

معادله: به هر تساوی که در آن مجهول (متغیر) وجود دارد و به ازای بعضی مقادیر برای آن مجهول، تساوی برقرار است معادله می گویند.

مثلاً $3x = 4$ و $2x^2 + 4x = 0$ و $4a + 2b = 0$ و ...

ریشه ی یک عبارت: عددی است که آن عبارت را صفر می کند. مثلاً ریشه ی عبارت $x - 5$ عدد 5 است زیرا $5 - 5 = 0$.

جواب (ریشه) معادله: به عدد یا عددهایی که به جای مجهول قرار می گیرند و معادله را به یک تساوی عددی درست تبدیل می کنند ریشه ی معادله (یا جواب معادله) می گویند.

مثلاً ریشه ی معادله ی $5 - x = -1 + x$ عدد 3 است زیرا: $5 - 3 = -1 + 3$

حل معادله: منظور از حل معادله، به دست آوردن جواب یا جواب های معادله در صورت وجود است.

(حل معادله : یافتن جواب معادله)

در این فصل قصد داریم به حل سه نوع معادله ۱) معادله ی درجه ی اول ۲) معادله ی درجه ی دوم ۳) معادلات گویا بپردازیم.

معادله ی درجه ی اول: هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد

حقیقی و a مخالف صفر است یک معادله ی درجه ی اول می نامند.

نکته: هر معادله ی درجه ی اول فقط یک جواب دارد. جواب معادله ی $ax + b = 0$ به صورت

$x = -\frac{b}{a}$ است. زیرا:

حل انواع معادلات درجه اول:

الف) حل با استفاده از حدس و گمان:

مثال: جواب معادلات زیر را حدس بزنید.

$$x - 2 = 4$$

$$2 - x = -1$$

$$1x = 14$$

$$9x = 45$$

$$7x - 2 = 32$$

$$7x = 3$$

$$4x = 1$$

$$2x - 1 = 5$$

ب) حل با استفاده از قواعد ریاضی:

نکته: اگر به دو طرف یک تساوی، عددی اضافه یا کم کنیم، یا دو طرف یک تساوی را در عددی غیر صفر ضرب یا تقسیم کنیم تساوی همچنان برقرار می ماند.

مثال، $x - 7 = 3$

حل: به طرفین تساوی عدد 7 را اضافه می کنیم:

$$x - 7 + 7 = 3 + 7 \rightarrow x = 10$$

و این یعنی جواب معادله عدد 10 است.

مثال، $19 - 2x = 4$

$$19 - 2x - 19 = 4 - 19$$

حل 1 ابتدا از طرفین 19 واحد کم می کنیم:

$$\rightarrow -2x = -15$$

حال طرفین به (-2) تقسیم می شوند:

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-15}{-2} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5$$

تکلیف: دو مثال فوق، قاعده ای کلی در ریاضیات برای حل معادله به جامی دهند که در ادامه اش به

خواهش شد.

یادآوری: یک جمله (تک جمله) : عدد، متغیر یا حاصلضرب از اعداد و متغیر با توان‌های صحیح مثبت را
 یک جمله می‌گویند. مانند: $2, x, 2x, 4x^2y^3, 0, \dots$

چند جمله‌ای: جمع یا تفریق چند یک جمله‌ای را چند جمله‌ای می‌گویند.
 مانند $2x+7$ که از دو یک جمله‌ای $2x$ و 7 تشکیل شده است.

مثال، هر کدام از چند جمله‌ای‌های زیر از چند یک جمله‌ای تشکیل شده‌اند؟

الف) $2a^2 - 3ab$ ب) $-abc$ ج) $-2x + 3 + 4x^2y$

د) $2x^2 + 4x - 3$

ضرب عددی یک متغیر: عددی که به یک متغیر ضرب شده باشد معمولاً نسبت متغیر
 (نسبت به آن) قرار می‌گیرد.

ضرب عددی ضرب عددی ضرب عددی
 $(1x)$ $(-2x)$ $(-1y)$

نکته مهم: در یک معادله ...

۱) با جابه جایی تک جمله‌ای‌ها به سمت دیگر توی، علامت تک جمله‌ای قرینه می‌شود.

۲) ضرب عددی با رفتن به سمت دیگر توی، در منفی قرار می‌گیرد.

مثال، معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x - 3 = x - 4$

ب) $x - 9 = 4x + 1$

نکته: برای حل معادله ^{فصل} آنکام تلاش کن این است که عددها را به یک طرف توی و جمله‌ای که
 متغیر دارند به هم به طرف دیگر توی ببریم.

تست 1: جواب معادله $2(1-x) - 3(x+1) = 14$ کدام است؟ (گج)

۴- ۳- ۲- ۱-

نکته: جواب هر معادله، در خود معادله صدق می کند، یعنی با قرار دادن جواب معادله در معادله به یک تساوی عددی درست می رسم.

تست 2: اگر $x = -4$ جواب معادله $mx + \frac{x}{4} = -3m$ باشد مقدار m کدام است؟ (گج)

۳- ۲- ۱- ۱

نکته: وقتی گفته میشود دو معادله، رشتی مشترک دارند باید رشتی یک معادله را به یک آوریم و در دیگری جایگذاری کنیم.

تست 3: دو معادله $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$ و $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$ جواب مشترک دارند مقدار

m کدام است؟ (گج)

۲ ۳ ۴ ۵

یادآوری: ک.م.م دو عدد غیر صفر a و b ، کوچکترین عددی است که هم مضرب a و هم مضرب b است. (در واقع کوچکترین عددی است که به هر دو عدد a و b بخش پذیر است.)

نکته: در معادلاتی که یک یا چند عدد در مخرج ظاهر شده اند برای آنکه ارزش مخرج ها هائی یا نیم ظرفین معادله را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم.

تست 4: جواب معادله $\frac{1-x}{4} + \frac{x+3}{2} = \frac{2x}{3}$ کدام است؟ (گج)

۴ ۳ ۵ ۶

تست 5: جواب معادله $4x - 5 = \frac{1}{4}(10x - 4)$ کدام است؟ (هرکول)

۱ ۱- ۲ ۲-

تست 6: اگر جواب معادله $\frac{2-m}{5} = \frac{2x}{10} + \frac{1}{2}$ برابر 2 باشد مقدار m کدام است؟ (هرکول)

$$\frac{5}{2} \quad -\frac{5}{2} \quad \frac{4}{2} \quad -\frac{4}{2}$$

مثال: معادله $\frac{2-x}{x+2} = \frac{4}{x+2}$ را حل کنید.

نکته: اگر حاصلضرب ضریب عبارت برابر صفر باشد حداقل یکی از آن‌ها صفر است یعنی $a.b.c=0$

باشد $a=0$ یا $b=0$ یا $c=0$

(واقعاً بخاطر همین نکته است که دانش‌روشن‌ها کپی برای حل معادلات بسیار کاربر اهمیت است.)

