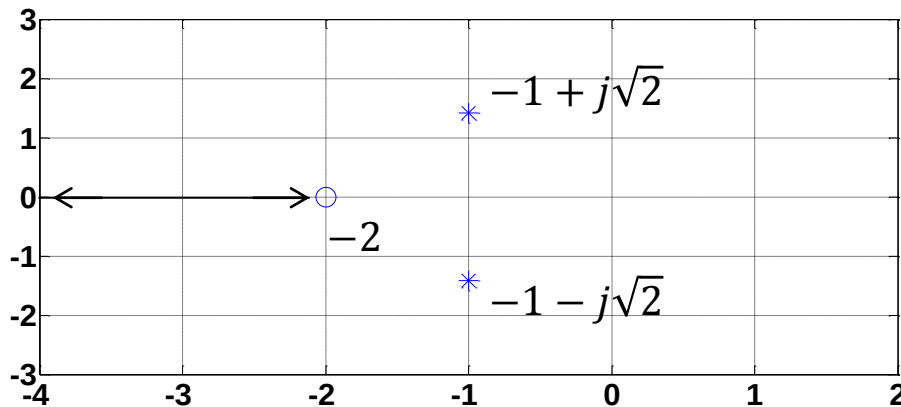


\* مثال: مکان هندسی ریشه های سیستمی با تابع تبدیل مدار باز زیر را رسم کنید.

$$OLTF = \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$$

- ابتدا بخشهایی از مکان هندسی را که روی محور حقیقی است، مشخص می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} OLTF \text{ poles: } -1 \pm j\sqrt{2} \rightarrow n=2 \\ OLTF \text{ zero: } -2 \rightarrow m=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Number of asymptots: } n - m = 1$$



\* با توجه به اینکه شاخه مکان روی محور حقیقی بین دو صفر مدار باز قرار دارد، حتما یک B.I خواهیم داشت.

[Previous Example](#)
[Next Example](#)

\* ادامه:

- بدست آوردن زاویه خروج از قطب مختلط:

*s on the Root Locus :*

$$\angle OLTF = \pm 180(2l + 1) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

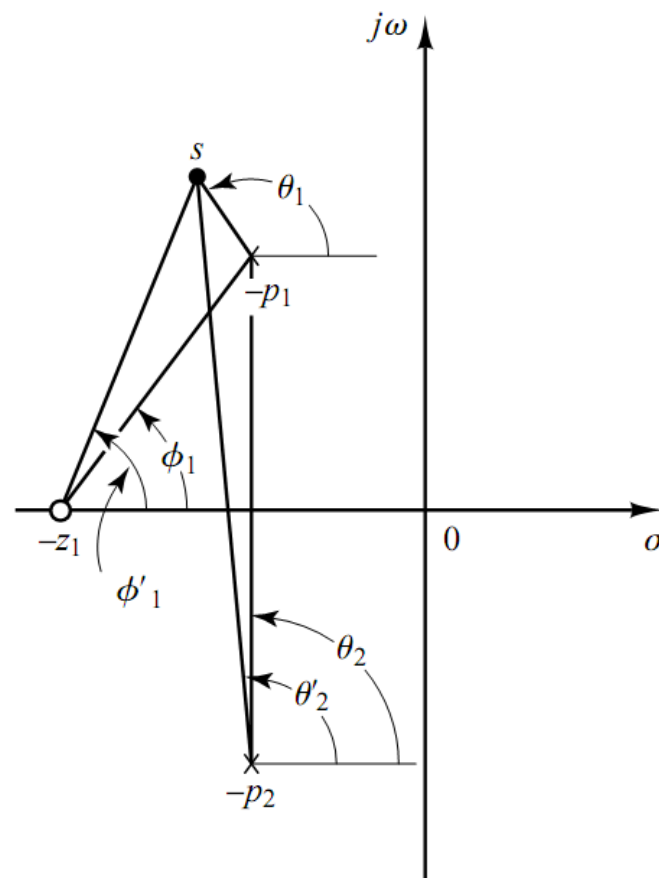
$$\theta_1 = \pm 180(2l + 1) + \phi_1 - \theta_2$$

*Angele of departure:  $AD = \lim_{s \rightarrow p_1} \theta_1$*

$$\phi_1^* = \lim_{s \rightarrow p_1} \phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{-1 - (-2)} \right) = 55^\circ$$

$$\theta_2^* = \lim_{s \rightarrow p_1} \theta_2 = 90^\circ$$

$$AD = \pm 180(2l + 1) + 55^\circ - 90^\circ = 145^\circ$$

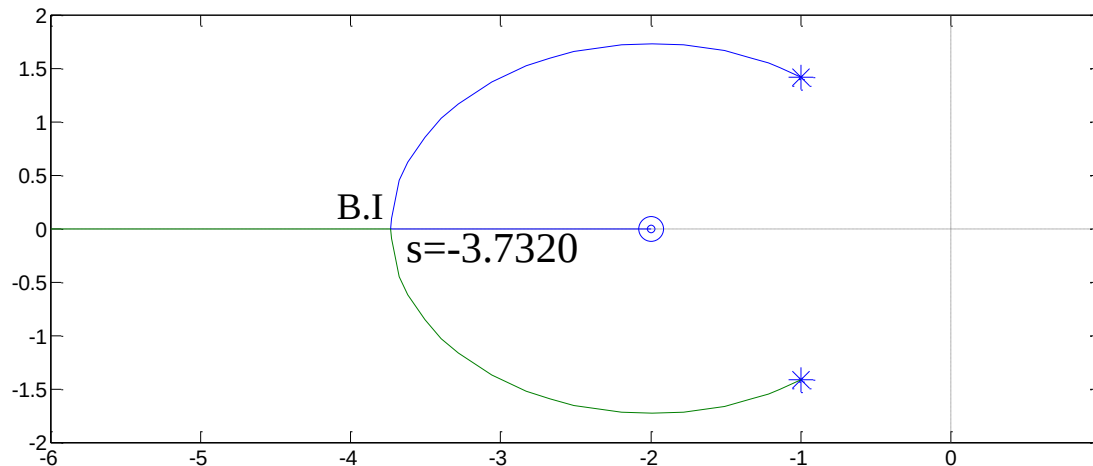


\* ادامه:

- بدست آوردن نقاط احتمالی ورود یا خروج از محور حقیقی

$$\text{Characteristic Eq: } 1 + \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3} = 0 \Rightarrow k = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{(2s+2)(s+2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s+2)^2} = -\frac{s^2 + 4s + 1}{(s+2)^2} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} -3.7320 \Rightarrow k = 5.464 \\ -0.2680 \Rightarrow k < 0 \end{cases}$$



\*ادامه:

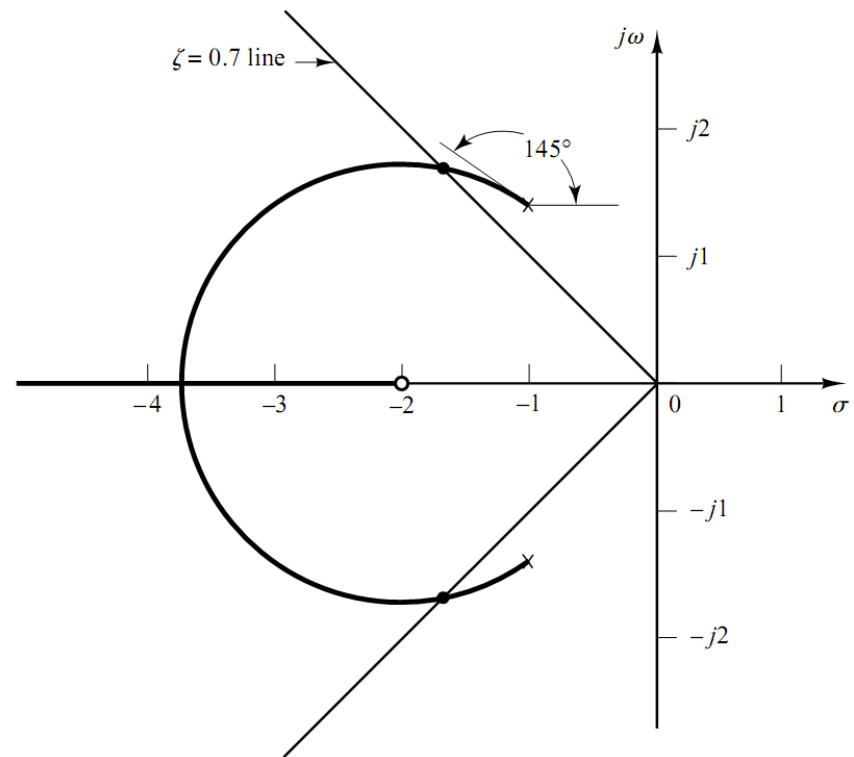
- k را چنان بیابید که  $\zeta=0.7$  شود.

$$\zeta = 0.7 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.7) = 45.6^\circ$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -1.67 \pm j1.7$$

$$\text{Magnitude Condition: } \left| \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3} \right| = 1$$

$$\Rightarrow k = \left| \frac{s_1^2 + 2s_1 + 3}{s_1 + 2} \right| = 1.34$$





\* خلاصه ای از قوانین رسم مکان هندسی ریشه ها:

- قطب ها و صفرهای مدار باز را یافته و در صفحه ی مختلط مشخص می کنیم.
- تعداد شاخه های مکان هندسی برابر  $n$  است.
- هر شاخه از یک قطب مدار باز شروع شده به یک صفر مدار باز ختم می شود.
- $n-m$  شاخه به صفرهای نا متناهی ختم می شوند، در نتیجه تعداد مجانب ها برابر  $n-m$  خواهد بود.
- بخشهایی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد را می یابیم.
- در هر بخش - بین قطب یا صفر مدار باز روی محور حقیقی - اگر مجموع تعداد صفر ها و قطب های سمت راست آن فرد باشد آن بخش جزو مکان هندسی است.
- بدست آوردن مجانب های مکان هندسی
- تعداد مجانب ها:  $n - m$
- زاویه ی مجانب ها:  $\frac{\pm 180(2l + 1)}{n - m}$
- محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی:

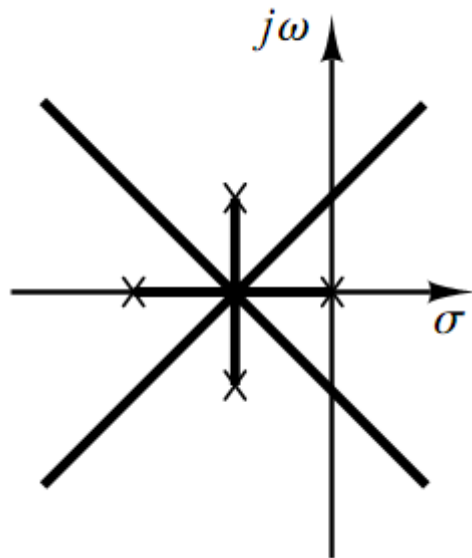
$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Open Loop Poles} - \sum \text{Open Loop Zeros}}{n - m}$$

- بدست آوردن نقاط B.A و B.I :

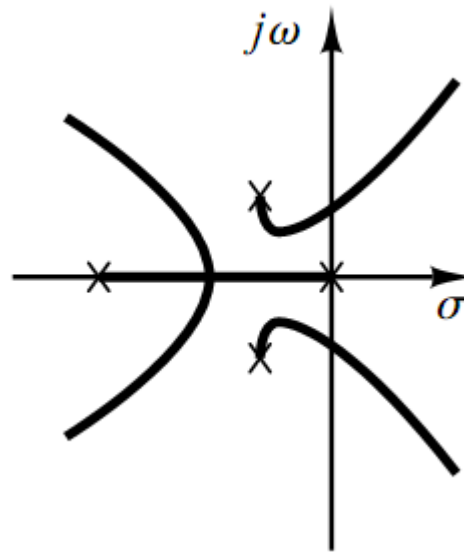
$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 \Rightarrow k > 0 \text{ or } k=0 \text{ accepted} \\ s_2 \Rightarrow k < 0 \text{ not accepted} \end{cases}$$

- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو قطب مدار باز باشد، در این صورت حتماً حداقل یک B.A وجود دارد و اگر بخشی از مکان هندسی بین دو صفر مدار باز باشد، در این صورت حتماً حداقل یک B.I وجود دارد.

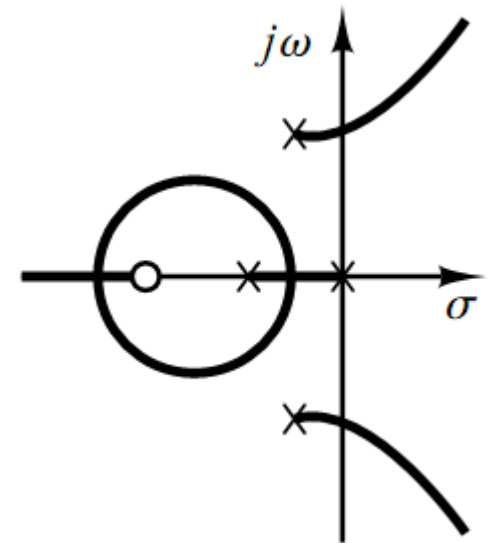
- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو قطب مدار باز باشد:  
 $B.A - B.I = 1$
- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو صفر مدار باز باشد:  
 $B.I - B.A = 1$
- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو صفر مدار باز باشد:  
 $B.A = B.I$



BA=2 , BI=1



BA=1, BI=0



BA=1, BI=0

BA=0, BI=1

- بدست آوردن Angle of Departure یا Angle of Arrival :

$$AD = 180^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به قطب مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفرها به قطب مورد نظر}$$

$$AA = 180^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفر ها به صفر مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به صفر مورد نظر}$$

- بدست آوردن نقاط تلاقی با محور موهومی:

- روش مستقیم:

$$1 + \frac{kA(j\omega)}{B(j\omega)} = 0 \rightarrow k \text{ \& \& } \omega \text{ will be determined}$$

- روش جدول راث

- برای بدست آوردن  $k$  متناظر با هر نقطه از شرط اندازه استفاده می کنیم.

$$k = \left| \frac{B(s_t)}{A(s_t)} \right|$$

- بدست آوردن زاویه بین جهت شاخه ها در هنگام برخورد:

$$\Psi = \frac{360^\circ}{q}; q : \text{Number of Branches}$$

- اگر رسته نسبی سیستم مدار باز حداقل دو باشد ( $n-m > 2$  یا  $n-m = 2$ ) مجموع بخش های حقیقی قطب های مدار بسته برابر مجموع بخش های حقیقی قطب های مدار باز خواهد شد:

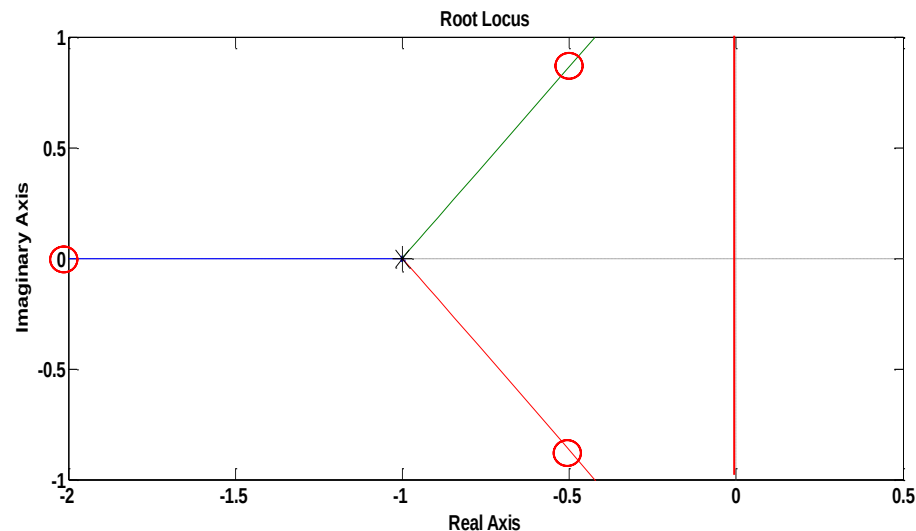
$$\sum \text{Re}(P_i^{CL}) = \sum \text{Re}(P_i^{OL}) = \text{Constant}$$

\* مثال: اگر  $s = -2$  یکی از ریشه های مدار بسته باشد، برای دو ریشه مختلط داریم:

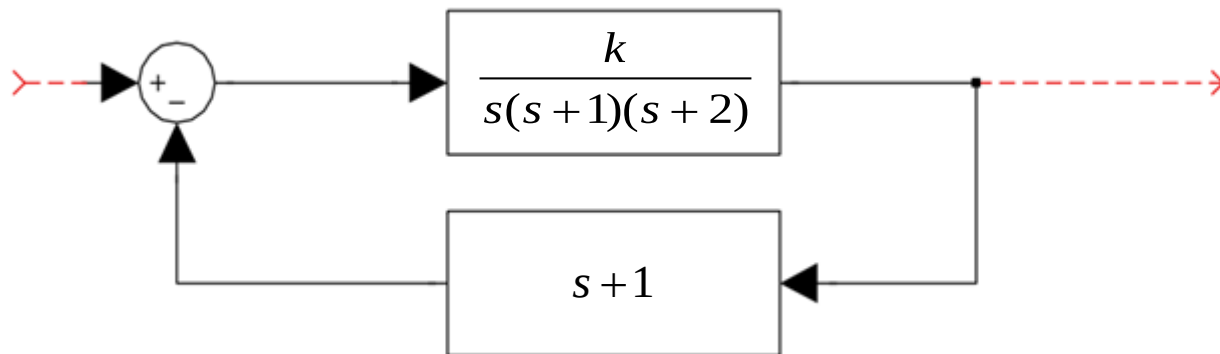
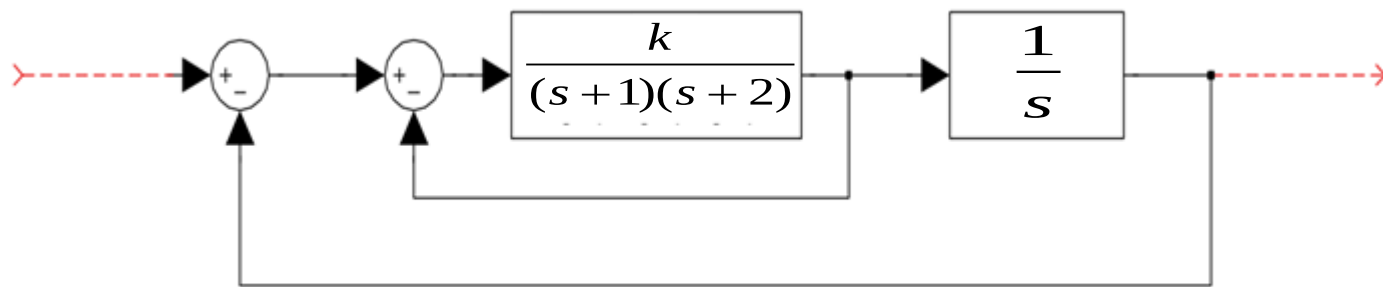
$$OLTF = \frac{k}{(s+1)^3}$$

$$OL : p = -1 \Rightarrow -2 + \text{Re}(P_2^{CL}) + \text{Re}(P_3^{CL}) = 3(-1) \Rightarrow 2 \text{Re}(P_2^{CL}) = -1$$

$$\Rightarrow \text{Re}(P_2^{CL}) = -0.5$$



\* توجه به تأثیر حذف قطب و صفرها در معادلات مشخصه:

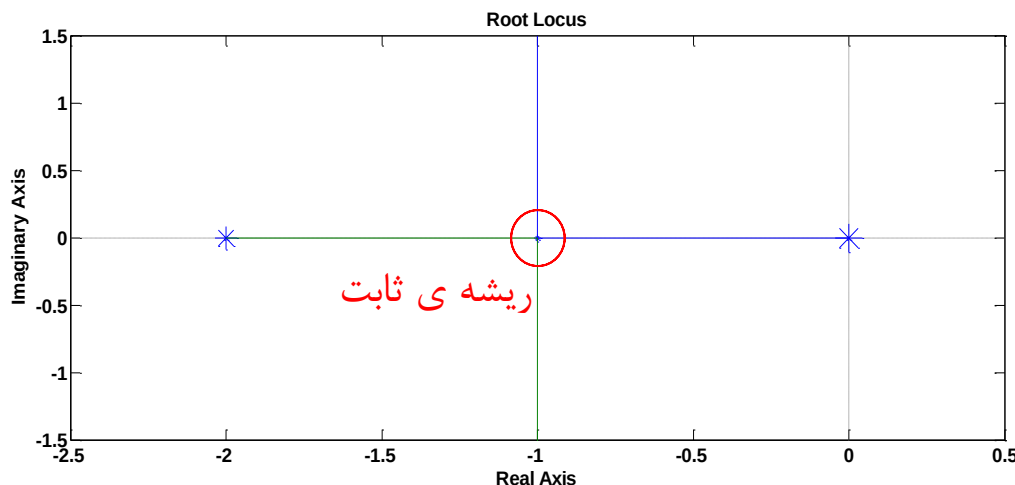


- روش مستقیم:

$$CLTF = \frac{\frac{k}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k(s+1)} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{k}{s(s+2) + k}$$

$$= \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{\frac{k}{s(s+2)}}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} = s^2 + 2s + k = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k} \rightarrow \text{Variable roots}$$

- روش مکان هندسی:

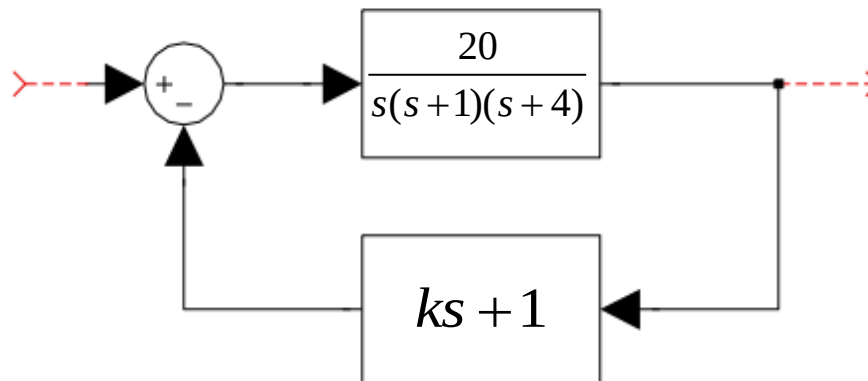
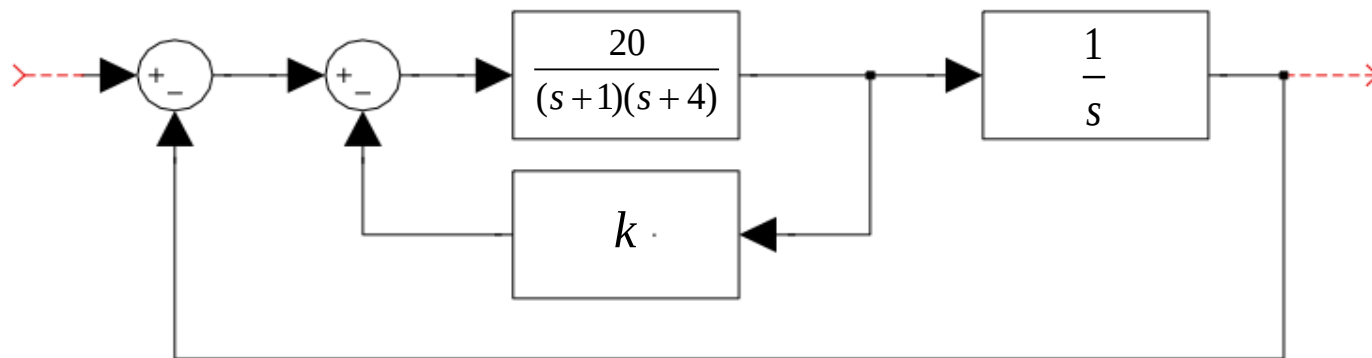


$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}, H(s) = (s+1)$$

$$\Rightarrow OLTF = GH = \frac{k}{s(s+2)}$$



\* اگر پارامتر متغیر  $k$  به صورت استاندارد ذکر شده در کنار کسر تابع تبدیل مدار باز قرار نگیرد، چه باید کرد؟!  
\* مثال:


[Previous Example](#)
[Next Example](#)

\* ادامه:

$$GH = OLTF = \frac{20(ks + 1)}{s(s + 1)(s + 4)}$$

$$CLTF : \frac{C}{R} = \frac{\frac{20}{s(s + 1)(s + 4)}}{1 + \frac{20(ks + 1)}{s(s + 1)(s + 4)}} = \frac{20}{s(s + 1)(s + 4) + 20ks + 20} = \frac{20}{1 + k \frac{20s}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20}}$$

- حال مکان هندسی ریشه ها را برای تابع تبدیل مدار باز جدید رسم می کنیم:

$$OLTF = \frac{20ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} \Rightarrow \begin{cases} OLZ = 0 \\ OLP = -5, \pm 2j \end{cases} \rightarrow n = 3, m = 1$$

- مجانب ها:

$$Asymptots : \frac{\pm 180(2l + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180(2l + 1)}{2} = \pm 90$$

\* ادامه:

$$\sigma_a = \frac{\sum OL P - \sum OL Z}{n - m} = \frac{(-5 + 2j - 2j) - (0)}{2} = -2.5$$

- زاویه خروج از قطب های مختلط:

$$AD = 180^\circ - \sum \begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردار ها از سایر} \\ \text{قطب ها به قطب مورد نظر} \end{array} + \sum \begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردار ها از سایر} \\ \text{صفرها به قطب مورد نظر} \end{array}$$

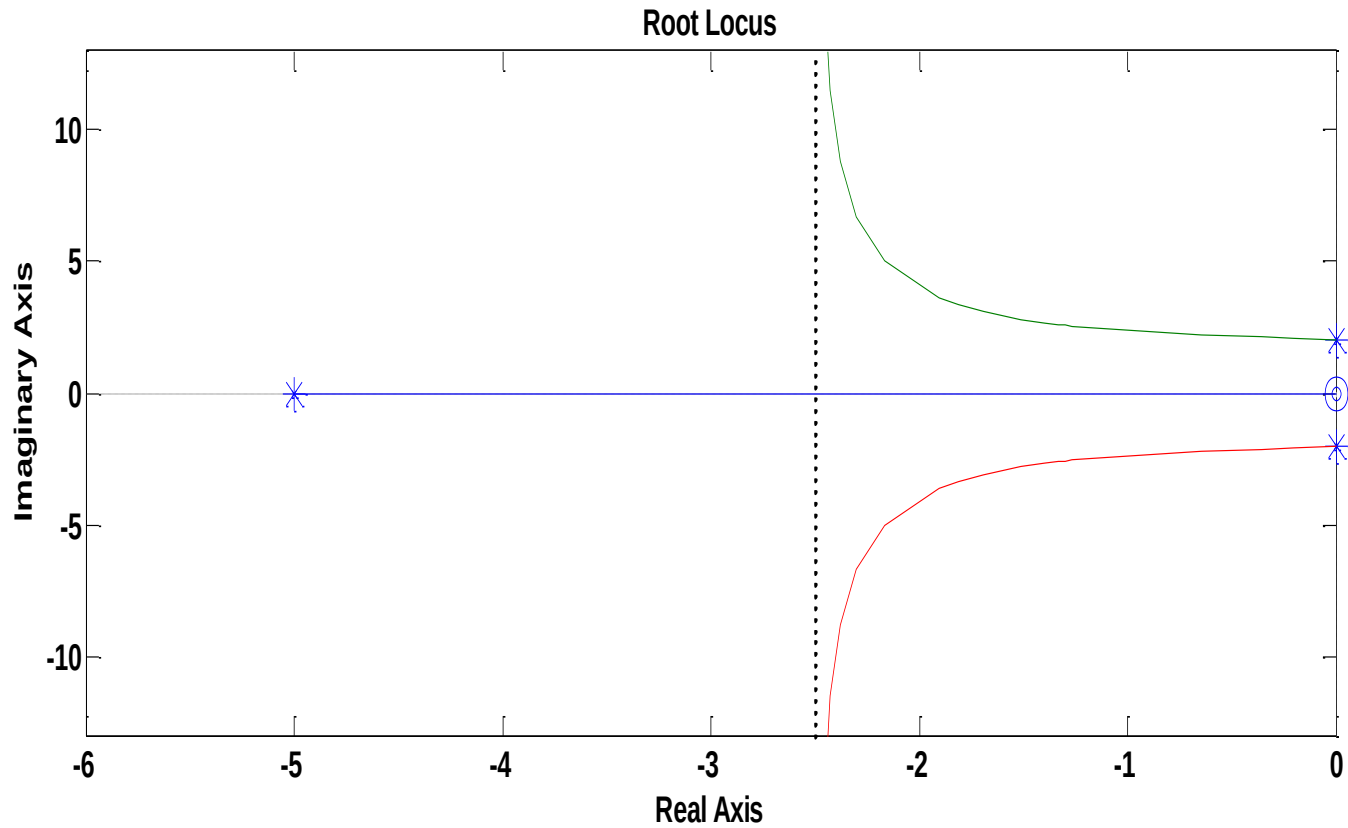
$$AD = 180 - (90 + \tan^{-1}(\frac{2}{5})) + (90) = 180 - 21.8 = 158.2$$

- محل B.I &amp; B.A:

$$k = -\frac{s^3 + 5s^2 + 4s + 20}{20s} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{(3s^2 + 10s + 4)(20s) - (20)(s^3 + 5s^2 + 4s + 20)}{400s^2} = \frac{2s^3 + 5s^2 - 20}{20s^2} = 0$$

$$\Rightarrow s = \begin{cases} 1.568 \\ -2.034 \pm 1.497j \end{cases} \Rightarrow k = \begin{cases} -1.353 \\ 0.533 \pm 0.165j \end{cases}$$

مقادیر منفی و مختلط برای k غیر قابل قبول می باشند، در نتیجه نقطه برخوردی برای مکان هندسی وجود ندارد.



