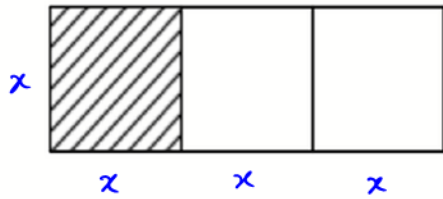


۱- در شکل زیر مستطیل بزرگ از ۳ مربع یکسان تشکیل شده است. اگر مساحت مستطیل بزرگ از $\frac{2}{3}$ مساحت یکی از مربع ها ۱۴ واحد بیشتر باشد، اختلاف طول و عرض مستطیل بزرگ کدام است؟



$$S_{\text{مستطیل بزرگ}} = x(3x) = 3x^2$$

$$S_{\text{مربع کوچک}} = x^2 \Rightarrow 3x^2 = \frac{2}{3}x^2 + 14$$

$$2\sqrt{6} \quad (1) \checkmark$$

$$\sqrt{6} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 2x^2 = 42 \Rightarrow 7x^2 = 42 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\text{اختلاف طول و عرض مستطیل} = 3x - x = 2x = 2\sqrt{6}$$

۲- مجموعه $(A - B) - (C - B)$ با کدام یک از مجموعه های زیر برابر است؟

$$A - (B \cup C) \quad (2)$$

$$(B - C) - A \quad (1)$$

$$(A - B) - C \quad (4) \checkmark$$

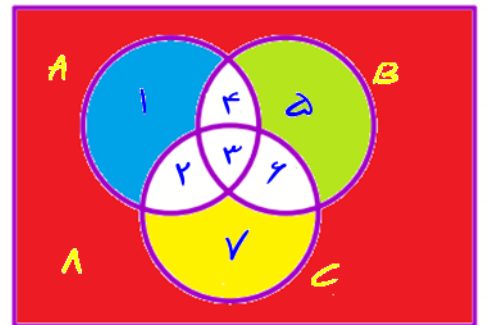
$$B - (A \cup C) \quad (3)$$

با استفاده از نمودار ون به سهولت زیر برای هر کدام از مجموعه های A ، B ، C خواهیم داشت:

$$(A - B) = \{1, 2, 3, 4\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$$

$$(C - B) = \{2, 3, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{2, 6\}$$

$$\Rightarrow (A - B) - (C - B) = \{1, 2\} - \{2, 6\} = \{1\}$$



گزینه به بزرگی گزینه های برادریم.

$$(1) \text{ گزینه } \Rightarrow (B - C) - A = (\{3, 4, 5, 7\} - \{2, 3, 6, 7\}) - \{1, 2, 3, 4\} = \{5\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5\} \times$$

$$(2) \text{ گزینه } \Rightarrow A - (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} - (\{3, 4, 5, 7\} \cup \{1, 4, 5, 6\}) = \{1, 2\} \times$$

$$(3) \text{ گزینه } \Rightarrow B - (A \cup C) = \{3, 4, 5, 7\} - (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 6, 7\}) = \{5\} \times$$

$$(4) \text{ گزینه } \Rightarrow (A - B) - C = (\{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4, 5, 7\}) - \{2, 3, 6, 7\} = \{1\} \checkmark$$



۳- تابع با ضابطه $f(x) = (\Delta x^2 - (ax+1)(x-b))c$ ثابت است. اگر $f(x+y) = f(x)f(y) - 2$ باشد، مقدار مثبت c کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱) ✓

$$f(x) = (\Delta x^2 - ax^2 + abx - x + b)c = k \quad \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow (\Delta - a)x^2 + (ab - 1)x + b = k' \Rightarrow \begin{cases} \Delta - a = 0 \Rightarrow a = \Delta \\ ab - 1 = 0 \Rightarrow ab = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{a} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow f(x) = bc = \frac{1}{\Delta}c$$

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x)f(y) - 2 \Rightarrow \frac{c}{\Delta} = \frac{c}{\Delta} \times \frac{c}{\Delta} - 2 \Rightarrow c^2 - 2c - \Delta = 0$$

$$\Rightarrow (c-1)(c+\Delta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \quad \checkmark \\ c = -\Delta \quad \times \end{cases}$$

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} [1-x] & x | x \text{ مثبت} \\ [1+2x] & x | x \text{ منفی} \end{cases}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{\pi}) + f(-1,7)$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۴ (۳) ✓

-۳ (۲)