روش‌های کپی:

1. فاکتورگیری: عامل‌ها مشترک هر چند در یک ضریب هم ای را نیست پرانتز قرار داده

و هر چند را به آن عامل مشترک تقسیم می‌کنیم؛

به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) $3x^2 + 4xy = 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y = 2x(x + 2y)$

ب) $9a + 3 = 3 \cdot 3 \cdot a + 3 \cdot 1 = 3(3a + 1)$

ج) $9a^2b^3 + 15a^3b^2 =$

۲. استفاده از اتحادها :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad : \text{ اتحاد مزدوج}$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \quad : \text{ اتحاد هبی مشترک}$$

ب. مثال ها زیر کتب کنید :

$$9 - a^2 = 3^2 - a^2 = (3-a)(3+a) \quad \text{الف)}$$

$$4x^2 - 5 = (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5}) \quad \text{ب)}$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x+4)(x+1) \quad \text{ج)}$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2) \quad \text{د)}$$

مثال، معادلات زیر را حل کنید.

$$1) (x^2 + 3x)(x^2 - 1) = 0 \quad 2) (x^2 + x) - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

$$3) x^2 + x = 12 \quad 4) \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 + 5\left(\frac{x+3}{x-1}\right) + 4 = 0$$

تست 7: مجموع جواب های معادله $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) = 1$ کدام است ؟ (هر و ماه)

۲ ۴ ۵ ۶

تست 8: جواب بزرگتر معادله $3x^2 = 1 - 2x$ کدام است ؟ (هر و ماه)

$-\frac{1}{3}$ -3 $\frac{1}{3}$ 3

تست 9: اگر $x = a + 3$ یکی از ریشه های معادله $x(x-1) = 1-a$ باشد، کوچکترین مقدار ممکن a

کدام است ؟ (هر و ماه)

-4 -1 -5 -3

تست 10: جواب معادله $x(x+2) - 2 = x^2 - 3(x-1)$ با جواب کدام معادله برابر است ؟ (ط)

$$-x + 2 = 3 \quad 3x + 4 = 0 \quad 2x - 4 = 0 \quad -2x + 3 = 0$$

مثال، به حل معادلات زیر دقت کنید:

$$2x = 4 \rightarrow \cancel{2}x = \cancel{2} \cdot 2 \rightarrow x = 2$$

$$9x = 27 \rightarrow \cancel{9}x = \cancel{9} \cdot 3 \rightarrow x = 3$$

نکته: اگر طرفین یک تساوی در عددی غیر صفر ضرب شده باشند می‌توانیم آن‌ها را ساده کنیم.
(خط بزنیم)

نکته مهمتر آنکه اگر عبارتی را از طرفین معادله ساده کردیم باید آن عبارت را برابر صفر قرار دهیم و جواب یا جواب‌های آن را در صورت وجود بدست آوریم.

$$a \cdot b = a \cdot c \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ b = c \end{cases}$$

اما اگر عبارت در فرج بود ساده کردن آن از طرفین به مانع است ولی در اینجا بررسی می‌کنیم که جواب صحیح را صفر کنند.

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \rightarrow b = c$$

مثال، معادله $2(x-2)(x-3)(x-4) = x(x-2)(x-3)$ را حل کنید.

حل، همی عبارت‌ها را به یک طرف تساوی انتقال می‌دهیم:

$$2(x-2)(x-3)(x-4) - x(x-2)(x-3) = 0 \rightarrow (x-2)(x-3)(2(x-4) - x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \\ 2(x-4)-x=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

به کمک نکته‌ی فوق می‌توان گفت به راه حل سرعت بخشید؛

$$2(\cancel{x-2})(\cancel{x-3})(x-4) = x(\cancel{x-2})(\cancel{x-3}) \rightarrow 2(x-4) = x$$

$$\text{جوابها} \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \\ 2(x-4)-x=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

تست 11: مجموع جواب‌ها معادله‌ی $(x-2)(x-4) = x-2$ کدام است؟ (کلیج)

۸

۷

۶

۵

فصل، حرکت از معادلات زیر ضد جواب دارد؟

الف) $5x + 3 = 2x + 1 + 3x + 2$

ب) $5x + 3 = 5x - 1$

نکته: گاهی بعد از ساده سازی معادله ها، یک جوابک دارای x از بین می روند در این حالت دو حالت داریم:

الف) اگر بعد از ساده سازی به یک معادله همیشه درست رسیدیم (مثلاً $3=3$) معادله بی شمار جواب دارد.

ب) اگر بعد از ساده سازی به یک تساوی همیشه نادرست رسیدیم (مثلاً $2=4$) معادله جواب ندارد.

تست 12: معادله $m(x+2) = -2x + 5$ جواب ندارد، مقدار m کدام است؟ (گاج)

۴- ۳- ۲- ۱-

تست 13: معادله $(m+1)(x-2) = -4x + n + 2$ بی شمار جواب دارد. مقدار $m+n$ کدام است؟ (گاج)

۵- ۵ ۱۰- ۱۰

کاربرد معادله ک درجه اول در مسائل توصیفی:

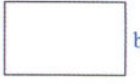
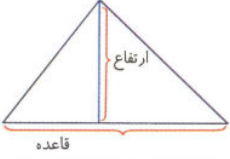
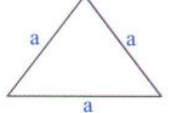
گاهی یک مسئله را به صورت توصیفی بیان می کنند و مقدار مجهول از ما می خواهند. در این گونه

مسائل باید مقدار مجهول را x فرض کرده و با توجه به صورت سوال، ارتباط x را با دیگر فرض های مسئله بنویسیم.

تست 14: دو برابر عددی به علاوه یک، مساوی پنج برابر همان عدد منهای چهار است. آن عدد کدام است؟

(گاج) $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{4}$

نکته: ممکن است ارتباط مجهول با فرض های مسئله، در قالب یک مفهوم هندسی بیان شود.
موارد زیر را به خاطر بسپارید.

نام شکل	شکل	مساحت	محیط
مستطیل		ab	$2(a+b)$
مربع		a^2	$4a$
مثلث		$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$	مجموع سه ضلع
مثلث متساوی الاضلاع		$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$3a$
دایره		πr^2	$2\pi r$

تست 15: طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن $\frac{3}{2}$ واحد بیشتر است. اگر محیط مستطیل ۳۶ باشد

مساحت آن کدام است؟ (ک)

۵۴ ۴۵ ۷۲ ۸۴

حل: محیط مربع را به دست آوریم و مقدار آن $2\sqrt{5}$ باشد.

حل تست 1: ابتدا برانتهرها را ازین می‌بریم:

$$2 - 2x - 3x - 3 = 14 \rightarrow -5x - 1 = 14 \rightarrow -5x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{-5} = \frac{3x^3}{-3x^1} = -3$$

حل تست 2: جواب معادله در معادله صدق می‌کند پس به جای x ها عدد -3 را قرار می‌دهیم.

$$m(-3) + \frac{-15}{3} = -3m \rightarrow -3m - 1 = -3m \rightarrow -m = 1 \rightarrow m = -1$$

حل تست 3:

$$2(x-3) + 3x = 4(x-1) \rightarrow 2x - 6 + 3x = 4x - 4 \rightarrow 5x - 6 = 4x - 4 \rightarrow 5x - 4x = -4 + 6 \rightarrow x = +2$$

حل $x=2$ را در معادله $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$ می‌نویسیم تا مقدار m معلوم شود:

$$\frac{2+m}{2} + \frac{2+1}{2} = m+1 \xrightarrow{\times 2} 2+m+2+1 = 2m+2 \rightarrow m = 3$$

حل تست 4:

طرفین معادله را در عدد 4 ضرب می‌کنیم:

$$4x\left(\frac{1-x}{4} + \frac{x+3}{2}\right) = 4x \cdot \frac{2x}{3}$$

$$\rightarrow \frac{4(1-x)}{4} + \frac{4(x+3)}{2} = 4x \rightarrow 1-x+2x+6 = 4x \rightarrow 2x-4x = -10 \rightarrow -2x = -10 \rightarrow x = \frac{-10}{-2} = 5$$

حل تست 5: طرفین معادله را در عدد 4 ضرب می‌کنیم:

$$4x \cdot \frac{1}{4} (10x-4) = 4x(4x-5) \rightarrow 10x-4 = 16x-20 \rightarrow 16 = 16x \rightarrow x = \frac{16}{16} = 1$$