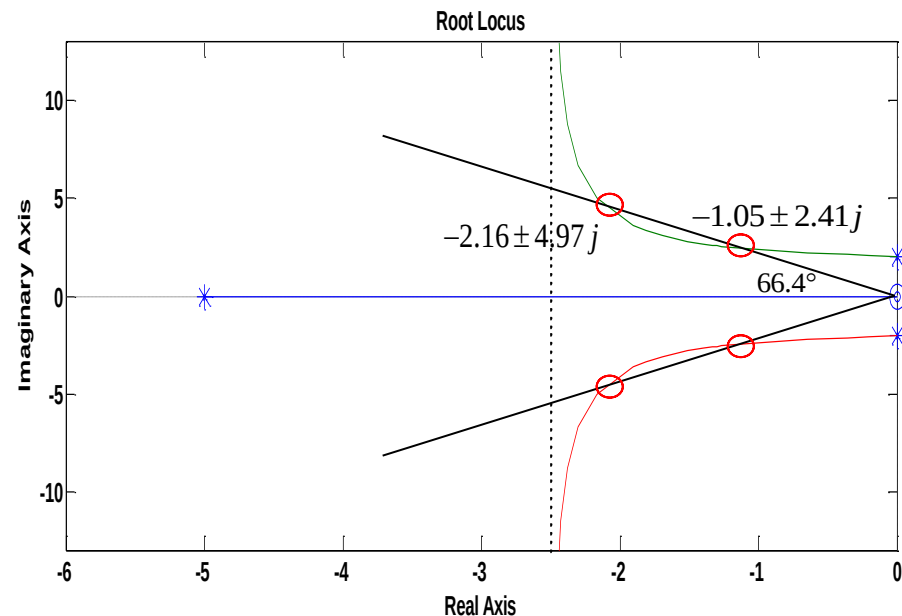
\* ادامه:

- می خواهیم  $k$  را به نحوی طراحی کنیم که سیستم مدار بسته دارای ضریب استهلاک  $0.4$  باشد.

$$\beta = \cos^{-1}(0.4) = 66.4^\circ$$

$$s_p = -1.05 \pm 2.41j$$

$$s_q = -2.16 \pm 4.97j$$



$$k = \left| \frac{(s+2j)(s-2j)(s+5)}{20s} \right| \Rightarrow$$

$$k_p = k|_{s_p} = \frac{\sqrt{1.05^2 + (2.41+2)^2} \cdot \sqrt{1.05^2 + (2.41-2)^2} \cdot \sqrt{2.41^2 + (1.05-5)^2}}{20\sqrt{2.41^2 + 1.05^2}} = 0.45, \quad k_q = 1.413$$

\* ادامه:

- به دست آوردن قطب سوم متناظر با هر یک از k ها:

$$\sum \text{Re}(P_i^{CL}) = \sum \text{Re}(P_i^{OL}) = \text{Constant}$$

$$\begin{cases} \sum \text{Re}(P_i^{OL}) = 0 + 0 + (-5) = -5 \\ \sum \text{Re}(P_i^{CL}) = 2(-1.05) + s_{3p} \end{cases} \Rightarrow s_{3p} = -2.9$$

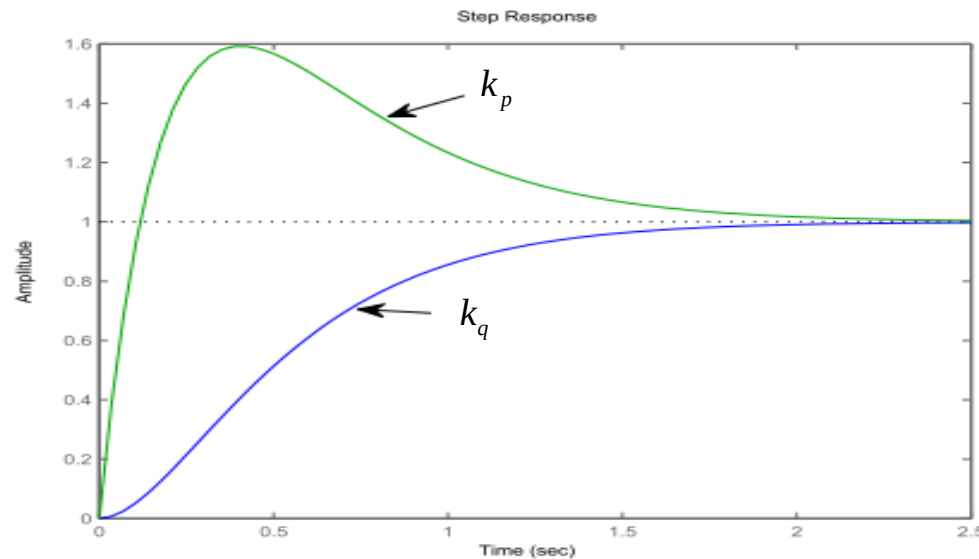
$$\begin{cases} \sum \text{Re}(P_i^{OL}) = 0 + 0 + (-5) = -5 \\ \sum \text{Re}(P_i^{CL}) = 2(-2.16) + s_{3q} \end{cases} \Rightarrow s_{3q} = -0.68$$

\* ادامه:

- مفهوم قطب غالب:

عبارت است از قطبی که در طولانی مدت رفتار سیستم به آن وابسته می شود. هر قدر قطبی به محور موهومی نزدیکتر باشد، غالب تر است.

در مثال قبل برای حالت  $q$ ،  $s_3$  غالب تر است، در صورتی که در حالت  $p$ ،  $s_{1,2}$  غالب ترند. با توجه به این که برای معنا پیدا کردن ضریب استهلاک باید رفتار سیستم به رفتار یک سیستم رسته دو میل کند، وضعیت  $p$  را انتخاب می کنیم و  $k$  مطلوب ما مقدار 0.45 خواهد بود.



# Part 2:

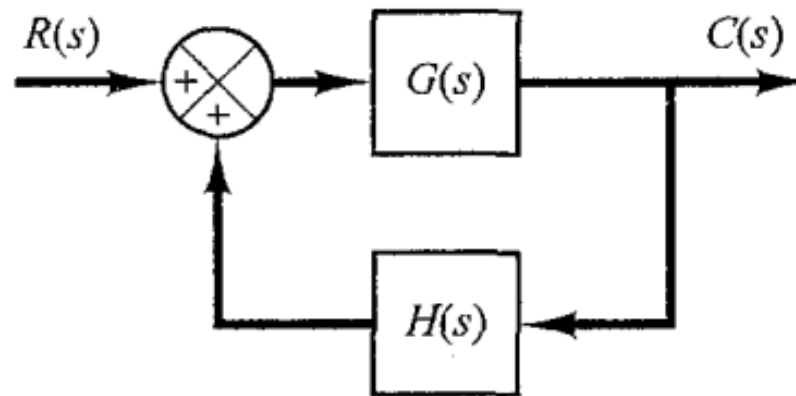
## Special Cases

- [Positive Feedback Systems](#)
- [Non-minimum Phase Systems](#)

Contents



\* مکان هندسی با پسخوراند مثبت (Positive Feedback)



$$CLTF : \frac{C}{R} = \frac{G}{1 - GH} \Rightarrow \text{Characteristic Eq} : 1 - GH = 0 \Rightarrow GH = 1 \Rightarrow \begin{cases} |GH| = 1 \\ \angle GH = \pm 360^\circ \end{cases}$$

- نسبت به حالت قبلی، فقط شرط زاویه تغییر می کند.

\* اصلاح قوانین برای سیستم های پسخوراند مثبت:

- بخشی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد:  
اگر مجموع تعداد قطب ها و صفر های سمت راست هر بخش روی محور حقیقی زوج باشد،  
آن بخش جزو مکان هندسی خواهد بود.
- زاویه ی مجانب ها :

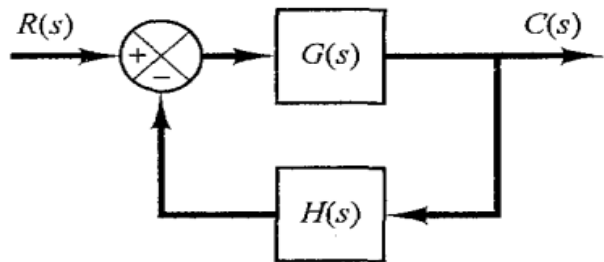
$$\frac{\pm 360l}{n - m}$$

- زاویه ی خروج از قطب یا ورود به صفر مختلط:

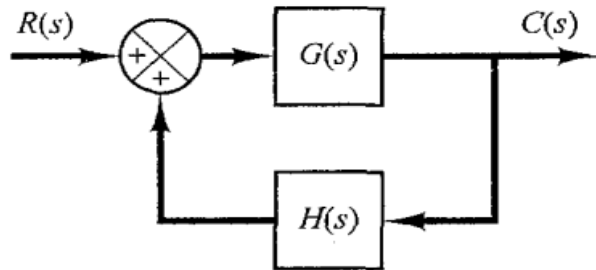
$$AD = 0^\circ - \sum \begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردار ها از سایر} \\ \text{قطب ها به قطب مورد نظر} \end{array} + \sum \begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردار ها از سایر} \\ \text{صفرها به قطب مورد نظر} \end{array}$$

$$AA = 0^\circ - \sum \begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردار ها از سایر} \\ \text{صفر ها به صفر مورد نظر} \end{array} + \sum \begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردار ها از سایر} \\ \text{قطب ها به صفر مورد نظر} \end{array}$$

\* بررسی نحوه حل انواع مسائل متداول:



برای بدست آوردن مکان هندسی با سیستم پسخوراند منفی و  $k > 0$  از قوانین قبلی استفاده می شود.



برای بدست آوردن مکان هندسی سیستم پسخوراند مثبت و  $k > 0$  از قوانین اصلاح شده استفاده می شود.

$$NFB \ \& \ k < 0 \approx PFB \ \& \ k > 0$$

$$PFB \ \& \ k < 0 \approx NFB \ \& \ k > 0$$

## \* مفهوم سیستم با غیر حداقل فاز (Non-minimum phase)

سیستمهای NMP سیستم هایی هستند که دارای صفر یا قطب سمت راست محور موهومی می باشند؛ اما از آنجا که سیستم های با قطب سمت راست محور موهومی ناپایدار می باشند و عملاً مورد بررسی قرار نمی گیرند، در نتیجه معمولاً زمانی که صحبت از سیستم های NMP است منظور سیستم های دارای صفر سمت راست محور موهومی می باشد.

\* مثال:

$$G_1(s) = k \frac{1 - T_a s}{s(Ts + 1)} \rightarrow NMP, \quad G_2(s) = k \frac{T_a s - 1}{s(Ts + 1)} \rightarrow NMP$$

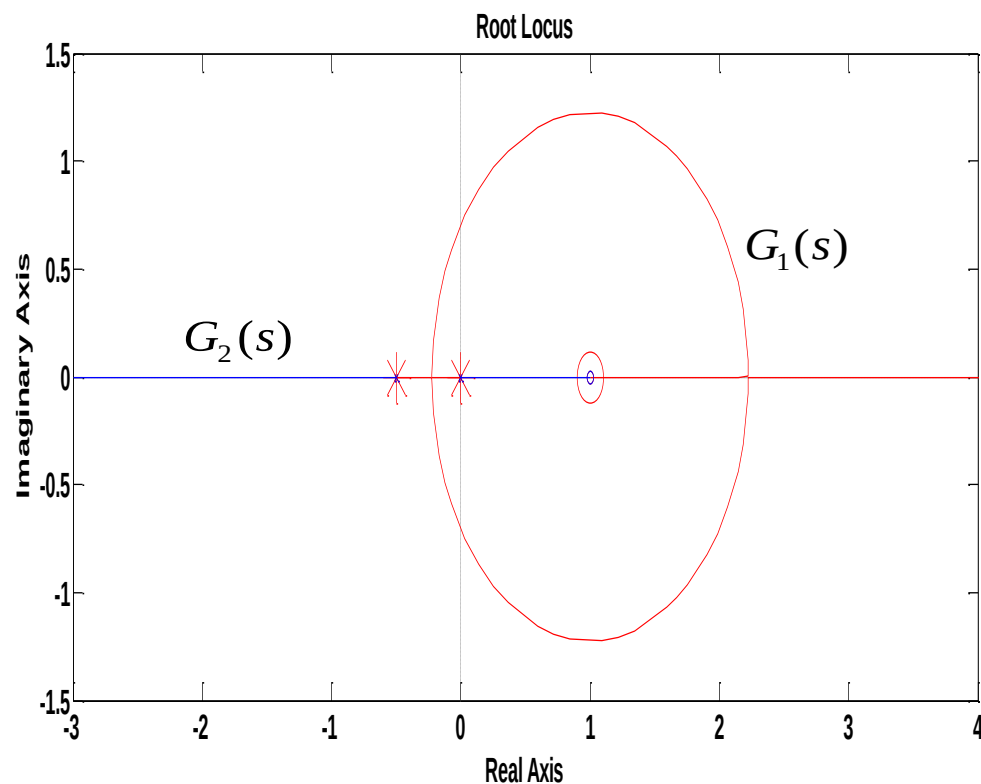
- رسم مکان هندسی  $G_1$  برای  $k > 0$  مانند رسم مکان هندسی  $G_2$  برای  $k < 0$  می باشد. در نتیجه برای رسم این مکان می توان مکان هندسی  $G_2$  را برای  $k > 0$  و سیستم PFB رسم کرد.

- برای رسم مکان سیستم های NMP پیچیده تر، باید همواره علامت بزرگترین توان  $s$  را مثبت کرد و سپس مکان هندسی ریشه ها را برای سیستم جدید رسم نمود.

\* مثال: مکان هندسی ریشه ها را برای دو سیستم NFB زیر رسم کنید.

$$G_1(s) = k \frac{1 - T_a s}{s(Ts + 1)} \Rightarrow NMP$$

$$G_2(s) = k \frac{T_a s - 1}{s(Ts + 1)} \Rightarrow NMP$$



- هر دو مکان هندسی، برای حالت  $k > 0$  رسم شده اند.

\* مثال: مکان هندسی سیستم زیر را برای  $k > 0$  و NFB رسم می کنیم:

$$OLTF = k \frac{3s^2 + 4s + 4}{s^3(s + 4)}$$

$$\text{Zeros: } z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}j}{3} \quad \& \quad \text{Poles: } p_{1,2,3} = 0, \quad p_4 = -4 \rightarrow m = 2, n = 4$$

$$\text{Number of asymptots: } n-m=2, \quad \text{Angel of asymptots} = \frac{\pm 180^\circ}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum OL P - \sum OL Z}{n-m} = \frac{(-4) - (-\frac{4}{3})}{2} = -\frac{4}{3}$$

- با توجه به وجود ریشه ی مرتبه سوم در صفر، سه شاخه با هم تلاقی دارند:

$$\Psi = \frac{360^\circ}{q} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Previous Example

\* ادامه:

- محاسبه ی محل برخورد دوشاخه:

$$\text{Characteristic Eq: } k = \frac{-s^3(s+4)}{3s^2+4s+4} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow 6s^2(s^3+4s^2+8s+8) = 0$$

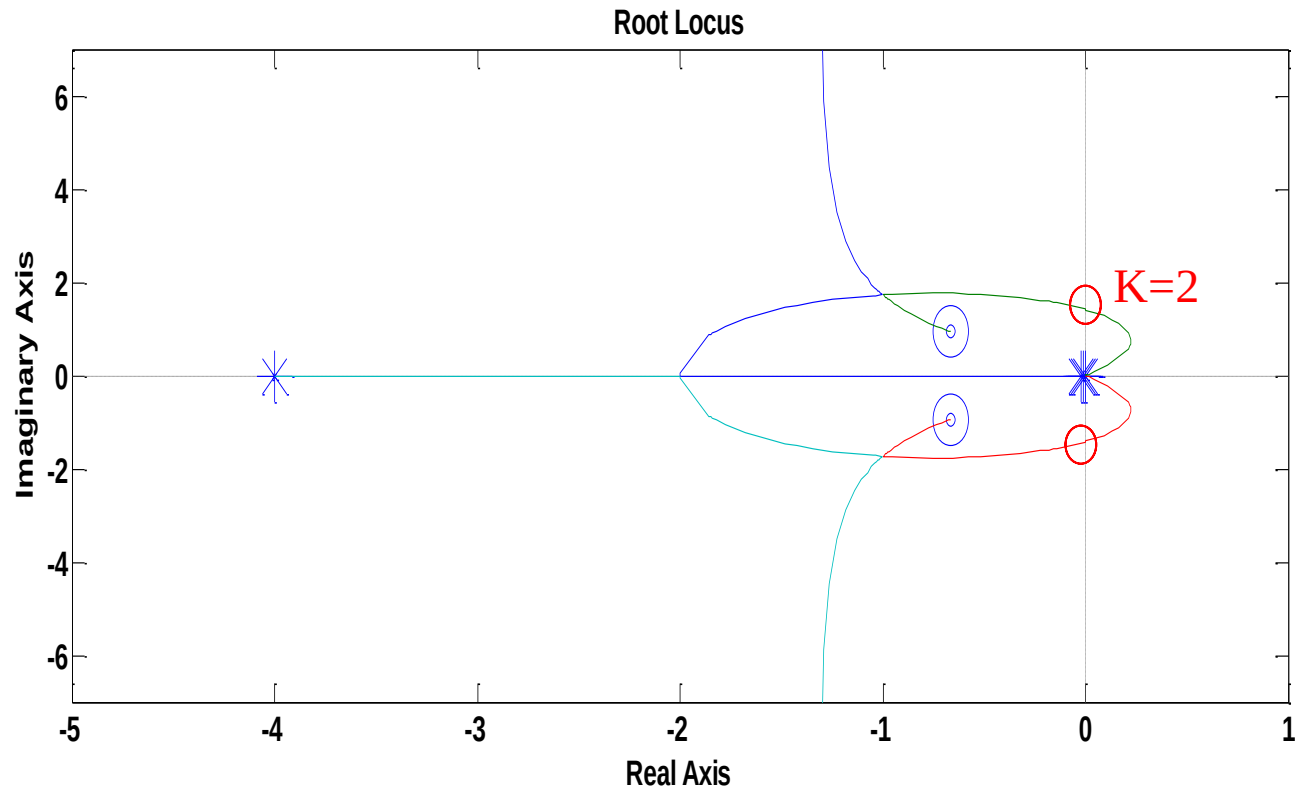
$$\Rightarrow \begin{cases} s = -1 \pm j\sqrt{3} \Rightarrow k = 4 \\ s = -2 \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

با توجه به مختلط بودن  $s$ ، دو شاخه خارج محور حقیقی با هم برخورد می کنند.

- محاسبه ی محل برخورد با محور موهومی:

$$s = j\omega \Rightarrow 1 + k \frac{3s^2+4s+4}{s^3(s+4)} = 0 \Rightarrow s^3(s+4) + k(3s^2+4s+4) = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^4 - 3k\omega^2 + 4k) + j(-4\omega^3 + 4k\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4\omega(\omega^2 - k) = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{k} \\ \Rightarrow k^2 - 3k^2 + 4k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2} \end{cases}$$





Thanks for your attention!

[Contents](#)



Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

# Automatic Control

Chapter 7:

## Control Systems Design by Root- Locus Method

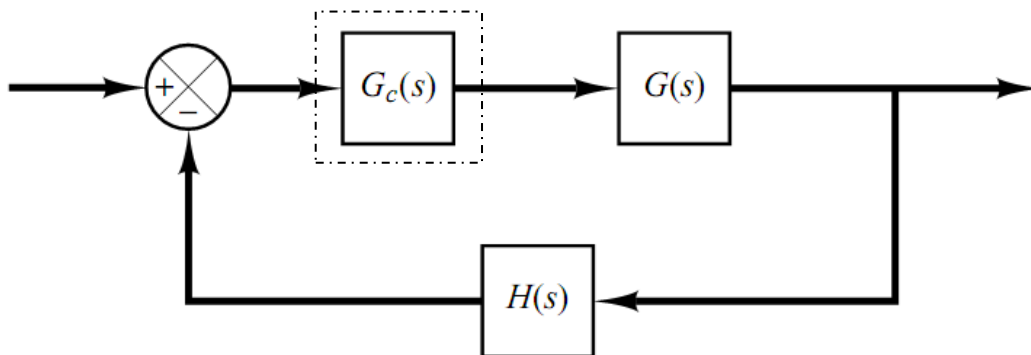
- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method

- Part 1: Lead and Lag Compensators Design
  - Example I: Lead Compensator
  - Example II: Lag Compensator
- Part 2: Lead-Lag Compensator and Controller Design
  - Example I: Lead-Lag Compensator
  - Example II: PI Controller
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

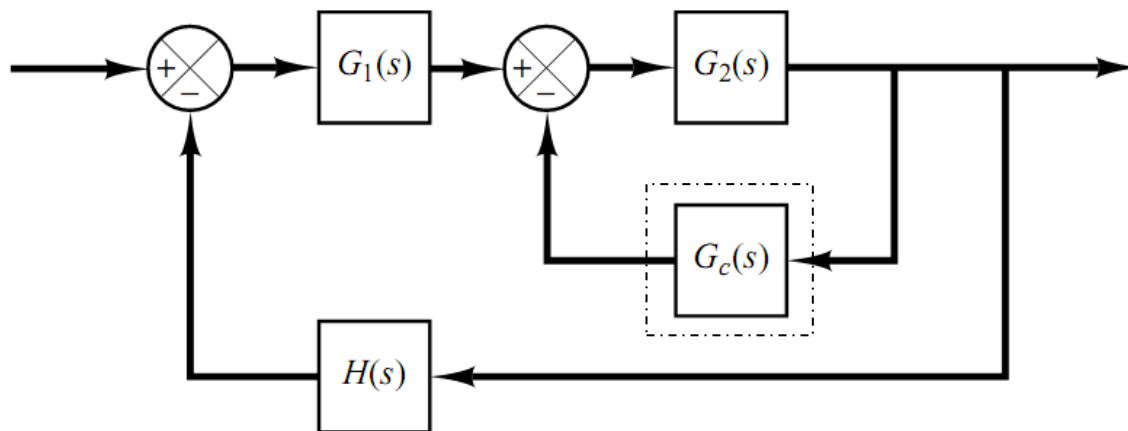


\* جبران‌سازها برای بهبود ویژگی‌های عملکردی سیستم‌های کنترلی به کار می‌روند.

\* جبران‌ساز سری:



\* جبران‌ساز موازی:



\* هدف از طراحی جبران‌ساز بهبود یک یا چند ویژگی از ویژگی‌های زیر است:  
 Performance (کارایی و بازده) - Stability (دقت و پایداری) - Speed of response (سرعت)

\* انواع جبران‌سازها:

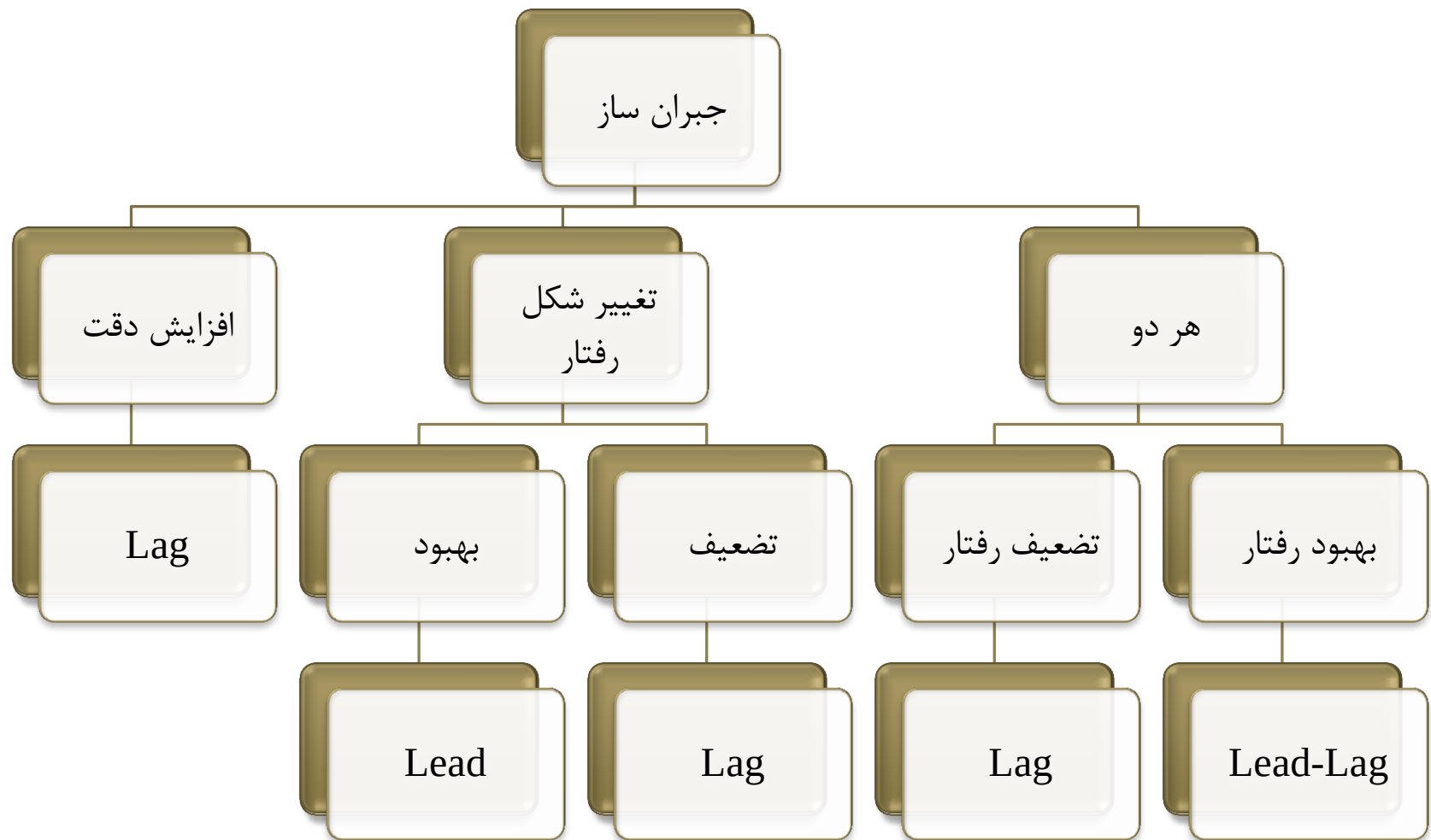
Lead -

Lag -

\* شکل کلی تابع تبدیل جبران‌ساز:

$$G_c = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

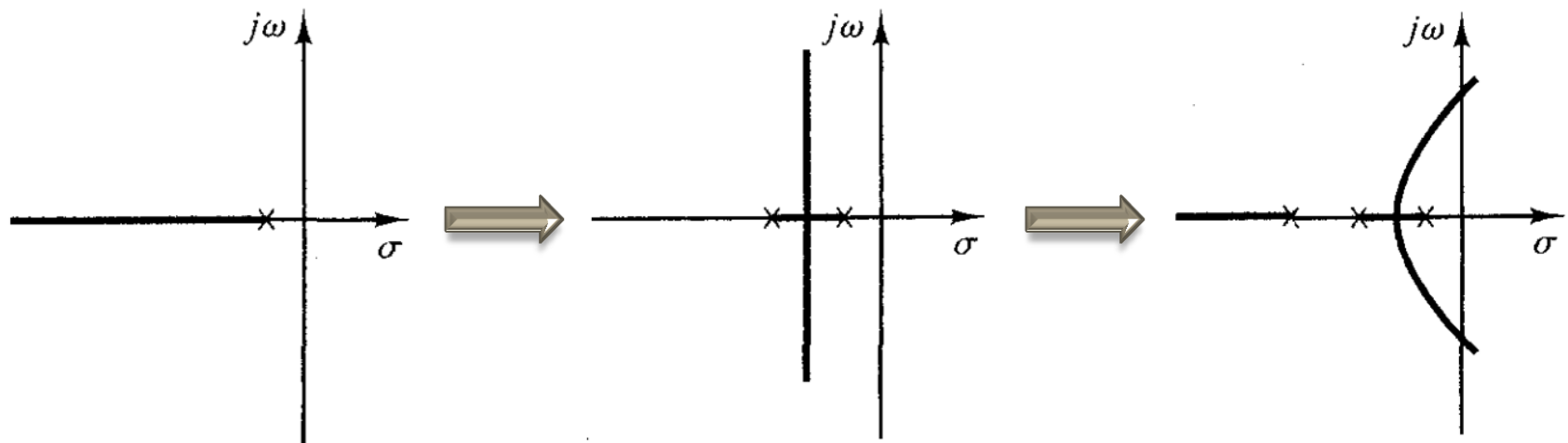
- جبران‌ساز یک صفر و یک قطب به تابع تبدیل مدار باز اضافه می‌کند، با تنظیم صفر و قطب اضافه شده، می‌توان رفتار سیستم را اصلاح کرد.





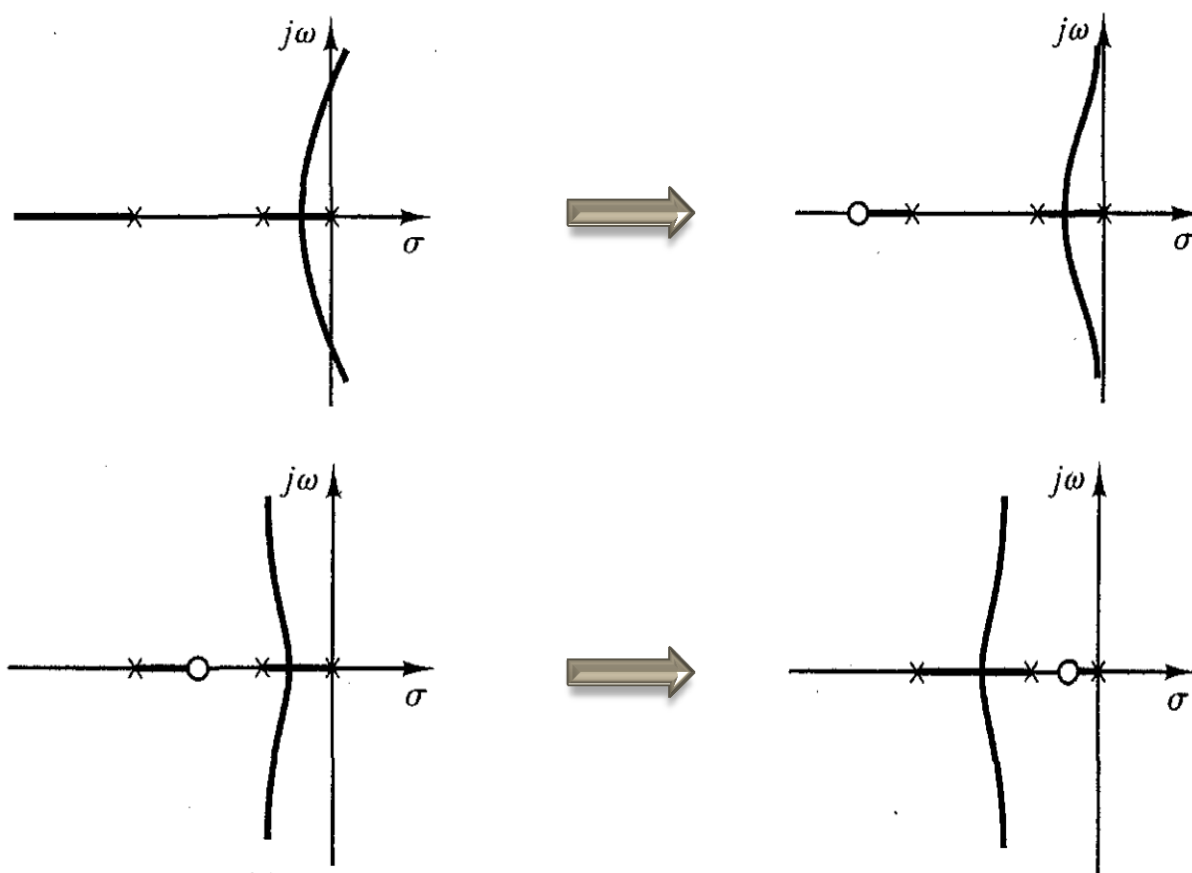
\* اثر افزایش قطب:

- کشیده شدن مکان هندسی ریشه ها به سمت راست و در نتیجه کاهش سرعت و پایداری سیستم مدار بسته است.

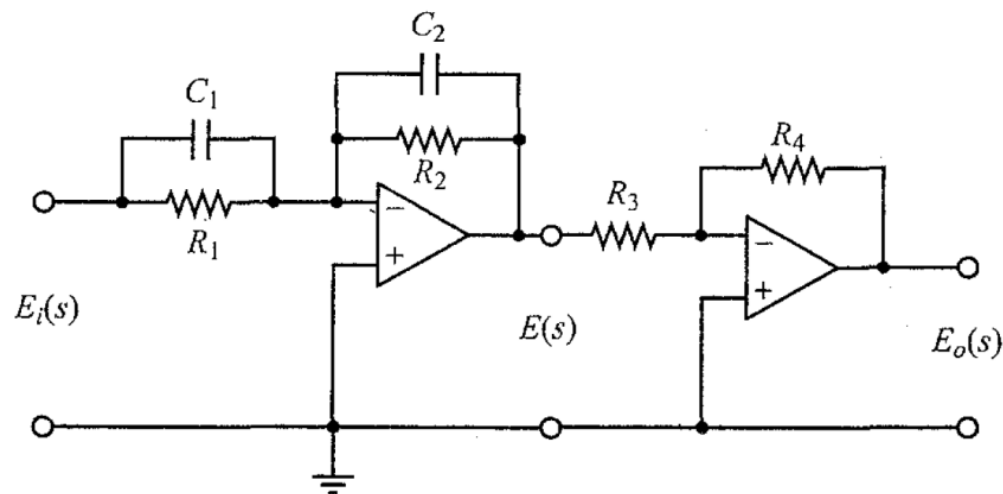


## \* اثر افزایش صفر:

- کشیده شدن مکان هندسی ریشه ها به سمت چپ و در نتیجه افزایش سرعت و پایداری سیستم مدار بسته است.