-۲ (۱)

$$x = \sqrt{\pi} \Rightarrow \sqrt{\pi} | \sqrt{\pi} | > 0 \Rightarrow f(\sqrt{\pi}) = [1 - \sqrt{\pi}] = 1 + \underbrace{[-\sqrt{\pi}]}_{-2} = -1$$

$$x = -1,7 \Rightarrow (-1,7) | -1,7 | < 0 \Rightarrow f(-1,7) = [1 + 2(-1,7)] = 1 + \underbrace{[-2,4]}_{-2} = -3$$

$$\Rightarrow -1 - 2 = -3$$

۵- نقاط متمایز $(1, 3a)$ ، $(-1, a)$ و $(a, 3)$ روی یک خط قرار دارند. مقدار a کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲) ✓

-۲ (۱)

هر دو نقطه یک خط هستند.

$$(a, 3)(-1, a) \Rightarrow m = \frac{a-3}{-1-a}$$

$$(-1, a)(1, 3a) \Rightarrow m = \frac{3a-a}{1+1} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\Rightarrow \frac{a-3}{-1-a} = a \Rightarrow a-3 = -a-a^2 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 & \text{غلط} \\ a = 1 & \text{غلط} \end{cases}$$

(دو نقطه یک خط هستند)

۶- رابطه‌های زیر، تابع هستند. اگر مجموعه A برد تابع $f - g$ باشد، مجموع مقادیر اعضای A کدام است؟

$$f = \left\{ \left(7, \frac{k}{2} - 1 \right), \left(-\frac{5}{2}, 1 - k \right), (5, 2), \left(7, \frac{1}{2} \right) \right\} \Rightarrow \frac{k}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 3 \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$g = \left\{ (5, n), \left(-\frac{5}{2}, \frac{n-1}{2} \right), (4, 3 - 2n^2), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right\} \Rightarrow \frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow n = -2 \quad \frac{7}{2} \quad (2) \checkmark$$

$$\Rightarrow f = \left\{ \left(7, \frac{1}{4} \right), \left(-\frac{5}{2}, -2 \right), (5, 2) \right\}, \quad g = \left\{ (5, -2), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right), (4, -5) \right\} \quad \frac{11}{6} \quad (3)$$

$$\Rightarrow f - g = \left\{ (5, 2), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\} \quad A = \left\{ 5, -\frac{1}{2} \right\} \quad \frac{7}{6} \quad (4)$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

۷- هر دو ریشه معادله $(2a+1)x^2 - 4ax + 2a - 1 = 0$ مثبت هستند. کدام مقدار زیر می‌تواند باشد؟

$$\frac{3}{8} \quad (4) \quad -\frac{2}{3} \quad (3) \checkmark \quad -\frac{3}{10} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

اگر ریشه‌های معادله را به صورت α و β در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{4a}{2a+1} > 0 \quad (1)$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2a-1}{2a+1} > 0 \quad (2)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (4a)^2 - 4(2a+1)(2a-1) > 0 \Rightarrow 16a^2 - 4(4a^2 - 1) > 0 \Rightarrow 4 > 0 \quad \checkmark$$

با بررسی نیتک، جایگزینی در شرط‌های (1) و (2) فقط گزینه ۳ را راز صحیح به نظر می‌رسد.

$$\alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow (1) S = \frac{4(-\frac{2}{3})}{2(-\frac{2}{3})+1} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}} = 8 \quad (2) P = \frac{2(-\frac{2}{3})-1}{2(-\frac{2}{3})+1} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = 7$$

۸- معادله $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{x}{x - 2}$ دارای چند جواب منفی است؟

۱ (۱) ✓ ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-2)} = \frac{x}{x-2} + 1 = \frac{x+x-2}{x-2} = \frac{2x-2}{x-2} \quad x \neq 2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = x^2 - 2x + 3$$

نقطه $x = -\sqrt{3}$ جواب شده است. $\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

۹- در داده‌های ۱۵، ۱۱/۵، ۴، ۵، ۹، ۱۱، ۵/۱۰، ۱۷ و ۱، حاصل ضرب میانه و میانگین کدام است؟