حل تست 6:

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کنند لذا داریم:

$$\frac{2-m}{5} = \frac{2(2)}{10} + \frac{1}{2}$$

اکنون دو طرف تساوی را در کمترین مخرج‌ها ضرب می‌کنیم:

$$10x\left(\frac{2-m}{5}\right) = 10x\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 4-2m = 4+5 \rightarrow 2m = -5 \rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

حل تست 7:

$$x^2 - 3x = t \rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \rightarrow (t-4)(t+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=4 \rightarrow x^2 - 3x = 4 \\ t=-2 \rightarrow x^2 - 3x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = 4 - 1 + 2 + 1 = 6$$

حل تست 8:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین } x^2} 9x^2 + 2(3)x - 3 = 0$$

$$\rightarrow (3x)^2 + 2(3x) - 3 = 0 \xrightarrow{3x=t} t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow (t+3)(t-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{3} = -1 \\ 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \frac{1}{3} > -1$$

حل تست 9:

$$(a+3)(a+3-1) = 1-a \rightarrow (a+3)(a+2) = 1-a$$

$$\rightarrow a^2 + 5a + 6 = 1-a \rightarrow a^2 + 6a + 5 = 0 \rightarrow (a+5)(a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$-1 > -5$$

$$x^2 + 2x - 2 = x^2 - 3x + 3 \rightarrow x^2 - x + 2x + 3x - 2 - 3 = 0 \rightarrow 4x - 5 = 0 \rightarrow x = 1$$

حل تست 10: $x=1$ در معادله $-3x + 3 = 0$ صدق می‌کند.

حل تست 11: حل قانون: هم را به یک طرف و انتقال می‌دهیم:

$$(x-2)(x-4) - (x-2) = 0 \rightarrow (x-2)(x-4-1) = 0 \rightarrow (x-2)(x-5) = 0$$

$$2+3=5$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-5=0 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

$$\cancel{(x-2)}(x-4) = \cancel{(x-2)} \rightarrow x-4=1 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-4=1 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

حل تست 11: هم را به یک طرف و انتقال می‌دهیم:

حل تست 12:

$$m(x+2) = -2x+5 \rightarrow mx+2x+2m=5 \rightarrow (m+2)x+2m=5$$

چون معادله فاقد جواب است لذا ضرایب x برابر $m+2=0$ و $2m=5$ (نتیجه $m=-2$)

حل تست 13:

اولا باید در معادله x وجود داشته باشد:

$$(m+1)x = -4x \rightarrow m+1 = -4 \rightarrow m = -5$$

همچنین باید به یک معادله همیشه درست برسیم:

$$(m+1)(-3) = n+2 \rightarrow (-4)(-3) = n+2 \rightarrow 12 = n+2 \rightarrow n = 10$$

$$m+n = -5+10 = 5$$

حل تست 14:

$$2x+1 = 5x-2 \rightarrow 3 = 3x \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

حل تست 15:

$$2x+3+x=11 \rightarrow 3x=8 \rightarrow x=5, 2x+3=13 \quad \text{عرض متقابل: } x$$

$$\text{پس: } 5 \times 13 = 65$$

معادله ی درجه دوم: معادله ای به فرم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a \neq 0$ و a ضریب x^2 ، b ضریب x و c عددی ثابت است.

روش های حل معادله ی درجه دوم:

(۱) **روش اریثمئیر:** در معادله ی درجه ی دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ اگر ضریب x (b) صفر باشد معادله به صورت $x^2=r$ خواهد بود. در صورتی که $r \geq 0$ باشد، دو جواب به صورت $x=\sqrt{r}$ و $x=-\sqrt{r}$ داریم؛

$$x^2=r \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{r} \\ x=-\sqrt{r} \end{cases}$$

مثال: حرکت از معادلات زیر حاصل کنید.

الف) $2x^2-32=0$

ب) $x^2+1=7$

ج) $x^2-14=0$

د) $3x^2-5=0$

ه) $x^2-3=-5$

(۲) **روش تجزیه عبارت های جبری:**

(الف) **فاکتورگیری:** در معادله ی درجه ی دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ اگر $c=0$ باشد از این

روش برای یافتن جواب استفاده می شود؛

مثال: معادله ی $x^2+4x=0$ را حل کنید.

حل:

(ب) استفاده از اتحاد مزدوج؛

تست ۱: ریشه ی کو چکستر معادله ی $(x^2-(2-x)^2=0$ کدام است؟ (گج)

$$\frac{6}{3}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$-3$$

$$-2$$

پ) استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک :

در معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ اگر $a=1$ باشد (ضرب x^2) به کمک آرای
جمله‌ی مشترک می‌توان به جواب مکنه رسید؛

$$x^2+bx+c=(x \dots)(x \dots)$$

در جاهای خالی فوق باید دو عدد طوری بیابیم که مجموع آن‌ها b و حاصلضرب آن‌ها c شود.

اگر توانستیم دو عدد با شرط گفته شده بیابیم آن‌ها را به همراه علامت شان $(+ یا -)$ در جای
خالی قرار می‌دهیم.

مثال ۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف $x^2+3x-4=0$ ب $x^2+9x+4=0$ پ $x^2+4x+9=0$

ت $x^2-10x+25=0$ ث $x^2+2x-15=0$ ج $x^2+10x+21=0$

چ $x^2-4x+8=0$

تمرین: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$2x^2-1=0$$

$$(x+2)(x-3)=x-3$$

$$x^2=x-\frac{1}{4}$$

$$2x^2-11x=0$$

$$x^4-2x^2=0$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$\frac{x^2}{3}=x$$

$$x^2=9-x^2$$

$$(x-3)^2=4$$

$$x^2+4x+4=0$$

نکته ۳: در صورتی که ضریب x^2 (a) یک نباشد می‌توان در صورت مایل بودن ضرایب به صورت زیر اقدام کرد:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax \dots)}{a} \cdot (ax \dots)$$

برای پر کردن جاهای خالی درست راست تساوی باید دنبال دو عدد بگردیم که مجموع آن‌ها b (ضریب x) و حاصلضرب آن‌ها $a \times c$ باشد. اگر دو عدد یافت شوند به همراه علامت آن در جاهای خالی قرار دهیم.

مثال، معادله $4x^2 + 2x - 8 = 0$ را حل کنید.

حل

مثال، جواب‌های فوق از معادلات زیر را بیابید.

الف) $4x^2 + x - 10 = 0$ ب) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

نکته ۴: اگر m و n ریشه‌ها معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند عبارت $ax^2 + bx + c$ به صورت زیر کتبه می‌شود:

$$ax^2 + bx + c = a(x-m)(x-n)$$

مثال، اگر ۲ و -۱ ریشه‌ها معادله $3x^2 + ax + b = 0$ باشند $a+b$ را بیابید.

حل

مثال، اگر $x=3$ ریشه مضاعف معادله $2x^2 + ax + b = 0$ باشد $a+b$ را بیابید.

حل

نکته: برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ در صورتی که $a, b, c \neq 0$ باشند درگام اول دو نکته‌ی مهم زیر را در نظر می‌گیریم؛

الف) اگر $a+b+c=0$ باشد یکی از جواب‌ها 1 و جواب دیگر $-\frac{c}{a}$ است. مثلاً:

$$2x^2+5x-7=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

ب) اگر $a+c=b$ باشد یکی از جواب‌ها -1 و جواب دیگر $-\frac{c}{a}$ است؛

$$5x^2+12x+7=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{7}{5} \end{cases}$$

درگام بعدی دنبال ۲ عدد می‌گردیم تا بتوانیم به کمک تجزیه و شرایط آن به جواب برسیم. اگر دو عدد با شرایط مورد نظر به راحتی یافت نشد از روش‌های که در ادامه گفته خواهد شد برای رسیدن به جواب استفاده می‌کنیم.