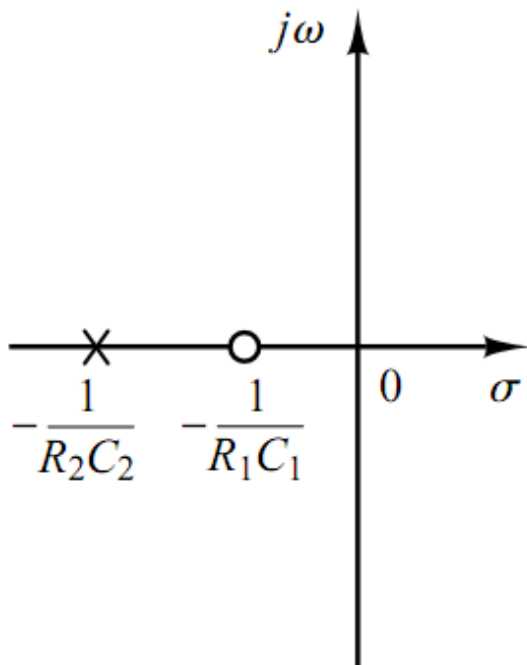
\* ساختار جبران ساز الکترونیکی با آپ-امپ:



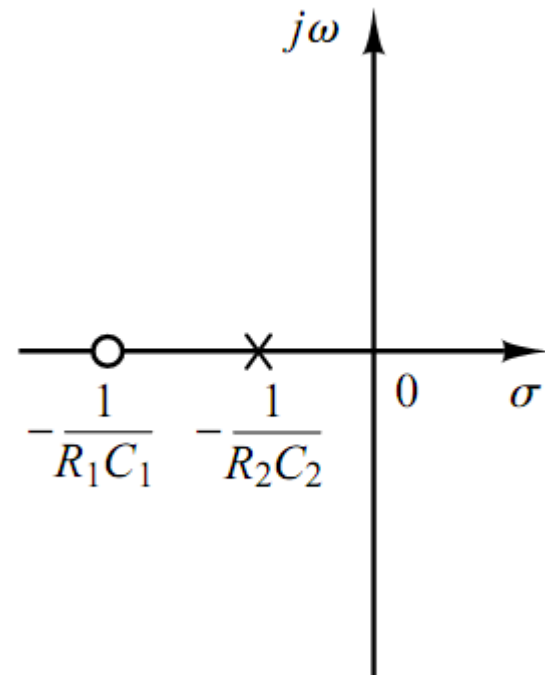
$$\frac{E_o}{E_i} = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

$$k_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}, \quad T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_2 C_2, \quad DC \text{ gain: } k_c \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}$$

$\alpha < 1$  : *Lead network*



$\alpha > 1$  : *Lag network*



# Part 1:

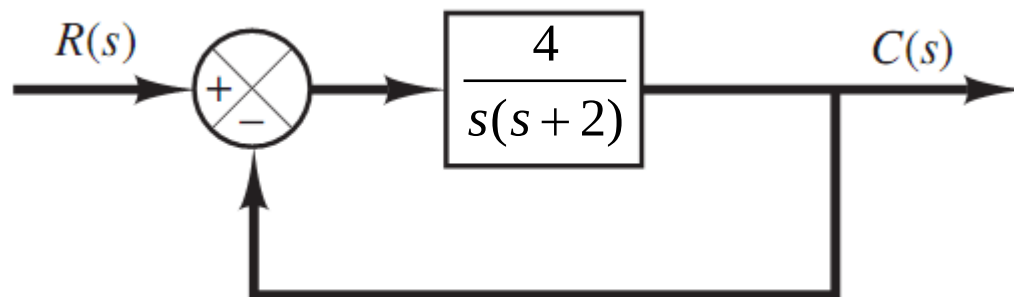
## Lead and Lag Compensators Design

- Example I: Lead Compensator
- Example II: Lag Compensator

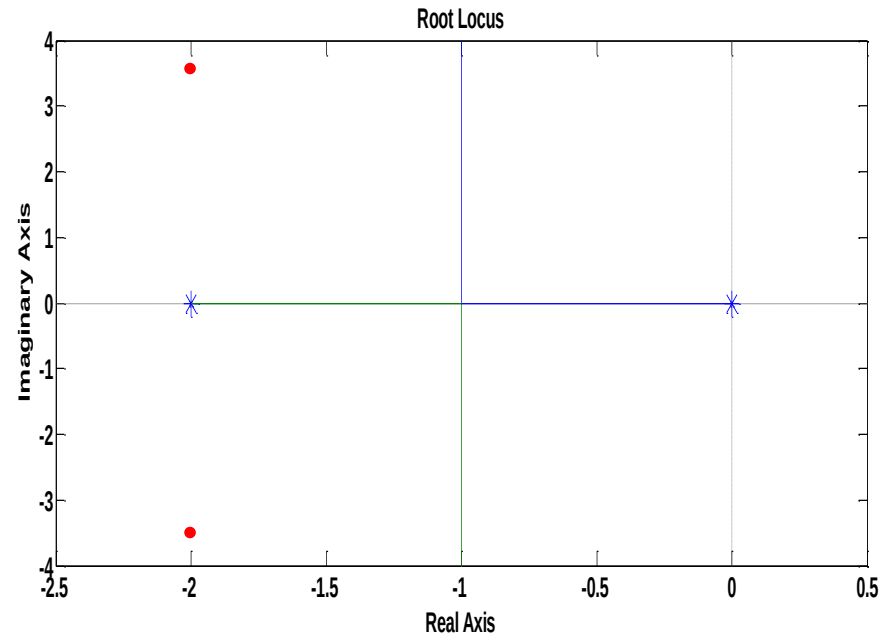
Contents

\* مثال: برای سیستم زیر جبران‌ساز مناسب طراحی کنید. هدف به دست آوردن خواص زیر برای سیستم مدار بسته است:

$$\xi = 0.5, \omega_n = 4$$

**Next Example**

\* حل:

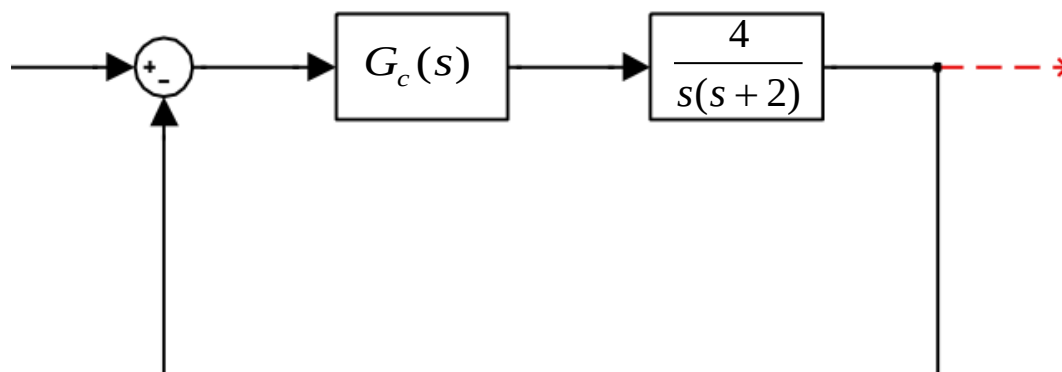


$$\text{Roots: } \begin{cases} \xi = 0.5 \\ \omega_n = 4 \end{cases} \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j$$

- مشاهده می شود که قطب های مطلوب برای سیستم مدار بسته روی مکان قرار نمی گیرند. در نتیجه با تغییر بهره کنترلی، نمی توان به سیستم مدار بسته دلخواه رسید و نیاز به طراحی جبران ساز وجود دارد.

\* ادامه:

- با توجه به مکان قطب های مطلوب، مشاهده می شود که نیاز به انتقال مکان به سمت چپ وجود دارد. در نتیجه به یک جبران ساز lead نیاز خواهیم داشت.



$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

- برای سیستم جبران شده باید شرایط اندازه و زاویه در قطب های مطلوب برقرار باشند.

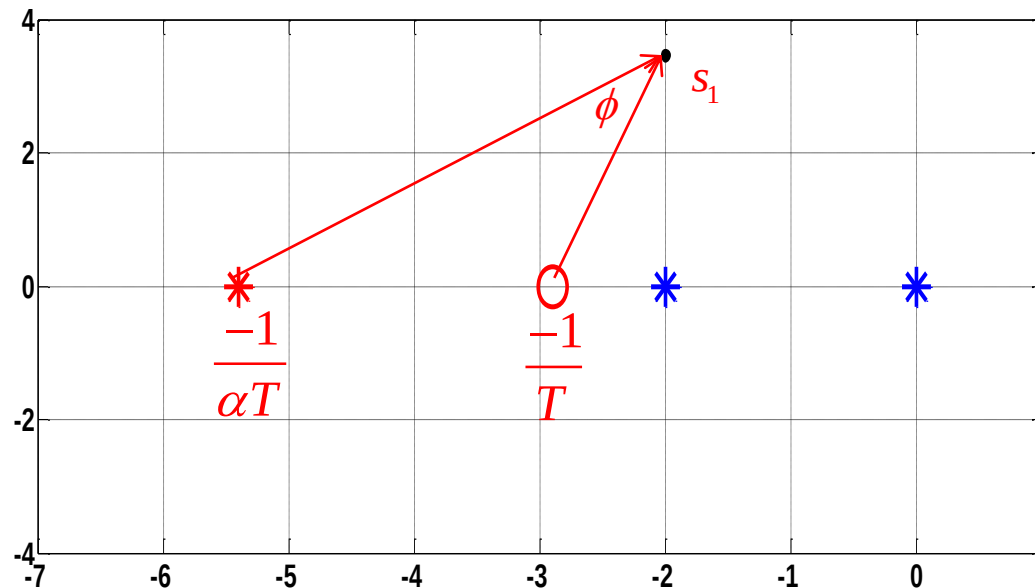


\* ادامه:

$$\angle G_c(s_1)G(s_1) = \phi + \angle G(s_1) = \pm 180(2l+1) \Rightarrow \phi + 0 - \angle(s_1 - (s_1 + 2)) = \pm 180(2l+1)$$

$$s_1 = -2 + j2\sqrt{3} \Rightarrow \phi + 0 - (180 + \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{-2})) - \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{2-2}) = \pm 180(2l+1)$$

$$\phi + 0 - 120 - 90 = \pm 180(2l+1) \Rightarrow \phi = 30$$



\* ادامه:

\* برای بدست آوردن محل صفر و قطب جبران ساز دو روش وجود دارد:

- صفر جبران ساز را بر قطب مدار باز منطبق می کنیم و با استفاده از pole-zero cancellation رسته ی سیستم را کم می کنیم.

- روش نیمساز: سیستم بدست آمده با این روش بهترین کارایی را دارد زیرا با این روش بیشترین DC gain بدست می آید.

\* فرمول بدست آوردن مکان صفر و قطب جبران ساز با استفاده از روش نیمساز:

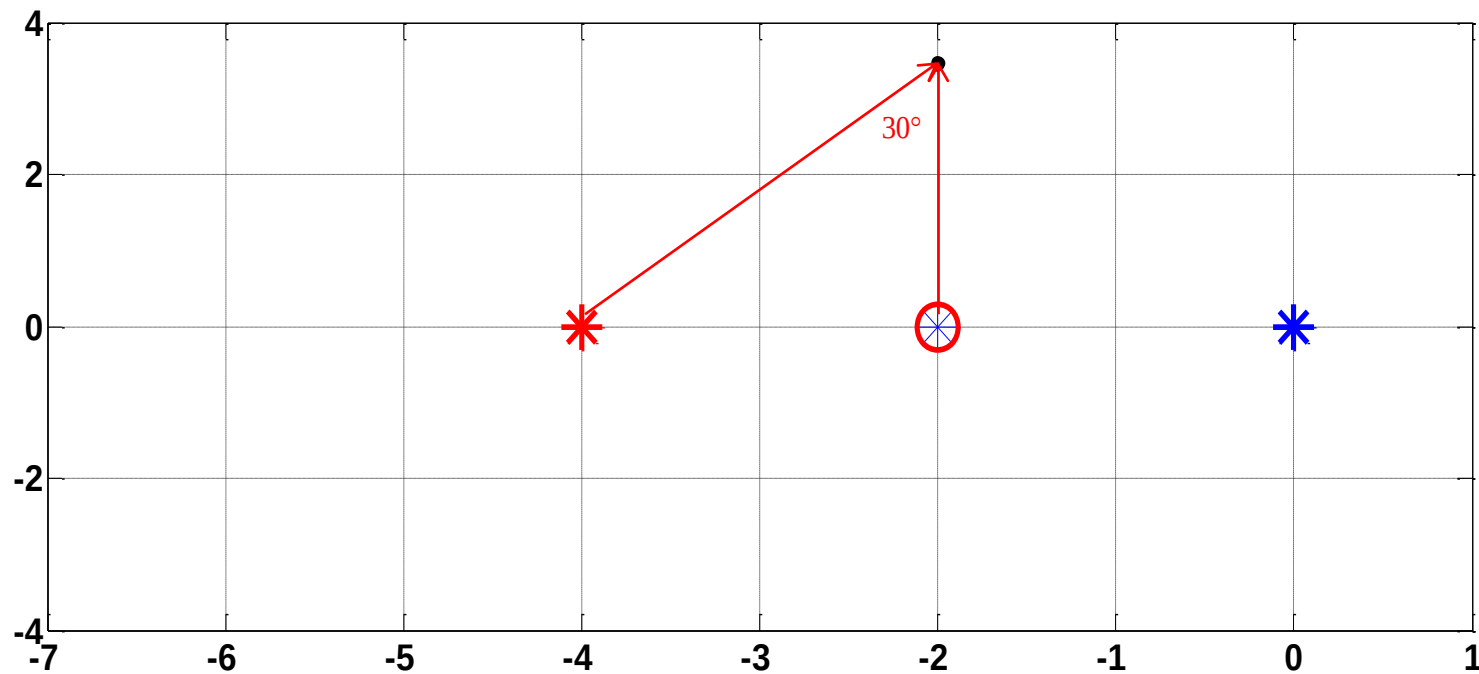
$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$$

$$-z = -\sigma - \omega \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \phi}{2}\right), \quad -p = -\sigma - \omega \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \phi}{2}\right)$$

$$G_c(s) = k_c \frac{s + z}{s + p}$$

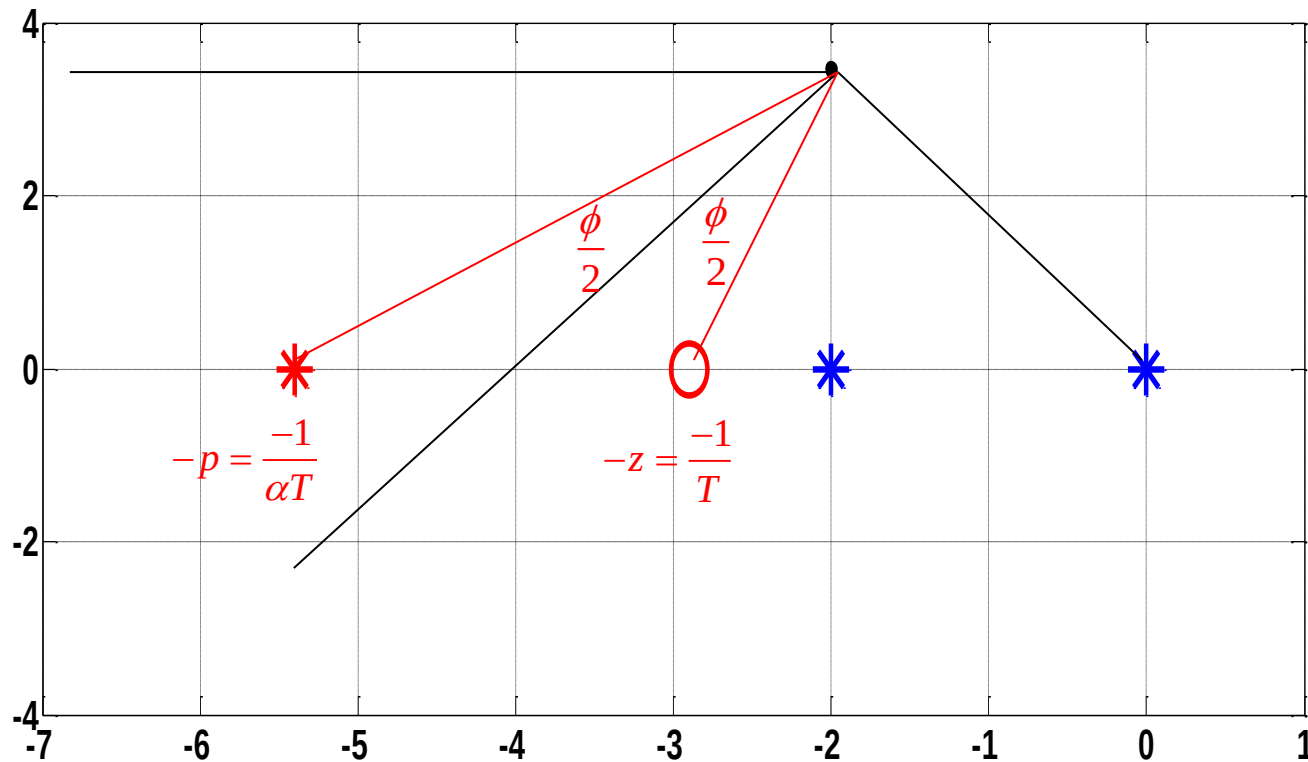
\* ادامه:

- روش pole-zero cancellation:



\* ادامه:

- حل با استفاده از روش نیمساز:



\* ادامه: با استفاده از روش نیمساز برای این مثال داریم:

$$\begin{cases} -z = -\sigma - \omega \tan\left(\frac{\tan^{-1}(\frac{\omega}{\sigma}) - \phi}{2}\right) = -2.9 \\ -p = -\sigma - \omega \tan\left(\frac{\tan^{-1}(\frac{\omega}{\sigma}) + \phi}{2}\right) = -5.4 \end{cases} \Rightarrow G_c(s) = k_c \frac{s + 2.9}{s + 5.4}$$

- برای بدست آوردن مقدار عددی  $k_c$  از شرط اندازه استفاده می کنیم:

$$k_c \frac{|s_1 + 2.9|}{|s_1 + 5.4|} \cdot \frac{4}{|s_1| \cdot |s_1 + 2|} = 1 \Rightarrow k_c = \frac{\sqrt{3.4^2 + 12} \times \sqrt{2^2 + 12} \times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{0.9^2 + 12}} \Rightarrow k_c = 4.68$$

- بنابراین:

$$G_c(s) = 4.68 \frac{s + 2.9}{s + 5.4}$$

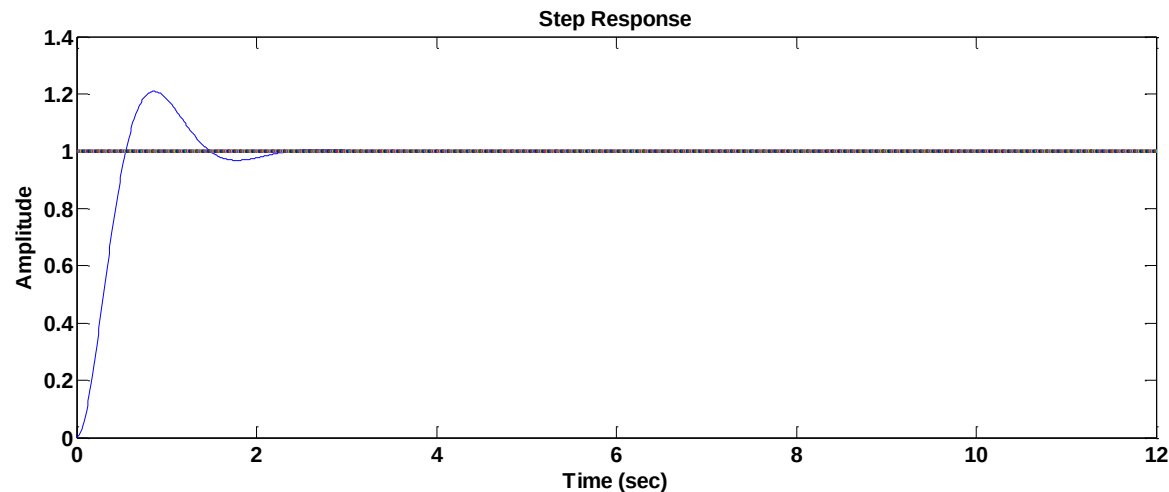
\* ادامه:

- محاسبه قطب سوم مدار بسته ناشی از اضافه کردن جبران‌ساز به مدار باز:

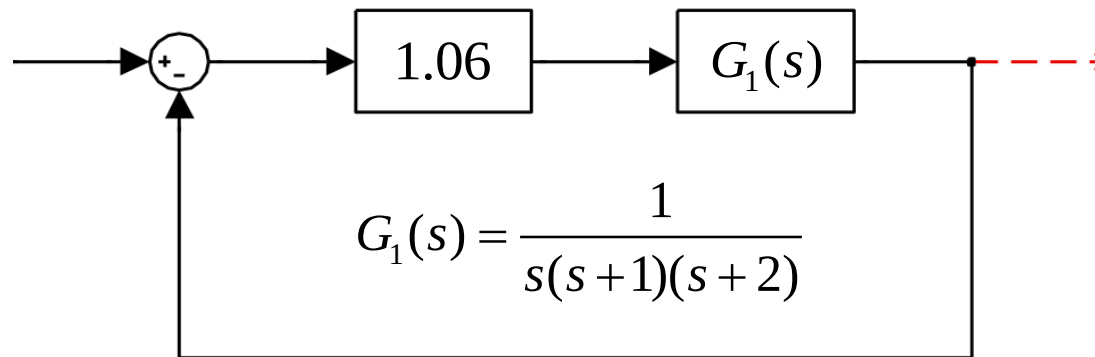
$$CLTF = \frac{4.68 \frac{s+2.9}{s+5.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)}}{1 + 4.68 \frac{s+2.9}{s+5.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)}} \Rightarrow \text{Characteristic Eq: } 1 + 4.68 \frac{s+2.9}{s+5.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)} = 0$$

$$\Rightarrow s(s+2)(s+5.4) + 4(4.68)(s+2.9) = 0 \Rightarrow s_3 = -3.4$$

- پاسخ زمانی پله واحد:



\* مثال: برای سیستم زیر جبران‌ساز مناسب را طوری طراحی کنید که پاسخ دینامیکی سیستم تغییری نکند اما خطای دایم برای ورودی شیب واحد ۱۰ برابر کاهش یابد.

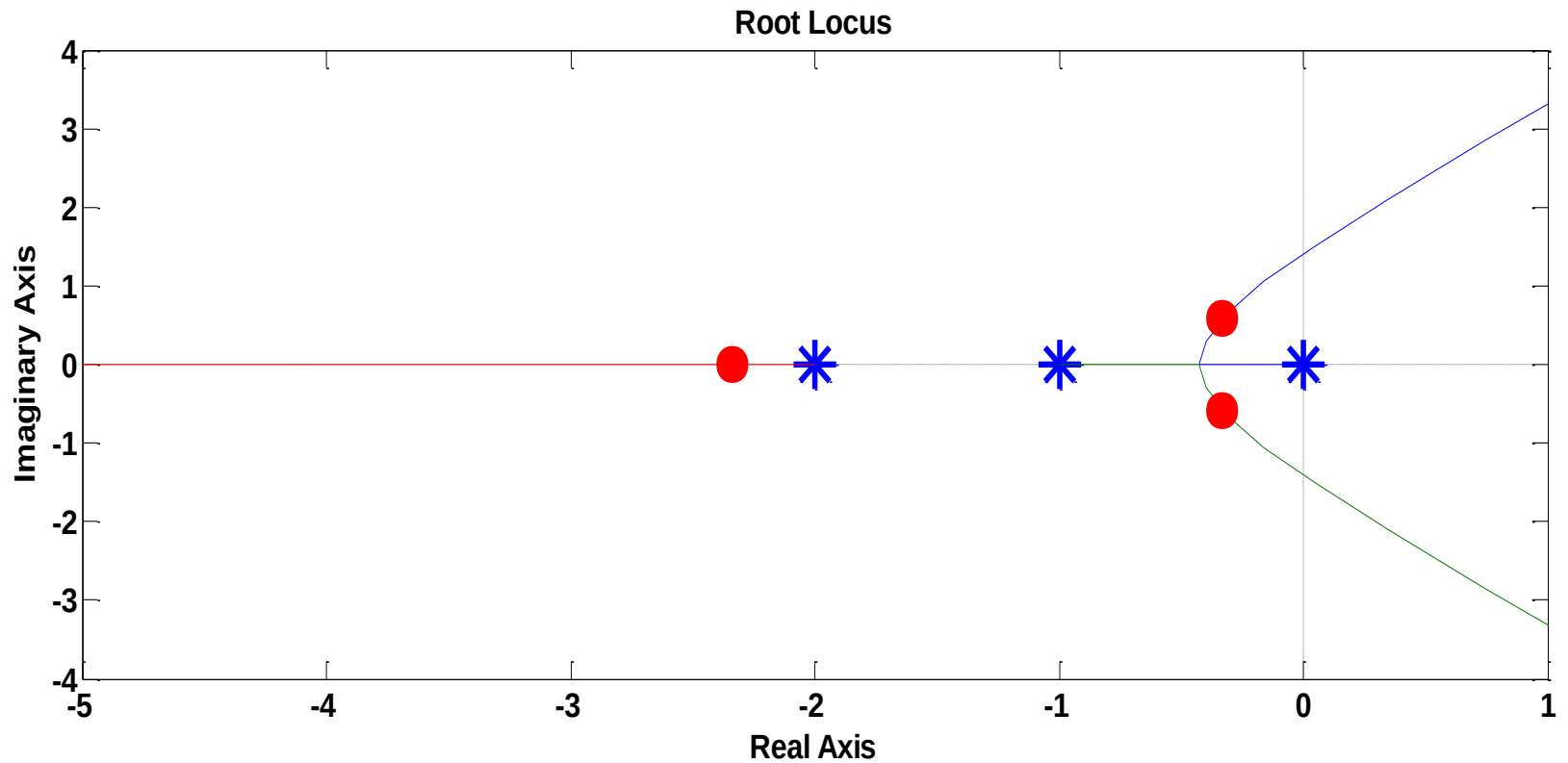


- برای سیستم حاضر، ریشه های مدار بسته به صورت زیر هستند:

$$k = 1.06 \Rightarrow \text{Characteristic Eq: } s(s+1)(s+2) + 1.06 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -0.33 \pm 0.59j \\ s_3 = -2.34 \end{cases}$$

[Previous Example](#)
[Next Example](#)

\* ادامه: مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده:





\* ادامه:

- خطای حالت دائم سیستم جبران نشده:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \frac{1.06}{2} = 0.53 \Rightarrow e_{ss} |_{UR} = \frac{1}{K_v} \simeq 2$$

- نیازی به تغییر محل قطب ها نیست بنابراین از جبران ساز lag - برای افزایش دقت - استفاده خواهیم کرد:

$$\text{Before compensation: } \angle G(s_1) = \pm 180(2l+1), |G(s_1)| = 1$$

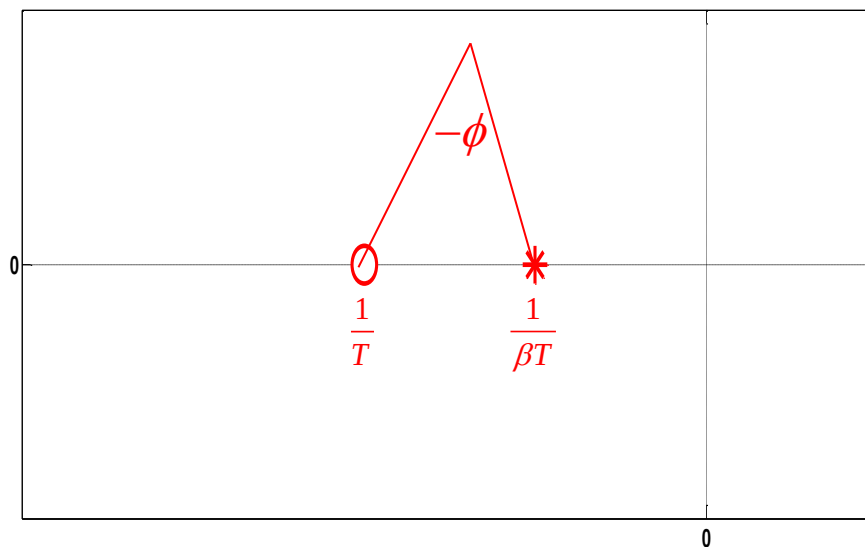
$$\text{After compensation: } \angle G_c(s_1) + \angle G(s_1) = \phi \pm 180(2l+1) \simeq \pm 180(2l+1) \Rightarrow \phi \simeq 0^\circ$$

$$|G(s_1)G_c(s_1)| = |G_c(s_1)||G(s_1)| = 1 \Rightarrow |G_c(s_1)| = 1$$

\* ادامه:

- در نظر گرفتن مقدار صفر برای فاز (صفر و قطب روی هم) جبران ساز مفهومی ندارد، در ضمن از نظر عملی هم ساخت با چنین دقتی غیر منطقی است، در نتیجه برای فاز جبران ساز lag از شرط زیر استفاده می کنیم:

$$-5^\circ < \phi < 0^\circ$$



\* ادامه:

- برای شرط اندازه داریم:

$$|G_c(s_1)G(s_1)| = 1 \Rightarrow k_c \left| \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| |G(s_1)| = 1, k_c \approx 1 \Rightarrow \left| \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| \approx 1$$

- بعد از اضافه شدن جبران‌ساز:

$$\begin{cases} \overline{e_{ss}}|_{UR} = \frac{1}{k_v} \\ \overline{k_v} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)G_c(s) = k_v G_c(0) = k_v k_c \beta = k_v \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{k_v}}{k_v} = \beta = \frac{e_{ss}}{e_{ss}} = 10 = \frac{-z}{-p} = \frac{\frac{-1}{\beta T}}{\frac{-1}{\beta T}} \Rightarrow \beta = 10$$

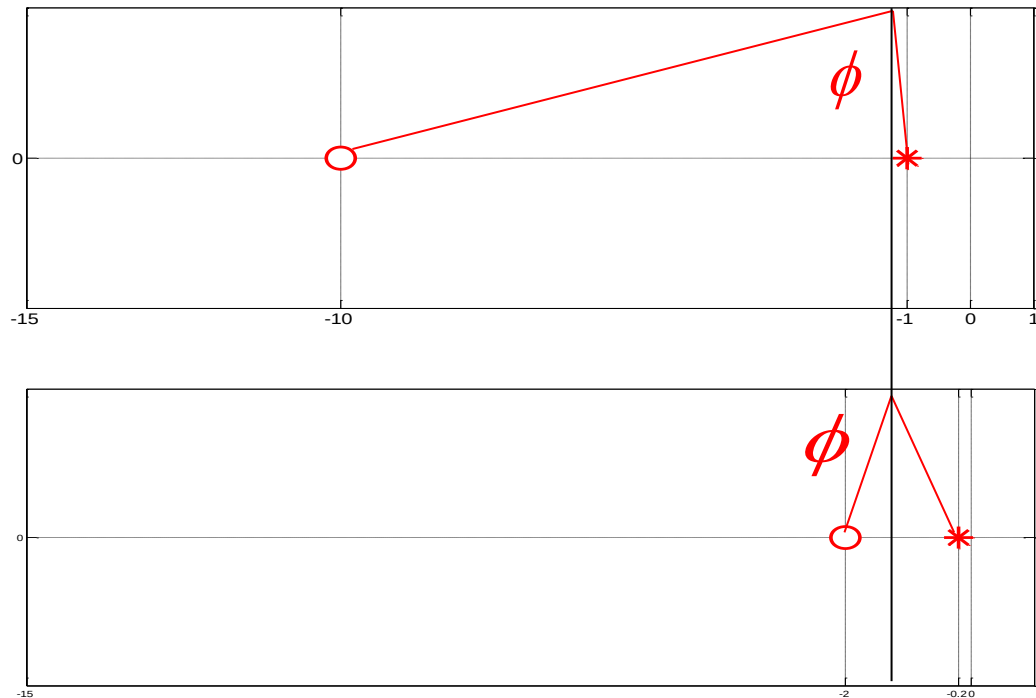
\* ادامه:

شرط های موجود ایجاب می کند که صفر و قطب در نزدیکی مبدا اختیار شوند:

$$\beta = 10$$

$$-5 < \phi < 0$$

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| \approx 1$$



\* ادامه:

- با فرض صفر جبران ساز برابر 0.05- داریم:

$$\frac{-1}{T} = -0.05 \Rightarrow \frac{-1}{\beta T} = -0.005 \Rightarrow G_c(s) = k_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

$$\angle G_c(s_1) = (180^\circ + \tan^{-1} \frac{0.59}{-0.33 - (-0.05)}) - (180^\circ + \tan^{-1} \frac{0.59}{-0.33 - (-0.005)}) \simeq -3.5^\circ$$

- نزدیک کردن مقدار  $\emptyset$  به صفر مستلزم نزدیک کردن صفر به قطب است که از لحاظ عملی دقت در ساخت و در نتیجه هزینه ی بالا را به دنبال خواهد داشت، در نتیجه اگر این مقدار از ۵- درجه بیشتر باشد مناسب است.