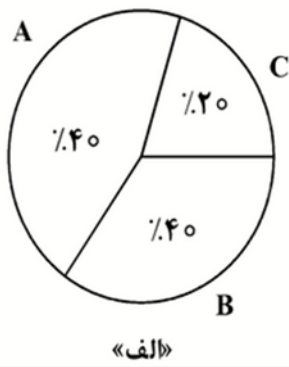
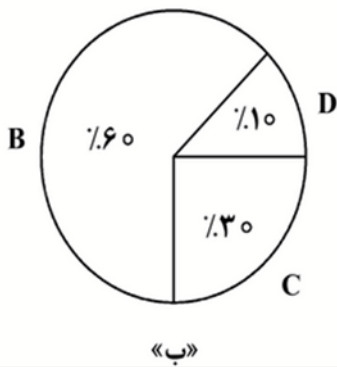
۶۳ (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۸ (۴) ✓

۱، ۴، ۵، ۹، ۱۰، ۵، ۱۱، ۱۱، ۵، ۱۵، ۱۷

میانه $= 10,5 = Q_2 = \frac{21}{2}$

میانگین $\bar{x} = \frac{1+4+5+9+10,5+11+11,5+15+17}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3} \Rightarrow \bar{x} \times Q_2 = \frac{28}{3} \times \frac{21}{2} = 14 \times 7 = 98$

۱۰- اگر زاویه مربوط به داده «A» در یک نمودار دایره‌ای شامل چهار داده A، B، C و D برابر ۱۳۵ درجه باشد، کدام عدد زیر، مجموع فراوانی نمودار «ب» است؟



- ۱۶ (۱)
۱۵ (۲)
۱۰ (۳) ✓
۹ (۴)

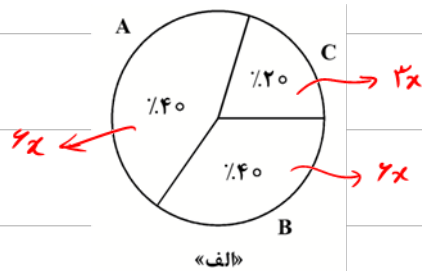
با توجه به نمودار «ب»، فراوانی C، ۲ برابر فراوانی D است. فراوانی D، C را به ترتیب x و $2x$ در نظر بگیریم.

پس فراوانی A، B، C، D به ترتیب $4x$ ، $4x$ ، $2x$ و x است.

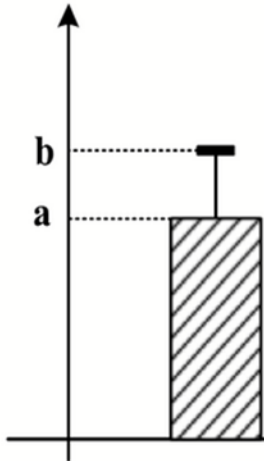
فراوانی کل داده‌ها (نمودار «ب» برابر است با:

$$f_B + f_C + f_D = 4x + 2x + x = 10x$$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد با جایگزینی اعداد صحیح به جای x ، نقطه کسری ۳ را نادیده می‌گیریم.



۱۱- داده‌های ۲۷، ۲۵، ۲۳، ۲۱، b و a، مربوط به سن دوستان مریم است که در تولد ۲۲ سالگی اش (مهمانی اول) شرکت داشتند و نمودار زیر نشان‌دهنده دو شاخص سن افراد حاضر در این مهمانی است. مریم ۱۰ سال بعد، زمانی که صاحب فرزند شد، تصمیم می‌گیرد به اتفاق پدر بزرگ و مادر بزرگش یک مهمانی (مهمانی دوم) ترتیب دهد و همه دوستانش که در مهمانی اول حضور داشتند را دعوت کند. اگر واریانس سن افراد در مهمانی اول ۴ باشد، مقدار شاخص مرکزی مناسب برای سن افراد در مهمانی دوم، کدام است؟



مهمانی اول: در این افراد سن در مهمانی اول $\sigma^2 = 4$ بوده پس انحراف معیار سن آن $\sigma = 2$ است. با توجه به نمودار، $b - a$ برابر با انحراف معیار است. $b - a = 2 \Rightarrow b = a + 2$

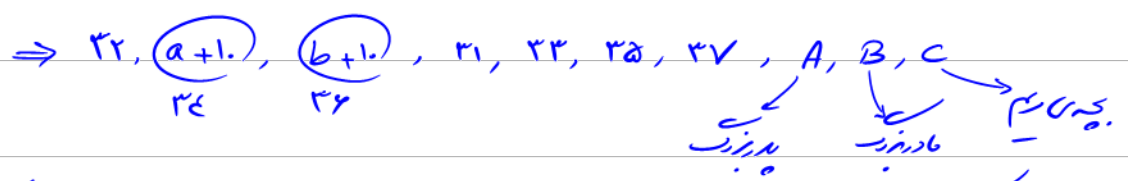
- (۱) ۳۴/۵ ✓
- (۲) ۳۴
- (۳) ۳۳/۵
- (۴) ۳۵