تست 2: ریشه‌ی بزرگتر معادله‌ی $\sqrt{3}x^2+2-(2+\sqrt{3})x=0$ کدام است؟ (گج)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad -1 \quad 1$$

3) روش مربع کامل کردن

برای حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌شود
به این صورت که با استفاده از قواعد ریاضی جملات را طوری جابه‌جا می‌کنیم که معادله تبدیل به
معادله‌ای به فرم $\square = \square^2$ می‌شود، در ادامه به کمک ریشه‌گیری معادله حل می‌شود.

نوع ۱: در این روش به ترتیب گام‌های زیر را داریم:

گام ۱: عدد ثابت را به سمت راست می‌بریم. (سمت چپ تاوی جملات دارای x قرار دارند.)

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{1} ax^2 + bx = -c$$

گام ۲: طرفین تاوی را به ضریب x^2 (a) تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 یک شود.

$$\xrightarrow{2} x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

گام ۳: نصف ضریب x را به توان ۲ رسانده و به طرفین تاوی اضافه می‌کنیم.

$$\xrightarrow{3} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

گام ۴: سمت چپ تاوی در واقع طرف دیگر اتحاد $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ است، بنابراین ما به

معادله $\square = \square^2$ رسیدیم که در ادامه می‌توانیم با کمک ریشه‌گیری به جواب

برسیم.

مثال: معادله درجه دوم $2x^2 + 2x - 5 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

حل:

نکته: استفاده از نتیجه ای اتحاد مربع دو جمله ای نیز حل معادلات به روش مربع کامل را سریع تر می کند؛

$$x^2 \pm mx = \left(x \pm \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

تست 3: حل معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ به روش مربع کامل متغیر به معادله $(x+m)^2 = n$ درجه است. مقدار

n کدام است؟ (گزینه)

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{13}{9}$

کمترین معادله ها زیر را با روش شش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 2x + 4 = 0$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

پ) $x^2 + \frac{1}{x} = -x$

ت) $x^2 + 4x + 9 = 0$

(4) روش کلی (5)

این روش تنبیهی روش مربع کامل کردن است. با استفاده از روش مربع کامل، برای حل

معادله درجهی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می آید.

با این روش که، روش دلتا نیز گفته می شود.

مرحله: مراحل زیر را برای بدست آوردن روش کلی داریم:

$$① \quad ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = -c$$

$$② \quad \div a \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$③ \quad + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$④ \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

⑤ با استفاده از $b^2 - 4ac$ و با استفاده از ریشه گیری داریم:

$$\begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

نکته: عبارت $b^2 - 4ac$ را مبین معادله درجهی دوم می نامند و آن را با Δ (دلتا) نشان می دهند.

نکته: براساس علامت Δ می‌توان در وجود و تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم اضمحلال نظر کرد؛

الف) اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ معادله دو جواب دارد که عبارتند از؛

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

x_1 : یعنی ریشه‌ی اول
 x_2 : یعنی ریشه‌ی دوم

ب) اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد معادله یک جواب (ریشه‌ی مضاعف) دارد؛ $x = \frac{-b}{2a}$

پ) اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد معادله جواب ندارد.

مثال، جواب کوچک از معادلات زیر را به روش گسسته‌ی اکوید پیدا کنید.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{الف)} \quad x^2 + 7x - 2 = 0 \quad \text{ب)} \quad 3x^2 + x + 7 = 0 \quad \text{پ)}$$

تست 4: کدام معادله‌ی زیر ریشه‌ی حقیقی ندارد؟ (گزینه‌ها)

$$(x-2)(x+1)+5=0 \quad x^2-4x+1=0 \quad x^2-4x+4=0 \quad 3x^2+x-4=0$$

تست 5: معادله $x^2 + (m+1)x + 4 = 0$ ریشه مضاعف دارد. بزرگترین مقدار m کدام است؟ (گ)

۲ ۳ ۴ ۵

نکته: اگر تفاضل دو ریشه معادله صفر باشد آن معادله ریشه مضاعف دارد.

تست 6: در معادله درجه دوم $4x^2 - 20x + m = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر است. یکی از ریشه ها معادله

کدام است؟ (گ)

۲ ۲۲۵ ۲۵ ۳۵

نکته: اگر معادله درجه دوم دارای دو ریشه باشد، دو ریشه می توانند متساوی یا مساوی باشند

یعنی در حالت $\Delta > 0$ معادله دو ریشه متساوی و در حالت $\Delta = 0$ دو ریشه مساوی (یک ریشه مضاعف) دارد

پس در حالت کلی اگر $\Delta \geq 0$ باشد معادله دارای دو ریشه است.

تست 7: به ازای چند مقدار طبیعی برای a معادله $x^2 + 4x + a - 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟ (گ)

۶ ۵ ۴ ۳

تمرین: معادله ها درجه دوم زیر را حل کنید.

$$x^2 - x = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 + 17x - 18 = 0$$

$$3x^2 - x + 4 = 0$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

تست 8: به ازای کدام مقدار k معادله درجه دوم $2x^2 + (k+3)x + 2k = 0$ ریشهی مضاعف دارد؟
(انتخاب - ۹۹ پاسخ)

۱، ۴ ۲، ۱ ۳، ۴ ۴، ۱

تست 9: به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $3x^2 + ax - 2 = 0$ دو جواب حقیقی متغیر دارد؟
(انتخاب - ۹۱ پاسخ)

هر مقدار a هیچ مقدار a فقط ± 4 فقط $a > 4$

تست 10: در معادله درجه دوم $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 4$ بزرگترین جواب x کدام است؟ (انتخاب - ۸۷ پاسخ)

$2\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ $2-\sqrt{3}$ $2+\sqrt{3}$

تست 11: معادله درجه دوم $x(2x-5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشهی مضاعف دارد. مقدار ریشهی مضاعف کدام است؟ (انتخاب - ۹۱ پاسخ)

$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{4}$ $-\frac{5}{4}$ $-\frac{5}{2}$

تست 12: ریشهی کوچکتر معادله $2x^2 + 7x + 3 = 0$ چند برابر ریشهی بزرگتر آن است؟ (تک پاسخ)

$\frac{1}{3}$ ۲ ۶ ۴

رابطه ی بین ریشه های معادله ی درجه دوم با ضرایب

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی $ax^2+bx+c=0$ باشند می توان مجموع ریشه ها،

حاصلضرب ریشه ها و قدرمطلق تفاضل ریشه ها را بدون نیاز به حل معادله و با استفاده از ضرایب

معادله به دست آورد.

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$$

زیرا: اگر x_1 و x_2 دو ریشه ی معادله باشند $\Delta \geq 0$ بوده و ریشه ها در صورت کلی این گونه اند:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$$

زیرا:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a \cdot a}$$

$$\rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

تست 13: به ازای یک مقدار m ، ریشه های معادله ی $2x^2 + 3mx + 2m + 4 = 0$ معلوس می گردند.

مجموع این دو ریشه کدام است؟ (انگیزه خاج - ۹۵)

$$\begin{array}{cccc} & & 1/5 & -1/5 \\ & 2 & & \\ & 3 & & \end{array}$$

تست 14: به ازای کدام مقدار m عدد $\sqrt{2}$ واسطی هندسی بین ریشه های معادله ی $mx^2 - 5x + m^2 - 4 = 0$

است؟ (ریاضه خاج - ۱۴)

$$\begin{array}{cccc} & & -1 & 1 \\ & 2 & & \\ & -3 & & \end{array}$$

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$:

الف) اگر $b=0$ باشد معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد.