- برای سیستم جبران شده داریم:

$$OLTF = G_c(s)G(s) = k_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}$$

\* ادامه:

- به منظور حفظ رفتار دینامیکی سیستم، باید  $\zeta$  ثابت بماند. برای سیستم جبران نشده:

$$\text{Dominant Poles: } s = -0.33 \pm j0.59 \Rightarrow \zeta = 0.491$$

- با توجه به نمودار اسلاید بعد، ریشه های غالب سیستم جبران شده به صورت زیر بدست می آیند:

$$\zeta = cte \Rightarrow s_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$$

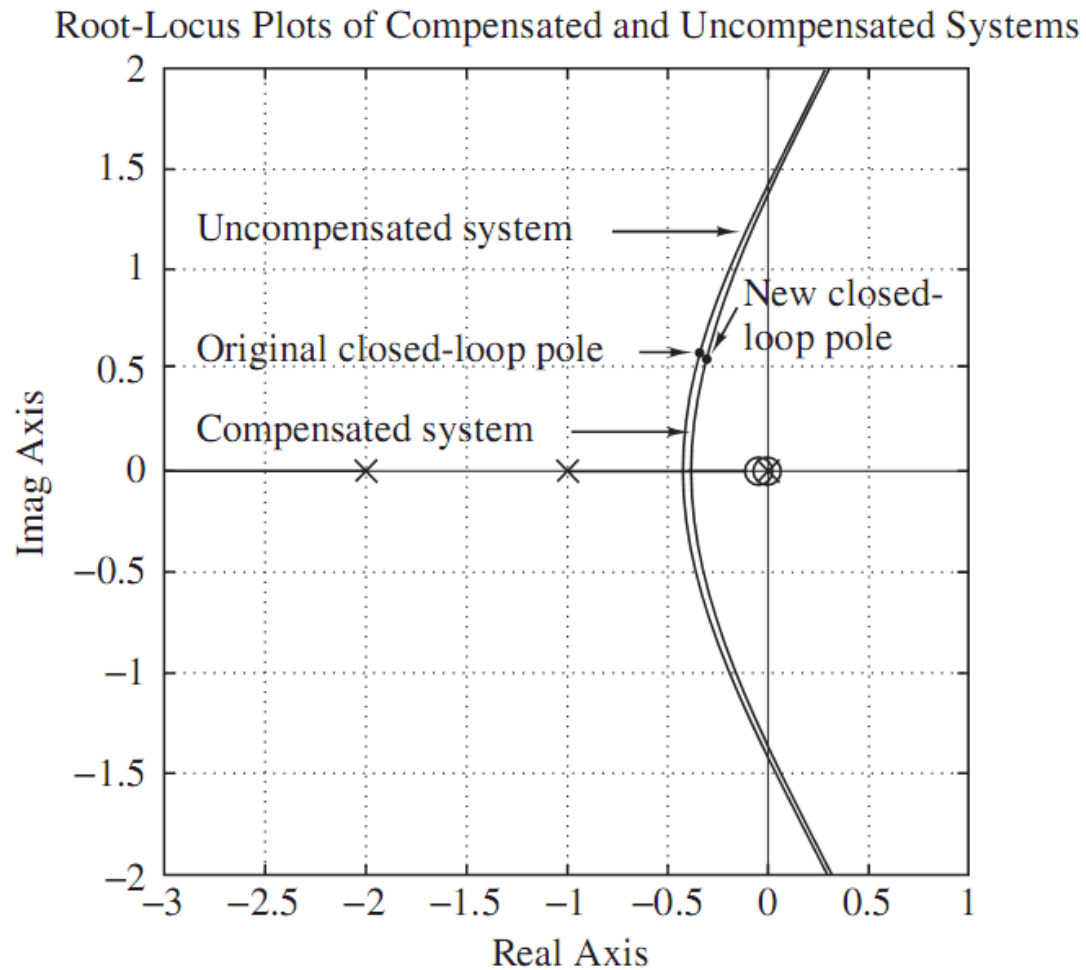
- در نتیجه:

$$\left| k_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \right|_{s=-0.31+j0.55} = 1 \Rightarrow k_c = 0.97$$

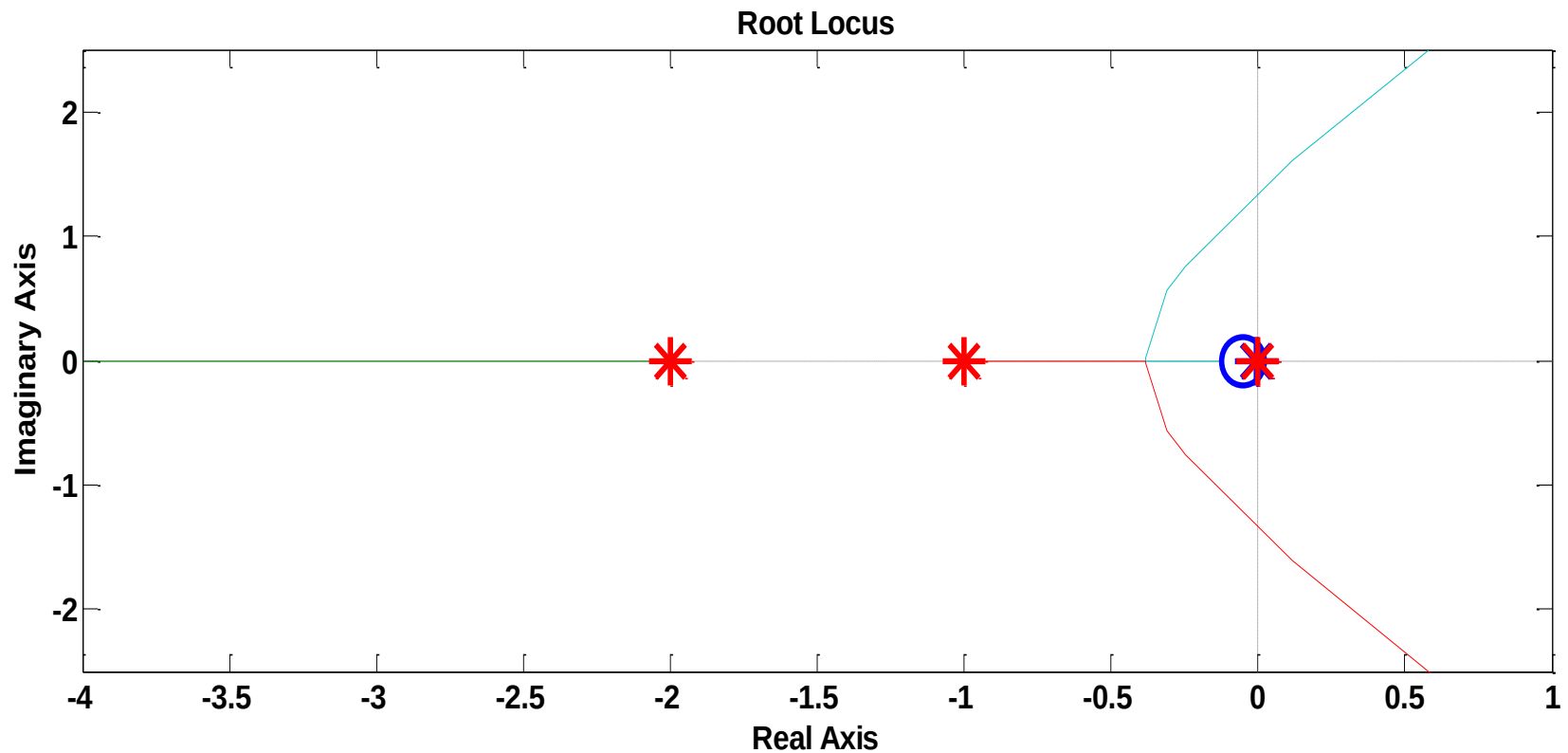
$$\text{Designed compensator: } G_c(s) = 0.97 \frac{s+0.05}{s+0.005}$$

$$\text{OLTF : } G(s)G_c(s) = (1.06)(0.97) \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \frac{s+0.05}{s+0.005}$$

\* ادامه:

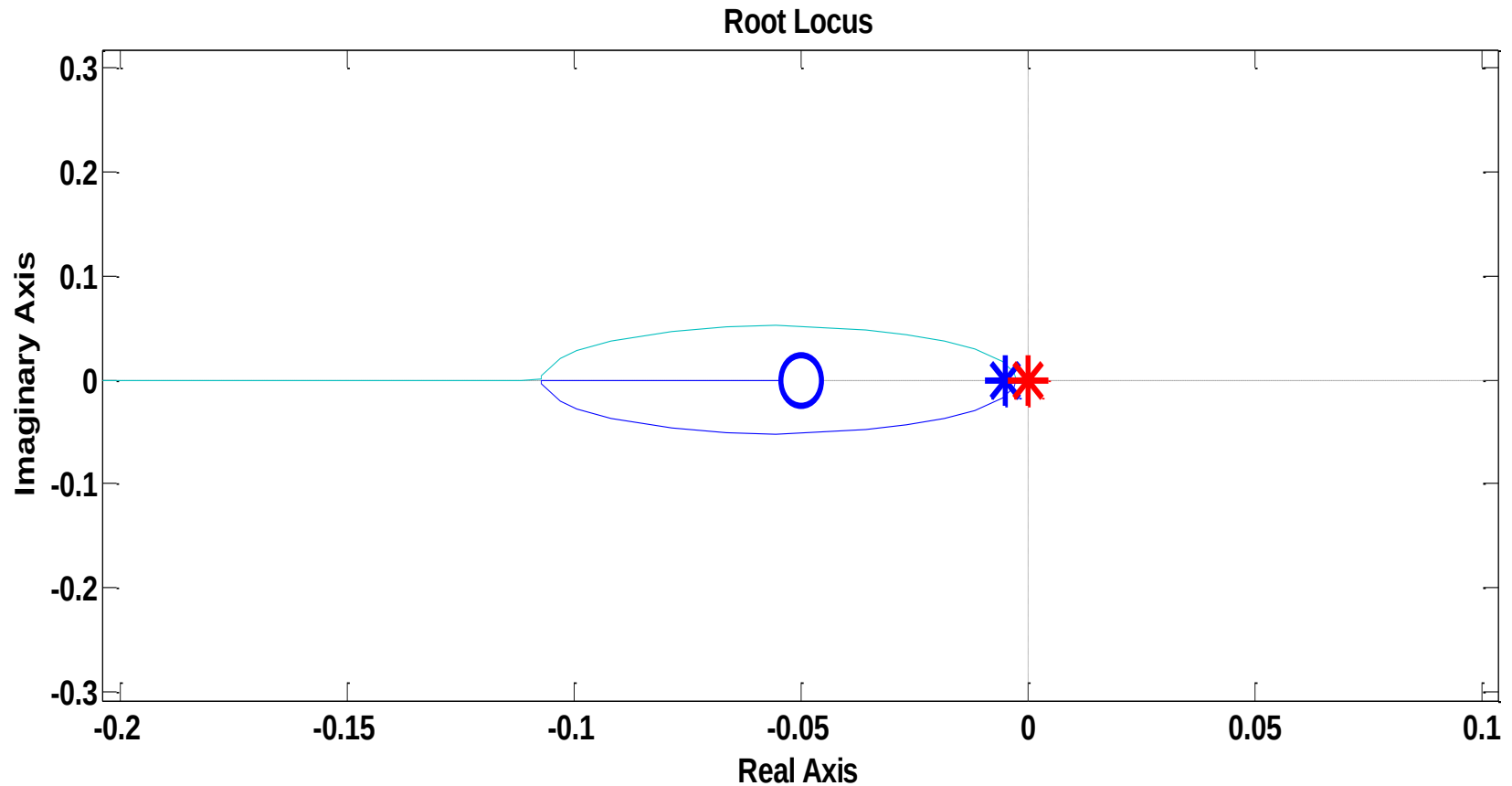


\* ادامه: مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده





\* ادامه: مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده حول مبدا



## Part 2:

# Lead-Lag Compensator and Controller Design

- Example I: Lead-Lag Compensator
- Example II: PI Controller

Contents

## \* طراحی Lead-Lag

- هدف: افزایش دقت همراه با بهبود رفتار

## \* دو روش معمول برای طراحی Lead-Lag

- روش طراحی مستقل Lead و Lag

- روش طراحی توام Lead و Lag

## \* روش طراحی مستقل Lead و Lag

-درجه آزادی برای طراحی هر کدام از دو جبران‌ساز بیشتر از صفر است، لذا برای هر کدام بینهایت جواب وجود دارد:

$$G_{cLead}(s) = k_{cLead} \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}}, \gamma > 1$$

$$G_{cLag}(s) = k_{cLag} \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}, \beta > 1$$

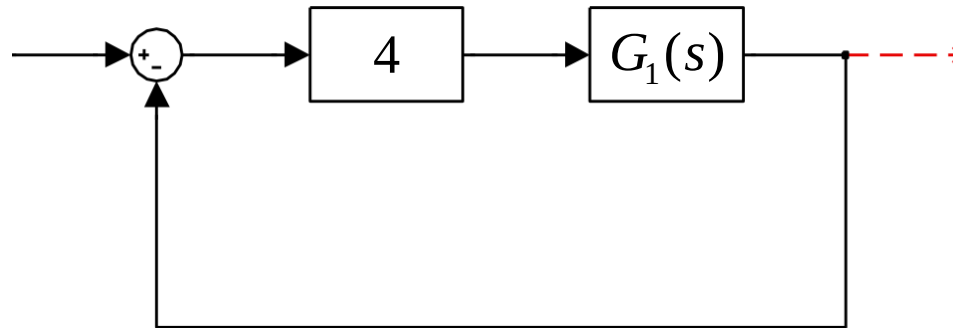
## \* روش طراحی توام Lead و Lag

- با مساوی در نظر گرفتن  $\beta$  و  $\gamma$  به یک روش طراحی توام Lead-Lag با جواب واحد دست می یابیم:

$$G_{cLead-Lag}(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} ; \beta > 1$$

\* مثال: برای سیستم زیر جبران‌ساز مناسب را برای دست یابی به وضعیت مطلوب زیر طراحی کنید:

$$\xi = 0.5, \quad \omega_n = 5 \left( \frac{r}{s} \right), \quad e_{ss}|_{UR} = 0.0125$$

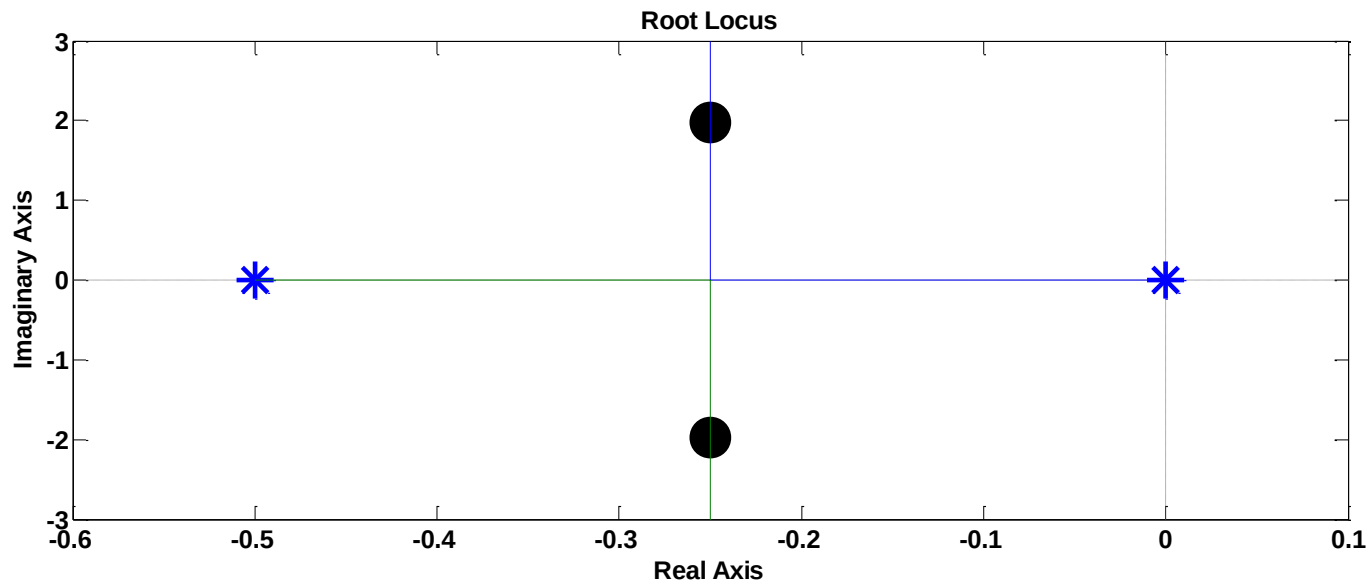


Previous Example

Next Example

\* ادامه: برای سیستم جبران نشده داریم:

$$s_{1,2} = -0.25 \pm j1.98 \Rightarrow \xi = 0.125, \quad \omega_n = 2 \left( \frac{r}{s} \right), \quad e_{ss}|_{UR} = 0.125$$



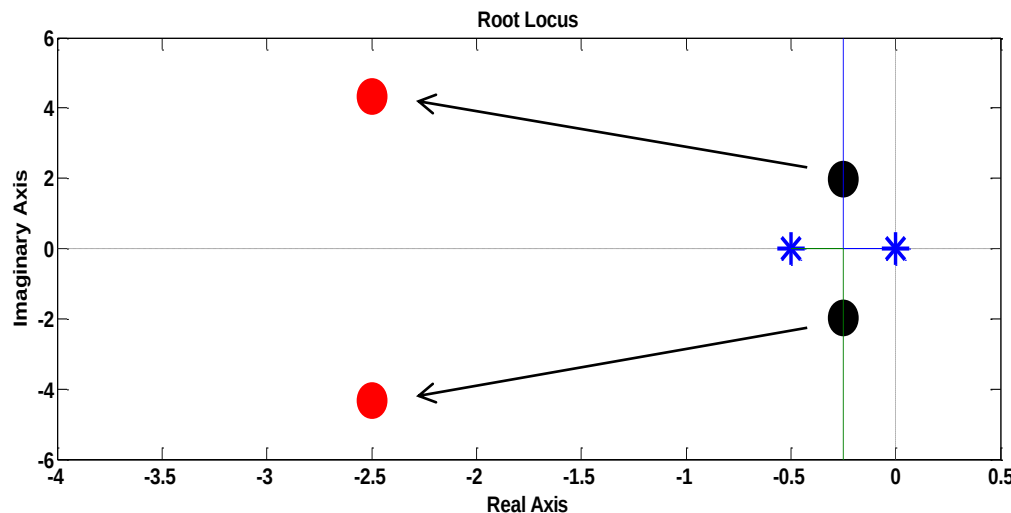
\* ادامه:

- با توجه به شرایط داده شده، ریشه های مطلوب عبارتند از:

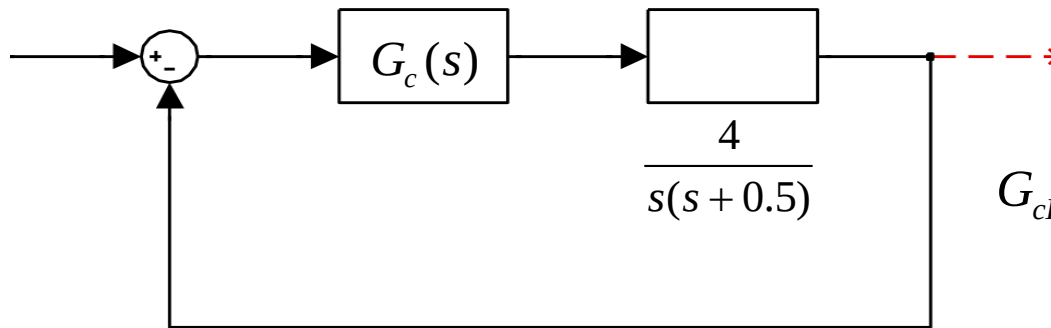
$$\xi = 0.5, \omega_n = 5 \left( \frac{r}{s} \right) \Rightarrow \overline{s_{1,2}} = -2.5 \pm j4.33$$

- قطبها روی مکان هندسی ریشه ها قرار ندارند، در نتیجه به جبران ساز نیاز داریم.

- بعلاوه با توجه به اینکه مکان باید به سمت چپ حرکت کند (بهبود رفتار) و دقت نیز باید افزایش یابد، به جبران ساز Lead-Lag نیاز داریم.



\* ادامه:



$$G_{cLead-Lag}(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}$$

$$\angle G(s) \Big|_{s_1} = -(180^\circ + \tan^{-1}(\frac{4.33}{-2.5})) - (180^\circ + \tan^{-1}(\frac{4.33}{-2.5 - (-0.5)})) = -120^\circ - 115^\circ = -235^\circ$$

$$\phi = \angle G_c(s) \Big|_{s_1} = -180^\circ - (-235^\circ) = 55^\circ$$

- این زاویه توسط بخش Lead جبران ساز تامین می شود تا خصوصیات دینامیکی سیستم را به شکل مطلوب درآورد. بخش Lag هیچ فازی تامین نمی کند.



\* ادامه:

- خطای حالت دائم:

$$\bar{k}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)G_c(s) = k_v G_c(0) = k_v k_c \Rightarrow k_c = \frac{\bar{k}_v}{k_v} = \frac{e_{ss}}{e_{ss}} \Big|_{UR} = 10$$

- شرط اندازه:

$$\left| G(\bar{s}_1) G_c(\bar{s}_1) \right| = 1 \Rightarrow \left| k_c \text{Lead}(\bar{s}_1) \text{Lag}(\bar{s}_1) G(\bar{s}_1) \right| = 1$$

$$\xrightarrow{|\text{Lag}(\bar{s}_1)|=1} k_c \cdot |\text{lead}(\bar{s}_1)| \cdot |G(\bar{s}_1)| = 1$$

$$\text{if } k_c |G(\bar{s}_1)| = m \Rightarrow |\text{Lead}(\bar{s}_1)| = \frac{1}{k_c |G(\bar{s}_1)|} = \frac{1}{m}$$

\* ادامه:

- رابطه دقیق بدست آوردن محل صفر و قطب Lead در ساختار Lead-Lag:

$$\overline{s_{1,2}} = -\sigma \pm \omega j$$

$$-z = \frac{-1}{T_1} = -\sigma - \omega \left( \frac{\cos \phi - \frac{1}{m}}{\sin \phi} \right), \quad -p = \frac{-\beta}{T_1} = -\sigma - \omega \left( \frac{m - \cos \phi}{\sin \phi} \right)$$

$$\beta = \frac{-p}{-z}$$

- محاسبه  $\beta$ :

- از  $\beta$  برای طراحی Lag استفاده خواهد شد.

\* ادامه:

- محاسبه مقدار m:

$$\overline{s_{1,2}} = -\sigma \pm \omega j = -2.5 \pm 4.33j, \quad k_c = 10$$

$$\left| G(\overline{s_1}) \right| = \frac{4}{\sqrt{4.33^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4.33^2 + 2.5^2}} = 0.167$$

$$\Rightarrow m = k_c \left| G(\overline{s_1}) \right| = 1.67$$

- محاسبه صفر و قطب Lead و مقدار عددی  $\beta$ :

$$\begin{cases} -z = \frac{-1}{T_1} = -\sigma - \omega \left( \frac{\cos \phi - \frac{1}{m}}{\sin \phi} \right) = -2.37 \\ -p = \frac{-\beta}{T_1} = -\sigma - \omega \left( \frac{m - \cos \phi}{\sin \phi} \right) = -8.29 \end{cases} \Rightarrow \beta = 3.5$$

\* ادامه: طراحی Lag  
- شرایط حاکم بر طراحی Lag:

$$\left| \frac{\bar{s}_1 + \frac{1}{T_2}}{\bar{s}_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \approx 1, \quad -5^\circ < \frac{\bar{s}_1 + \frac{1}{T_2}}{\bar{s}_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0$$

- فرض:  $T_2 = 10$

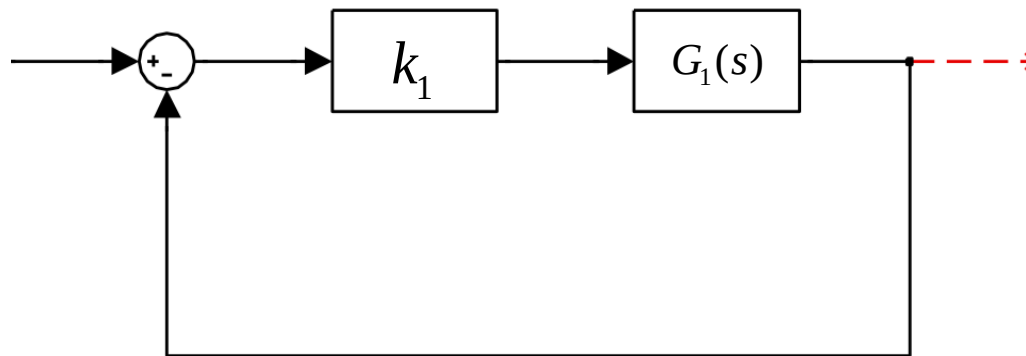
$$\angle \text{Lag}(\bar{s}_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-\sigma + \frac{1}{T_2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-\sigma + \frac{1}{\beta T_2}}\right) = -0.72^\circ > -5^\circ$$

$$|\text{Lag}(\bar{s}_1)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + (\sigma - \frac{1}{T_2})^2}}{\sqrt{\omega^2 + (\sigma - \frac{1}{\beta T_2})^2}} = 0.99 \approx 1$$

$$G_c(s) = 10 \frac{s + 2.37}{s + 8.29} \cdot \frac{s + 0.1}{s + 0.029}$$

\* مثال: برای حذف خطای سیستم زیر از جبران‌ساز به شکل PI استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم شرایط زیر بر عملکرد سیستم حاصل حاکم باشد:

$$MOS \leq 10\% , t_s \leq 5\text{sec} , e_{ss}|_{UR} = 0$$

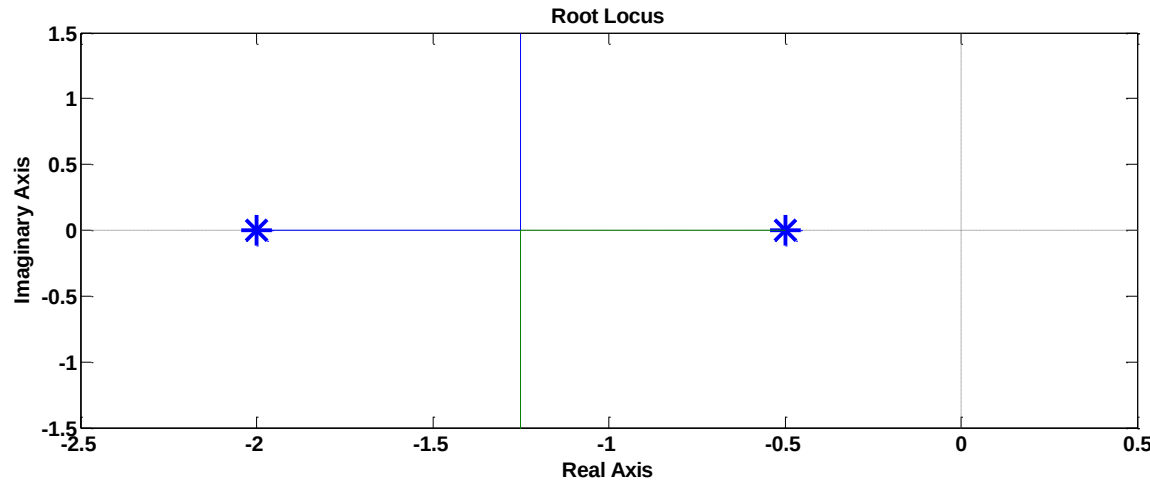


$$PI \text{ Controller: } G_c(s) = k_2 + \frac{k_3}{s}$$

[Previous Example](#)

\* ادامه:

- مکان هندسی سیستم فعلی:



- محاسبه ریشه های مطلوب از شروط داده شده:

$$\xi = \frac{-\left(\frac{\ln M_p}{\pi}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln M_p}{\pi}\right)^2}}, \quad M_p = 0.1 \Rightarrow \xi \approx 0.6$$

$$\xi = 0.6, \quad \omega_n = 1.33 \Rightarrow s_{1,2} = -0.78 \pm j1.04$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi \omega_n} = 5, \quad \xi \approx 0.6 \Rightarrow \omega_n = 1.33 \text{ (r/s)}$$

\* ادامه:

- شرط فاز:

$$\angle G_c(s_1)G(s_1) = \pm 180(2l+1)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1.04}{-0.78 + \frac{k_3}{k_2}}\right) - (180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{1.04}{0.78}\right)) + 0 - (180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{1.04}{-0.78 + 0.5}\right)) - \tan^{-1}\left(\frac{1.04}{-0.78 + 2}\right) = \pm 180^\circ(2l+1)$$

$$\Rightarrow \theta_z = -180^\circ + 126.87^\circ + 105.07^\circ + 40.45^\circ = 92.39^\circ \Rightarrow \tan(\theta_z) = \frac{1.04}{-0.78 + \frac{k_3}{k_2}} = -23.95 \Rightarrow \frac{k_3}{k_2} = 0.74$$

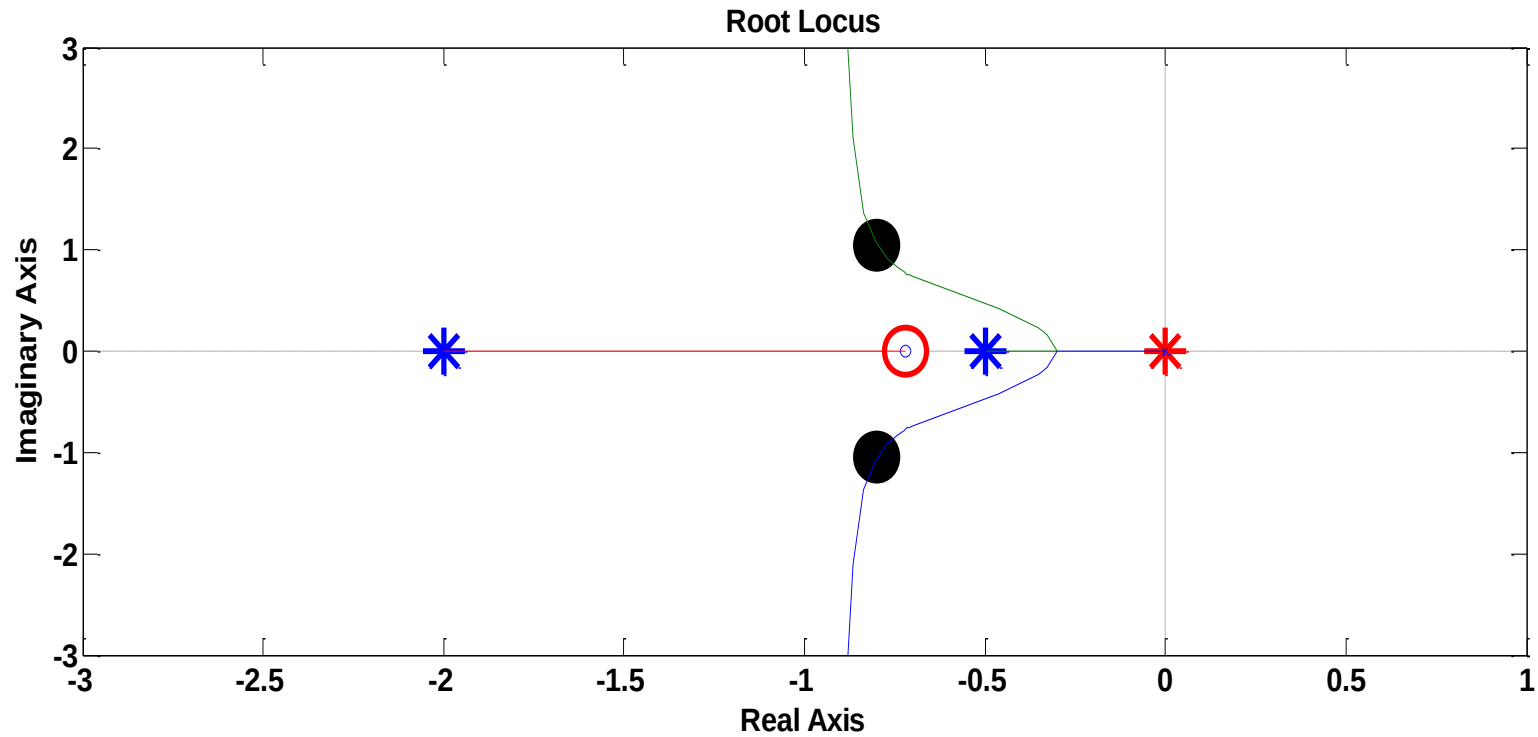
- شرط اندازه:

$$OLTF = G_c(s)G(s) = k_2 \frac{s + \frac{k_3}{k_2}}{s} \frac{k_1}{(s + 0.5)(s + 2)} = \frac{k_1 k_2 (s + 0.74)}{s(s + 0.5)(s + 2)}$$

$$k_1 k_2 \frac{\sqrt{1.04^2 + 0.04^2}}{\sqrt{1.04^2 + 0.78^2} \sqrt{1.04^2 + 0.28^2} \sqrt{1.04^2 + 1.22^2}} = 1 \Rightarrow k_1 k_2 = 2.16$$

\* ادامه:

$$OLTF = \frac{2.16(s + 0.72)}{s(s + 0.5)(s + 2)}$$





Thanks for your attention!