از فرض میانه ۲ (داده) $22, a, b, 21, 23, 25, 27$ به برابر
 انحراف معیار (مهمانی دوم) باید بیابیم

$$a = \frac{a+b+22+21+23+25+27}{7} \quad b = a+2 \Rightarrow a = \frac{7a+12}{7} \Rightarrow 7a = 7a+12$$

$\rightarrow a = 22, b = a+2 = 24$

مهمانی دوم: پس همین افراد با اضافه شدن سن پدر بزرگ و مادر بزرگ هم در این مهمانی حضور دارند.



در این داده‌ها بالا، به دنبال شاخص مرکزی مناسب هستیم. چون سن فرزند هم، پدر بزرگ و مادر بزرگ با جبهه فاصله دارد، پس از رادادگی دور افتاده در تقویم و باید میان را به عنوان شاخص مرکزی مناسب انتخاب کنیم.

$c, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, B, A \Rightarrow \text{میانه} = \frac{24+25}{2} = 24.5$

۱۲- اگر p و $q \sim$ گزاره‌های درست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره به r بستگی دارد؟

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow p \quad (۱)$$

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \quad (۲) \checkmark$$

$$(r \Rightarrow p) \Rightarrow q \quad (۳)$$

$$(r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} (۲) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \Rightarrow q &\equiv (T \Rightarrow r) \Rightarrow F \equiv (\sim T \vee r) \Rightarrow F \equiv (r \Rightarrow F) \equiv \\ &\equiv (\sim r \vee F) \equiv \sim r \end{aligned}$$

پس r بستگی دارد.

۱۳- نمودار زیر، تعداد فروش یک کالا توسط یک بنگاه اقتصادی را با توجه به قیمت آن نشان می‌دهد. اگر هزینه تولید

هر واحد از این کالا ۲۵ ریال و هزینه اولیه ۱۸ هزار ریال باشد، بنگاه این کالا را با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین

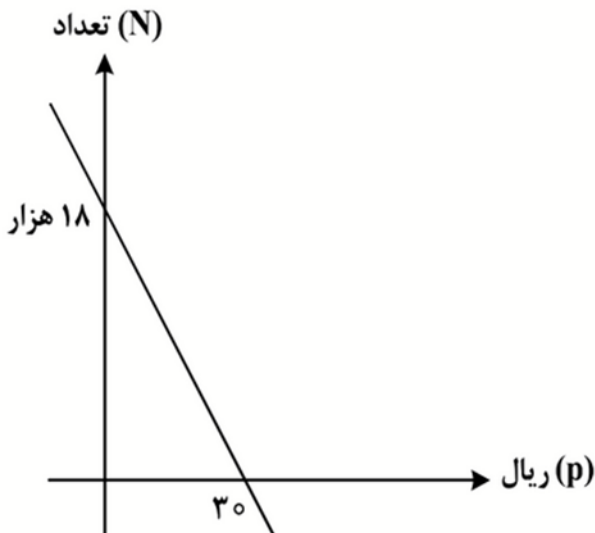
سود را به دست آورد؟

(۱) ۳۵

(۲) ۳۲٫۵

(۳) ۳۰

(۴) ۲۷٫۵ \checkmark



با توجه به نمودار رو، رابطه بین N و P را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$m = \frac{18000 - 0}{0 - 30} = -600 \Rightarrow y = -600x + 18000$$

$$\Rightarrow N = -600P + 18000 \Rightarrow P = 30 - \frac{N}{600}$$

$$\text{درآمد} = \text{تعداد کالا} \times \text{قیمت فروش} = N \left(30 - \frac{N}{600} \right) = 30N - \frac{N^2}{600}$$

$$\text{هزینه کل} = \text{هزینه ثابت} + (\text{تعداد کالا} \times \text{هزینه متغیر}) = 18000 + 25N$$

$$\text{تایید سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = \left(30N - \frac{N^2}{600} \right) - (18000 + 25N) = -\frac{1}{600}N^2 + 5N - 18000$$

$$N_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{2(-\frac{1}{600})} = \frac{5}{-\frac{1}{300}} = 1500$$

$$P = 30 - \frac{N}{600} = 30 - \frac{1500}{600} = 30 - 2,5 = 27,5$$

۱۴- در یک شرکت هیچ کدام از کارکنان با حداقل حقوق ۸۰ میلیون ریالی زیر خط فقر نیستند. میانگین درآمد خانوارهای کشور حداکثر چند میلیون ریال است؟