ب) اگر $a=c$ باشد یا حاصلضرب ریشه‌ها برابر یک شود دو ریشه معکوس یکدیگرند.

نکته: معادله درجه دوم که مجموع آن (مجموع ریشه‌ها آن) S و حاصلضرب آن‌ها P باشد

عبارت است از:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

تست 15: جواب‌ها کدام معادله به صورت $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ است؟ (الف آن 91-)

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \quad 2x^2 - 2x + 1 = 0 \quad 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

نکته: گاهی اوقات $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 \cdot x_2$ در دل یک عبارت وجود دارند، در این

موارد باید با استفاده از اتحادهای جبری، تجزیه کردن، فاکتورگیری، مضرب مشترک گیری و ...

عبارت را بر حسب S و P نوشت.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

نکته:

تست 16: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشند حاصل $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ کدام است؟

(گ)

$$24 \quad -24 \quad 12 \quad -12$$

تست 17: ریشه‌های معادله $mx^2 - 4x + 2m - 1 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع ریشه‌ها کدام است؟ (گ)

$$3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

تست 18: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x + m + 1 = 0$ باشند به ازای کدام مقدار m رابطه $\alpha + 2\beta = -5$ برقرار است؟ (کج)

-1 1 2 -2

تست 19: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند مقدار $\alpha^2 + 3\beta - 5$ کدام است؟ (کج)

18 15 12 9

تست 20: ضرایب معادله $2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$ اعداد صحیح هستند. اگر به ازای مقدار k حاصل ضرب ریشه‌های این معادله بیشترین مقدار ممکن باشد مقدار k کدام است؟ (انگ - 14.2)

4 5 7 28

کنبرد معادلات درجه دوم در حل مسائل توصیفی

حل بعضی از مسائل توصیفی منجر به حل یک معادله درجه دوم میشود. در این گونه مسائل دو جواب برای مجهول پیدا میشود که معمولاً یکی از آن‌ها با توجه به شرایط سوال قابل قبول نیست. مثلاً اگر سن فردی عدد منفی شود، طول ضلع یک شکل هندسی منفی شود و... آن‌ها جواب‌ها غیر قابل قبول می‌باشند.

تست 21: حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، از 9 برابر عدد کوچکتر، 1 واحد بیشتر است. عدد کوچکتر بر کدام عدد

بخش پذیر است؟ (گزینه‌ها)

۷ ۶ ۵ ۴

تست 22: مجموع پول علی و اکرم 100 تومان است. اگر علی 10 تومان از پولش را به اکرم بدهد آن‌گاه

حاصل ضرب پول‌های باقی‌مانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم کدام است؟

(گزینه‌ها - معادل)

۹۱

۸۵

۱۵

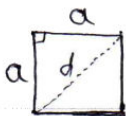
۹

داشتن مطالب زیر ضروری است؛

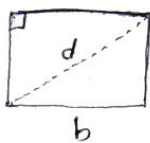
۱. قضیه فیثاغورس: در هر مثلث قائمه‌الزاویه، مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع قائم برابر است.



نتیجه:



$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightarrow d = \sqrt{2} \cdot a$$



$$d^2 = a^2 + b^2 \rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



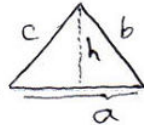
توجه: دو مورد زیر را حفظ باشید:

(2) مساحت و محیط اشکال هندسی معروف



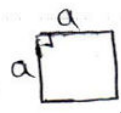
$$S = \pi \cdot r^2$$

$$P = 2\pi r$$



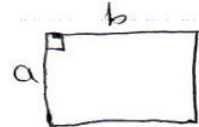
$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$P = a + b + c$$



$$S = a^2$$

$$P = a + a + a + a = 4a$$

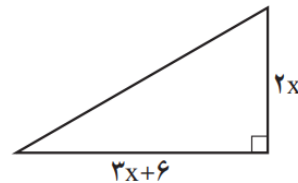
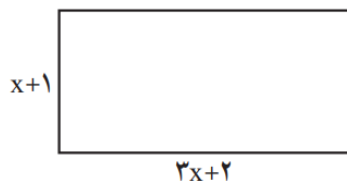


$$S = ab$$

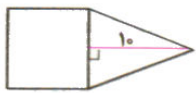
$$P = 2(a + b)$$

(S: مساحت، P: محیط)

مثال: مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند. طول عرض این مستطیل چند است؟



تست 23: در شکل زیر مساحت مثلث مساوی است با مساحت مربع به اندازه 1 واحد



مربع کمتر است. مساحت مثلث کدام است؟ (انگ - 99)

۳۵ ۴۰ ۴۵ ۵۰

تست 24: در شکل زیر مساحت مربع از 3/4 مساحت مستطیل بزرگتر ۱۸ واحد مربع بیشتر است.



مساحت مستطیل بزرگتر کدام است؟ (انگ - 99)

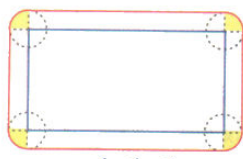
۴۴ ۴۸ ۵۲ ۵۴

تست 25: در شکل مقابل مساحت مربع از 1/4 مساحت مثلث سایه خورده به اندازه 6/3 واحد مربع بیشتر است. نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل بزرگتر کدام است؟ (انگ - ۱۴۰۱)

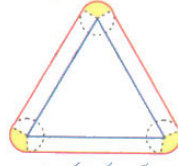


1/5 1/3 3/4 1/4

نکته: اگر می‌خواهیم از محیط یک شش‌هندس، فاصله‌ای به اندازه‌ی ۲ ایجاد کنیم کافی است به موازات اضلاع، خطوطی به فاصله‌ی ۲ و در رأس‌ها دایره‌ای به مرکز رأس و شعاع ۲ رسم کنیم.



چهار قسمت رنگی تشکیل یک دایره می‌دهند.



سه قسمت رنگی تشکیل یک دایره می‌دهند.

تست 26: می‌خواهیم دور یک باغچه‌ای به شکل مستطیل که طول آن دو برابر عرض آن است حصار بکشیم، به طوری که باز در کنار آن به یک سری باغچه نزدیک نشوند. اگر مساحت زمین معصوم $1 + \frac{1}{18}\pi$ برابر مساحت باغچه باشد طول باغچه چند متر است؟ (۱۶.۲ - ۱۶.۳)

۳

۴

۶

۸

$$x^2 - (x-2)^2 = 0 \rightarrow (x - (x-2))(x + (x-2)) = 0 \rightarrow (x - x + 2)(x + x - 2) = 0 \rightarrow (2)(2x - 2) = 0$$

حل تست 1:

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{2} \\ x = -2 \end{cases} \quad -2 < \frac{2}{2}$$

حل تست 2:

$$\sqrt{x} + 2 - (2 + \sqrt{x}) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \end{cases} \quad \frac{2\sqrt{x}}{x} > 1$$

حل تست 3:

$$3x^2 + 2x - 4 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} \rightarrow n = \frac{12}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

حل تست 4:

ص، دیکھی ہوگی از محارلات را برسی میکنم:

$$3x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(3)(-4) > 0 \quad \text{دو ریشه دارد.}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0 \quad \text{یک ریشه مضاعف دارد}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = 36 - 4(1)(9) = 0 \quad \text{دو ریشه دارد.}$$

$$(x-2)(x+1) + 0 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 + 0 = 0 \rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(3) < 0$$