**Contents**



Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:

**Professor Aria Alasty**

# Automatic Control

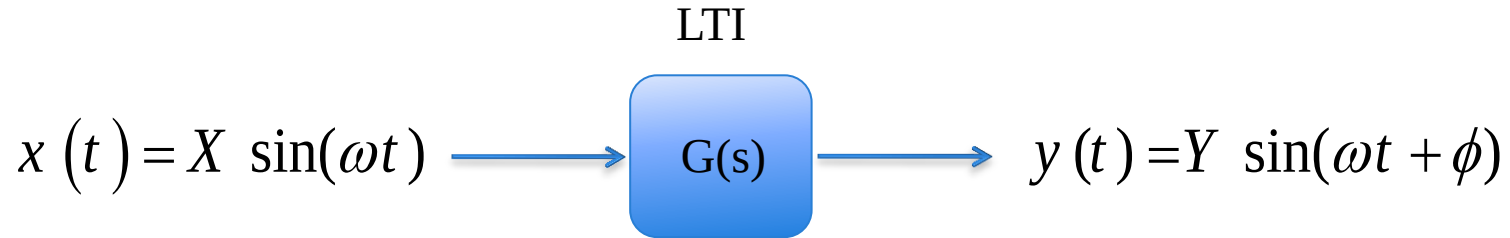
Chapter 8:

## Control Systems Analysis by Frequency Response Method

1391-92 Fall Semester

- [Chapter 1](#): Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- [Chapter 2](#): Mathematical Modeling of Control Systems
- [Chapter 3](#): Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- [Chapter 4](#): Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- [Chapter 5](#): Transient and Steady-State Response Analysis
- [Chapter 6](#): Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- [Chapter 7](#): Control Systems Design by Root-Locus Method

- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
  - Part 1: Bode Diagram
    - Non-minimum Phase Systems
    - Experimental Determination of Transfer Function
    - System Types versus Log-Magnitude Curve
  - Part 2: Polar Plot
    - General Shape of Polar Plots
  - Part 3: Stability Analysis
    - Nyquist Stability Criterion
    - Relative Stability
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} \quad \text{and} \quad X(s) = \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\omega X p(s)}{(s^2 + \omega^2)(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n}$$

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + \dots + b_ne^{-s_nt}$$

\* ادامه:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + \dots + b_ne^{-s_nt}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{-XG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{-XG(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{XG(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}$$

\* ادامه:

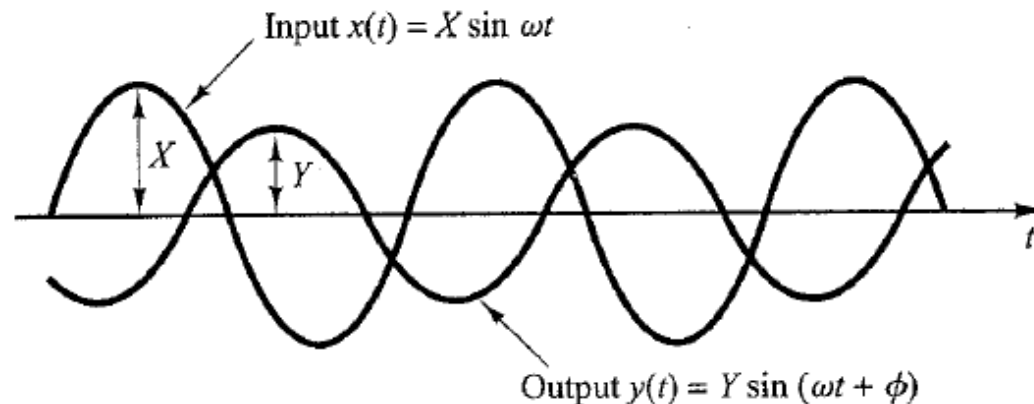
- تابع تبدیل:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = M e^{j\phi}$$

$$\angle G(j\omega) = \phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}G(j\omega)}{\text{Re}G(j\omega)}, \quad |G(j\omega)| = M = \frac{Y}{X}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = XM \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = XM \sin(\omega t + \phi) = Y \sin(\omega t + \phi)$$

- بنابراین پاسخ سیستم به ورودی سینوسی با معلوم بودن تابع تبدیل به طور کامل مشخص می شود.



# Part 1:

## Bode Diagram

- Non-minimum Phase Systems
- Experimental Determination of Transfer Function
- System Types versus Log-Magnitude Curve

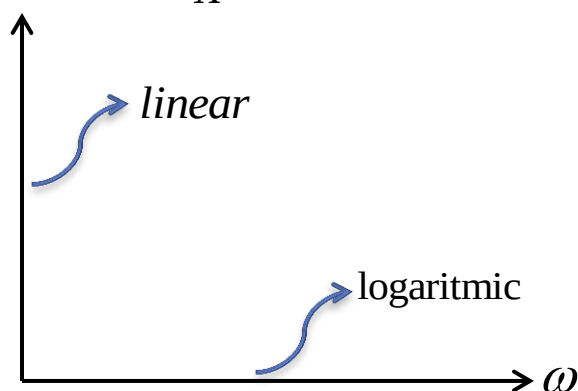
Contents



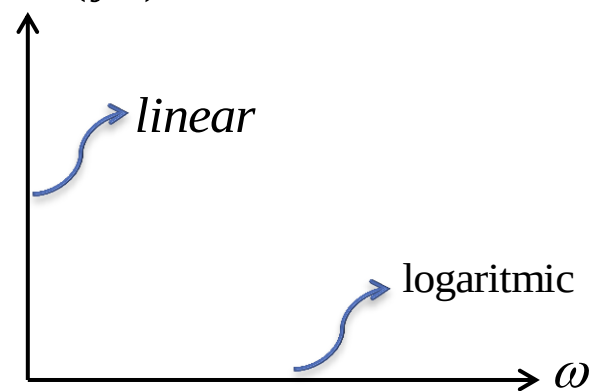
\* دیاگرام بود:

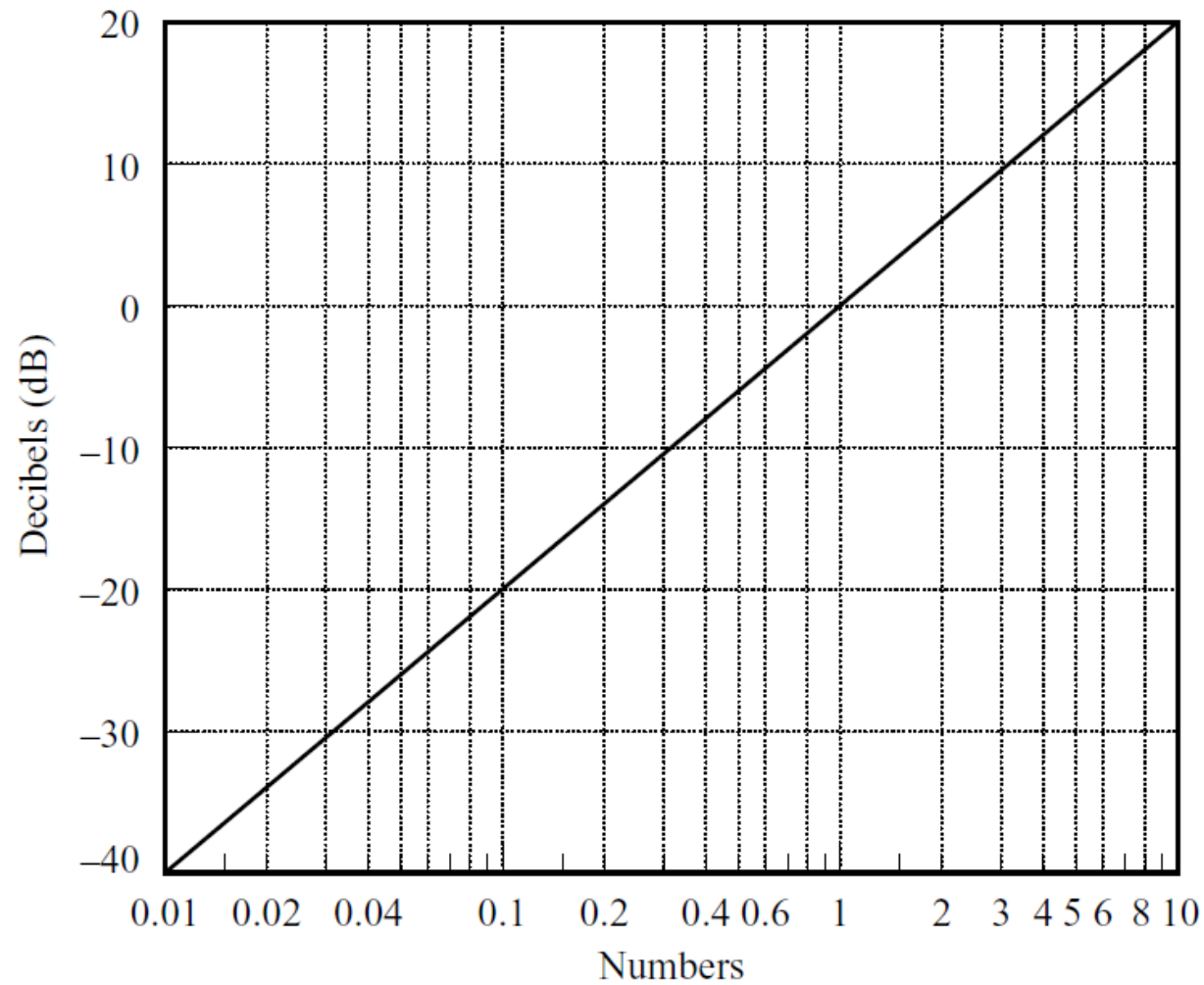
- متشکل از دو نمودار اندازه و زاویه فاز تابع تبدیل بر حسب فرکانس ورودی می باشد.
- اندازه تابع تبدیل بر حسب واحد دسی بل رسم می گردد.
- محور مربوط به اندازه و زاویه خطی و محور فرکانس لگاریتمی هستند.

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left(\frac{Y}{X}\right) \text{ (dB)}$$



$$\phi = \angle G(j\omega)$$





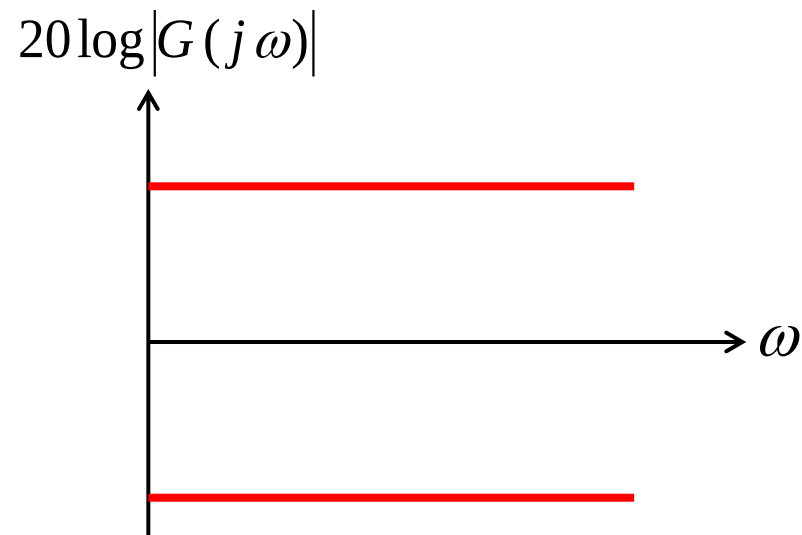
$$K > 1 \rightarrow 20 \log K > 0$$

$$K < 1 \rightarrow 20 \log K < 0$$

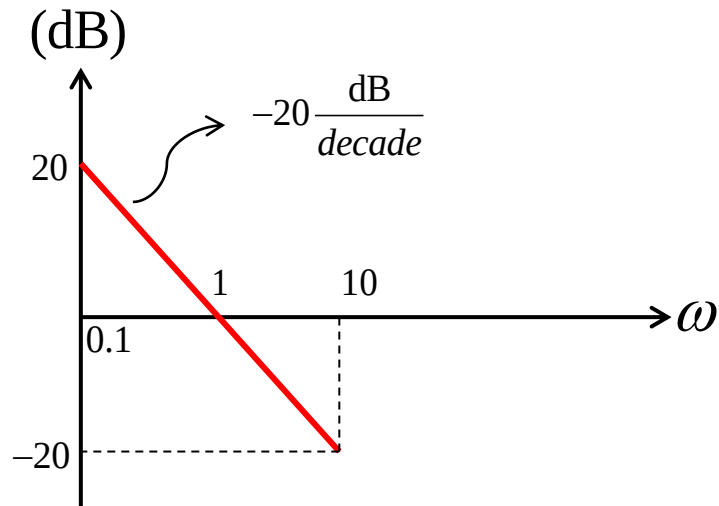


$$20 \log(K \times 10^n) = 20 \log(K) + 20n$$

$$20 \log \frac{1}{K} = -20 \log K$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)} \Rightarrow 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \frac{1}{\omega} = -20 \log \omega$$



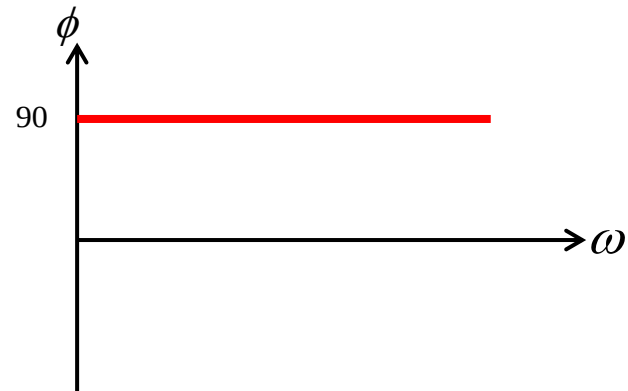
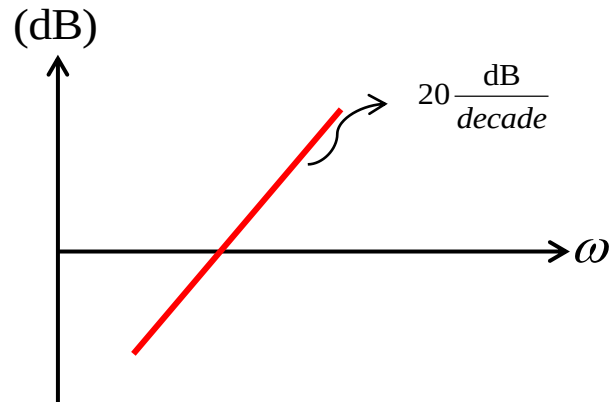
decade:  $\omega \rightarrow 10\omega \Rightarrow -20 \log \omega - 20$

octave:  $\omega \rightarrow 2\omega \Rightarrow -20 \log \omega - 6$

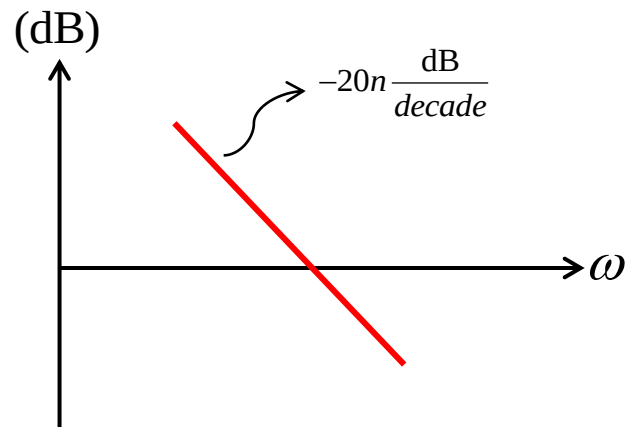


$$\angle \frac{1}{j\omega} = 0 - \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = -90^\circ$$

$$G(j\omega) = (j\omega)$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n}$$



$$G(s) = s + k = k \left( \frac{1}{k} s + 1 \right) = k (Ts + 1) \rightarrow \text{Consider: } G(s) = Ts + 1$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T \quad \text{and} \quad |G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$20 \log M = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} = \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \rightarrow \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20 \log \omega T & \omega T \gg 1 \rightarrow \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

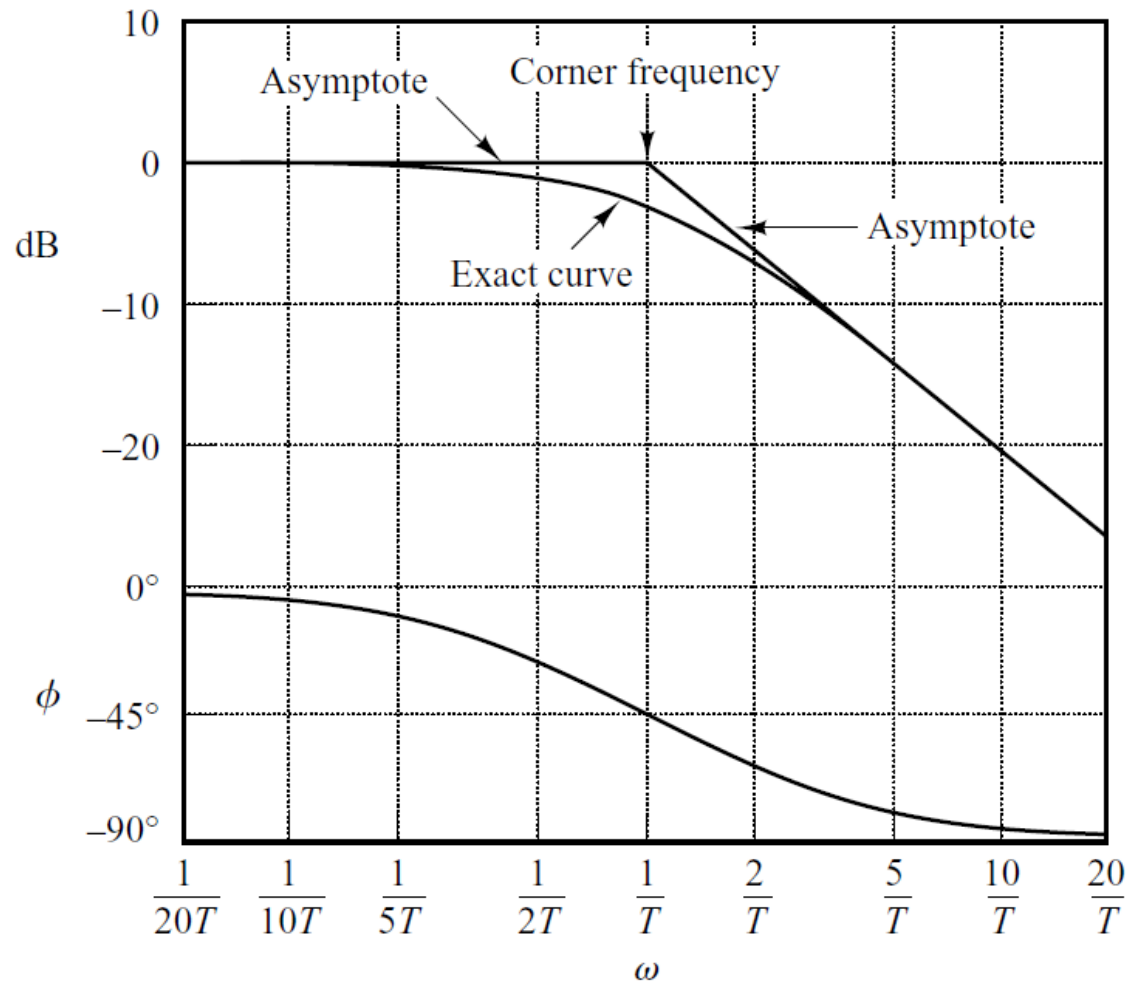
- برای فرکانس های بسیار پایین و بالا می توان نمودار را با دو خط مجانب تقریب زد.

- محل تلاقی دو مجانب روی محور افقی:

$$\text{Corner frequency: } \omega = \frac{1}{T} \rightarrow 20 \log M = -20 \log \sqrt{1+1} = -3(\text{dB})$$

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = 0 - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

$$= \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -45 & \omega = \frac{1}{T} \\ -90 & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = 0 - \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$20 \log M = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n : \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ -20 \log(2\zeta) & \omega = \omega_n : \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega \gg \omega_n : \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \end{cases}$$

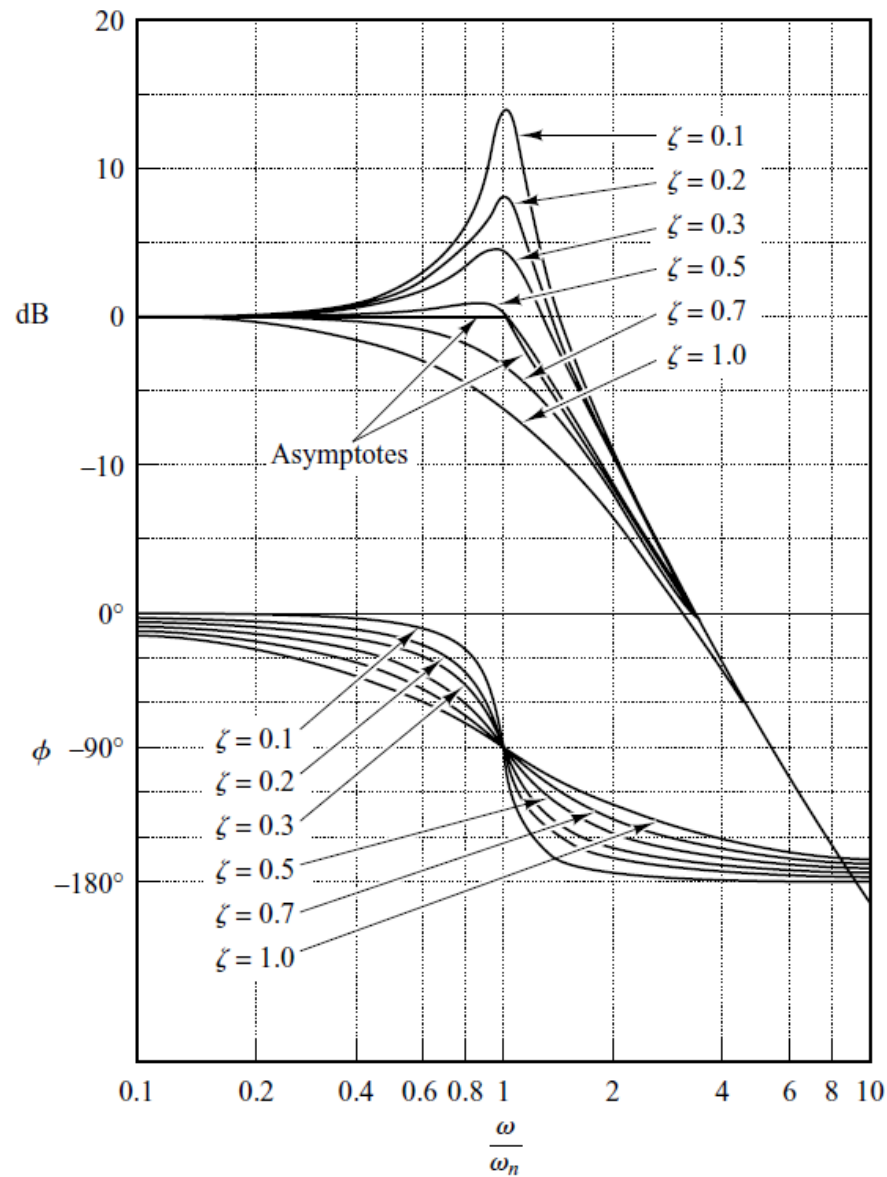


$$\phi = \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ -90 & \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ -180 & \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \end{cases}$$

\* تشدید:

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} ; 0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} , \quad \phi_r = -90 + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



\* مثال: دیاگرام بود تابع تبدیل مقابل را رسم نمایید:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

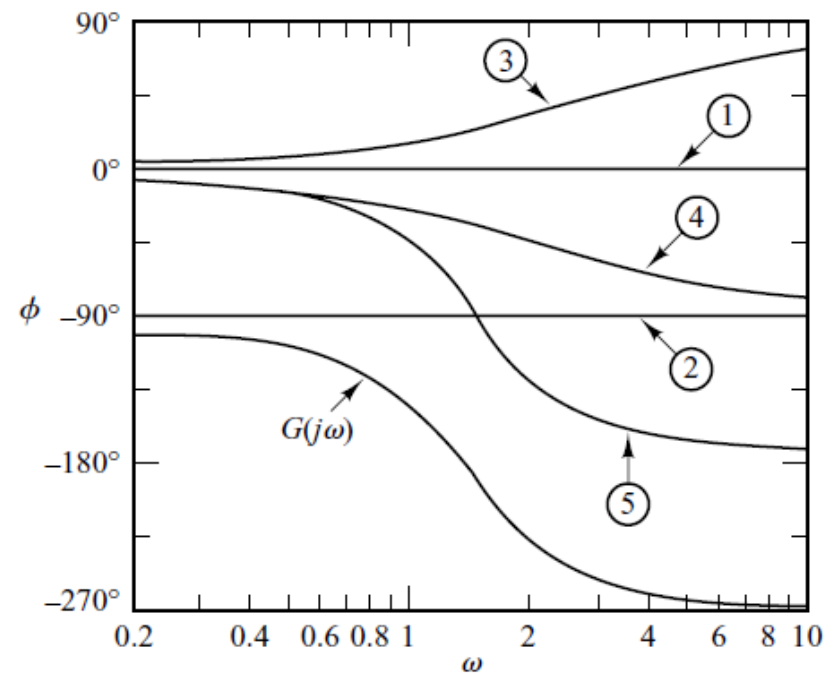
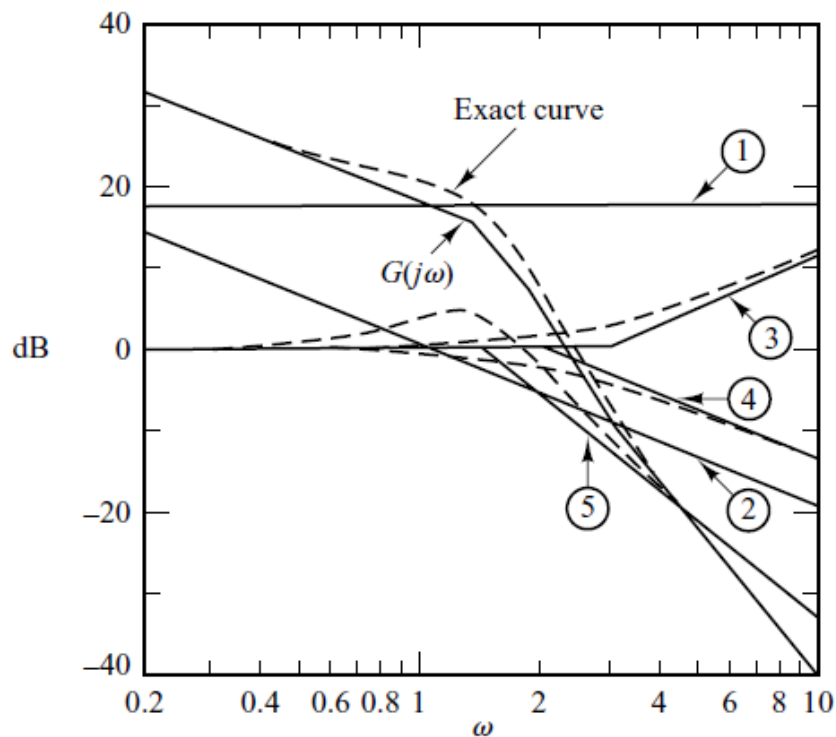
- حل:

$$G(j\omega) = \frac{10 \times 3 \left( \frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{2 \times 2 j\omega \left( \frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left( 1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right)} = \frac{7.5 \left( 1 + \frac{j\omega}{3} \right)}{j\omega (1 + 0.5j\omega) \left( 1 + \frac{j\omega}{2} - \frac{(j\omega)^2}{2} \right)}$$

Next Example

\* ادامه:

$$G(j\omega) = \frac{7.5(1 + \frac{j\omega}{3})}{j\omega(1 + 0.5j\omega)(1 + \frac{j\omega}{2} - \frac{(j\omega)^2}{2})}$$



- سیستم های مینیمم فاز:

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$$

$$|G_1(j\omega)| = M_1 = \frac{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}, \quad \angle G_1(j\omega) = \tan^{-1} \omega T_1 - \tan^{-1} \omega T_2 = \phi_1(\omega)$$

- سیستم های غیر مینیمم فاز:

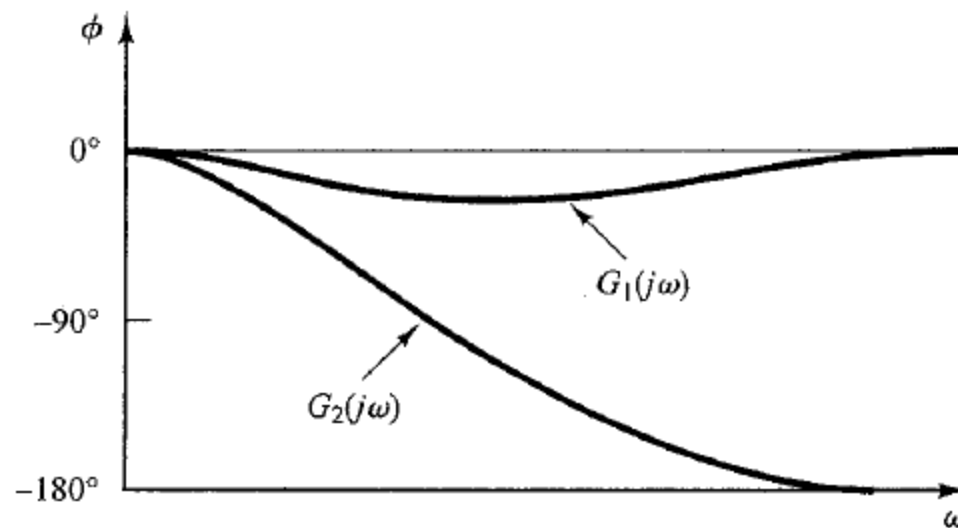
$$G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$$

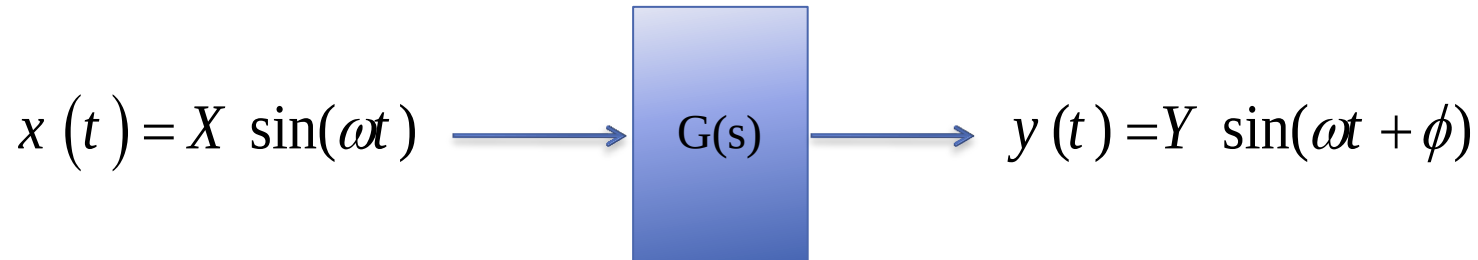
$$|G_2(j\omega)| = M_2 = \frac{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}, \quad \angle G_2(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega T_1) - \tan^{-1} \omega T_2 = \phi_2(\omega)$$

- سیستم های مینیمم فاز و غیر مینیمم فاز، اندازه یکسان ولی زاویه فاز متفاوت دارند.

$$\begin{matrix} MP \\ \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow -90(n-m) \\ m \rightarrow -20(n-m) \text{ (dB/dec.)} \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix} NMP \\ \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \phi \nrightarrow -90(n-m) \\ m \rightarrow -20(n-m) \text{ (dB/dec.)} \end{array} \right.$$





- استفاده از روش های تحلیلی برای تعیین تابع تبدیل سیستم های پیچیده بسیار دشوار است.