- ۴۰ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ✓

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} \leq 160$$

۱۵- با حروف کلمه «پارسی» چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت به طوری که در نوشتن آن فقط یک حرف، نقطه دار ظاهر شود؟

- ۷۲ (۱) ۳۶ (۲) ۲۴ (۳) ✓ ۱۲ (۴)

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

حروف نقطه دار (پ) و (س) هر یک را برای آنکه فقط یک حرف نقطه دار داشته باشیم از آن هر یک یک حرف (پ) در آن نقطه دار می توانیم

۱۶- حسن و علی قرار است هر کدام به ۳ سؤال از ۶ سؤالی که روی برگه ای نوشته شده، پاسخ دهند. به طوری که برای همه سؤالات پاسخ تهیه شود. با کدام احتمال شماره سؤالات حسن متوالی است؟

- $\frac{1}{10}$ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ✓ $\frac{1}{20}$ (۳) $\frac{1}{40}$ (۴)

$$\binom{6}{3} = 120$$

(حالت های حسن هر کدام به ۳ سؤال متوالی پاسخ دهد)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{\binom{6}{3}} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

۱۷- در دنباله بازگشتی به صورت $a_{n+1} = \frac{1}{1+2a_n}$ جمله اول $\frac{3}{4}$ است. نسبت جمله دوم به جمله سوم کدام است؟

- ۰٫۷۲ (۱) ✓ ۰٫۷ (۲) ۰٫۶۴ (۳) ۰٫۶ (۴)

$$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{1+2a_1} = \frac{1}{1+2(\frac{3}{4})} = \frac{2}{5}$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{1+2a_2} = \frac{1}{1+2(\frac{2}{5})} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{9}} = \frac{18}{25} = \frac{72}{100} = 0.72$$

۱۸- در یک سالن در ردیف اول ۸، در ردیف دوم ۱۲ و ردیف سوم ۱۶ صندلی قرار دارد. صندلی‌ها با همین نظم در ۱۲ ردیف چیده شده‌اند. اگر بخواهند این سالن را به دو سالن با نصف ظرفیت کنونی تفکیک کنند به طوری که در سالن‌های جدید چیدمان صندلی‌ها دارای همان نظم قبلی ولی با ۴ صندلی در ردیف نخست شروع شود، در سالن‌های جدید چند ردیف صندلی قرار دارد؟

۱۰ (۴)

۹ (۳) ✓

۸ (۲)

۶ (۱)

$$8, 12, 16, \dots$$

۱۲ جمله

$$a_n = 4n + 4 \quad a_{12} = 4 \times 12 + 4 = 52$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} [8 + 52] = 12 \times 30 = 360 \quad \text{کل صندلی سالن}$$

$$\Rightarrow \text{سالن جدید} \Rightarrow 4, 8, 12, \dots \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [4 \times 2 + (n-1)4] = \frac{2n}{2} = 180$$

$$\Rightarrow n(2n+4) = 360 \Rightarrow n(n+2) = 90 \Rightarrow n=9$$

۱۹- جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۷ و ۴۹ هستند. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۳۴۳ (۴) ✓

۴۹√۷ (۳)

۳۳۶ (۲)

۳۴۳√۷ (۱)

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{49}{7} = r^4 \Rightarrow r^4 = 7 \quad \frac{a_{11}}{a_7} = \frac{49}{7} = r^4 = 7 \Rightarrow a_{11} = 49 \times 7 = 343$$

۲۰- اگر $\frac{a^5 \times 15^3}{3^3 \times (\frac{a}{5})^5} = 5^{a+3}$ باشد، مقدار $f(2)$ در تابع $f(x) = \frac{1}{5} a^x - 1$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱) ✓

$$\frac{a^5 \times (2 \times 3)^3}{3^3 \times \frac{a^5}{5^5}} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 5^5}{3^3} = 2^3 \times 5^5 = 2^{a+3} \Rightarrow a+3=8 \Rightarrow a=5$$

$$f(2) = \frac{1}{5} (5)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