ریشه ندارد

حل تست 5:

$$\Delta = 0 \rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow (m+1)^2 - 16 = 0 \rightarrow (m+1)^2 = 16$$

$$\rightarrow \begin{cases} m+1=4 \rightarrow m=3 \\ m+1=-4 \rightarrow m=-5 \end{cases} \quad \text{بزرگترین مقدار } m \text{، 3 است.}$$

حل تست 6:

$$\Delta = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-20)}{2(4)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

حل تست 7:

$$\Delta > 0 \rightarrow 4 - 4(a-1) > 0 \rightarrow 4 - (a-1) > 0 \rightarrow 5 - a > 0 \rightarrow a < 5$$

$$\rightarrow a = 1, 2, 3, 4$$

حل تست 8: $\Delta = 0 \rightarrow (k+2)^2 - 4(2)(2k) = 0 \rightarrow k^2 + 4k + 4 - 16k = 0 \rightarrow k^2 - 12k + 4 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=9 \end{cases}$$

حل تست 9: $\Delta > 0 \rightarrow a^2 + 34 > 0 \rightarrow$ دهر عددی منکوانه

حل تست 10: $x-1=t \Rightarrow t^2 + 2\sqrt{3}t - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 12+32} \begin{cases} t_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{44}}{2} = -\sqrt{3} + 2 \\ t_2 = \frac{-2\sqrt{3} - \sqrt{44}}{2} = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1 = 2-\sqrt{3} \rightarrow x = 3-\sqrt{3} \\ x-1 = -2-\sqrt{3} \rightarrow x = -1-\sqrt{3} \end{cases} \quad 2-\sqrt{3} > -2-\sqrt{3}$$

حل تست 11: $2x^2 - 2x - a = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{a}{2}$

حل تست 12: $\frac{(2x+4)}{2}(2x+1) = 0 \rightarrow (x+2)(2x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

باج: $\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4$

حل تست 13: اگر ریشه ها معکوس یکدیگر باشند حاصلضرب آن ها 1 است و

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \rightarrow \frac{2m+4}{2} = 1 \rightarrow m+2 = 1 \rightarrow m = -1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2(-2)}{2} = 2$$

حل تست 14: $2 = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \frac{m^2-3}{m} = 2 \rightarrow m^2 - 3 = 2m \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$

$$\rightarrow (m-3)(m+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}$$

اگر $m=3$ باشد: $2x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(2)(4) < 0$ لذا معادله جواب ندارد و $m=-1$ قبل

حل تست 15:

$$S = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 2, \quad P = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

حل تست 16:

$$x_1 + x_2 = -2$$

$$x_1 x_2 = -2$$

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = x_1 x_2 ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) = -2((-2)^2 - 2(-2)) \\ = -2(4 + 4) = -16$$

حل تست 17:

چون ریشه ها معکوس یکدیگرند پس $\frac{c}{a} = 1$ و در ششم $c = a$ یعنی:

$$2m-1 = m \rightarrow m = 1 \quad \text{و معادله به صورت } x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ می شود بنابراین}$$

$$\text{مجموع ریشه ها برابر } -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{1} = 4 \text{ است.}$$

حل تست 18:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases} \quad \alpha\beta = \frac{2m+1}{1} \Rightarrow -2 = 2m+1 \\ \beta = -3 \text{ و } \alpha = 1 \quad m = -2$$

حل تست 19:

مردانیم ریشه ها معادله در معادله صدق می کنند؟ $\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 5 = 3\alpha$

$$\alpha + \beta = 3 \text{ و}$$

$$\rightarrow \alpha^2 + 3\beta - 5 = \alpha^2 - 5 + 3\beta = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) \\ = 3(3) = 9$$

حل تست 20:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4k-5}{2k} = \frac{-2k}{2k} - \frac{5}{2k} = -2 + \frac{-5}{2k}$$

برای اینکه عبارت $-2 + \frac{-5}{2k}$ به یک عدد صحیح تبدیل شود باید $\frac{-5}{2k}$ نیز یک عدد صحیح ممکن شود یا کسری

این ضرایب معادله از جمله $2k$ عدد صحیح هستند $\frac{-5}{2k}$ زمانی نیز یک عدد صحیح می شود است که

مخرج منفی و بزرگترین باشد بنابراین $2k = -1$ و در ششم $k = \frac{1}{2}$ ؛

$$-x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(3) = 4$$

حل تست 21:

$$x(x+1) = 9x+1 \rightarrow x^2+x=9x+1 \rightarrow x^2-8x-1=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \times \\ x_2 = \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8} \checkmark \end{cases}$$

و 1 بر 8 جفت نیست.

پولادین
پولادین

$$a+b=100 \rightarrow a=100-b$$

حل تست 22:

$$(a-1)(b+1) = 175 \rightarrow (90-b)(b+1) = 175 \rightarrow -b^2 + 10b + 90 = 175$$

$$\rightarrow b^2 - 10b - 85 = 0 \rightarrow (b-15)(b+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} b=15 \\ b=-5 \end{cases}$$

حل تست 23:

$$S_{\text{متوالیاتی}} = \frac{2}{3} S_{\text{مربع}} - \frac{1}{3}$$

$$5x = \frac{2}{3} x^2 - \frac{1}{3} \rightarrow 2x^2 - 15x - 1 = 0 \rightarrow \frac{(2x-17)}{2} (2x+2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x=-1 \times \end{cases}$$

$$S_{\text{متوالیاتی}} = 5(1) = 5$$

حل تست 24:

اندازهی ضلع مربع را x در نظر میگیریم:

$$S_{\text{مربع}} = \frac{3}{4} S_{\text{متوالیاتی}} + 11$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{3}{4} (x+2)(x) + 11 \rightarrow x^2 = \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{2} x + 11 \rightarrow \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{2} x - 11 = 0$$

$$x^2 - 6x - 44 = 0 \rightarrow (x-14)(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=14 \checkmark \\ x=-4 \times \end{cases}$$

$$S_{\text{متوالیاتی}} = 2(x+x+2) = 2(14+14+2) = 2(30) = 60$$

حل تست 25:

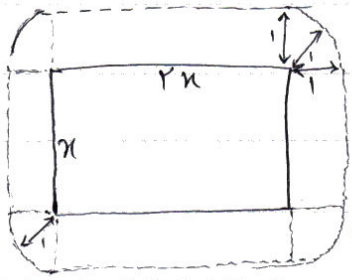
$$S_{\text{مربع}} = \frac{1}{4} S_{\text{متوالیاتی}} + \frac{5}{4} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} (2x) + \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} = 0 \rightarrow 4x^2 - 2x - 5 = 0 \rightarrow \frac{(4x+5)}{4} (4x-4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-1 \times \\ x=\frac{5}{4} \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{متوالیاتی}}} = \frac{x^2}{x(x+4)} = \frac{x}{x+4} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}+4} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}$$

حل تست 26:



باغچه و صدار آن به شکل زیر است:

حصار باغچه شامل خود باغچه، دو مستطیل به طول x و عرض 1 !دو مستطیل به طول $2x$ و عرض 1 و $\frac{1}{4}$ ربع دایره (یک دایره)به شعاع 1 است. با توجه به توضیحات سوال داریم:

$$S_{\text{حصار}} = S_{\text{باغچه}} + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) S_{\text{باغچه}}$$

$$2x \cdot x + 2(2x \cdot 1) + 2(x \cdot 1) + \pi \cdot (1)^2 = 2x \cdot x + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x \cdot x$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + 2x + \pi = 2x^2 + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x^2 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x^2 - 4x - \pi = 0$$

$$\pi \approx 3 \rightarrow \frac{1}{3} 2x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow \frac{2}{3} x^2 - 4x - 9 = 0$$

$$\rightarrow \frac{(2x-21)}{3} (2x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \checkmark \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow 2x = 2(3) = 6$$

معادلات شامل عبارت های گویا

معادله گویا: معادلاتی هستند که در آن مجهول، در مخرج عبارت کسری نیز قرار دارد.