- با اندازه گیری پاسخ فرکانسی سیستم به ورودی سینوسی می توان تابع تبدیل سیستم های پیچیده را تعیین نمود.

- با اندازه گیری اندازه و زاویه فاز پاسخ به ازای فرکانس های مختلف و رسم دیاگرام بود و با استفاده از تقریب مجانب ها، طی یک فرایند سعی و خطا می توان فرکانس های گوشه و تابع تبدیل را با دقت خوبی تعیین نمود.

- زاویه مجانب ها باید مضرب  $\pm 20dB/decade$  باشند.

- چنانچه زاویه در فرکانس  $\omega = \omega_1$  به اندازه  $\pm 20dB/decade$  کاهش یابد، یک فاکتور رسته اول به فرم مقابل باید در تابع تبدیل موجود باشد:

$$[1 + j(\omega/\omega_1)] \text{ or } 1/[1 + j(\omega/\omega_1)]$$

- چنانچه زاویه در فرکانس  $\omega = \omega_1$  به اندازه  $\pm 40dB/decade$  کاهش یابد، یک فاکتور رسته دوم به فرم مقابل باید در تابع تبدیل موجود باشد:

$$[1 + 2\xi(j\omega/\omega_1) + (j\omega/\omega_1)^2] \text{ or } 1/[1 + 2\xi(j\omega/\omega_1) + (j\omega/\omega_1)^2]$$

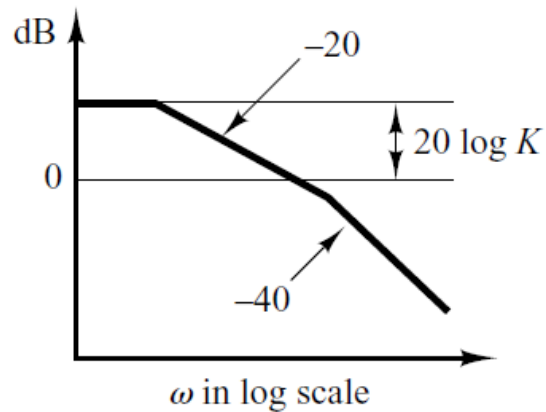
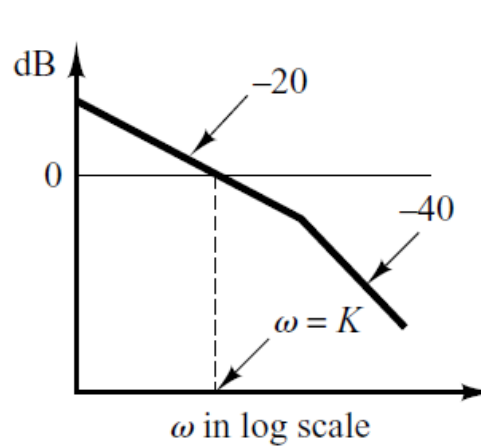
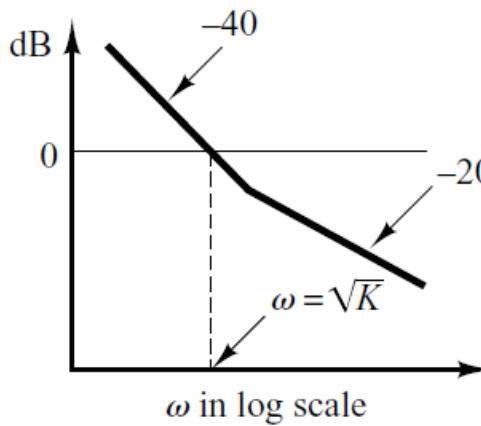
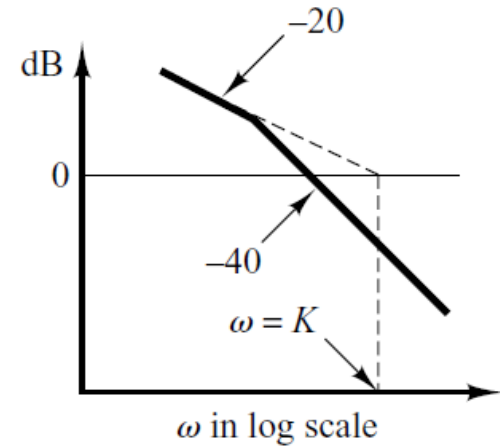
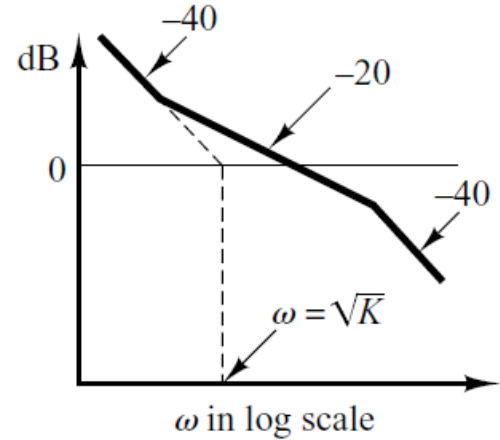
- ضریب دمپینگ از مقایسه میزان تشدید با نمودار مرجع به صورت تقریبی تعیین می شود.

- برای تعیین ضریب ثابت تابع تبدیل از پاسخ ناحیه فرکانس پایین استفاده می شود:

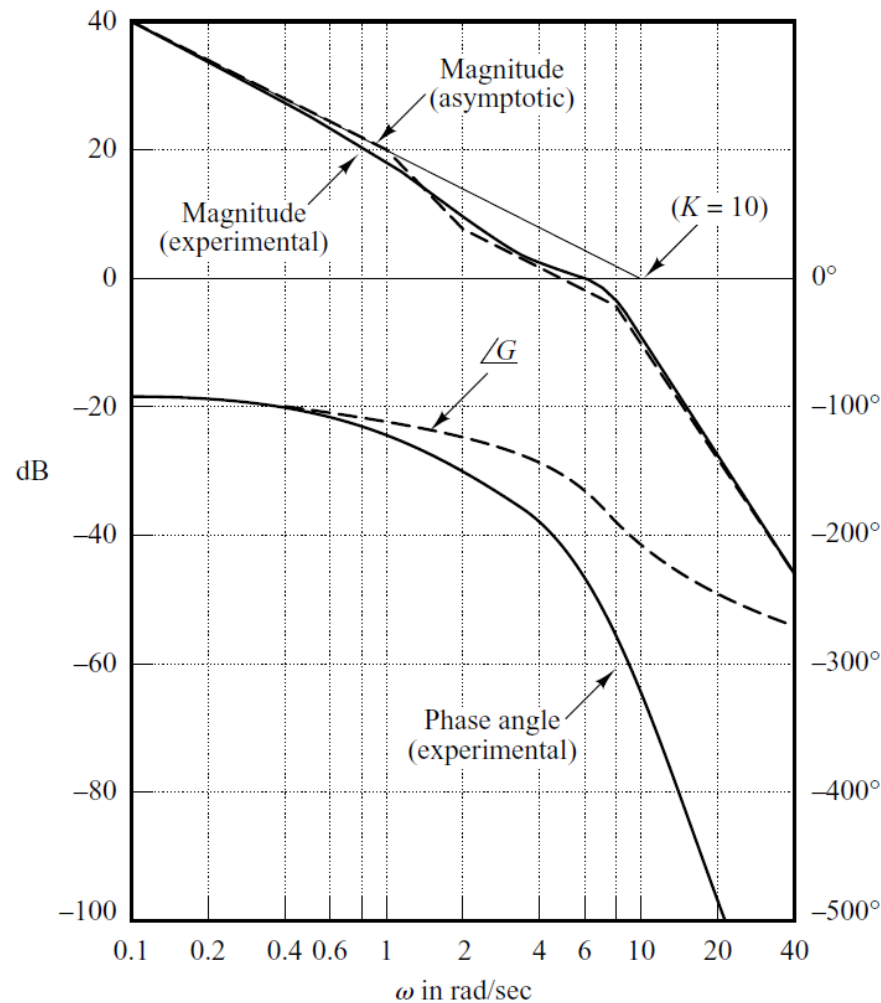
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\lambda} ; \lambda: \text{System Type}$$

- به منظور بررسی صحت تابع تبدیل تعیین شده، از نمودار فاز استفاده می شود. در زاویه فرکانس های بالا (در مقایسه با فرکانس های گوشه)، زاویه فاز سیستم مینیمم فاز،  $-90(q-p)$  خواهد بود.



Type 0 Systems ( $\lambda=0$ )Type 1 Systems ( $\lambda=1$ )Type 2 Systems ( $\lambda=2$ )

\* مثال: تابع تبدیل سیستمی را که پاسخ فرکانسی آن به شکل زیر است، بدست می آوریم:


[Next Example](#)
[Previous Example](#)

\* حل:

- ابتدا منحنی بدست آمده را با منحنی های با شیب  $\pm 20dB/dec$  یا مضارب آن تقریب می زنیم. تابع تبدیل مورد نظر به فرم زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)[1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2]}$$

- مقدار ضریب دمپینگ، با توجه به تشدید موجود در فرکانس  $6r/s$  با مراجعه به نمودار مربوطه برابر  $0.5$  تخمین زده می شود.

- با توجه به توضیحات [اسلاید قبل](#)، مقدار  $K$  برابر  $10$  بدست می آید. بنابراین تابع تبدیل سیستم به صورت مقابل خواهد بود:

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)[1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2]}$$

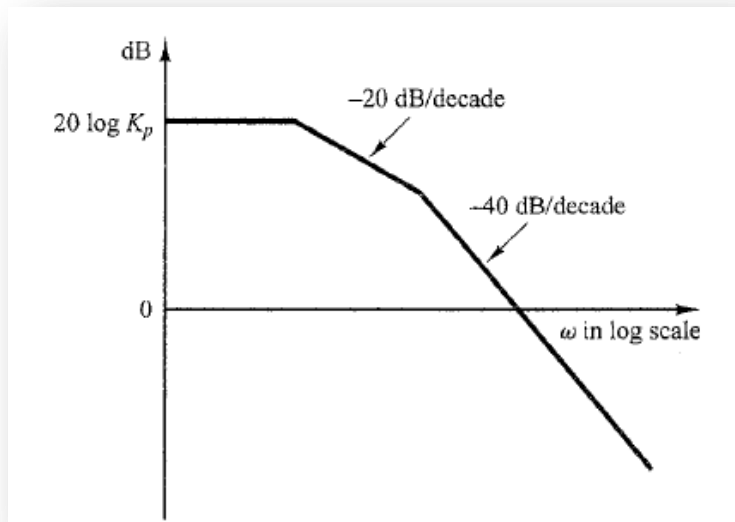
$$G(s) = \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

- حال به منظور تایید نهایی، نمودار فاز تابع تبدیل را با مقدار بدست آمده از [آزمایش](#) مقایسه می کنیم. با توجه به اینکه این دو مقدار با یکدیگر اختلاف فاز دارند، سیستم مورد مطالعه یک سیستم غیر مینیمم فاز است.

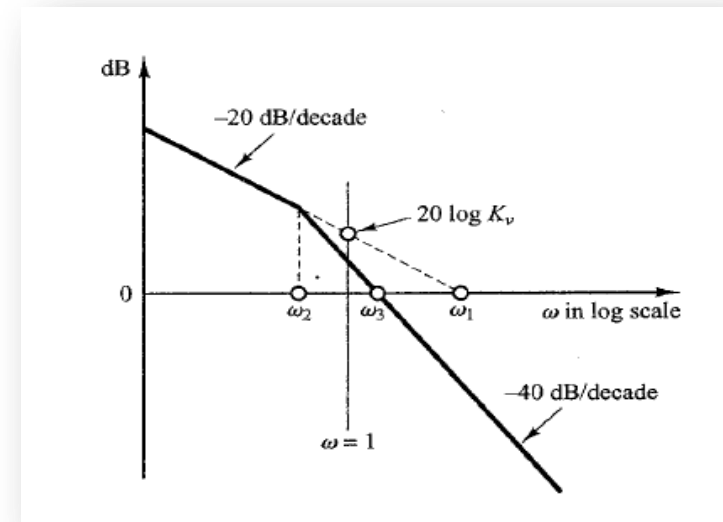
$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \dots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \dots (T_p j\omega + 1)}$$

Type 0 System:  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

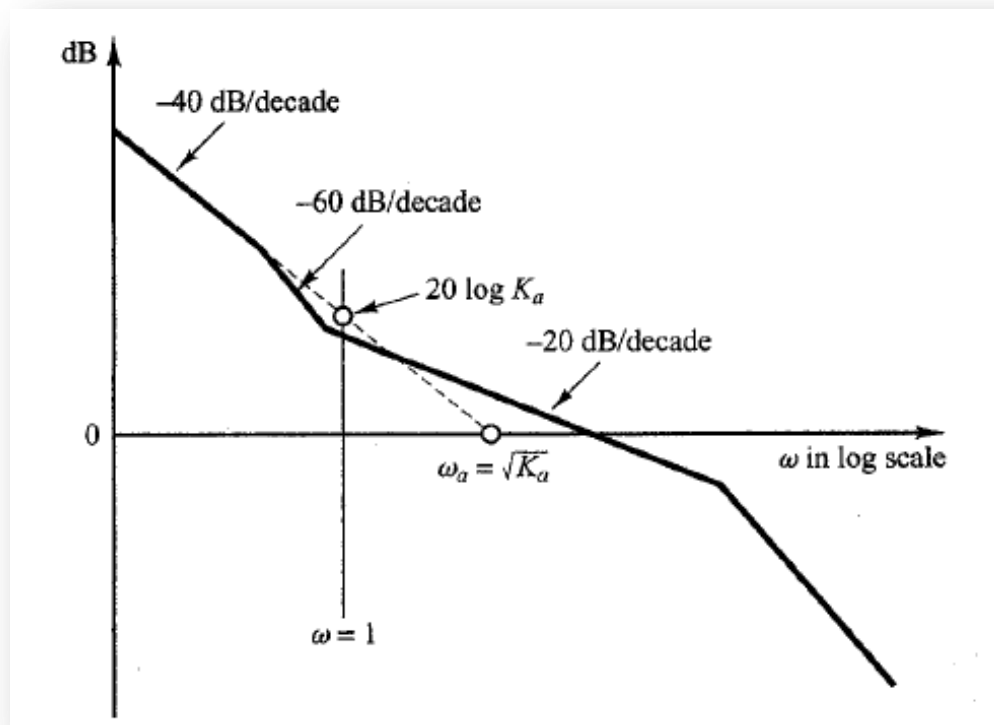


Type 1 System:  $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$



$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \dots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \dots (T_p j\omega + 1)}$$

Type 2 System:  $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$



# Part 2:

## Polar Plot

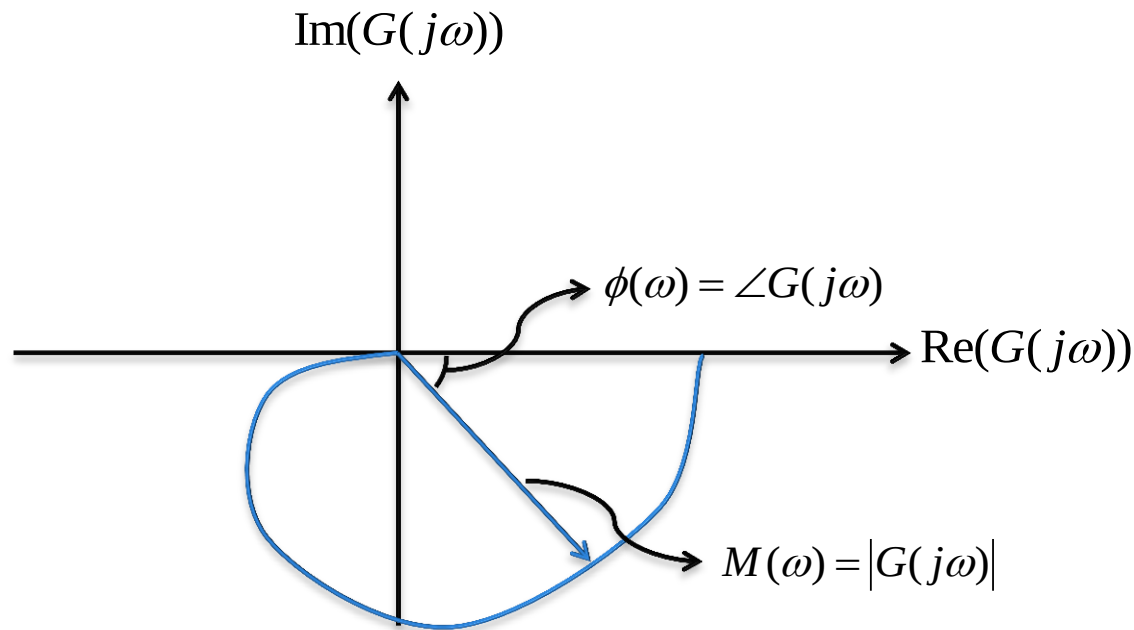
- General Shape of Polar Plots

Contents

\* دیاگرام نایکویست:

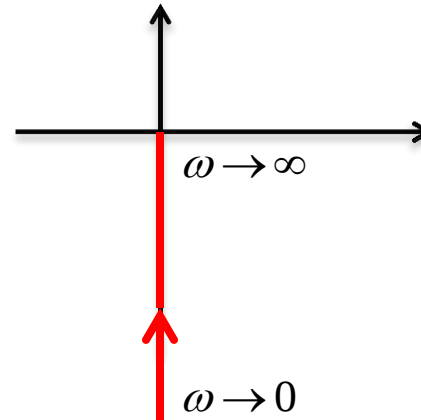
- منحنی تابع مختلط  $G(j\omega)$  در صفحه مختلط است، زمانی که فرکانس از صفر تا بینهایت افزایش یابد.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

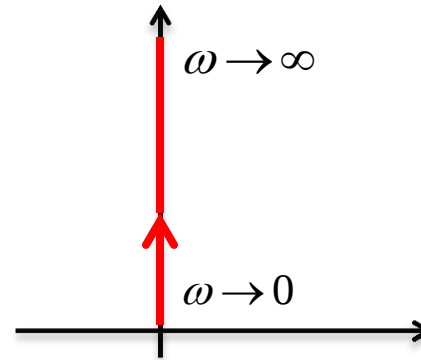
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = 0 - j\frac{1}{\omega}$$



- عامل انتگرالگیر:

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$G(j\omega) = j\omega = 0 + j\omega$$



- عامل مشتق گیر:

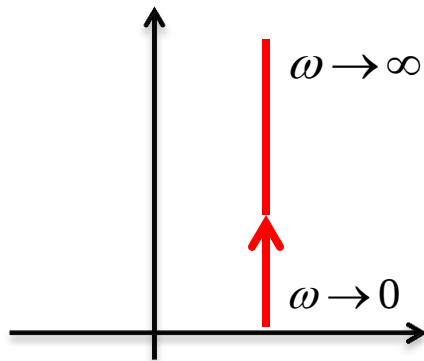
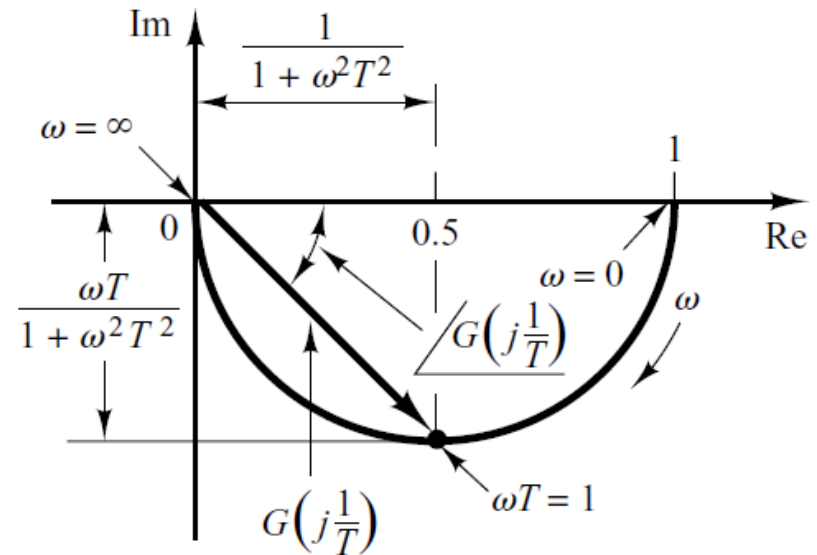


$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

$$\omega = 0 \rightarrow M_0 = 1, \phi_0 = 0$$

$$\omega = \infty \rightarrow M_\infty = 0, \phi_\infty = -90$$



$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ for } \zeta > 0$$

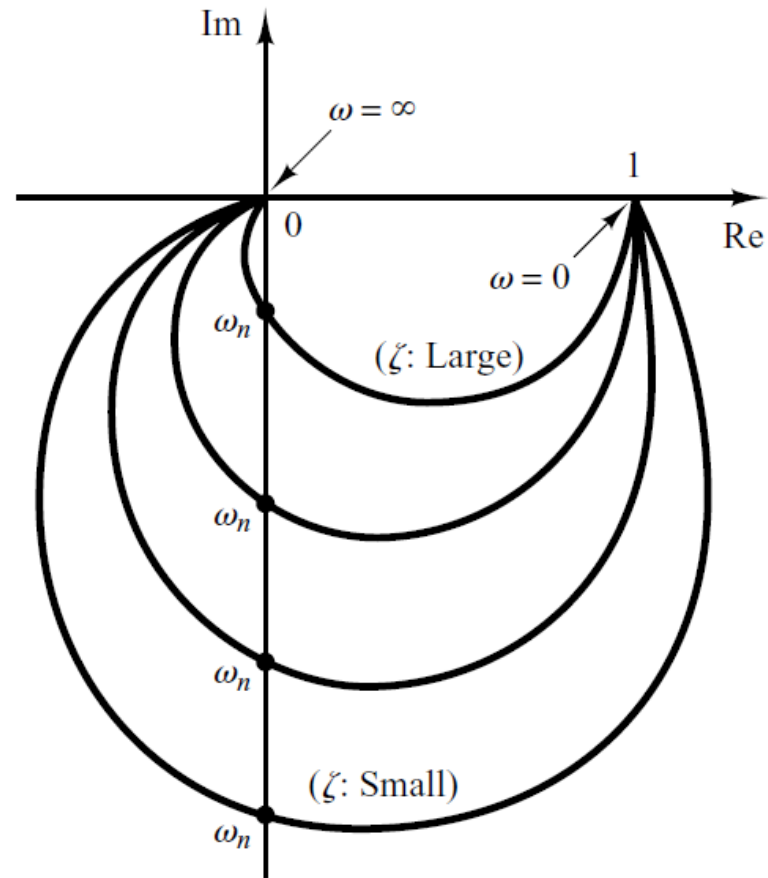
$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$M(0) = 1, \phi(0) = 0^\circ$$

$$M(\infty) = 0, \phi(\infty) = -180^\circ$$

$$M(\omega_n) = \frac{1}{2\zeta}, \phi(\omega_n) = -90^\circ$$

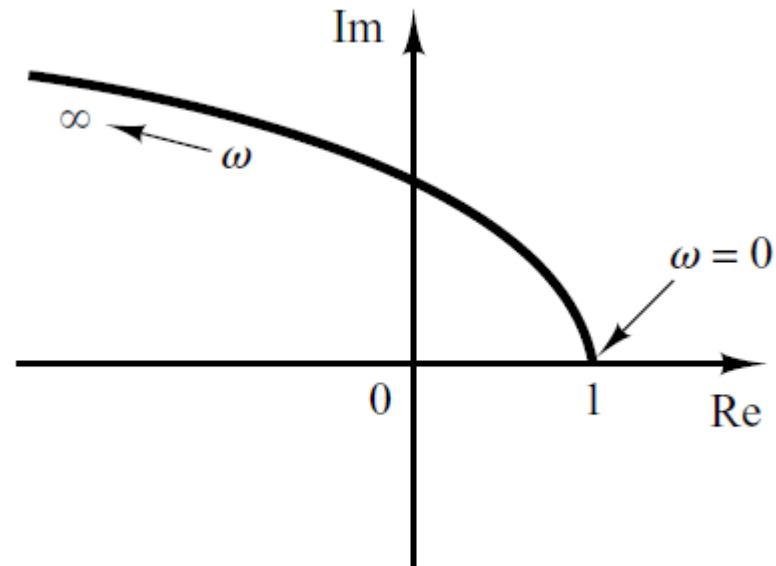


$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$G(0) = 1 \angle 0$$

$$G(\infty) = \infty \angle +180$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} > 0$$



\* مثال: دیاگرام نایکوئیست سیستم با تابع تبدیل مقابل را رسم نمایید:

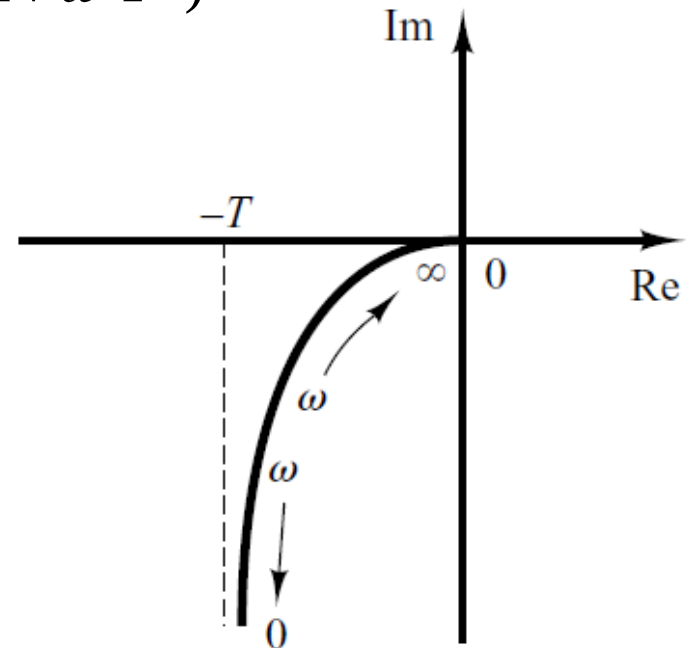
$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

- حل:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(0) = -T - j\infty = \infty \angle -90^\circ$$

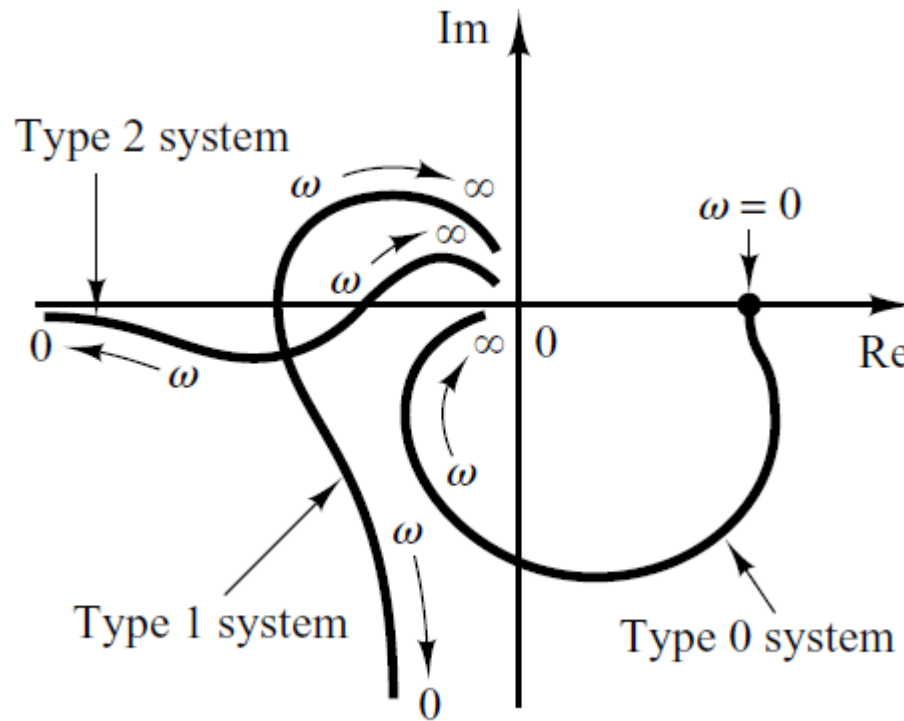
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(\infty) = 0 - j0 = 0 \angle -180^\circ$$



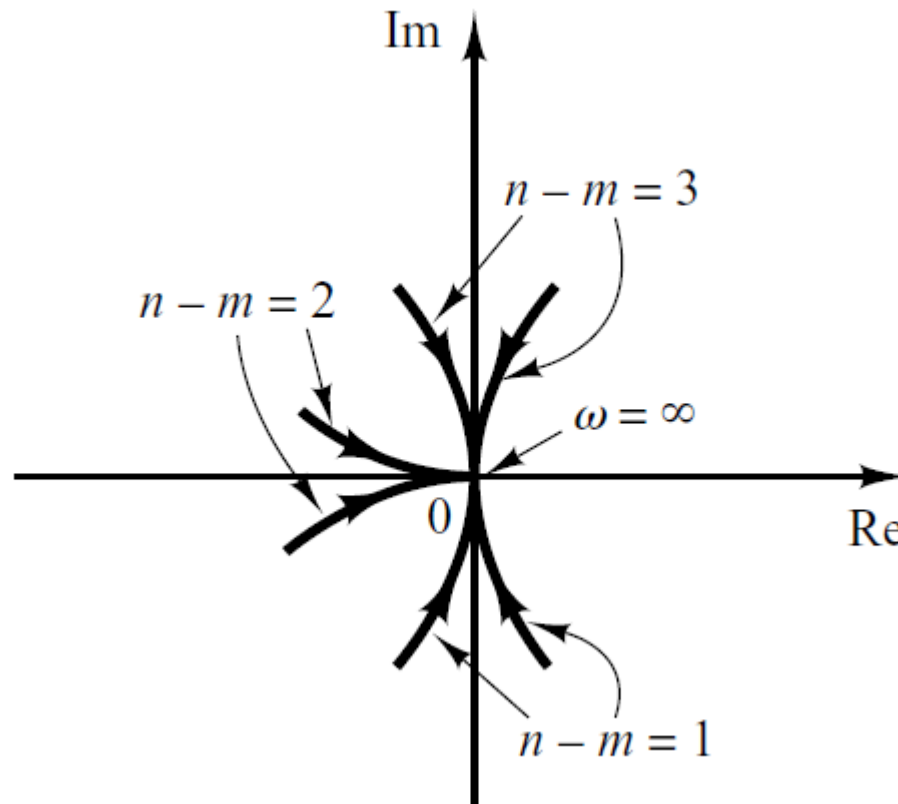
Previous Example

Next Example

$$G(j\omega) = \frac{k(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\dots}{(j\omega)^\lambda(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\dots} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots}$$



High-Frequency Range:  $G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + \dots}{a_0(j\omega)^n + \dots}$

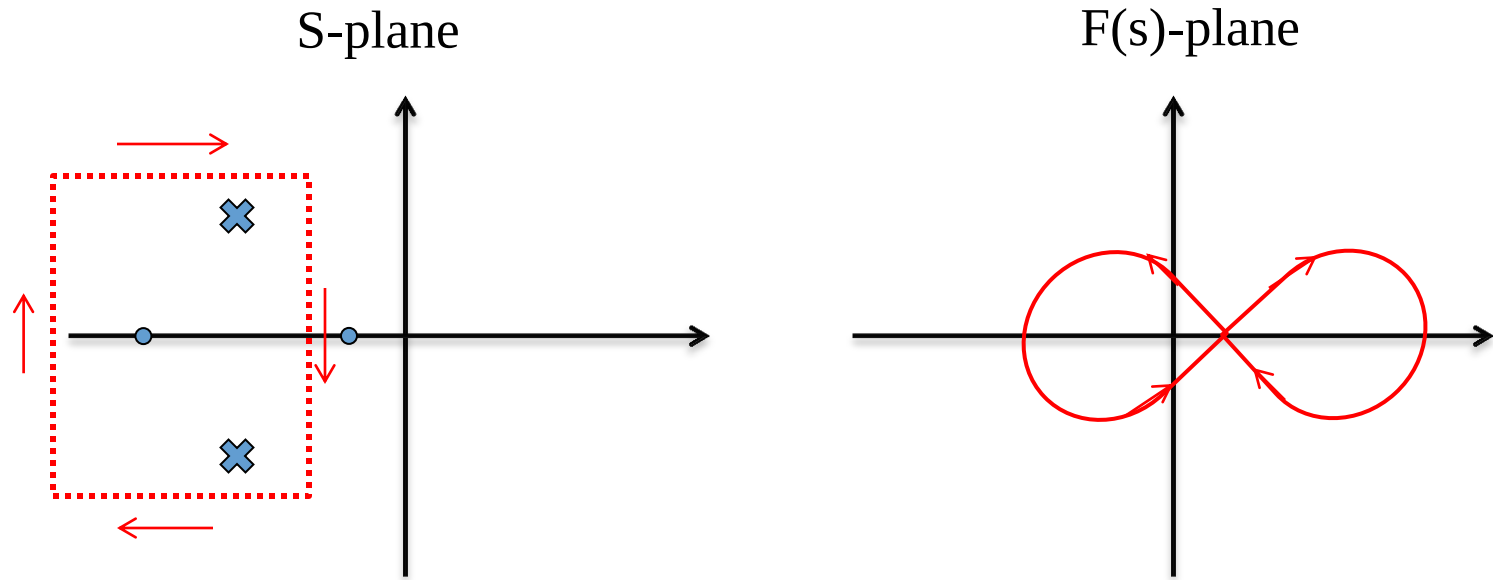


# Part 3:

## Stability Analysis

- Nyquist Stability Criterion
- Relative Stability

**Contents**



قطب و صفرهای  $F(s)$

- برای مسیر بسته دلخواه، نگاشت ساعتگرد مسیر بسته در صفحه  $S$  یک مسیر بسته در صفحه  $F(s)$  است که مبدا صفحه  $F(s)$  را به اندازه  $N=Z-P$  دفعه در جهت ساعتگرد دور می زند.

- چنانچه  $N$  منفی باشد، مسیر بسته صفحه  $F(s)$  را در جهت پادساعتگرد دور می زند.



$$OLTF : G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \Rightarrow CLTF : \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dots}{1+\frac{A(s)}{B(s)}} = \frac{\dots}{\frac{B(s)+A(s)}{B(s)}}$$

\* فرض کنید:  $F(s) = 1+G(s)H(s)$

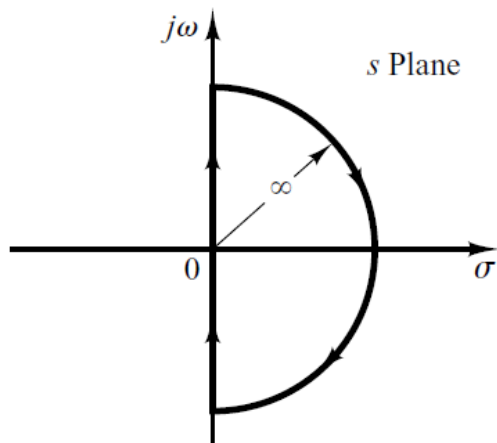
- صفرهای  $F(s)$ ، قطب های مدار بسته و قطبهای آن، قطب های مدار باز هستند.

- پایداری مدار بسته ایجاب می کند که قطب های مدار بسته در سمت راست محور موهومی نباشد.

- مسیر نایکوئیست، مسیری بسته است که کل محور موهومی ( $j\omega$ ) و نیمدایره ای به شعاع بی نهایت در سمت راست محور را شامل می شود.

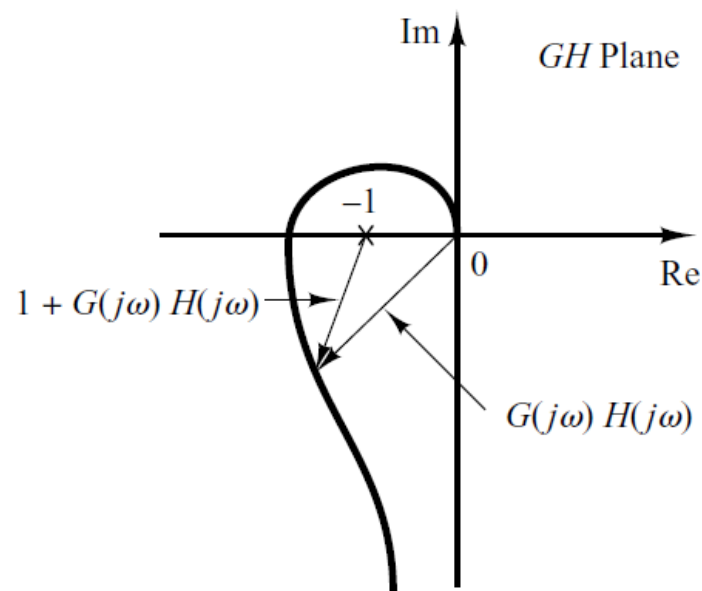
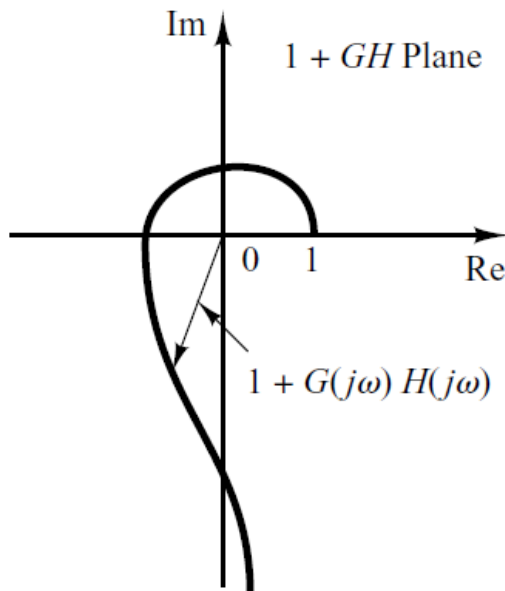
- شرط لازم برای مسیر نایکوئیست این است که از هیچ قطب و یا صفر  $F(s)$  عبور نکند. در صورت وجود چنین نقطه ای، از مسیر اصلاح شده استفاده می شود.

- با معلوم بودن تعداد قطب های  $F(s)$  و دیاگرام نایکوئیست آن، تعداد قطب های سمت راست مدار بسته و وضعیت پایداری سیستم مشخص می گردد.



- مسیر نایکوئیست:

- استفاده از دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز در بررسی پایداری با انتقال محورها:

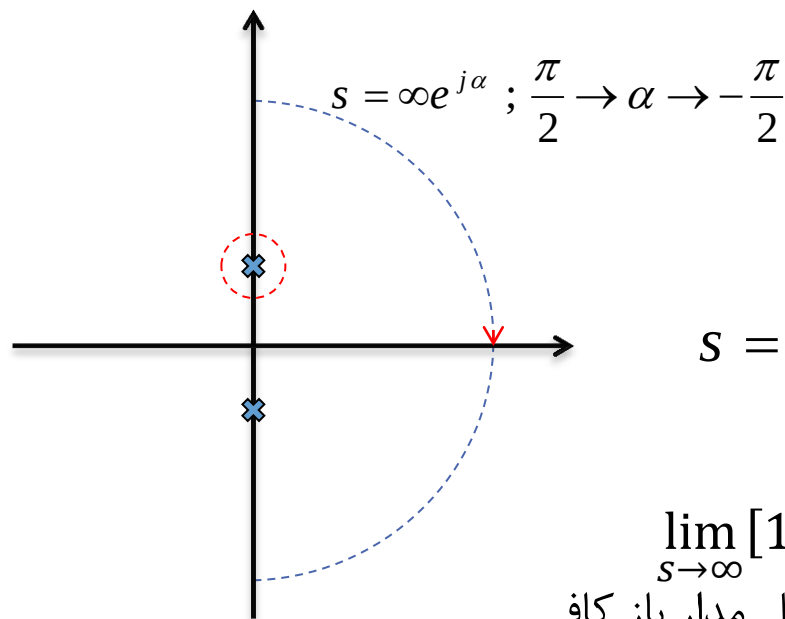


$P$  : تعداد قطب های ناپایدار مدار باز :  $G(s)H(s)$

$N$  : تعداد دور زدن نقطه  $-1+0j$  در جهت عقربه ساعت

$Z=N+P$  : تعداد قطب های ناپایدار مدار بسته

\* شرط پایداری :  $Z=0 \longrightarrow N=-P$



\* مسیر نایکوئیست اصلاح شده:  
(Modified Nyquist Path)

$$s = \epsilon e^{j\theta} ; -\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \epsilon \ll 1$$

- توجه شود که چون  $\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + GH] = \text{Constant}$  برای بررسی پایداری، دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز کافی است.

- نکته: برای سیستم MP اگر روی منحنی نایکوئیست مدار باز حرکت کنیم و نقطه  $-1+j0$  در سمت چپ ما باشد، سیستم مدار بسته نا پایدار است.

\* مثال: پایداری سیستم مدار بسته با تابع تبدیل مدار باز زیر را بررسی کنید:

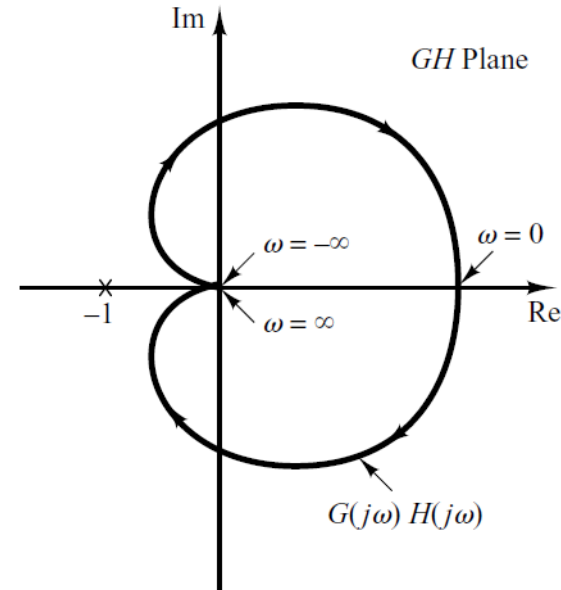
$$G(s)H(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$M = |GH(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}}$$

$$\phi = \angle GH(j\omega) = -\tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega$$

$$\omega \rightarrow 0 \begin{cases} M_0 = 1 \\ \phi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\omega \rightarrow \infty \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \phi_\infty = -90 - 90 = -180 \end{cases}$$



$Z=0$ : سیستم مدار بسته پایدار است.

Previous Example

$$G(s) = \frac{k}{Ts - 1}$$

\* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:

- حل:

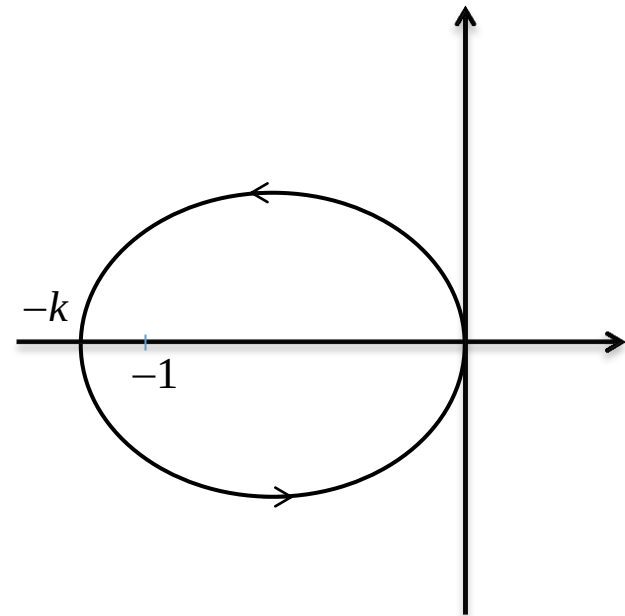
- یک قطب سمت راست محور داریم:  $P=1$

$$M = |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T\omega}{-1}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow M_o = k; \quad \phi_o = -180$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow M_\infty = 0; \quad \phi_\infty = -90$$



- چنانچه  $k < 1$  باشد،  $N=0$  و  $Z=1$ . در نتیجه سیستم مدار بسته ۱ قطب ناپایدار دارد.

- چنانچه  $k > 1$  باشد،  $N=-1$  و  $Z=0$ . در نتیجه سیستم مدار بسته ۱ پایدار خواهد بود.

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

\* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:

- حل:

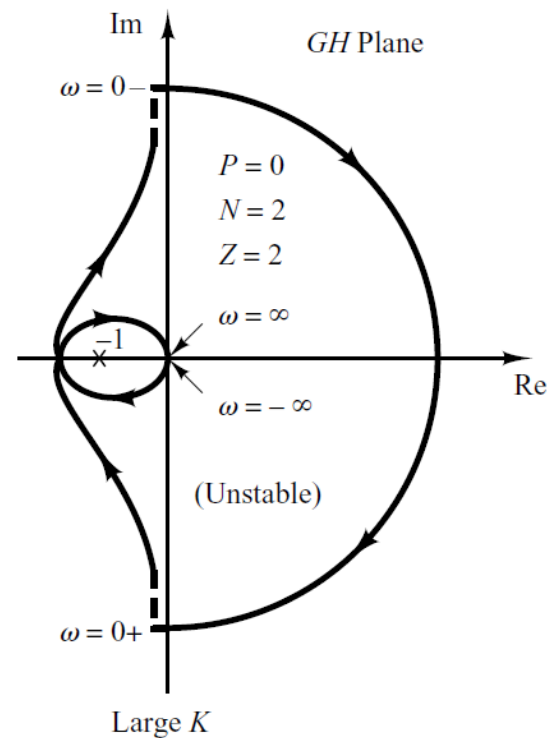
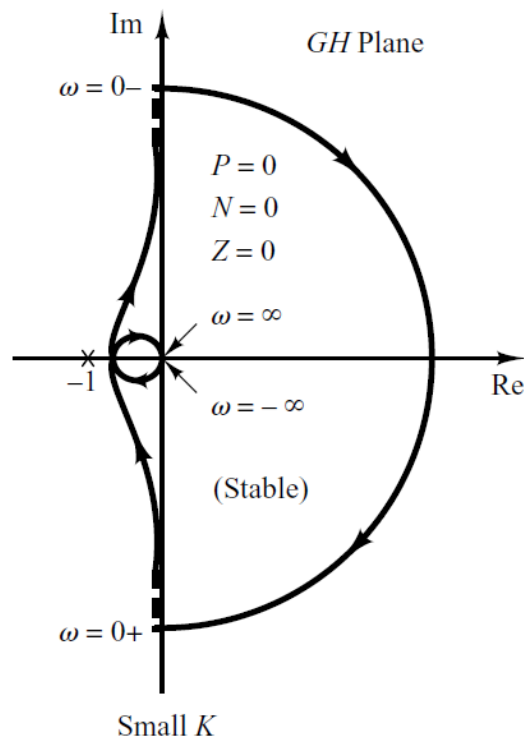
$$M = \frac{k}{\omega \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1} \sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}}, \quad \phi = -90 - \tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega$$

$$M_0 = \infty, \phi_0 = -90, \quad M_\infty = 0, \phi_\infty = -270$$

$$\phi_a = -180 \rightarrow \tan^{-1}T_1\omega_a + \tan^{-1}T_2\omega_a = 90 \rightarrow \tan(\tan^{-1}T_1\omega_a + \tan^{-1}T_2\omega_a) = \infty$$

$$\Rightarrow T_1\omega_a \times T_2\omega_a = 1 \Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$$

- ادامه:



- با توجه به اینکه  $P=0$ ، شرط پایداری مدار بسته این است که  $M(\omega_a) < 1$  باشد. در نتیجه:

$$M(\omega_a) = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \sqrt{\frac{1}{T_1} + 1} \sqrt{\frac{1}{T_2} + 1}} < 1 \rightarrow k < \frac{\sqrt{(T_1 + 1)(T_2 + 1)}}{T_1 T_2}$$

\* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:

$$GH(s) = \frac{k(s+3)}{s(s-1)}, (k > 1)$$

- حل:

$$M = \frac{k \sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \phi(\omega) = -90 + \tan^{-1} \frac{\omega}{3} - \tan^{-1} \frac{\omega}{-1}$$

$$\phi_a = -180 = -90 + \overbrace{\tan^{-1} \frac{\omega_a}{3}}^{\alpha} - \underbrace{\tan^{-1} \frac{\omega_a}{-1}}_{\beta} \Rightarrow 90 = -\alpha + \beta \Rightarrow \infty = \tan(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \infty = \frac{\tan(-\alpha) \tan(\beta)}{1 - \tan(-\alpha) \tan(\beta)} \Rightarrow 1 = \tan(-\alpha) \tan(\beta) = -\left(\frac{\omega_a}{3}\right)\left(\frac{\omega_a}{-1}\right) = \frac{\omega_a^2}{3} \Rightarrow \omega_a = \sqrt{3}$$

$$M_a = \frac{k \sqrt{\sqrt{3}^2 + 4}}{\sqrt{3} \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1}} = k$$



- ادامه:

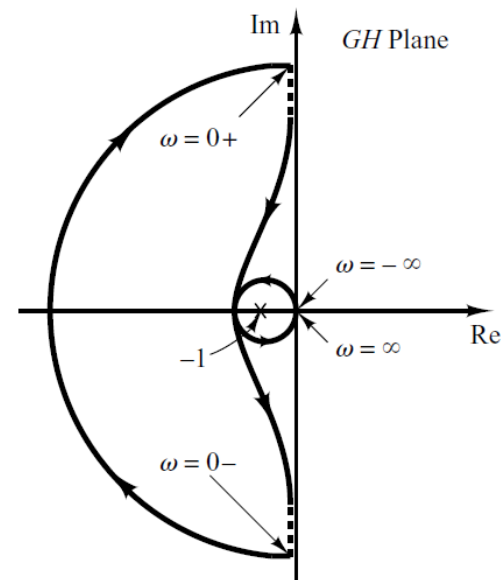
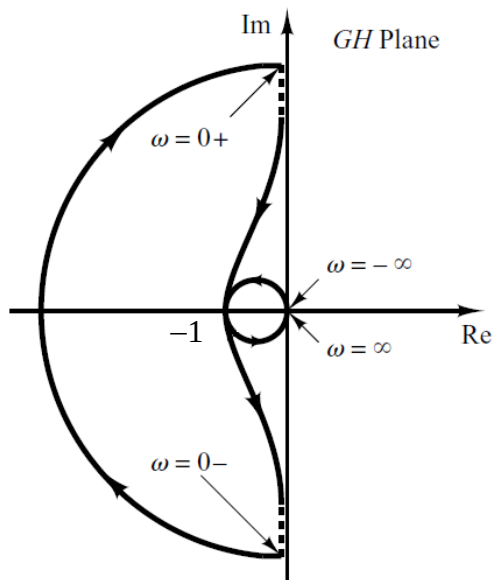
- با توجه به وجود قطب روی محور موهومی از مسیر نایکوئیست اصلاح شده استفاده می کنیم:

$$GH(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3k}{-\varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3k}{3e^{j\pi} e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3k}{\varepsilon} e^{j\alpha} \rightarrow \alpha = -(\pi + \theta)$$

$$\theta = \frac{-\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{-3\pi}{2}, \quad \theta = 0 \rightarrow \alpha = -\pi$$

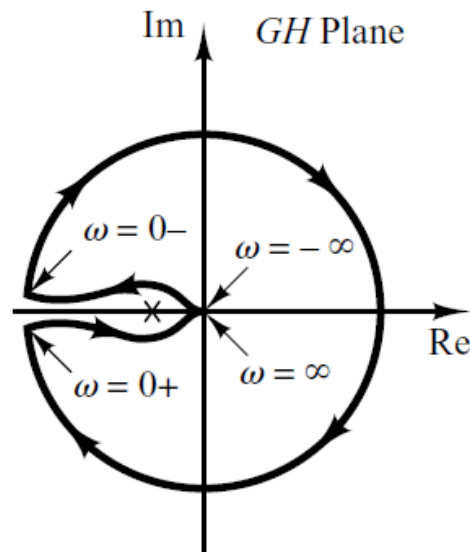
$$k < 1 \rightarrow M_a < 1 \rightarrow N = 1, P = 1 \rightarrow Z = 2$$

$$k > 1 \rightarrow M_a > 1 \rightarrow N = -1, P = 1 \rightarrow Z = 0$$

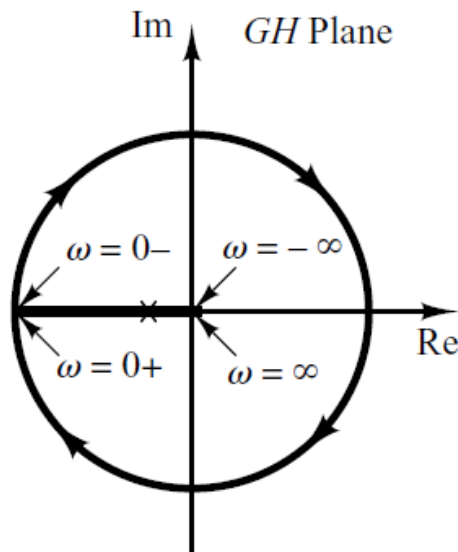


$$G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

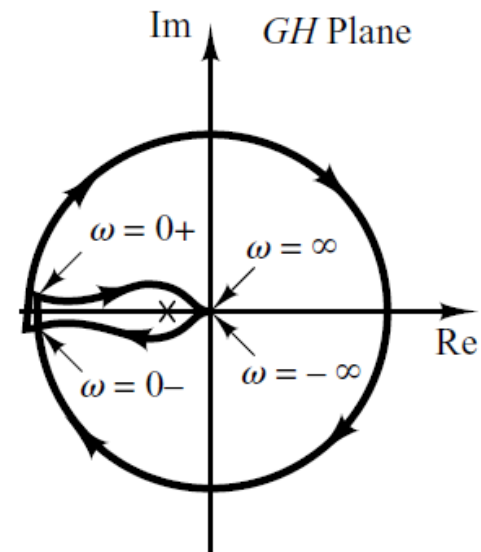
\* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:



$T_1 < T_2$   
(Stable)



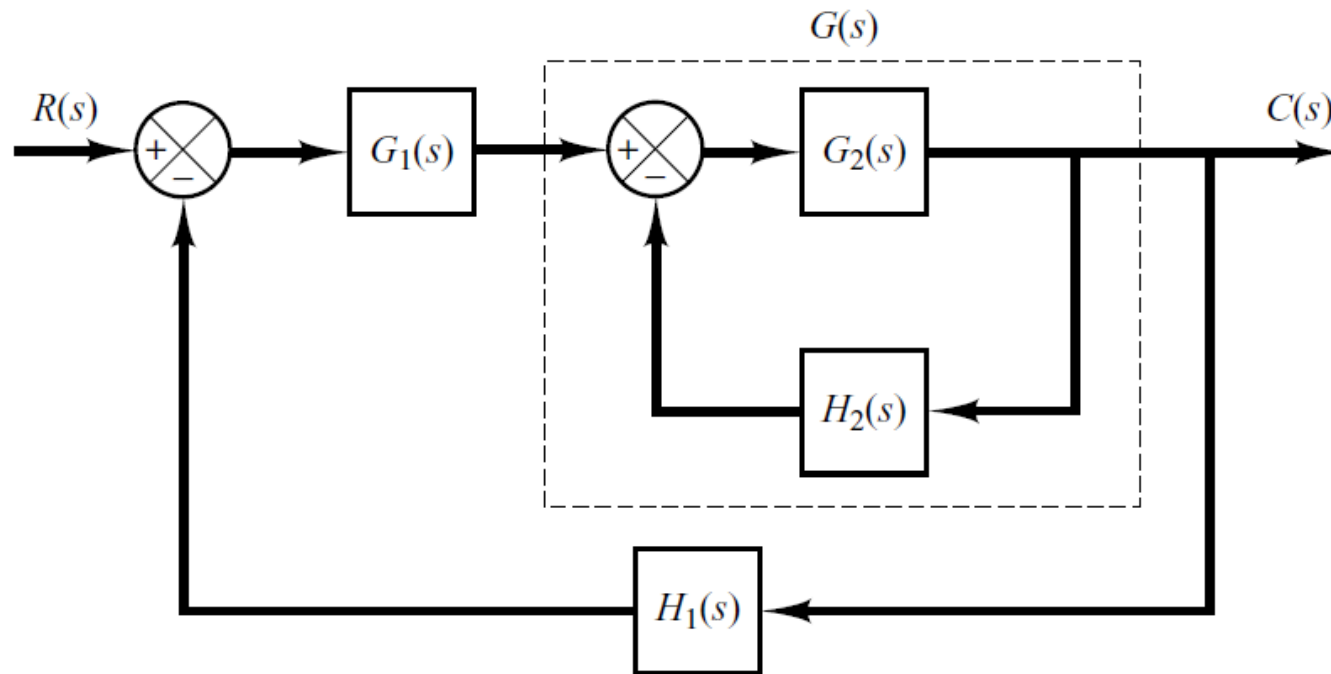
$T_1 = T_2$   
 $G(j\omega)H(j\omega)$  locus  
passes through the  
 $-1 + j0$  point



$T_1 > T_2$   
(Unstable)

Next Example

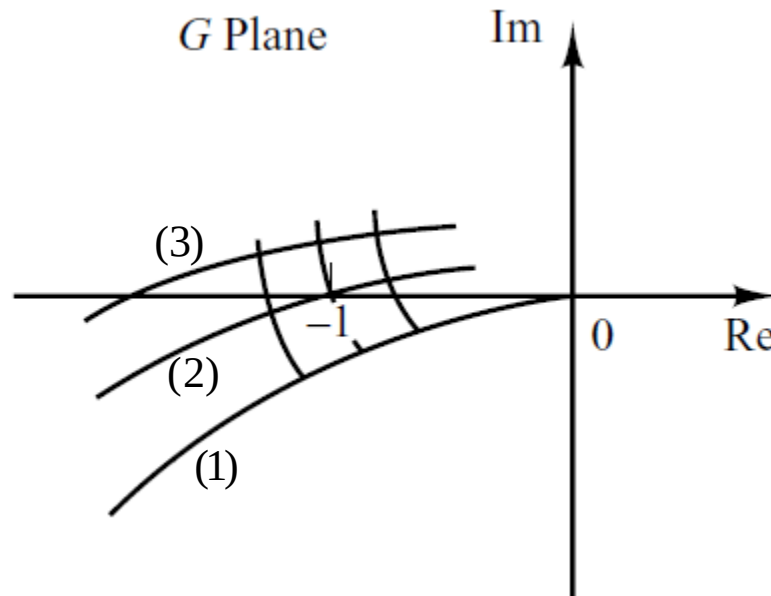
## Multiple-Loop System



$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

$$\text{Overall O.L.T: } G_1(s)G(s)H_1(s)$$

- با حذف یک لوپ فیدبک با روش دیاگرام بلوکی، امکان ایجاد قطب ناپایدار وجود دارد.
- با حذف یک شاخه فیدفوروارد، امکان ایجاد صفر سمت راست در سیستم کلی وجود دارد.
- برای بررسی سیستم کلی باید قطب و صفرهای حاصل از حذف لوپ های داخلی در نظر گرفته شود.