مثلا معادله $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{2x+1}{x}$ یک معادله گویا است.

حل معادلات گویا: منظور از حل معادله گویا، به دست آوردن عددهایی به جای متغیر x است که در

معادله صدق می کنند. جواب، یا جواب هایی که بدست می آوریم نباید مخرج کسر را صفر کنند.

توجه: جواب هایی که مخرج کسر را صفر می کنند تعریف نشده اند.

نکته: برای حل معادلات گویا گام ها زیر را طی می کنیم:

۱. مخرج کسرها را آنجایی که آنها دارد تجزیه می کنیم.

۲. کم م. م. مخرج ها را به دست آورده و طرفین معادله را در آن ضرب می کنیم تا معادله از حالت کسری

خارج شود.

یادآوری: اگر m و n دو عبارت باشند و تجزیه شده ی آنها به صورت $m = a^2 b^3 c^4 d$ و $n = a^3 b^4 c^5 d^2 e$

باشد کم م آنها از ضرب عامل ها مشترک با بیشترین توان و عامل های غیر مشترک به دست

می آید: $\text{کم م } m, n = a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 \cdot d \cdot e$

۳. معادله ی جدیدی که به دست می آید حل می کنیم. (این معادله، یک معادله ی درجه ی اول یا درجه ی دوم است.)

۴. بررسی می کنیم که جواب ها بدست آمده، مخرج هیچ یک از کسرها معادله ی اولیه را صفر نکنند.

مثال، معادله ی $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-4x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

تست 1: جواب‌ها معادله‌ی $\frac{x+4}{x} + \frac{x}{2} = 4$ چگونه اند؟ (6)

دو جواب مختلف علامه یک پاسخ صحیح یک جواب مثبت یک جواب منفی

مثال: به ازای چه مقدار a معادله‌ی $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

مثال: معادله‌ها زیر را حل کنید.

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{x} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \quad \text{ب)}$$

$$\Rightarrow \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

تست 2: مجموع ریشه‌ها معادله‌ی $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-2} = \frac{2}{3}$ کدام است؟ (انسان - 99)

۱۲ ۶ ۴ -۴

تست 3: ریشه‌ها معادله $2x + \frac{x^2-4x}{x-2} - \frac{x-4}{x-2} = 0$ چگونه اند؟ (انسان - 95)

یک جواب مورد قبول دو جواب مساوی دو جواب قرینه دو جواب وارون هم

تست 4: برای پیدا کردن مقدار m ، $x=2$ جواب معادله $\frac{x+1}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-2)}$ است. (انتخاب - 14)

۱ ۲ ۳ هیچ مقداری از m

تست 5: حاصلضرب ریشه های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = 2$ کدام است؟ (انتخاب - 14)

۱۸ - ۶۵ - ۲ - ۱۵ -

نکته: در معادلات گویا اگر در طرفین x و y فقط یک کسر وجود داشته از بین بردنخرج ها مانند این است که داریم طرفین را ضرب می کنیم.

$$\frac{x-2}{x-2} = \frac{x+1}{x+2} \rightarrow (x-2)(x+2) = (x-2)(x+1)$$

$$\rightarrow x^2 + x - 4 = x^2 - 2x - 4 \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ مضرب هیچ کسری را صفر نمی کند پس جواب معادله فوق است.

تست 6: جواب های معادله $\frac{-2x^2 - 4x}{x^2 - 9} = \frac{x^2 + x + 2}{x+2}$ چگونه اند؟ (گزینه)

دو ریشه ی مجزا دو ریشه ی منفی و یک ریشه ی مثبت دو ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی دو ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی

نکته: در معادلات گویا می توانیم عبارت ها را از صورت وخرج هربا حذف کنیم و پس معادله ساده تر را حل کنیم.

تست 7: کدام نرینه در مورد معادله $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x+1}{x+2}$ درست است؟ (گزینه)

دو جواب مختلف علامت دارد دو جواب مثبت دارد یک جواب مثبت دارد یک جواب منفی دارد

کاربرد معادلات گویا در مسائل توصیفی

گاهی حل مسائل توصیفی منجر به حل یک معادله گویا می‌شود که در کتاب درسی کارها را آورده شده است:

۱. مسائل مربوط به اعداد:

در این مسائل معمولاً عدد مطرح می‌شود. اگر عدد را x فرض کنیم معادله آن $\frac{1}{x}$ خواهد شد.

تست 8: مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ شده است. عدد بزرگتر بر کدام عدد بخش پذیر است؟ (۶)

۳ ۴ ۹ ۷

۲. مسائل خلوص یا غلظت:

وقتی گفته می‌شود محلول با غلظت x در دست داریم یا در پی خلوص یک ماده

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{وزن یک ماده}}{\text{وزن کل}} \quad \text{و} \quad \frac{x}{1-x} = \frac{\text{مقدار ماده‌ی حل شده}}{\text{مقدار محلول}}$$

مثال: در یک طردان نقره‌ای، نسبت وزن نقره‌ی خالص به وزن مس خالص ۱ است. بعد از ذوب کردن و اضافه کردن ۱۰۰ گرم مس به آن $\frac{4}{5}$ وزن طردان جدید نقره‌ای است. وزن طردان قبل از ذوب شدن کدام است؟

حل: اگر وزن مس را x در نظر بگیریم وزن نقره $1x$ و وزن طردان $9x = 1x + 1x$ خواهد بود. حال بعد از ذوب کردن طردان و اضافه کردن ۱۰۰ گرم مس به آن وزن طردان جدید $9x + 100$ است که وزن نقره به وزن طردان برابر $\frac{4}{5}$ است. پس:

$$\frac{1x}{9x+100} = \frac{4}{5} \rightarrow 5x = 4(9x+100) \rightarrow 5x = 36x+400 \rightarrow x = 100$$

پس برای وزن طردان قبل از ذوب $9x = 9 \times 100 = 900$ می‌باشد.

تست 9: یازده کیلوگرم زنگ با غلظت ۴ درصد با ۴ کیلوگرم زنگ از همان نوع با غلظت ۷ درصد مخلوط شده اند.

با تقسیم خنثی‌کنیم از آن، غلظت محلول ۵ درصد می‌رسد؟ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۸

زمان انجام کار: اگر کاری توسط فردی در a روز (یا ساعت یا...) و همکار توسط فردی دیگر

در b روز (یا ساعت یا...) انجام شود آن‌گاه این دو نفر این کار را با هم در c روز (یا ساعت یا...) انجام می‌دهند که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

تست 10: اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند چمن‌ها یک بارک رادر ۱۲ ساعت کوتاه می‌کند. اگر سرعت کار یکی از

آن‌ها دو برابر دیگری باشد ماشین کندتر در چند ساعت به تنهایی کار را تمام می‌کند؟

۲۶

۳۶

۲۸

۱۸

۴ سهم بندی: اگر بخواهیم یک شئی را بین n نفر تقسیم کنیم سهم هر نفر $\frac{1}{n}$ شئی خواهد بود.