- (1) مدار بسته پایدار  
 (2) مدار بسته در مرز پایداری  
 (3) مدار بسته ناپایدار

\* حد بهره (Gain Margin): معکوس اندازه به ازای فرکانس قطع مربوط به زاویه فاز ۱۸۰ درجه است.

$$\omega_{pc}: \text{Phase cross over frequency} \rightarrow k_g = \frac{1}{M_{pc}} = \frac{1}{M(\omega_{pc})}$$

$$\bar{k}_g = 20 \log k_g = -20 \log M(\omega_{pc})$$

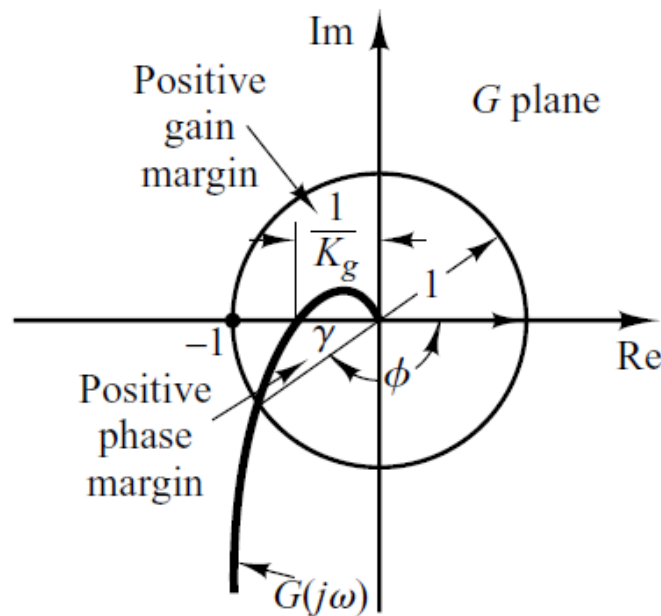
$$k_g > 1 \text{ or } \bar{k}_g > 0 \text{ dB}$$

\* شرط پایداری مدار بسته :

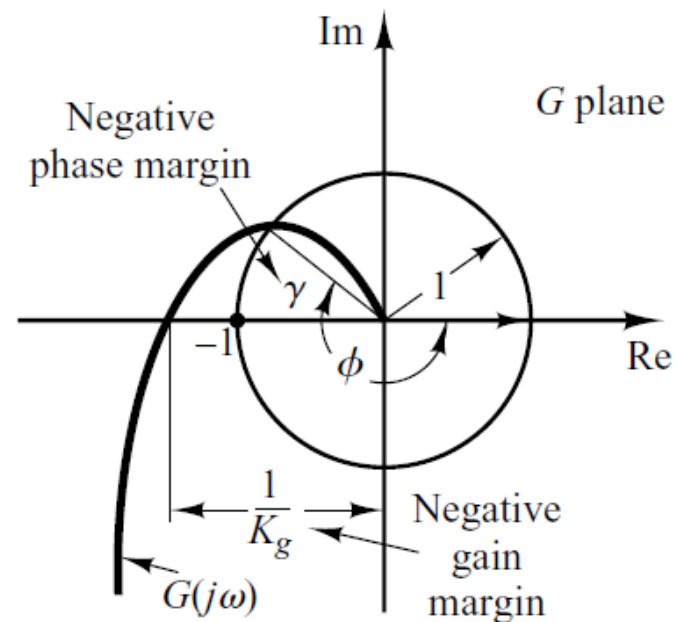
\* حد فاز: میزان Lag اضافی لازم است تا سیستم به مرز ناپایداری برسد.  
 - این مقدار برابر زاویه فاز مربوط به اندازه واحد به اضافه  $180^\circ$  درجه است:

$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

- فرکانس مربوط به اندازه واحد، فرکانس قطع اندازه نامیده می شود.  
 - مقایسه دیاگرام نایکوئیست سیستم پایدار و ناپایدار:

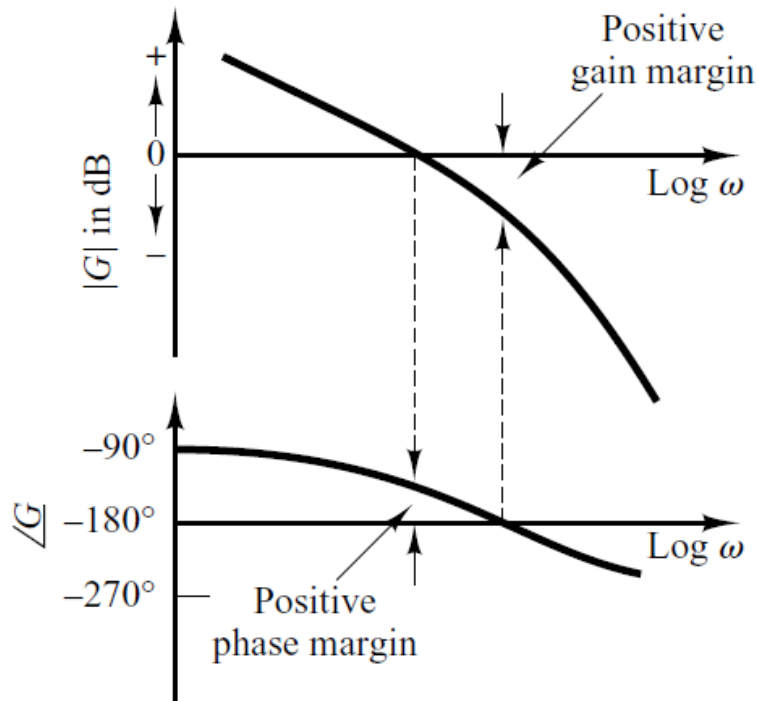


Stable system

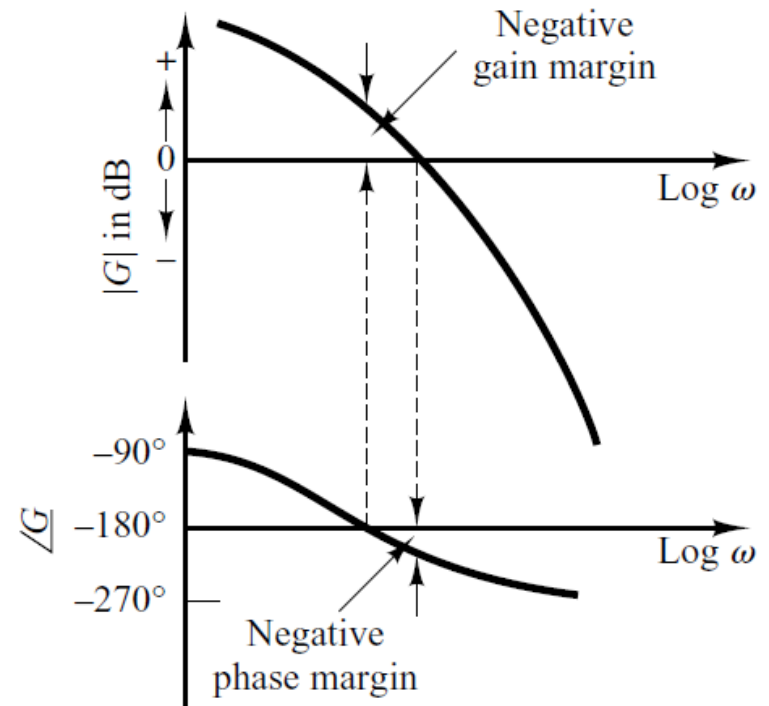


Unstable system

\* مقایسه دیاگرام بود سیستم پایدار و ناپایدار:



Stable system



Unstable system

\* شرط پایداری برای سیستم های MP:

$$\gamma > 0, \bar{k}_g > 0$$

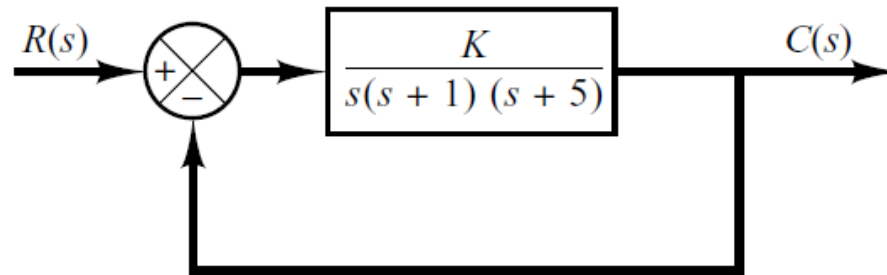
\* نکته: برای سیستم رسته دو:

$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow \gamma = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}$$

\* حد بهره و فاز مناسب برای سیستم کنترلی:

$$30^\circ < \gamma < 60^\circ, \bar{k}_g > 6dB$$

\* مثال: حد بهره و فاز سیستم زیر را به ازای  $k=10, 100$  بیابید:



- حل:

$$M(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25}}, \quad \phi(\omega) = -90 - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

$$M(\omega_{gc}) = 1: \begin{cases} k = 10 \rightarrow 10 = \omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25} \rightarrow \omega_{gc} = 1.23 \text{ r/s} \\ k = 100 \rightarrow 100 = \omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25} \rightarrow \omega_{gc} = 3.91 \text{ r/s} \end{cases}$$

Previous Example



\* ادامه:

\*  $k=10$ :

$$\phi(\omega_{gc}) = -90 - \tan^{-1}(1.23) - \tan^{-1}\left(\frac{1.23}{5}\right) = -154.71 ,$$

- سیستم مدار بسته پایدار خواهد بود:  $\gamma = 180 - 154.71 = 25.29 > 0$

\*  $k=100$ :

$$\phi(\omega_{gc}) = -90 - \tan^{-1}(3.91) - \tan^{-1}\left(\frac{3.91}{5}\right) = -203.68$$

- سیستم مدار بسته ناپایدار خواهد بود:  $\gamma = 180 - 203.68 = -23.68 < 0$

\* ادامه:

$$\phi(\omega_{pc}) = -180 = -90 - \overbrace{\tan^{-1} \omega}^{\alpha} - \underbrace{\tan^{-1} \frac{\omega}{5}}_{\beta} \Rightarrow 90 = \alpha + \beta \Rightarrow \infty = \tan(\beta + \alpha)$$

$$\Rightarrow \infty = \frac{\tan(\alpha) \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)} \Rightarrow 1 = \tan(\alpha) \tan(\beta) = (\omega) \left( \frac{\omega}{5} \right) = \frac{\omega^2}{5} \Rightarrow \omega_{pc} = \sqrt{5}$$

$$M(\omega_{pc}) = \frac{k}{\sqrt{30} \sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{k}{30}$$

\* به ازای  $k=10$ ، سیستم مدار بسته پایدار است:

$$k = 10 \rightarrow k_g = 3 > 1 \rightarrow \bar{k}_g = 0.5dB > 0$$

\* به ازای  $k=100$ ، سیستم مدار بسته ناپایدار است:

$$k = 100 \rightarrow k_g = 0.3 < 1 \rightarrow \bar{k}_g = -10dB < 0$$

Thanks for your attention!

Contents



Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:

Professor Aria Alasti

# Automatic Control

Chapter 9:

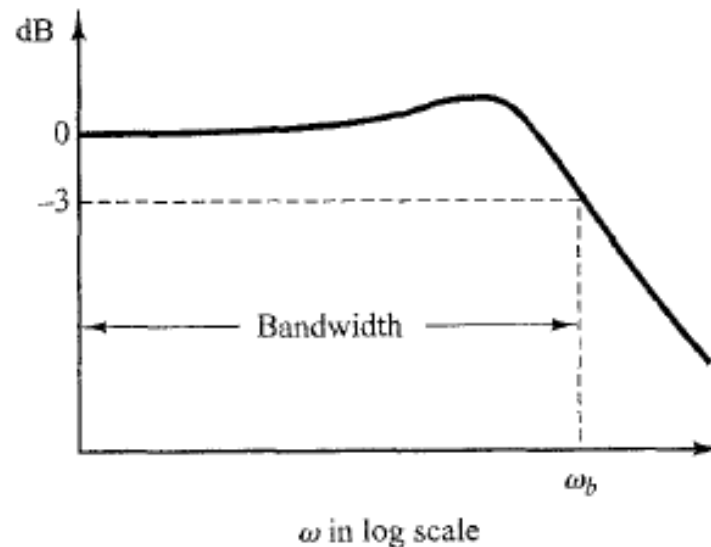
Control Systems  
Design by  
Frequency  
Response Method

- ◉ Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- ◉ Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
  - ◉ Part 1: Introduction to Control Systems
    - ◉ Transfer Function
    - ◉ Block Diagram and Closed Loop Control Systems
    - ◉ Simplification of Block Diagrams
    - ◉ Control Theory (Clip)
  - ◉ Part 2: Mason's Rule for Simplification of Block Diagrams
- ◉ Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems

- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

\*ملزومات پاسخ فرکانسی مدار باز:

- ضریب بهره در فرکانس های پایین و نزدیک به  $\omega_g$  باید بزرگتر باشد.
- شیب منحنی در نزدیکی  $\omega_g$  باید  $-20\text{db/dec}$  باشد.
- در مکانهای بالا ضریب باید با سرعت زیادی کاهش یابد.



دیاگرام بود سیستم مدار باز

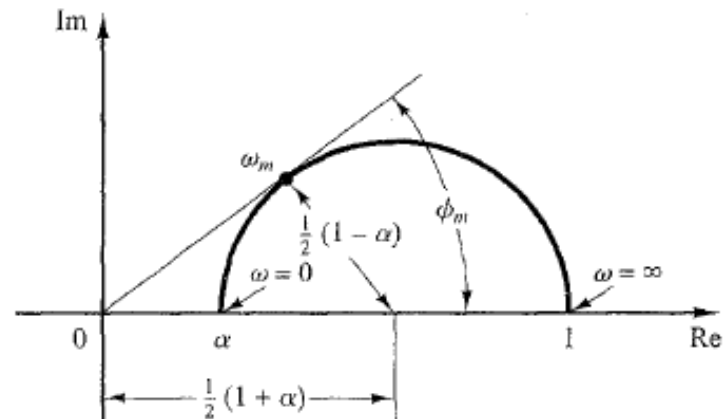
$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{Ts\alpha + 1} = kG'_{c(s)}$$

$$G'_c(j\omega) = \frac{Tj\omega + 1}{Tj\omega\alpha + 1} \rightarrow M'_{c(\omega)} = \frac{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 T^2 + 1}} \rightarrow \begin{cases} M'_{c(0)} = 1 \\ M'_{c(\infty)} = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$\phi'_c(\omega) = \phi_c(\omega) = \tan^{-1} \omega T - \tan^{-1} \alpha \omega T \rightarrow \begin{cases} \phi'_c(0) = 0 \\ \phi'_c(\infty) = 90 - 90 = 0 \end{cases}$$

\*Polar plot of a lead compensator

$\frac{\alpha(j\omega T + 1)}{j\omega T + 1}$ , Where  $0 < \alpha < 1$ .





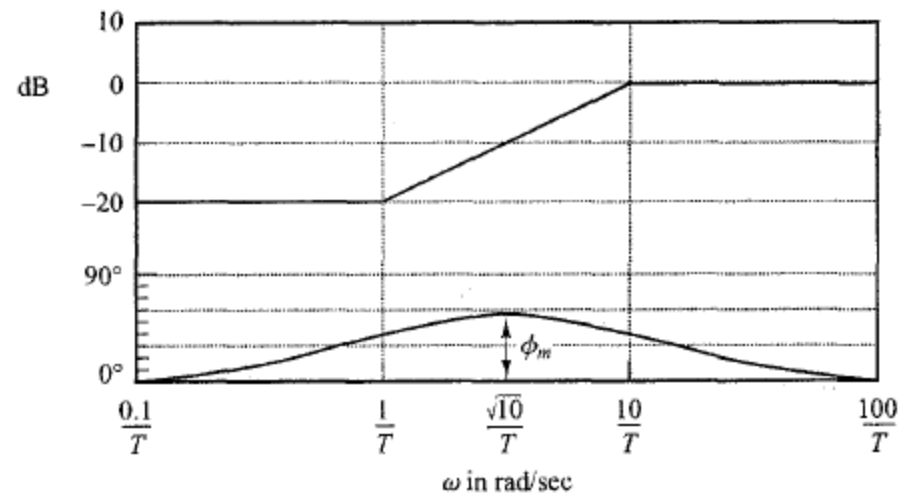
$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$M'_c(\omega_m) = |G'_c(\omega_m)| = \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 T^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

\*Bode diagram of a lead compensator

$\frac{\alpha(j\omega T + 1)}{j\omega T + 1}$ , Where  $\alpha = 0.1$



\*روش طراحی:

۱. از روی میزان بهبود دقت  $K$  را بیابید .  
به طور مثال برای سروسیستم نوع ۱ از روی  $k_v$  .

$$\bar{k}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)G_c(s) = k_v G_c(0) = k_v k$$

$$\frac{k_v}{k} = K$$

۲. دیاگرام بود (Bode) را برای سیستم رسم کنید.

$$G_c(s)G(s) = G'_c(s) \cdot \underbrace{k \cdot G(s)}_{G_1(s)} = G'_c(s)G_1(s)$$

$$M_1(\omega) = |G_1(j\omega)| = k |G(j\omega)|$$

$$M_1(\omega_{gc}) = 1 \rightarrow \gamma_1 = 180 + \phi_1(\omega_{gc})$$

۳. مقدار زاویه  $\phi$  مناسب برای اینکه به مقدار کرانه فاز کتلوب برسیم بیابید.

$$\phi_m = \gamma - \gamma_1 + 5$$

چون در اثر افزودن محل lead  $\omega_{gc}$  سمت راست شیفت پیدا می کند برای جبران کاهش زاویه اضافه می کنیم

کرانه (حد) فاز مطلوب

۴. با استفاده از  $\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$  مقدار  $\alpha$  را بیابید.

$$\bar{M}(\omega) = |G_c(j\omega)| \cdot |G(j\omega)| = \left| \frac{j\omega T + 1}{j\alpha T + 1} \right| \cdot |G(j\omega)|$$

مقدار  $\left| \frac{j\omega T + 1}{j\alpha T + 1} \right|$  در محل فرکانس مربوط به  $\phi_m$  برابر است با  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  پس در محل جدید  $\bar{\omega}_g$

مقدار  $|G(j\omega)|$  باشد  $\sqrt{\alpha}$

$$M_1(\bar{\omega}_{gc}) = |G_1(j\bar{\omega}_{gc})| = \sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow \omega_m = \bar{\omega}_{gc} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

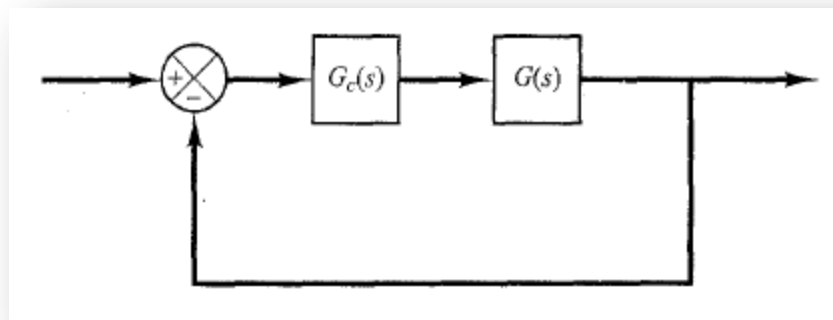
۵. ضرایب روبه رو را تعیین کنید.

$$\text{pole: } \omega = \frac{1}{\alpha T}$$

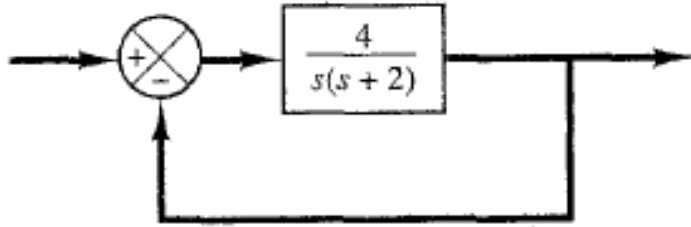
$$\text{zero: } \omega = \frac{1}{T}$$

۶. مقدار  $k_c$  را از رابطه زیر بدست آورید.

$$k = k_c \alpha \Rightarrow k_c = \frac{k}{\alpha}$$



\*مثال :



$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$\bar{k}_v = 20 \text{ sec}^{-1}, \bar{\gamma} \geq 50^\circ, \bar{k}_g \geq 10 \text{ dB}$$

\*حل :

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 2 \Rightarrow k = \frac{\bar{k}_v}{k_v} = \frac{20}{2} = 10 = k_c \alpha$$

$$\omega_{gc} : M_1(\omega_{gc}) = 1 \rightarrow \frac{4 \times 10}{\omega_{gc} \sqrt{\omega_{gc}^2 + 4}} = 1$$

$$\phi_1(\omega_{gc_1}) = -90 - \tan^{-1} \frac{6.17}{2} = -162.04$$

$$\gamma_1 = 180 - 162.04 = 17.96$$

$$\phi_m = \bar{\gamma} - \gamma_1 + 5 = 50 - 17.96 + 5 = 37.04$$

$$\sin 37.04 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rightarrow \alpha = 0.25$$

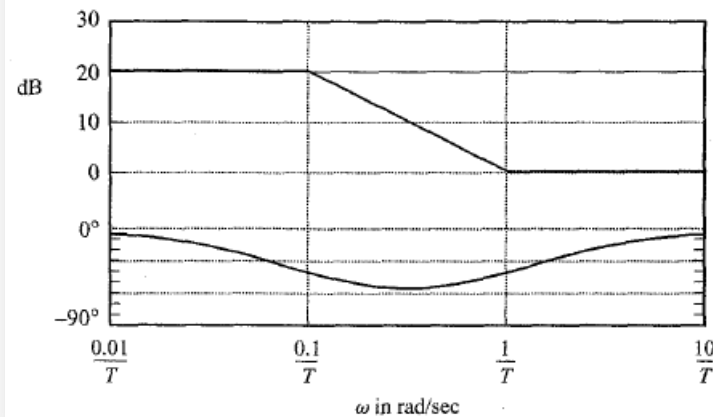
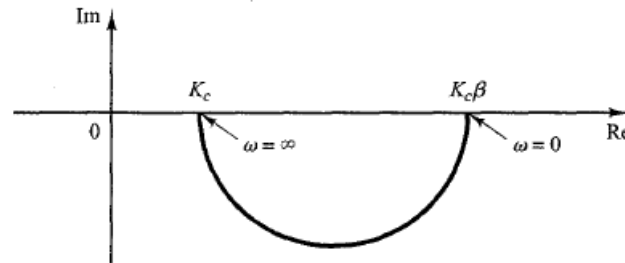
$$|G_1(j\bar{\omega}_{gc})| = \alpha \Rightarrow \frac{4 \times 10}{\bar{\omega}_{gc} \sqrt{\bar{\omega}_{gc}^2 + 4}} = 0.5 \Rightarrow \bar{\omega}_{gc} = \omega_m = 8.9 \text{ rad/sec}$$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = 0.23 \Rightarrow \frac{1}{T} = 4.4 \Rightarrow \frac{1}{\alpha T} = 18.22 \rightarrow k_c = \frac{k}{\alpha} = 41.7$$

$$G_c(s) = 41.7 \frac{s + 4.4}{s + 18.22}$$

Characteristics of Lag Compensators:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = k_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \quad (\beta > 1)$$



Thanks for your attention!





Sharif University of Technology  
School of Mechanical Engineering

Instructor:  
Professor Aria Alasty

## Automatic Control

Chapter 10:

### PID Controller Design by Ziegler- Nichols Method

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method

- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

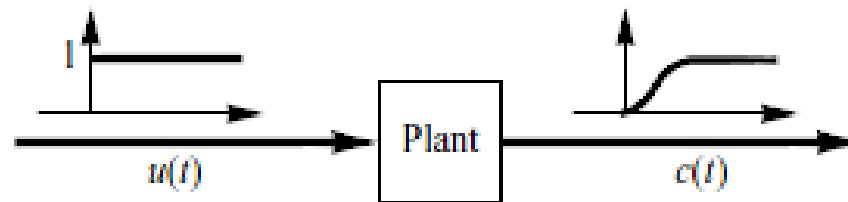
\* روش زیگلر-نیکولز، قوانینی را برای تعیین ضرایب کنترلر PID ارائه می دهند. این روش ها خصوصا زمانی که مدل ریاضی سیستم تحت کنترل نامعلوم است مفید هستند؛ هرچند برای سیستمی که مدل ریاضی آن وجود دارد نیز قابل استفاده هستند.

\* این روش ها به عنوان یک حدس اولیه مناسب برای تعیین مقادیر نهایی ضرایب کنترلر به کار می روند (Fine Tuning) و خود، این مقادیر نهایی را تعیین نمی کنند.

\* ضرایب کنترلی در این روش بر اساس ویژگی های پاسخ زمانی گذرای سیستم تعیین می گردند. به طور کلی دو روش برای تعیین این ضرایب بر مبنای قوانین زیگلر-نیکولز وجود دارند.

\* روش اول:

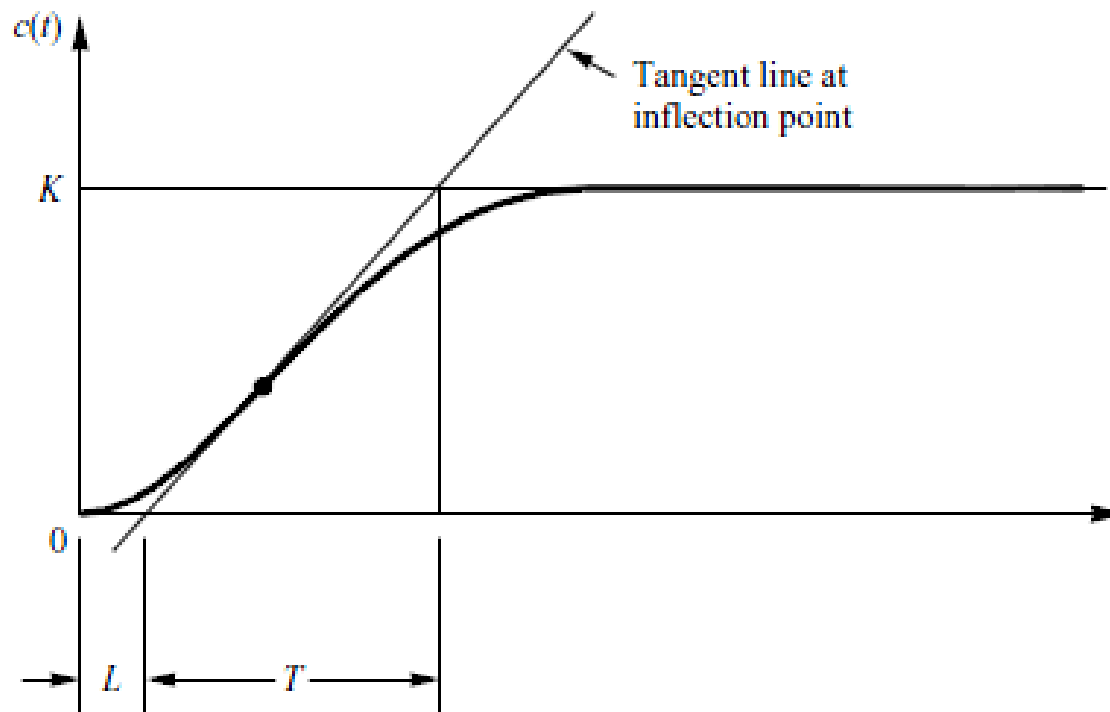
- این روش زمانی استفاده می شود که پاسخ زمانی سیستم به ورودی پله، یک منحنی S-shaped باشد.



- اگر تابع تبدیل سیستم فاقد انتگرالگیر یا زوج قطب های مختلط در مخرج باشد، پاسخ به ورودی پله، S-shaped خواهد بود.

\* روش اول:

- منحنی S-shaped بر اساس دو پارامتر ثابت زمانی ( $T$ ) و ( $L$ ) Delay Time قابل مشخص شدن است. این دو مقدار با رسم یک خط مماس بر منحنی پاسخ زمانی در نقطه عطف (Inflection Point) تعیین می گردند:



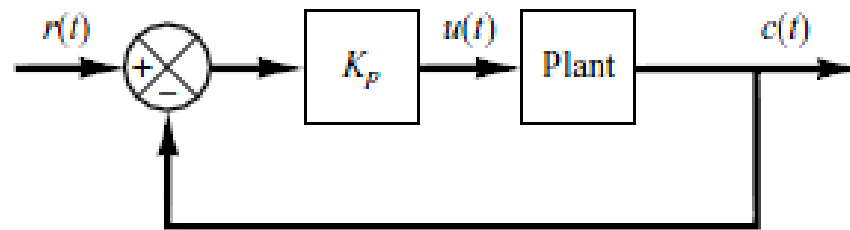
\* روش اول:

- با معلوم بودن مقادیر  $L$  و  $T$ ، ضرایب کنترلر از جدول زیر قابل تعیین هستند:

| Type of Controller | $K_p$             | $T_i$           | $T_d$  |
|--------------------|-------------------|-----------------|--------|
| P                  | $\frac{T}{L}$     | $\infty$        | 0      |
| PI                 | $0.9 \frac{T}{L}$ | $\frac{L}{0.3}$ | 0      |
| PID                | $1.2 \frac{T}{L}$ | $2L$            | $0.5L$ |

\* روش دوم:

- در این روش ابتدا تنها با تغییر مقدار ضریب کنترلی تناسبی از مقدار اولیه صفر تا یک مقدار بحرانی ( $K_{cr}$ ) که در آن سیستم پاسخ نوسانی نامیرا از خود نشان می دهد، مقدار دوره تناوب مربوط به این حالت یا همان دوره تناوب بحرانی ( $P_{cr}$ ) را تعیین می کنیم.



- اگر با افزایش مقدار ضریب کنترلی تناسبی تا هر مقدار دلخواه، سیستم پاسخ نوسانی نامیرا از خود نشان ندهد، این روش قابل استفاده نخواهد بود.



\* روش دوم:

- با در دست بودن مقادیر  $K_{cr}$  و  $P_{cr}$  و با استفاده از جدول زیر، مقادیر ضرایب کنترلی قابل تعیین هستند:

| Type of Controller | $K_p$        | $T_i$                  | $T_d$         |
|--------------------|--------------|------------------------|---------------|
| P                  | $0.5K_{cr}$  | $\infty$               | 0             |
| PI                 | $0.45K_{cr}$ | $\frac{1}{1.2} P_{cr}$ | 0             |
| PID                | $0.6K_{cr}$  | $0.5P_{cr}$            | $0.125P_{cr}$ |

- توجه شود که اگر تابع تبدیل سیستم در دست باشد، مقادیر  $K_{cr}$  و  $P_{cr}$  از روی تقاطع مکان هندسی ریشه ها با محور موهومی قابل تعیین هستند. برای مقدار  $\omega_{cr}$  داریم:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}}$$

\* مثال: ضرایب کنترلی را برای سیستم با تابع تبدیل زیر با استفاده از روش زیگلر-نیکولز تعیین نمایید:

$$G = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$$

- حل:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+4)}$$

$$y(t) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-4t} \Rightarrow k = y(\infty) = \frac{1}{12}$$

$$y(t_a) = \frac{67}{3072}, \dot{y}(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \Rightarrow \dot{y}(t_a) = \frac{27}{256}$$

$$\ddot{y}(t) = -3e^{-3t} + 4e^{-4t} \rightarrow \ddot{y}(t_a) = 0 \rightarrow t_a = \ln \frac{4}{3}$$

\* ادامه:

$$z = at + b \Rightarrow \frac{67}{3072} = \frac{27}{256} \left( \ln \frac{4}{3} \right) + b$$

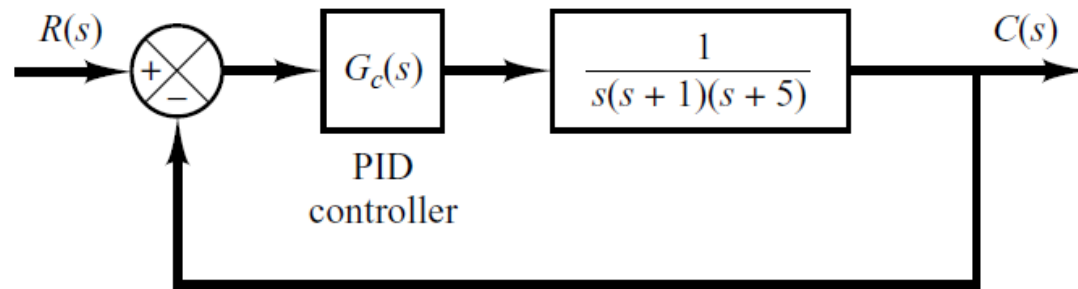
$$z = 0 \rightarrow t = L \Rightarrow L = \frac{-b}{a} = 0.0809 ,$$

$$t = L + T \rightarrow z = k \Rightarrow k = a(L + T) + b \Rightarrow T = 0.79$$

$$k_p = 11.72 , T_i = 0.162 , T_d = 0.04$$

- با مراجعه به جدول:

\* مثال: ضرایب کنترلی را برای سیستم زیر با استفاده از روش زیگلر-نیکولز تعیین نمایید:



$$\frac{C}{R} = \frac{k}{s(s+1)(s+5) + k}$$

- حل:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + k = 0 \rightarrow s = j\omega \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j(5\omega - \omega^3) = 0 \Rightarrow \omega_{cr} = \sqrt{5} \Rightarrow P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81 \\ k - 6\omega^2 = 0 \Rightarrow K_{cr} = 30 \end{cases}$$

$$k_p = 18, T_i = 1.4, T_d = 0.35$$

- با مراجعه به جدول:

Thanks for your attention!