تست 11: یک کیک را بین چند نفر به مقدار مساوی تقسیم کرده‌ایم. اگر دو نفر به آن‌ها اضافه شود، پس از تقسیم دوباره

یک‌بین آن‌ها به هر یک به اندازه‌ی $\frac{1}{6}$ کمتر از بار اول می‌رسد. تعداد افراد در ابتدا چند نفر بوده است؟

۱۰

۹

۸

۷

۵. مثال مسافت و سرعت: اگر متحرک مسافت x را با سرعت متوسط v در زمان t طی کند

$$x = vt \quad \rightarrow \quad v = \frac{x}{t} \\ t = \frac{x}{v}$$

رابطه‌ی زیر برقرار است:

تست 12: متحرک مسیری ۳ طول ۹۰ کیلومتر را رفته و برگشته است. اگر در مسیر برگشت از سرعت متحرک $\frac{1}{2}$ کیلومتر

بر ساعت کاسته شود زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد بود. مجموع زمان

رفت و برگشت کدام است؟ ۲.۵ ۳ ۳.۵ ۴

تست 13: دانش‌آموز یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد

۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

$\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{5}$ (۱۴.۲ - ۱۵)

تست 14: دو شیر A و B به یک استقر متصل هستند. شیر A ۱۵ ساعت دیرتر از شیر B استقر را پر

می‌کند. اگر دو شیر باز باشند استقر در ۴ ساعت پر می‌شود. چند شیر از نوع A به استقر اضافه

کنیم تا وقتی همه شیرها به طور همزمان باز باشند استقر در یک ساعت پر شود؟ (۱۴.۲ - ۱۵)

۱۸ ۱۶ ۱۴ ۱۲

حل تست 1: $\frac{2x(x+1)}{x} + 2x \cdot \frac{x}{x} = 2x \cdot 1 \rightarrow 2(x+1) + x^2 = 2x \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x=2 \checkmark \\ x=1 \checkmark \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

1-60 میں مربع دیرات

حل تست 2: $\frac{3(x+2)(x-2)}{x(x-2)} \rightarrow \frac{3(x+2)(x-2)}{x(x-2)} \cdot \frac{2x-1}{x+2} - \frac{(x-2)}{x-2} \cdot (3(x+2)(x-2)) = \frac{2}{x} \cdot 3(x+2)(x-2)$

$$\rightarrow 3(x+2)(2x-1) - 3(x-2)(x+2) = 2(x+2)(x-2)$$

$$\rightarrow 3(2x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 4) = 2x^2 - 8 \rightarrow 4x^2 - 12x + 10 = 2x^2 - 8 \rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

حل تست 3: $2x(x-2) + x^2 - 5x - 4 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x + x^2 - 5x - 4 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x - 4 = 0$

$$\rightarrow 3x^2 - 7x - 4 = 0 \rightarrow (3x+4)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x=-\frac{4}{3} \times \end{cases}$$

حل تست 4: $\frac{y+1}{y-2} - \frac{y}{y} = \frac{ym^2}{y(y-2)} \rightarrow -\frac{y-1}{y-2} = \frac{ym^2}{y-2} \rightarrow -y+1 = ym^2 \rightarrow ym^2 = 1-y \rightarrow m^2 = \frac{1-y}{y}$

$$\rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

حل تست 5: $\frac{(x+1)(x+2) \cdot \frac{x}{x-1}}{x(x-1)} - \frac{(x-2)(x+2) \cdot \frac{x}{x+2}}{x(x+2)} = 2(x-2)(x+2)$

$$x(x+2) - (x-2)(x+2) = 2(x-2)(x+2) \rightarrow x^2 + 2x - x^2 + 4 = 2x^2 + 4x - 8$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 11 = 0 \rightarrow x_1 \cdot x_2 = -11$$

حل تست 6:

$$\rightarrow (-2x^2 - 5x)(x+2) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4) \rightarrow -2(x^2 + x)(x+2) = (x+2)(x+1)(x+2)(x-2)$$

$$\rightarrow -2x(x+1)(x+2) = (x+2)(x+1)(x+2)(x-2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \checkmark \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \checkmark \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \checkmark \\ -2x = x^2 - 4 \rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow \Delta = 4 + 16 = 20 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = -1 - \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

حل تست 7:

$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)(x-5)} = \frac{x+1}{x+2} \rightarrow \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+2} \rightarrow (x-2)(x+2) = (x+1)(x-4)$$

$$\rightarrow x^2 + x - 4 = x^2 - 3x - 4 \rightarrow x - 4 = -3x - 4$$

$$\rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

حل تست 8:

اگر دو عدد زوج متوالی را x و $x+2$ فرض کنیم داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \rightarrow 12(x+2) + 12x = 5x(x+2) \rightarrow 12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x$$

$$\rightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0 \rightarrow \frac{(5x-24)(x+4)}{5} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ x = -4 \end{cases}$$

عدد x بر عین یکس نیز است.

حل تست 9:

ابتدا وزن خالص ماده‌ی حل شده در هر حالت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{وزن ماده‌ی حل شده}}{11} = \frac{40}{100} \rightarrow \text{وزن ماده‌ی حل شده} = 44$$

$$\frac{\text{وزن ماده‌ی حل شده}}{4} = \frac{70}{100} \rightarrow \text{وزن ماده‌ی حل شده} = 28$$

پس از مخلوط کردن رنگ‌ها $44 + 28 = 72$ لیتر رنگ داریم. با $44 + 28 = 72$ لیتر رنگ از ماده‌ی حل شده داریم.

ما خواهیم با تفکیک غلظت آن به 50 درصد برسیم. فرض کنیم x لیتر از محلول باید تفکیک شود:

$$\frac{72}{13-x} = \frac{50}{100} \rightarrow 72 = 5(13-x) \rightarrow 72 = 65 - 5x \rightarrow 5x = 65 - 72 \rightarrow 5x = -7 \rightarrow x = -\frac{7}{5}$$

حل تست 10:

اگر ماشین سریع‌تر چن هارادر x ساعت کوکاه کند ماشین کندتر کار را در $2x$ ساعت تمام کند. ماشین هارادر

$\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{2x}$ کار را انجام می‌دهند. چون هر دو با هم در 12 ساعت چن هاراکو تمام می‌کنند پس داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{12} \xrightarrow{\times 12x} 12 + 6 = x \rightarrow x = 18$$

$\frac{1}{12}$ کل کار را انجام می‌دهند بنابراین داریم:

حل تست 11:

فرض کنیم ابتدا x نفر بودند:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{60} \rightarrow 60(x+2) = 60x + x(x+2)$$

$$\rightarrow 60x + 120 = 60x + x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ x = 12 \end{cases}$$

$x = 12$ ✓

حل تست 12: اگر سرعت متحرک در مسیر رفت v باشد در مسیر برگشت $v-10$ خواهد بود در این زمان $t_{\text{برگشت}} = t_{\text{رفت}} + \frac{1}{2}$

$$\text{مسافت هم:} \quad \frac{40}{v-10} = \frac{40}{v} + \frac{1}{2} \rightarrow 120v = 120(v-10) + v(v-10)$$

$$\rightarrow 120v = 120v - 1200 + v^2 - 10v \rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0 \rightarrow (v-40)(v+30) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} v=40 & \checkmark \\ v=-30 & \times \end{cases}$$

$$\rightarrow t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = \frac{40}{30} + \frac{40}{40} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}$$

حل تست 13: سرعت اوسه خود را v فرض میکنیم و میزنیم: 50 دقیقه یعنی $\frac{50}{4}$ ساعت (یعنی $\frac{5}{4}$)

$$t_{\text{اوسه}} = t_{\text{خود}} + \frac{5}{4} \rightarrow \frac{200}{v} = \frac{200}{v-20} + \frac{5}{4} \rightarrow 1200(v-20) = 1200v + 5(v(v-20))$$

$$\rightarrow 1200v - 24000 = 1200v + 5v^2 - 100v \rightarrow 5v^2 - 100v + 24000 = 0$$

